ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 1 за 2015 г.

Фимин Н.Н., Чечеткин В. М.

Когерентные гидродинамические структуры и вихревая динамика

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Фимин Н.Н., Чечеткин В. М. Когерентные гидродинамические структуры и вихревая динамика // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 1. 35 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-1

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Н.Н. Фимин, В.М. Чечёткин

КОГЕРЕНТНЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И ВИХРЕВАЯ ДИНАМИКА

Москва — 2014

Фимин Н.Н., Чечёткин В.М.

Когерентные гидродинамические структуры и вихревая динамика

Рассмотрены возможные подходы к моделированию 2–мерных когерентных гидродинамических структур на основе статистической механики локальных вихрей. Даны точные определения когерентности структур и показаны механизмы их формирования. Приведены основания кинетической теории вихрей Онсагера и освещена возможность применения "классической" молекулярно–кинетической теории для объяснения возникновения вихревых мезоструктур в сдвиговых течениях.

Ключевые слова: вихри Онсагера, уравнение Джойса–Монтгомери, пуассоновы системы, вариация функционала, состояние относительного равновесия, цепочка ББГКИ

Nikolay Nikolaevich Fimin, Valery Mikhailovich Chechetkin

Coherent hydrodynamical structures and vortex dynamics

Possible approaches to modeling 2D coherent hydrodynamic structures are considered on the basis of statistical mechanics of local vortices. Exact definitions of coherence of structures are given and shown mechanisms of their formation. The bases of the kinetic theory of Onsager vortices are given and opportunity is lit applications "classical" molecular–kinetic theory for an explanation of emergence of vortex mesostructures in the shear layers

Key words: Onsager vortices, Joyce–Montgomery equation, Poisson systems, functional variation, relative equilibrium state, BBGKY hierarchy

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 14-01-00670.

Оглавление

1. Введение. Современные подходы к моделированию когерентных гидродинамических структур

Класс гидродинамических задач, связанных с различными аспектами эволюции вихревых движений жидкости и газа, является исключительно важным как с точки зрения практических приложений, так и в плане возможности изучения теории эволюции мультиобъектных статистических систем. Особо здесь следует выделить подкласс задач, содержание которых существенно связано с наличием упорядоченных некоторым образом объединений элементарных вихрей различных типов (в том числе с учетом процессов их слияния в агломерации и распада таковых), известных как (составные) *когерентные макро– и мезоструктуры.* Данный подкласс может рассматриваться с нескольких точек зрения и с использованием значительно различающихся подходов в методике описания. Прежде всего это обусловлено возможностью использования для анализа и моделирования протекающих в газожидкостных когерентных системах процессов: 1) непосредственно “классических” уравнений гидродинамики (приведенных к соответствующей, удобной для исследования в данном конкретном случае, форме); 2) комплексов последних (преобразованных определенным образом с целью сглаживания и/или усреднения) и уравнений, описывающих так называемое “хаотизованное” движение (которое, вообще говоря, может обладать свойством разделимости по некоторым параметрам). Следует отметить, что степень достоверности существующих концепций, лежащих в основе физического обоснования последнего подхода, является предметом дискуссий (см., например, [1]–[2] и литературу, упомянутую там); если отвлечься от обсуждения соответствующих аргументов *pro* и *contra* вышеупомянутой достоверности, то в соответствии со вторым подходом можно представлять движущуюся завихренную среду (в частности, при феноменологическом моделировании псевдоструктурированной сдвиговой турбулентности) в виде термогидродинамического комплекса, состоящего из двух или трех взаимопроникающих континуумов (подсистем), которые заполняют один и тот же объем конфигурационного пространства непрерывно. Данная методика, в свою очередь, может быть разделена на два класса субметодик, первый из которых можно назвать описательно "декомпозиционно–гидродинамическим" (ДГСМ), а второй — "гибридным" (ГСМ). К объединенному классу ДГСМ можно причислить основанные на бинарных и тернарных разложениях турбулентных течений подходы, основные положения которых, по–видимому, впервые сформулированы еще в классических работах О. Рейнольдса [3] и Л. Прандтля [4], а также, несколько позднее, но с использованием более продвинутого математического аппарата, в книге А. Таунсенда [5]; современный язык "декомпозиционных" исследований сформулирован в статьях [6]–[9] (также в дальнейшем данный математический аппарат существенно развит в достаточно большом количестве публикаций, среди которых стоит отметить, например, работы [10]–[15]). Среди несколько менее объемной совокупности работ, связанных с классом "гибридных субметодик", использующих как обращение к уравнениям Навье–Стокса (УНС), так и стохастико–термодинамический подход (см., например, [16]–[20] и литературу, указанную там), в свою очередь, следует особо выделить статьи [21]–[24], где рассматриваются подсистемы осредненного движения жидкости (возникающие в результате теоретико–вероятностного осреднения мгновенных гидродинамических уравнений и предназначенные для анализа эволюции средних полей термогидродинамических величин) и составного турбулентного хаоса (связанного со стохастическим мелкомасштабным пульсационным движением завихренной жидкости и внедренной в такое почти однородное пульсирующее поле когерентной составляющей — частотных кластеров, образом которых в пространстве состояний эквивалентной динамической системы являются предельные циклы); при этом получаются уравнения типа Фоккера–Планка–Колмогорова для функций распределения вероятностей стохастических характеристик вихревых образований в пространстве внутренних координат (эти уравнения описывают марковские диффузионные процессы с учетом переходов между стационарными состояниями системы в результате цикла последовательных потерь устойчивости — в определенном смысле здесь можно говорить об аналогиях с эволюцией так называемых "квазистационарных состояний" статистических вихревых систем).

Относительно подхода, основанного на использовании непосредственно "классических" гидродинамических уравнений, следует сказать, что его применение в расчетных методиках в общем виде в настоящее время относительно ограничено: это обусловлено крайней трудоемкостью анализа поведения мультивихревых систем в постламинарных режимах без вспомогательных упрощающих предположений касательно структуры самих этих уравнений — например, разделения определенным образом соответствующих пространственных и временных масштабов. По сути, эти упрощения являются либо переходом к некоторой разновидности вышеупомянутого "декомпозиционного" уровня описания гидродинамических процессов, либо фактически являются набором допущений, основанных на необходимости учета эмпирических наблюдений и концепций; при этом всяческие операции усреднения, замыкания, выделения высокочастотных пульсаций и пр. (неоднозначно вводимые, вообще говоря), могут оказывать чрезвычайно существенное воздействие на конечный результат, так что правомерно утверждение, что эти операции вводят независимую от исходных гидродинамических ламинарных уравнений систему таковых когерентно–вихревого движения [25]. В качестве иллюстративного примера здесь можно сослаться на различия в подходах между известными и широко используемыми расчетными методиками DNS и $RANS$ [26]–[29]: непосредственное включение в рассмотрение всех уровней движений среды (приводящее к значительному увеличению времени компьютерного моделирования), либо предварительное замыкание иерархии уравнений для высших моментов некоторым достаточно произвольным образом. Можно упомянуть также алгоритмы (специализированные по масштабам) типа LES (см., например, [30]–[32]), а также множество их разновидностей, в частности, "вортонные" подходы $VEM/VBM/VFM$ [33]–[34]). В настоящей работе мы ограничимся лишь упоминанием методик подобного рода, поскольку для их детального обзора потребовалась бы отдельная весьма объемная статья.

Однако все же следует специально отметить, что в рамках подхода "классических" гидродинамических уравнений, в настоящее время успешно развиваются расчетные методики с применением алгоритмов, базирующихся на решении системы уравнений Эйлера с определенными модификациями, обусловленными введением в рассмотрение определенных полуфеноменологических предположений (см., например, работы О.М. Белоцерковского [35]–[38]). Они отличается возможностью получения при гидродинамическом моделировании когерентных крупномасштабных структур весьма точных (с точки зрения совпадения с реально наблюдаемыми проявлениями природных процессов) результатов.

Тем не менее, расширение класса решаемых практических задач, неизбежно сопутствующее прогрессу в фундаментальных исследованиях и технологиях, очевидным образом приводит к возникновению существенных проблем в имеющихся подходах к гидродинамическому моделированию, таких, как невозможность проведения массовых практических расчетов из-за трудоемкости алгоритма, неразрешимость высокочастотных пульсаций, обоснование выбора способа замыкания цепочки моментных уравнений и т. п. Поэтому представляется целесообразным обратиться к анализу комплекса вопросов, связанных с вихревой статистической механикой, в том числе неравновесной (кинетикой мультивихревых систем). Данный подход существенно отличается от стандартного гидродинамического — в первую очередь, тем, что, по сути, отходит от описания среды как непрерывной и вводит в рассмотрение вихри (различных типов) как дискретные объекты.

2. Моделирование вихревых гидродинамических течений с использованием методов статистической механики

Концептуальные аспекты механики течений жидкости вихревого типа являются предметом интенсивного изучения уже весьма длительное время (как минимум, с середины XIX–го века, начиная с пионерских работ Г. Гельмгольца [39] и Г. Кирхгофа [40]), и, соответственно, результаты, полученные за эти последние полтора столетия, могут быть привлечены в качестве базиса для построения эволюционной динамики крупномасштабных (когерентных) структур. Естественным математическим формализмом здесь представляется использование методов теории вихрей с максимально простым строением — вихрей Онсагера, Рэнкина и др.; однако для случаев, когда движения среды могут существенно отличаться от глобальных состояний равновесия в системе, т. е. в процессах, связанных с переносом при условии наличия достаточно существенной степени анизотропии/неоднородности среды, необходимо принимать во внимание возможность возникновения в рассматриваемой системе сложносоставных эволюционирующих подсистем, для описания поведения которых требуются принципиальные модификации тривиального вихревого подхода. Наиболее простой и при этом действенной здесь оказывается методика, базирующаяся на теории среднего поля (Дж. Джойс и Дж. Монтгомери [41], П. Чен и М. Кросс [42] и др.); она может быть введена на основе ранее упоминавшегося вариационного формализма (в частности, при условной экстремальности энтропии системы [43]). Эффективность данного подхода при исследовании околоравновесных статистических систем вполне очевидна, что подтверждается значительным количеством публикаций различных авторов, посвященных этой тематике (см., например, [44]–[48]); можно вполне определенно утверждать, что в настоящее время при построении расчетных алгоритмов вихревых моделей течений различного генезиса представляется наиболее прогрессивной методика, учитывающая именно наличие самосогласованного взаимодействия элементарных субструктур (фактически это является следующим шагом в направлении, вектор которого задан, в частности, в работах [52]–[53], где рассматриваются системы уравнений Гамильтона–Рауса, приводимые к уравнениям типа Лиувилля для фазовых плотностей распределении вихрей). Метод среднего поля можно рассматривать в качестве формального базиса при построении последовательного кинетического подхода анализа взаимодействий в мультивихревых ($N \gg 1$) системах, обладающих набором квазистационарных метастабильных состояний, возможно, имеющих тенденцию к релаксации к асимптотическому “столкновительному” равновесию. Тем не менее, задача исследования возникновения и формирования строения упорядоченных совокупностей вихреподобных объектов в процессе их взаимодействия в гидродинамических (или, в общем случае, псевдогидродинамических) системах (в частности, описываемых уравнениями типа Эйлера–Гельмгольца [56], Брэгга–Готорна [57], Крокко–Важоньи [58], Ламба–Козлова [59] и т. д.), обладающих набором локальных состояний относительного равновесия при наличии ограничений — в частности, в виде стационарности локальных значений энергии, циркуляции и т. п. в условиях экстремальности величины пространственного распределения энстрофии (обобщенной энстрофии, энтропии и т д.) эволюционирующей среды - на современном этапе является весьма далекой от завершения. Подходы к постановке и анализу данной проблемы (даже в простейшем варианте) в настоящее время, на первый взгляд, весьма разнообразны, хотя в действительности в основном базируются на аппарате обобщенной статистической теории Онсагера [62] и его различных расширениях — формализме квазиравновесной статистической механики с ограничениями в трактовках методов RSM (Роберта–Соммериа–Миллера) [63]–[64], CVP/EHT (Эллиса–Хейвена–Туркингтона) [65], либо используют близкородственный последнему подход, основанный на варьировании функционалов Казимира–Шаваниса [66], а также метод варьирования потокового $SFVP$–функционала [67] (аналогичный в определенном смысле модели Ван дер Ваальса–Кана–Хиллиарда [68], описывающей сосуществование различных фаз вещества в обычной термодинамике), и другие подобные подходы (NCD, $MaxS$, $Min\Gamma_2$ и т. д.), имеющие не более чем малосущественные отличия от вышеперечисленных. Следует отметить, что фактически за рамками данных методик остается вопрос об описании непосредственно процесса первичного генезиса и неравновесного развития физических макрообъектов рассматриваемого в настоящей работе типа, а именно (составных) когерентных систем, включающих в себя множество субструктур, каждая из которых отвечает локальному состоянию относительного статистического равновесия данной системы (например, вихрей Онсагера либо носителей завихренности конечного размера в гидродинамическом течении, описываемом уравнением Эйлера либо УНС). Иными словами, не рассматривалась достаточно последовательным образом “микроскопическая” динамика агрегации субструктур, под которыми понимаются вихри разнообразных типов (либо их совокупности, упорядоченные определенным образом). В целях согласования с феноменологическими асимптотиками конкретных прикладных задач многими авторами делаются дополнительные предположения о строении вихревых субструктур полной системы и введении эффективных корректирующих наблюдаемые макрохарактеристики течения членов и вспомогательных параметров в расчетные уравнения (в качестве основополагающих примеров здесь можно сослаться на работы [69]–[71]). С одной стороны, это, очевидно, правомерно, но, по сути, сводит вихревую динамику к форме одной из возможных расчетных методик гидродинамики. Поддержание оптимального баланса между универсальностью подхода (или, точнее говоря, его физической обоснованностью в максимально возможном диапазоне применения) и пригодностью к получению разумных результатов (сопоставимых на количественном уровне с известными экспериментальными данными — в том числе подразумевается возможность вычислительного эксперимента с полученными на основе эмпирической информации оценками входящих в задачу параметров) при численном моделировании, использующем алгоритмы, базирующиеся на использовании данного подхода, является в рассматриваемом случае весьма сложной проблемой. Это обусловлено целым рядом факторов, среди которых необходимо выделить стохастизацию свойств систем вихрей уже при весьма малом числе последних ($N \geq 4$ на плоскости), сложность различимости неустойчивости моделируемого течения от неустойчивости системы дискретных вихрей, и, помимо этого, также общая сомнительность универсальности применения приближений типа априорной факторизации многовихревых функций распределения либо учета корреляций между вихрями с помощью неких "оптимизационных" предположений (зачастую имеющих весьма ограниченный диапазон применимости при изменении набора внешних и внутренних параметров задачи). В частности, следует упомянуть применяющиеся для практических расчетов модели распределения завихренности в ядре вихря: дробно–степенного типа [72], гауссовского типа [73], с эмпирическим циклонным профилем [74], Q–типа Лейбовича [75], регуляризацию Розенхеда [76] и т. д. Каждая из этих моделей может достаточно надежно описывать, по–видимому, лишь определенные типы задач (относящиеся к ламинарным течениям, ламинарно–турбулентному переходу в сдвиговых потоках, отрывному турбулентному режиму следового течения и т. д.), но выявление явной зависимости выбора геометрии элементарного вихря от вида задачи представляется затруднительным без вспомогательной информации о деталях реальной физики процесса в каждом конкретном случае (адаптация конкретного оптимального для расчетов типа вихревых структур зачастую производится апостериори, в режиме итерационного подбора). Отдельно необходимо выделить специфический класс работ исследователей различных научных групп, связанный с возможностью и различными способами регуляризации расчетов на основе точечных вихрей посредством приписывания последним носителей с ненулевой мерой, формальной десингуляризации функции Рауса системы и пр. Возможность формирования масштабной иерархии кластеров гидродинамического мезоуровня и макроструктур из десингулярованных псевдоточечных вихрей, по–видимому, до настоящего времени не рассматривалась. Усовершенствование формализма вихревой кинетики в направлении использования нелокальных вихревых носителей (имеется в виду разработка специальных численных алгоритмов) без адекватного учета влияния межвихревых корреляций и/или введения строго обоснованных допущений о влиянии динамических свойств вихревой системы на ее локальные топологические свойства явно малоперспективно; в качестве средства преодоления этой "преграды на пути прогресса" в развитии вышеупомянутого формализма можно предложить геометродинамический подход, использующий обращение к методам физических геометрий Лагранжа и Гамильтона. Ясно, что ситуация с вихревым неравновесным переносом во многом схожа с таковой в обычной многочастичной теории (при учете логарифмической слабости взаимодействия на дальних расстояниях и возможностью изменения внутреннего строения субструктур при близком нахождении последних друг подле друга — при своеобразном "неупругом рассеянии", если использовать аналогии со стандартными процессами молекулярной/атомной теории). В системе вихрей можно рассматривать, как и в случае обычной многочастичной системы, два режима релаксации к равновесию: "столкновительный" и "бесстолкновительный" (коллективное взаимодействие посредством самосогласованного поля). Однако существуют и принципиальные различия, основное из которых состоит в том факте, что само понятие равновесия приобретает в нашем случае несколько другой смысл, чем больцмановское распределение в классическом случае: квазистационарное состояние, характеризуемое наличием локального максимума энтропии, в вихревой системе не является единственным (и зависит в общем случае от начальных условий), причем допустим случай существования последовательных переходов между такими состояниями - в том числе с иерархическим усложнением внутренней структуры течения; следует отметить, что сходная в определенном смысле ситуация возникает также в астрофизических системах с так называемой статистикой Линден–Белла [77]–[79], эволюция которых описывается уравнениями Власова—Пуассона и Ландау [80]–[81]. "Столкновительный режим" в вихревой системе может быть описан с использованием аналога цепочки ББГКИ для редуцированных функций распределения вихрей в расширенном фазовом пространстве (натянутом на базисы кокасательных расслоений над конфигурационными пространствами внешних и внутренних координат, где последние описывают изменение формы и уровня анизотропии отдельного вихря), выводимой из соответствующего уравнения Лиувилля для полной N–вихревой функции системы. Ситуация с анализом свойств цепочек кинетических уравнений для вихревых систем к настоящему времени не вполне удовлетворительна, поскольку практически все полученные результаты касаются только точечных вихрей (см., например, [82]–[86]). Причиной этого является крайняя трудоемкость предварительных аналитических построений и оценок, а также существующая узкопрактическая ориентированность исследований в развиваемом направлении: тип вихрей, используемый в ходе численного моделирования, как уже ранее было отмечено, определяется физическим содержанием поставленной задачи, так что фактически до сих пор проще считалось ввести эмпирические поправки, чем выявлять через цепочку ББГКИ конкретную форму корреляций между вихревыми субструктурами различных форм и строения. Подобного рода прагматический подход, очевидно, приводит к тому, что общая картина здесь не выглядит законченной, в том числе с точки зрения принципиальной необходимости строгой обоснованности алгоритмов моделирования; вихри Онсагера по сути своей являются математической абстракцией высокого уровня, и поэтому использование соответствующего расчетного формализма имеет свои ограничения, причем, в ряде случаев, чрезвычайно существенные — вплоть до фактического рассогласования с физической картиной гидродинамических процессов. Для моделирования тонких характеристик течений, в частности, связанных с пульсационным характером течения, с развитием неустойчивости, исследованием отрывных зон и т. д., расчетные методы с использованием точечных вихрей заведомо не являются оптимальными, ибо для описания данных эффектов приходится значительно увеличивать число вихрей, что, среди прочего, влечет за собой стохастизацию их траекторий из–за неограниченного роста скоростей точечных носителей при их взаимном сближении (откуда вытекает необходимость использования аппарата соответствующих флуктуационно–зависимых уравнений, например, типа Больцмана/Энскога–Ланжевена [87]–[88], что фактически возвращает нас, причем на более высоком уровне сложности подхода, к ранее упоминавшейся расчетной "гибридной" субметодике ГСМ).

3. Свойства когерентных структур гидродинамического типа

С точки зрения физического содержания процессов когерентность связана в первую очередь с сохраняющейся упорядоченностью эволюционирующей среды в сочетании с соответствующей шкалой изменения пространственных характеристик системы. Собственно, данное явление, рассматриваемое как отдельный вид организованного движения жидкости, впервые описано в работах [89]–[91]. В современной гидродинамике когерентные структуры определяют, следуя работе [92], как *связанные, крупномасштабные турбулентные, жидкие массы с завихренностью, скоррелированной по фазе во всей области пространства, которые они занимают.* Сходные определения приведены также в работах [93] и [94], авторы которых полагают, что наиболее характерными свойствами когерентных структур являются изолированность их от внешнего течения в том смысле, что внутри данных структур завихренность и макрохарактеристики распределены квазидетерминистическим образом, т. е. "в среднем упорядоченно" и, кроме того, эти структуры обладают достаточно продолжительным временем существования без принципиального изменения своего вида.

Наличие существенных элементов описательности применительно к определению рассматриваемого физического феномена привносит в таковое весьма значительный уровень неопределённости. Кроме того, следует учитывать возможность того, что в принимаемых дефинитивных рамках когерентности движения среды описывается не как единообразное множество структур с гомотопически изменяющимися наборами параметров, а целый спектр принципиально разнородных объектов, формально объединяемых по совокупности признаков, имеющих отношение к проявлениям квазидетерминизма в происходящих процессах (явления возникновения упорядочения строения гидродинамического течения на выделенных масштабах).

Так что использование математического формализма гидродинамики гамильтоновых систем в дескриптивных целях в данном случае не просто целесообразно, но, по–видимому, совершенно необходимо — прежде всего для полноты понимания того, что из себя представляет когерентность течения в естественном для гидродинамики понятийном контексте, исключающем произвол в интерпретациях (свойственный описательному определению) и производящем адекватное разделение схожих по внешним признакам, но существенно различающихся по внутренней сути явлений, которые можно причислить к классу когерентных. Иными словами, чтобы при изучении интересующего нас круга вопросов перейти от умопостроений на общефизическом уровне к аппарату математической физики, необходимо предварительно обратиться к возможности формализации основного предмета изучения.

Поэтому будем базироваться на строгом определении общей когерентной структуры на пуассоновых многообразиях и введем в соответствии с ним определение когерентной структуры гидродинамического типа. Для этого рассмотрим сначала абстрактное эволюционное уравнение вида $\partial\mathfrak{f}/\partial t = \widehat{SM}(\mathfrak{f})\delta H(\mathfrak{f})$, где $H(\mathfrak{f})$ — автономный функционал (Гамильтона) над пространством состояний $\mathcal{F} \ni \mathfrak{f}$, $\delta H(\mathfrak{f})$ — вариационная производная H, являющаяся элементом кокасательного к $\mathcal{F}$ пространства: $\delta H(\mathfrak{f}) \in T^*_{\mathfrak{f}}\mathcal{F}$, $\widehat{SM}(\mathfrak{f}) : T^*_{\mathfrak{f}}\mathcal{F} \to T_{\mathfrak{f}}\mathcal{F}$ — *структурное отображение* (structure mapping), оператор, определяющий кососимметричную и удовлетворяющую условию Якоби скобку Пуассона

$$[K_1, K_2](\mathfrak{f}) \equiv \langle \delta K_1(\mathfrak{f}), \widehat{SM}(\mathfrak{f}) \delta K_2(\mathfrak{f}) \rangle,$$

где $\langle .,. \rangle$ — внутреннее произведение в пространстве состояний. Если оператор $\widehat{SM}(\mathfrak{f})$ необратим, то его ядро непусто и $\widehat{SM}(\mathfrak{f})\delta C(\mathfrak{f}) \equiv 0$, $C(\mathfrak{f})$ — т. н. функции Казимира, удовлетворяющие условию $[H, C] = 0$. Система в последнем случае и будет *пуассоновой* (обобщение гамильтоновой системы).

Уравнение Эйлера–Гельмгольца в 2–мерном случае: $\partial\omega/\partial t = \widehat{SM}(\omega)\delta H(\omega)$ или, в явном виде,

$$\partial\omega/\partial t + \widehat{\Lambda}_2 \nabla_2 \psi \cdot \nabla_2 \omega = 0$$

(где $\widehat{\Lambda}_2$ — оператор симплектической структуры, 2×2–матрица) представляет собой пример пуассоновой системы с функционалом $H = \frac{1}{2}\int \psi\omega d\mathbf{x}$ — энергией движения среды в ограниченной области с условиями Дирихле на границе, и скобкой Пуассона:

$$[K_1, K_2](\omega) = \langle \delta K_1(\omega), \widehat{SM}\big(\delta K_2(\omega)\big) \rangle, \quad \widehat{SM} \equiv -\nabla_2\omega \cdot \widehat{\Lambda}_2 \nabla_2,$$

$$\widehat{\Lambda}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \widehat{\Lambda}_2 \nabla_2 \psi.$$

Вариационная производная $\delta H(\omega)$ может быть вычислена, исходя из ранее введенной формы энергии Ламба $H = H(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\int \mathbf{v}^2 d\mathbf{x}$: по определению, первая вариация $\delta H[\omega; \delta\omega] = \langle \delta H/\delta\omega, \delta\omega \rangle \equiv \int \big(\delta H/\delta\omega\big) \cdot \delta\omega \, d\mathbf{x}$, но, с другой стороны,

$$\delta H[\omega;\delta\omega] = \int \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int (\nabla_2 \times \psi) \cdot \delta\mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int \psi \cdot (\nabla_2 \times \delta\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int \psi \cdot \delta\omega \, d\mathbf{x}.$$

Таким образом, $\delta H(\omega) = \psi$. Поэтому в стандартной записи 2–ое слагаемое в левой части вышеприведенного УЭГ в явном виде принимает вид: $(\partial\psi/\partial x_1)(\partial\omega/\partial x_2) - (\partial\psi/\partial x_2)(\partial\omega/\partial x_1)$.

Если рассмотреть задачу на нахождение экстремума энергии при наличии дополнительных условий вида $\mathrm{extr}_\omega\{H(\omega) \mid I_1(\omega) = \mathfrak{I}_1; \ldots; I_s(\omega) = \mathfrak{I}_s\}$, где $I_{k=\overline{1,s}}$ — дополнительные интегралы движения, состоящие в инволюции

($[I_m, I_n] = 0$, $m, n = \overline{1, s}$), то её решения будут т. н. *состояниями относительного равновесия* (СОР) $\Omega(\mathfrak{I}_1, ..., \mathfrak{I}_s)$ (определяющие многообразия, инвариантные для течения). Для исследования характеристик вихревых потоков можно использовать интегралы энергии, циркуляции, энстрофии, углового момента, линейного момента:

$$H(\omega) = \frac{1}{2}\int \psi\omega d\mathbf{x}, \quad \Gamma(\omega) = \int \omega d\mathbf{x}, \quad W(\omega) = \frac{1}{2}\int \omega^2 d\mathbf{x},$$

$$P(\omega) = \frac{1}{2}\int |\mathbf{x}|^2\omega d\mathbf{x}, \quad L(\omega) = \big(L_1(\omega), L_2(\omega)\big) = \bigg(\int x_1\omega d\mathbf{x}, \int x_2\omega d\mathbf{x}\bigg).$$

В частности, для получения вихря Рэнкина необходимо решить задачу на минимизацию с ограничениями $\min_\omega\{H(\omega) \mid P(\omega) = \mathfrak{I}_1^{(0)}, \Gamma(\omega) = \mathfrak{I}_2^{(0)}\}$. В результате имеем $\Omega_{Rank.}(\mathfrak{i}_1^{(0)}) = \big(\mathfrak{I}_2^{(0)}\big)^2/(4\pi\mathfrak{I}_1^{(0)}) \cdot \chi(R = \sqrt{4\pi\mathfrak{I}_1^{(0)}/\mathfrak{I}_2^{(0)}})$, где $\chi(R)$ — функция–индикатор круговой области $\{\mathbf{x} \bigm| |\mathbf{x}| \le R\}$ (при этом *функция значения* энергии $H(\mathfrak{I}_1^{(0)}, \mathfrak{I}_2^{(0)}) = (\mathfrak{I}_2^{(0)})^2/(16\pi) - (\mathfrak{I}_2^{(0)})^2/(8\pi)\ln(4\mathfrak{I}_1^{(0)}/\mathfrak{I}_2^{(0)})$ и решение вращается как целое с угловой скоростью $\omega_{Rank.} = -\mathfrak{I}_2^{(0)}/(8\pi\mathfrak{I}_1^{(0)})$).

Рассмотрение состояний относительного равновесия для вихревых уравнений Навье–Стокса фактически в подавляющем большинстве интересных случаев может быть сведено к анализу устойчивости невязких семейств СОР. А именно, используя подход, изложенный в работе [95], для УНС в виде $\dot{\omega} = (-\nabla_2\omega \cdot \widehat{\Lambda}_2\nabla_2)\delta H(\omega) + \nu\Delta_2\omega$ (в плоской области D, причём задано "естественное" краевое условие $\omega = 0$ на границе ∂D), предположим первоначально $\nu = 0$, и исследуем варационную задачу с ограничениями, например, на энстрофию: $\mathrm{extr}_\omega\{H(\omega) \mid W(\omega) = \mathfrak{I}^{(0)}\}$, имеющую бесконечное семейство СОР $\mathcal{R}_k$ ($k = 0, 1, ...$), причем состояние $\omega^\dagger \in \mathcal{R}_k$ тогда и только тогда, когда $-\Delta_2\omega^\dagger = \mu_k\omega^\dagger$, $\{\mu_k\}_{k=0,1,...}$ — соответствующие значения дискретного спектра оператора Лапласа, умноженного на -1, в области D (уравнение Эйлера–Лагранжа совпадает с данной задачей на собственные значения); при этом $\mu_0 > 0$, $\mu_m < \mu_n$ при $m < n$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Все семейства $\mathcal{R}_k$ инвариантны относительно вихревых УНС, однако амплитуда СОР нестационарна: для любого $\omega^\dagger \in \mathcal{R}_{k=0,1,...}$ их эволюция описывается посредством равенства $\omega(t) = \omega^\dagger\exp(-\nu\mu_k t)$; при этом $dH/dt \le -2\nu\mu_0 H$ и $dW/dt \le -2\nu\mu_0 W$. Семейство $\mathcal{R}_0$ является аттрактором для УНС, в то же время все остальные семейства для $k \geq 1$ неустойчивы.

Дадим основное определение когерентности в системе, базирующееся на идеологии вариации функционалов в пуассоновых системах [96]–[97]: *когерентной структурой* (КС) для (обобщенной) гидродинамической системы будем называть обобщенное состояние относительного равновесия (*элементарная* КС) либо упорядоченную определенным образом совокупность обобщенных СОР (*составная* КС) задачи на вариацию выделенного инварианта Казимира (энергии, псевдоэнтропии и т. д.) при заданных значениях некоторого множества других инвариантов, являющееся стационарным решением уравнения Эйлера. Под *обобщенными гидродинамическими системами* подразумеваются такие динамические системы, эволюция которых описывается с помощью уравнений, совпадающих с уравнениями гидродинамики (Эйлера, Навье–Стокса, Ламба и др.) при учёте формальных замен зависимых переменных и учёте дополнительных слагаемых, не изменяющих принципиально структуру уравнений (потенциальных объёмных сил, сил Кориолиса, членов, учитывающих эффективную диссипацию, турбулентную вязкость и т. д.). Такие системы изучаются уже уже достаточно длительное время, в частности, имеющие отношение: к плазмодинамике — на основе "дрейфового" приближения (т. н. "drift–Poisson equations") [98]–[100], к теории квазигеострофических моделей атмосферы — на основе анализа поведений бароклинических течений [101]–[102], и т. п.

4. Динамика и кинетика вихрей Онсагера

Рассмотрим распределение точечных вихрей Онсагера на плоскости, расположенных в точках $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k)$ с интенсивностями (циркуляциями) $\{\gamma_k\}$ $(k = \overline{1, N}, N \geq 2)$ ограниченной односвязной области D (площадь $\operatorname{meas} D \equiv \mathfrak{S}$). Определим стандартным образом объём фазового пространства N–вихревой системы: $\int_{D^N} \prod_j^N d\mathbf{r}_j = \mathfrak{S}^N$. Действуя в соответствии с идеологией микроканонического описания системы N вихрей, введём плотность состояний $\phi(E) = \int_{D^N} \delta\big(E - H_N(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N)\big) \prod_j^N d\mathbf{r}_j$, определяющую объём фазового пространства на единицу энергии E (здесь $H_N(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N) = -(4\pi)^{-1}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq k}^{N}\gamma_k\gamma_j \ln\ |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|$ — функция Гамильтона–Рауса N–вихревой системы, мы пренебрегаем влиянием граничных эффектов). Определим N–вихревую функцию распределения системы: $\Psi_N(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N) = \big(\phi(E)\big)^{-1}\delta\big(E - H_N(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N)\big)$, при наличии условия нормировки Ψ_N в форме $\int_{D^N}\Psi_N(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N)\prod_j^N d\mathbf{r}_j = 1$. Введем объём фазового пространства, который соответствует энергиям системы H_N, меньшим, чем некоторая заданная энергия E: $\mathcal{V}_{ph.}(E) = \int_{E_{min}}^{E}\phi(E')\, dE'$ (E_{min} — минимальная энергия вихревой системы). Этот объём монотонно возрастает от некоторого минимального значения $\mathcal{V}_{ph.}^{(0)} > 0$ до $\mathfrak{S}^N$ при росте энергии E на интервале $[E_{min}, E_\infty)$ ($E_\infty \to +\infty$ при сближении пары вихрей $|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j| \to 0$). При этом $\phi(E) = d\mathcal{V}_{ph.}(E)/dE$ будет иметь максимум (согласно известной теореме Ролля) при некотором $E = E_m$ (при $E \to \infty$ имеем $\phi(E) \to 0$ для обеспечения сходимости интеграла в правой части вышеприведенного определения $\mathcal{V}_{ph.}(E) \leq \mathfrak{S}^N$).

Равновесную эволюцию статистической системы описывает уравнение "среднего поля" (Джойса–Монтгомери или УДМ), связывающее локальные завихренность и функцию тока: $\Delta_2\psi = -\langle\omega\rangle$.

Возникновение крупных структур в реальном вихревом течении, которые можно сопоставить с таковыми в спектральном энергетическом интервале, может быть объяснено и описано с помощью обращения к околоравновесной статистической механике вихрей.

Рассмотрим ограниченную систему $\mathcal{D}$ площади G, занятую вихрями (циркуляции γ_i будем считать имеющими одиновые знаки); так как координаты x, y являются канонически сопряженными, то мера соответствующего фазового пространства N–вихревой системы конечна и представима как $G^N = \int\prod_j^N dx_j dy_j$. Плотность энергетических состояний при этом равна $\mu(E) = \int\delta(E - H(x_1, y_1, ..., x_N, y_N))\prod_{j=1}^N dx_j dy_j$; связь со равновесной N–вихревой функцией: $F_N(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N) = (\mu(E))^{-1}\delta(E - H(x_1, y_1, ..., x_N, y_N))$ ($\int F_N\prod_{j=1}^N dx_j dy_j = 1$). Объем фазового пространства, отвечающий энергиям H, не превышающим заданной величины E: $\varphi(E) = \int_{E_m}^{E}\mu(E)dE$.

Функция $\varphi(E)$ монотонно растет от нуля до величины $\varphi_{max} = G^N$ при соответствующем увеличении аргумента от $E = E_m$ до $E = +\infty$. Таким образом, $\mu(E) = d\varphi(E)/dE$ имеет локальный максимум при $E = E_0$. Для микроканонического ансамбля энтропия S и температура T определяются следующим образом: $S = \ln \mu(E)$, $T = dE/dS$. Очевидно, что для $E > E_0$ функция $S(E)$ является убывающей и, следовательно, на этом интервале температура системы отрицательна ($T < 0$). Таким образом, ясна качественная картина поведения вихрей в зависимости от E в данной области: происходит создание вихревых кластеров с концентрацией, находящейся в существенной зависимости от поля температуры, причем плотность вихрей в них растет с увеличением энергии состояний, начиная с E_0. В случае $E < E_0$ температура $T > 0$, и вихри будут накапливаться возле стенок области.

Динамика точечных вихрей на плоскости может быть описана с помощью уравнений Эйлера $d(\partial L/\partial\dot{\xi}_k)/dt = \partial L/\partial\xi_k$ ($\xi_k = \{\eta_k, \overline{\eta}_k\}$, $\eta_k = x_k + iy_k$), получаемых варьированием действия $J_L \equiv \int_0^t L(\xi, \dot{\xi})dt$ на функции Лагранжа–Чэпмена:

$$L(\eta_j, \overline{\eta}_j, \dot{\eta}_j, \dot{\overline{\eta}}_j) = \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k(\overline{\eta}_k\dot{\eta}_k - \eta_k\dot{\overline{\eta}}_k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}{\sum_{j=1}^{N}}'\gamma_k\gamma_j \ln\big((\eta_k - \eta_j)(\overline{\eta}_k - \overline{\eta}_j)\big)$$

Указанные уравнения движения $\dot{\eta}_k = (2\pi i)^{-1}{\sum_j}'\gamma_j/(\overline{\eta}_k - \overline{\eta}_j)$ $(k, j = \overline{1, N})$ в вихревой системе можно с помощью преобразования Лежандра представить в гамильтоновой форме (для простоты для равных циркуляций γ): $\gamma\dot{x}_j = \partial H/\partial y_j$, $\gamma\dot{y}_j = -\partial H/\partial x_j$, где $H(\mathbf{r}_j|\gamma) = \gamma^2\sum_{j<k} U_{jk}$ — функция Гамильтона–Кирхгофа системы, $U_{jk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k)$ — потенциал взаимодействия вихрей; $U_{jk} = U_{jk}^{(0)} \equiv -(2\pi)^{-1}\ln|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|$.

Скобка Пуассона, отвечающая данной (недиссипативной) гамильтоновой системе, имеет вид

$$\{f_1(\mathbf{r}), f_2(\mathbf{r})\} = \sum_{i=1}^{N}\gamma^{-1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{\partial f_2}{\partial y_i} - \frac{\partial f_1}{\partial y_i}\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right).$$

Определяя стандартным образом (аналогично N–частичной) N–вихревую функцию распределения $F_N(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N; t)$ как плотность вероятности того, что в момент времени t i–й вихрь расположен в т. $\mathbf{r}_i$ $(i = \overline{1, N})$, рассмотрим соответствующее уравнение Лиувилля для F_N:

$$\frac{\partial F_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \frac{\partial F_N}{\partial \mathbf{r}_i} = 0.$$

Данное уравнение можно представить в виде $\partial F_N/\partial t = \widehat{\Lambda} F_N$, где $\widehat{\Lambda}$ — оператор Лиувилля системы N вихрей на плоскости:

$$\widehat{\Lambda} = \{H, .\} = -\sum_{i<j}^{N} \mathbf{v}_{(i)}^{(j)} \big(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j}\big) = \sum_{i<j}^{N} \widehat{\Lambda}_{ij},$$

где $\widehat{\Lambda}_{ij} \equiv -\mathbf{v}_{(i)}^{(j)} \partial/\partial \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_{(j)}^{(i)} \partial/\partial \mathbf{r}_j$. Редуцированные k–вихревые ($k < N$) функции распределения определяются посредством соотношения

$$F_k(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_k; t) = \int F_N(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_{k+1}, ..., \mathbf{r}_N; t)\, d\mathbf{r}_{k+1} d\mathbf{r}_{k+2} ... d\mathbf{r}_N.$$

Последовательное интегрирование уравнения Лиувилля по переменным $\mathbf{r}_{k+1}, ..., \mathbf{r}_N$ ($1 \le k < N$) приводит к цепочке зацепляющихся уравнений типа ББГКИ вида

$$\frac{\partial F_k(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_k; t)}{\partial t} = \sum_{i<j} \widehat{\Lambda}_{ij} F_k(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_k; t) +$$
$$+ (N-k) \sum_{i=1}^{k} \int \widehat{\Lambda}_{i,k+1} F_{k+1}(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_{k+1}; t)\, d\mathbf{r}_{k+1}.$$

Вводя k–вихревые корреляционные функции для данной цепочки уравнений и используя разложения Урселла–Майера

$$F_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = F_1(\mathbf{r}_1) F_1(\mathbf{r}_2) + G_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2),$$

$$F_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = F_1(\mathbf{r}_1) F_1(\mathbf{r}_2) F_1(\mathbf{r}_3) + F_1(\mathbf{r}_1) G_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) +$$
$$+ F_1(\mathbf{r}_2) G_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) + F_1(\mathbf{r}_3) G_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + G_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3),\ ...,$$

можно получить в пределе $N \to \infty$ при условии пренебрежения корреляционной функцией $(k+1)$–го порядка замкнутую совокупность k кинетических уравнений; при этом $F_1 \sim 1$, $|\mathbf{v}_{(i)}^{(j)}| \sim \gamma \sim 1/N$, $G_2 \sim 1/N$ и вообще $G_k \sim 1/N^{k-1}$. В частности, для $k = 1$ и $k = 2$ получаем:

$$\frac{\partial F_1(\mathbf{r}_1; t)}{\partial t} = -(N-1) \int \widehat{\Lambda}_{12} F_1(\mathbf{r}_1; t) F_1(\mathbf{r}_2; t)\, d\mathbf{r}_2 = -\langle \mathbf{v} \rangle_{F_1} \frac{\partial F_1(\mathbf{r}_1; t)}{\partial \mathbf{r}_1},$$

$$
\langle \mathbf{v} \rangle_{F_1} = (N-1) \int \mathbf{v}_{(1)}^{(2)} F_1(\mathbf{r}_2; t)\, d\mathbf{r}_2,
$$

$$
\frac{\partial F_1(\mathbf{r}_1; t)}{\partial t} + \langle \mathbf{v} \rangle_{F_1} \frac{\partial F_1(\mathbf{r}_1; t)}{\partial \mathbf{r}_1} = (N-1) \int \widehat{\Lambda}_{12} G_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t)\, d\mathbf{r}_2.
$$

$$
\frac{\partial G_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t)}{\partial t} = \widehat{\Lambda}_{12} \big(F_1(\mathbf{r}_1; t) F_1(\mathbf{r}_2; t) + G_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t) \big) +
$$

$$
+ \int \big[\widehat{\Lambda}_{13} \big(F_1(\mathbf{r}_1; t) G_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3; t) \big) + \widehat{\Lambda}_{23} \big(F_1(\mathbf{r}_2; t) G_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3; t) \big) +
$$

$$
+ \big(\widehat{\Lambda}_{13} + \widehat{\Lambda}_{23} \big) \big(F_1(\mathbf{r}_3; t) G_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t) \big) \big]\, d\mathbf{r}_3 \equiv \widehat{\mathcal{N}}(F_1, G_2).
$$

Предпоследнее уравнение формально совпадает с гидродинамическим уравнением Эйлера и может быть сопоставлено с уравнением Власова (с самосогласованным полем), применяющимся в молекулярно–кинетической теории. Систему 2 последних уравнени можно привести к одному уравнению с псевдостолкновительными членами различного типа. В качестве допущений, устанавливающих явный вид $\widehat{\mathcal{N}}(F_1, G_2)$ возможен учет, в частности, "коллективных эффектов", либо членов только порядка $1/N$, а также переход (отсутствие такового) к марковскому пределу $t \to \infty$ в соответствующем операторе Вольтерра сдвига по траекториям вихрей.

5. Возникновение вихрей в сдвиговом течении как следствие процессов, описываемых в терминах молекулярной кинетики

Рассмотрим вопросы, связанные с возникновением вихревых структур в жидкости в сдвиговом течении (как наиболее физически очевидным процессом формирования когерентности в гидродинамическом потоке) с точки зрения молекулярно-кинетической теории.

Стационарное уравнение Больцмана в n–мерном ($n = \overline{1,3}$) случае после обезрамеривания (при использовании для этого характерных значений параметров течения) имеет вид

$$
\widehat{\mathcal{S}}[f; \xi] \equiv \widehat{D}_x^{[n]}[f] - \xi \left(\widehat{L}[f] + \widehat{N}[f, f] \right) = 0,
$$

$$
\widehat{L}[f] = 2\omega^{-1/2} \widehat{B}[\omega, \omega^{1/2} f], \quad \widehat{N}[f, f] = \omega^{-1/2} \widehat{B},
$$

где $b(\theta, V) = \frac{1}{2}V{d_0}^2 \sin(2\theta)$ — индикатриса рассеяния для твёрдых сфер радиуса $d_0/2$, $\xi^{-1} = \mathsf{Kn} = \mathsf{Ma}/\mathsf{Re}$ — число Кнудсена (Ma и Re — соответственно числа Маха и Рейнольдса).

Столкновительный член $\widehat{B}[f,\, f] \equiv \widehat{L}[f] + \widehat{N}[f, f] : \mathsf{X}^{(1)} \times \mathsf{X}^{(1)} \mapsto \mathsf{X}^{(2)}$ представляет собой билинейный интегральный оператор, действующий между декартовой парой банаховых пространств (БП) векторнозначных функций $\mathsf{X}^{(1)} \times \mathsf{X}^{(1)}$ и БП $\mathsf{X}^{(2)}$, $\mathsf{X}^{(m)}\big|_{m=1,2} \subseteq \mathsf{C}^{|m-2|}\big(\mathbb{R}^3_x; \mathsf{H}\big)$, $\mathsf{H} = \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3_v|\,\omega)$ — гильбертово пространство (ГП) со скалярным произведением $\langle \varpi_1,\, \varpi_2\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \varpi_1(\mathbf{v})\varpi_2(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}$; $\widehat{L}[.] = \widehat{K}[.] - \nu(\mathbf{v}) \cdot (.)$ — линейная часть столкновительного оператора, $\widehat{K}[.]$ — самосопряженный компактный интегральный оператор (в ГП $\mathsf{H}(\mathbb{R}^3_v)$), $\nu(\mathbf{v})$ — частота столкновений молекул–сфер ($0 < \nu(0) \le \nu(\mathbf{v}) \le \infty$); $2\widehat{N}[.,.] = \partial^2\big(\widehat{B}[0;0]/\partial f^2\big)[.,.]$. Оператор $\widehat{L}$ неположителен ($\langle f,\, \widehat{L}[f]\rangle \le 0$) и является фредгольмовским нулевого индекса ($\operatorname{ind}\widehat{L} \equiv \dim \operatorname{Ker}\, \widehat{L} - \dim \operatorname{coKer}\, \widehat{L} = 0$) с $(n+2)$–мерным ядром $\operatorname{Ker}\widehat{L}$, состоящим из функций $\widetilde{\chi}_m$:

$$\widetilde{\chi}_m\Big|_{m=0}^{4} = \sqrt{\omega}\chi_m(\mathbf{v})\Big|_{m=0}^{4}, \quad \chi_{m=0} = 1, \quad \chi_m = v_m\ (m = \overline{1,n}), \quad \chi_{m=n+1} = \mathbf{v}^2.$$

Производная Фреше оператора, ассоциированного с данным уравнением, имеет вид: $\partial\widehat{\mathcal{S}}[0;\xi]/\partial f \equiv \widehat{J}(0;\xi) = v_1\partial/\partial x_1 - \xi\widehat{L}$. Применим к $\widehat{J}[f;\xi] = 0$ преобразование преобразование Лапласа по координате x_1:

$$\widehat{\Lambda}[f] = \int_0^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-kx_1}\, dx_1 = \widetilde{f}(k), \quad \widehat{\Lambda}^{-1}[\widetilde{f}] = \frac{1}{2\pi i}\int_{k^0-i\infty}^{k^0+i\infty} \widetilde{f}(k)\, \mathrm{e}^{kx_1}\, dk,$$

где $k^0 (\in \mathbb{R}^1)$ — параметр, соответствующий допустимой абсциссе линии–контура в (полу)плоскости сходимости преобразования (в $\mathbb{C}_k$), получаем: $\widehat{J}_k[\widetilde{f};\xi] \equiv kv_1\widetilde{f} - f(x_1 = 0) - \xi\big(\widehat{K}[\widetilde{f}] - \nu\widetilde{f}\big) = 0$. Положим с целью избавиться от неоднородности уравнения $f(x_1 = 0) = 0$ (как видно будет из дальнейшего, это требование несущественно для структуры проводимого анализа).

В соответствии со свойством локальной устойчивости индекса и дефекта Φ–изоморфизма ($\widehat{L}$) при относительно ограниченном возмущении в окрестности $\Omega_\gamma(0)$ т. $k(\xi) = 0$, радиус которой определяется величиной минимального приведённого модуля $\gamma(\xi) = \xi/\|\underline{\widehat{L}}^{-1}\|$ ($\underline{\widehat{L}}$ — сужение оператора $\widehat{L}$ на $\mathsf{X}^{(1)} \ominus \operatorname{Ker}\widehat{L}$, $\underline{\widehat{L}}^{-1}\widehat{L} = \widehat{L}\underline{\widehat{L}}^{-1} = \widehat{I} - \widehat{P}^\chi$, $\underline{\widehat{L}}^{-1}\widehat{P}^\chi = 0$, где $\widehat{P}^\chi$ — проектор (в H)

на множество сумматорных инвариантов), набор $k_{(j)}(\xi)v_1$–собственных значений ($k_{(j)} \in \mathbb{C}$) оператора $\widehat{L}$ 3–мерен ($j = \overline{0,2}$). Собственные (обобщённые) функции операторного пучка $\widehat{J}$ имеют вид $\widetilde{\phi}_{(j)}(v_1;\xi)\exp\big(k_{(j)}(\xi)x_1\big)$, где $\mathrm{span}\,\{\widetilde{\phi}_{(j)}(v_1;\xi)\}_{j=0}^2 = \mathrm{Ker}\,\widehat{J}_k$. Введём эндоморфизмы $\widehat{P}(\xi) : \mathsf{X}^{(1)} \mapsto \mathsf{X}^{(1)}$, $\widehat{Q}(\xi) : \mathsf{X}^{(2)} \mapsto \mathsf{X}^{(2)}$, действие которых в соответствующих БП определяется посредством равенств $\widehat{P}(\xi)[{}^{(1)}f] = \sum_{j=0}^2 \widetilde{\phi}_{(j)}\langle v_1\widetilde{\psi}_{(j)},\, {}^{(1)}f\rangle/\widetilde{\Phi}$, $\widehat{Q}(\xi)[{}^{(2)}f] = \sum_{j=0}^2 v_1\widetilde{\phi}_{(j)}\langle\widetilde{\psi}_{(j)},\, {}^{(2)}f\rangle/\widetilde{\Phi}$, где $\widetilde{\psi}_{(j)}(\mathbf{v}) = \underline{\widehat{L}}^{-1}[v_1\widetilde{\phi}_{(j)}]$ и $\widetilde{\Phi} \equiv \sum_{j=0}^2\langle v_1\widetilde{\psi}_{(j)},\, \widetilde{\phi}_{(j)}\rangle$ (${}^{(m)}f \in \mathsf{X}^{(m)}$, $m = 1,2$). Справедлива возможность следующей формальной декомпозиции функции $f \in \mathsf{X}^{(1)}$: $f = \widehat{P}(\xi)[f] + \big(\widehat{I} - \widehat{P}(\xi)\big)[f]$, где $\widehat{P}(\xi)[f] = \sum_{j=0}^2 h_{(j)}(x_1;\xi)\widetilde{\phi}_{(j)}(v_1;\xi)$, причём $h_{(j)}(x_1;\xi) = \big(\widetilde{\Phi}\big)^{-1}\langle v_1\widetilde{\psi}_{(j)},\, f\rangle$, $\big(\widehat{I} - \widehat{P}(\xi)\big)[f] \equiv g(x_1,\mathbf{v};\xi) = \sum_{j=0}^2 g_{(j)}(x_1,\mathbf{v};\xi)$; здесь $h_{(j)}(x_1) \in \mathsf{C}^1(\mathbb{R}^1)$, $g_{(j)}(x_1,v_1) \in \mathsf{C}\big(\mathbb{R}^1;(\widehat{I} - \widehat{P}(\xi))\mathsf{X}^{(1)}\big)$. Коммутационные свойства операторов $\widehat{P}$, $\widehat{Q}$ нетривиальны: $\widehat{Q}(\xi)\widehat{L} = \widehat{L}\widehat{P}(\xi) = kv_1\widehat{P}(\xi)$, $\widehat{Q}(\xi)\widehat{J}_k = \widehat{J}_k\widehat{P}(\xi)$, откуда имеем

$$\widehat{Q}(\xi)\widehat{D}_x^{[1]} = \widehat{D}_x^{[1]}\widehat{P}(\xi), \quad \widehat{Q}(\xi)\widehat{J}(.;\xi) = \widehat{J}(.;\xi)\widehat{P}(\xi).$$

Применение к обеим частям уравнения $\widehat{J}[f;\xi] = \xi\widehat{N}[f;\, f]$ операторов $\widehat{Q}(\xi)$ и $\widehat{I} - \widehat{Q}(\xi)$ позволяет получить систему уравнений разветвления метода Ляпунова–Шмидта ($j = \overline{0,2}$):

$$\widehat{\mathcal{LS}}_1[h_{(j)};\, g] \equiv \frac{dh_{(j)}}{dx_1} + k_{(j)}(\xi)h_{(j)} - \frac{2\xi}{\widetilde{\Phi}}\Bigg(\sum_{s=0}^2 h_{(s)}^2\langle\widetilde{\psi}_{(j)},\, \widehat{N}[\widetilde{\phi}_{(s)},\widetilde{\phi}_{(s))}]\rangle +$$

$$+\sum_{s=0}^2\sum_{i=s+1}^2 h_{(s)}h_{(i)}\langle\widetilde{\psi}_{(j)},\, \widehat{N}[\widetilde{\phi}_{(s)},\widetilde{\phi}_{(i)}]\rangle +$$

$$+\sum_{s=0}^2 h_{(s)}\langle\widetilde{\psi}_{(j)},\, \widehat{N}[g,\widetilde{\phi}_{(s)})]\rangle + \langle\widetilde{\psi}_{(j)},\, \widehat{N}[g,g]\rangle\Bigg) = 0,$$

$$\widehat{\mathcal{LS}}_2[h_{(j)};\, g] \equiv \widehat{D}_x^{[1]}g - \xi\widehat{L}[g] - \xi\big(\widehat{I} - \widehat{Q}(\xi)\big)\widehat{N}\Bigg[\sum_{j=0}^2 h_{(j)}\widetilde{\phi}_{(j)} + g,\, \sum_{j=0}^2 h_{(j)}\widetilde{\phi}_{(j)} + g\Bigg] = 0.$$

Первое из вышеприведенных уравнений, рассматриваемая как совокупность дифференциально–функциональных уравнений, может рассматриваться как система автономных ОДУ типа Риккати с коэффициентами, выражающимися через посредство значений функционалов определённого (введённого выше) вида на 2-ой Фреше–производной столкновительного члена $\widehat{N}[.,.]$.

Второе уравнение Ляпунова–Шмидта может быть переписано в следующей форме: $\widehat{J}[g;\xi] = \big(\widehat{I} - \widehat{Q}(\xi)\big)\xi\widehat{N}\big[f[h,g;\phi],\ f[h,g;\phi]\big] \equiv W(x_1,\mathbf{v})$. Поскольку полюсные особенности обобщенной резольвенты $k_{(j)}(\xi)$ линеаризованного оператора Больцмана не входят в него, существует возможность ввести в рассмотрение ограниченную псевдообратную операцию $\underline{\widehat{J}}^{-1}[.;\xi]$: $\big(\widehat{I}-\widehat{Q}(\xi)\big)\mathsf{X}^{(2)} \mapsto \big(\widehat{I} - \widehat{P}(\xi)\big)\mathsf{X}^{(1)}$. Её конструктивное построение основано на теории голоморфных полугрупп операторов. Определим действие $\underline{\widehat{J}}^{-1}$ посредством композиции обратного D_0–преобразования Лапласа–Бохнера и псевдообратного оператора $(\underline{\widehat{J}}_k)^{-1}$

$$\underline{\widehat{J}}^{-1}[.;\xi] := \frac{1}{2\pi i}\int_{k^0-i\infty}^{k^0+i\infty} \exp(kx_1)\big(\underline{\widehat{J}}_k\big)^{-1}[.;\xi]\,dk.$$

Конкретное представление полугруппы зависит от знака v_1, так что необходимо рассматривать два семейства полугрупп $\widehat{\mathcal{T}}^{\pm}(x_1)$. Для случаев $v_1 \lesseqgtr 0$ пути интегрирования $\Gamma^{\pm}(\mu)$ в интеграле в правой части вышеприведённой формулы представляют собой допустимые леммой Жордана деформации прямых $k = k^0 \gtreqless 0$, пересекающих ось $\Re\,(k)$ в промежутке $]-k^{(-)};\,0[$ (при $v_1 > 0$) либо $]0;\,k^{(+)}[$ (при $v_1 < 0$, $k^{(\pm)} = -\lim_{v_1\to\pm\infty}\nu(v_1)/v_1$) и нигде не пересекающихся с секторами k–комплексной области, содержащими соответственно отрицательную и положительную компоненты обобщённого существенного спектра $\sigma_{ess}(\widehat{J}_k)$:

$$g(x_1,\mathbf{v};\xi) = \begin{cases} \int_0^{x_1}\widehat{\mathcal{T}}^{+}(x_1-x_1')W(x_1',\mathbf{v})\,dx_1', & v_1>0,\\ \int_{x_1}^{\infty}\widehat{\mathcal{T}}^{-}(x_1-x_1')\big(W(x_1',\mathbf{v})-W(\infty,\mathbf{v})\big)\,dx_1' + g(\infty,v_1), & v_1<0,\end{cases}$$

$$\|\widehat{\mathcal{T}}^{\pm}(x_1)[W(\mathbf{v})]\|_z < \exp\big(k^{(\pm)}x_1\big)\|W(\mathbf{v})\|_{z-1},\ \ \|W\|_z = \operatorname{vrai\,max}|(1+\mathbf{v}^2)^{z/2}W(\mathbf{v})|.$$

Нелинейный оператор $\widehat{\mathcal{LS}}_2[h_{(j)};\,g]\ :\ \mathsf{C}^1(\mathbb{R}_+)\times\mathsf{BPG}_z \mapsto \mathsf{BQG}_{z-1}$, где $\mathsf{BPG}_z \subseteq \mathsf{C}\big(\mathbb{R}^1;(\widehat{I}-\widehat{P})\mathsf{B}_z(\mathbb{R}^3)\big)$, $\mathsf{BQG}_{z-1} \subseteq \mathsf{C}\big(\mathbb{R}^1;(\widehat{I}-\widehat{Q})\mathsf{B}_{z-1}(\mathbb{R}^3)\big)$ и $\mathsf{B}_z(\mathbb{R}^3)$ — БП функций $\varpi(\mathbf{v})$ с нормой $\|\varpi\|_z$. Из вышесказанного очевидно, что как Фреше–производная $\partial\widehat{\mathcal{LS}}_2(0,0)/\partial g$, так и обратный к ней оператор

$\big(\partial\widehat{\mathcal{LS}}_2(0,0)/\partial g\big)^{-1} \equiv \big(\underline{\widehat{J}}[.;\xi]\big)^{-1}$ ограничены; следовательно, на основании теоремы о неявной абстрактной функции можно ввести (единственным образом) ограниченное, непрерывно сильно дифференцируемое отображение $g[\mathbf{h}(x)]$ (функционал на 3–мерных наборах функций $h_{(j)}(x_1;\xi)$, причём $g[0] = 0$). Формальная перенормировка $h_{(j)}(x_1) = \eta\overline{h}_{(j)}(x_1)$, $g(x_1,\mathbf{v}) = \eta^2\overline{g}(x_1,\mathbf{v})$ ($j = \overline{0,2}$), где $\eta \in \mathbb{R}^1$ — масштабный параметр (например, $\eta = \eta_0 = \min_{j=\overline{0,2}}|k_{(j)}(\xi)|$), приводит к замене оператора $\widehat{\mathcal{LS}}_2$ его гомотопическим расширением $\widehat{\widehat{\mathcal{LS}}}_2[(\eta,\overline{h}_{(j)});\,\overline{g}] :\ \big(\mathbb{R}^1\times\mathsf{C}^1(\mathbb{R}_+)\big)\times\mathsf{BPG}_z\mapsto\mathsf{BQG}_{z-1}$. Рассмотрим решение соответствующего второму уравнению системы разветвления при вышеприведённой нормировке уравнения в окрестности $\Omega_\varrho(0;\,\overline{g}^\circ;\,\overline{h}^\circ_j) = \{|\eta| \le \varrho;\ \|\overline{g}-\overline{g}^\circ\|_{BPG_z} \le \varrho;\ \|\overline{h}_{(j)}-\overline{h}^\circ_{(j)}\|_{C^1} \le \varrho\}$, где $\overline{h}^\circ_{(j)}$ — некоторая (априорно известная) функция с конечной нормой, а $\overline{g}^\circ$ определяется посредством соотношения $\overline{g}^\circ(x_1,\mathbf{v}) := \big(\underline{\widehat{J}}[.;\xi]\big)^{-1}\big((\overline{h}^\circ_{(j)}(x_1))^2\xi(\widehat{I}-\widehat{Q})\widehat{N}\big[\sum_{i=0}^2\overline{\phi}_{(i)},\sum_{i=0}^2\overline{\phi}_{(i)}\big]\big)$. В данной окрестности $\big(\partial\widehat{\widehat{\mathcal{LS}}}_2[(0,\overline{h}^\circ_{(j)});\,\overline{g}^\circ]/\partial\overline{g}\big)^{-1} \equiv \big(\underline{\widehat{J}}[.;\xi]\big)^{-1}$ и на основании вышеупомянутой теоремы о неявной функции $\overline{g}$ есть функционал на зависимых переменных η, $\overline{h}_{(j)}(x_1)$: $\overline{g} = \overline{g}[\eta;\overline{h}_{(j)}]$. Можно показать, что реализуема итерационная схема для получения функций $\overline{h}_{(j)}$ и $\overline{g}[\eta;\overline{h}_{(j)}]$, использующая в качестве начальных приближений, например, $\overline{h}^\circ_{(j)} = \overline{h}^{hydro}_{(j)}(x_1)$ (функции, получаемые из гидродинамических расчётов) и $\overline{g}^\circ$ в приведённой ранее форме через псевдообратный оператор $\big(\underline{\widehat{J}}[.;\xi]\big)^{-1}(...)$ (радиус сходимости схемы ϱ).

Первое уравнение системы Ляпунова–Шмидта $\widehat{\mathcal{LS}}_1[h_j;\,g] = 0$, имеющее глобальный характер зависимости от конфигурационной переменной, можно записать в следующем виде:

$$\frac{dh_j}{dx_1} = \sum_{k=0}^{2}\big({}^{[2]}b_{k,j}h_k^2 + \sum_{i=k+1}^{2}{}^{[1,1]}b_{k,j,i}h_kh_i + {}^{[1]}b_{k,j}h_k\big) + {}^{[0]}b_{0,j}[g], \quad j=\overline{0,2},$$

где ${}^{[2]}b_{k,j} = 2\xi\langle\widetilde{\psi}_{(j)},\,\widehat{N}[\widetilde{\phi}_{(k)},\widetilde{\phi}_{(k)}]\rangle/\widetilde{\Phi}$, ${}^{[1,1]}b_{k,j,i} = 2\xi\langle\widetilde{\psi}_{(j)},\,\widehat{N}[\widetilde{\phi}_{(k)},\widetilde{\phi}_{(i)}]\rangle/\widetilde{\Phi}$, ${}^{[1]}b_{k,j} = \xi\big(k_{(j)}(\xi) + 2\langle\widetilde{\psi}_{(j)},\,\widehat{N}[g,\widetilde{\phi}_{(k)}]\rangle/\widetilde{\Phi}\big)$, ${}^{[0]}b_{0,j}[g] = \xi\langle\widetilde{\psi}_{(j)},\,\widehat{N}[g,g]\rangle/\widetilde{\Phi}$. Проведя исследование свойств данного уравнения, получаем условия возникновения вихрей в ламинарных течениях. Они заключаются в наличии возможности представления спектра матрицы линеаризованной системы Риккати в виде разложения на собственные значения, лежащие на мнимой оси (комплексно сопряженные) и множество с. з. с отрицательной мнимой частью. В реальных физических системах подобная структура может быть получены при рассмотрении системы уравнений типа Больцмана (в простейшем случае при рассмотрении газа типа Лоренца). Таким образом, вихревых структур может быть объяснено с помощью привлечения теорий бифуркаций Хопфа, для чего необходимо включать в правую часть кинетических уравнений Ланжевеновский столкновительный член. При этом происходит сдвиг спектра оператора, ассоциированного с модифицированным уравнением, и пересечение (с возможным перекрытием) зон распада собственных мнимых собственных значений.

6. Заключение

Оптимальная методика построения кинетической теории вихревых объектов должна быть ориентирована на универсальность в приложениях и описывать возможности: 1) использования аддитивного представления кластерной функции распределения вихревой системы (через посредство групповых плотностей вероятности метастабильных элементарных вихревых кластеров различной топологии); 2) применения для конструирования соответствующей иерархии типа ББГКИ: а) десингуляризованных элементарных вихрей (в том числе "крупнозернистом" представлении с учетом изменения статистики), и б) совокупностей определенного вида вихрей Онсагера, представляющих собой состояния относительного равновесия, и аппроксимирующих в смысле близости определенных интегральных характеристик псевдолокальные вихри Рэнкина, Кирхгофа, Тейлора и пр. (кластеров типа "вихревых кристаллов" [103]–[105]); 3) разделения динамики мезоструктур на внешнюю и внутреннюю, причем описание эволюции эндоуровня производится в терминах геодезического движения элементарных вихрей, а экзоуровня — соответственно их кластеров, адаптированных для целевых надобностей (в том числе на специальным образом сконструированных лагранжевых многообразиях). Развиваемый формализм "2–уровневой когерентности" (с установлением определенного соответствия свойств мезо– и макроструктур) применим как для решения прикладных задач, так и для анализа теоретических аспектов динамики когерентных движений среды. При этом данный формализм имеет свое концептуальное обоснование в теории "суперстатистики" Бека–Коэна [106]–[108], утверждающей, в частности, что при наличии масштабной сегрегации в структурном строении динамических систем соответствующая статистика и типоформы стационарных состояний могут изменяться крайне существенным образом.

Однако анализ когерентных макроструктур имеет свою специфику (связанную непосредственно с базисными свойствами данных объектов, вытекающими непосредственно из определения), поэтому авторами предлагается формулировать методику их описания на основе вполне обусловленных подходов либо иерархий кинетических уравнений (не использующих напрямую обращение к теории случайных процессов). Представляется целесообразным специально отметить, что, вообще говоря, существование вихреподобных структур различных типов не есть прерогатива исключительно газогидродинамических течений (среди которых вполне правомерно особо выделять некоторые внешне экзотические, "пограничные", подвиды, для анализа которых необходимо использовать концепции мелкой воды, (квази)геострофических течений, волн Россби и др.). В связи со сходством управляющих уравнений можно ожидать возможности реализуемости объектов подобного типа также в теории движения гелия–II, магнитной гидродинамике, в динамике звездных скоплений и динамике плазмы (при использовании аппарата уравнения Власова) и пр. В частности, в электронной гидродинамике (при формальном переобозначении величин принятии заряда за локальную циркуляцию, напряженности магнитного поля за функцию тока и т п.), можно получить уравнения типа Чарни–Хасегава–Мима–Петвиашвили, решения которых по сути вихреподобны (и являются доступными для наблюдения в ходе опытов); наличие филаментационных/нитеподобных структур является естественным для вычислительных экспериментов для сильноточных электрон–протонных пучков, в том числе и релятивистских и квантово–статистической динамики сверхтекучей жидкости. Как ни парадоксально на первый взгляд, именно вышеотмеченное сходство управляющих уравнений является одной из причин актуальности развития надлежащего кинетического аппарата: феноменологические поправки, обычно используемые большинством авторов при моделировании вихревых движений в гидродинамических задачах, не могут быть прямо перенесены на случаи с существенно отличными от последних по физическому контексту задачами магнитной гидродинамики, плазмодинамики и пр., и, кроме того, изменение набора макропараметрических переменных даже обычной гидродинамической задачи в состоянии привести к принципиальному изменению характера течения (например, Тейлора-–Куэтта, Бенара и т. п.); таким образом, вышеупомянутые поправки перестают эффективно выполнять свою роль и не могут гарантировать правильность получаемых результатов. В это же время построение и развитие теории кинетики вихревых структур, в частности, близких в некотором смысле КС–состояниям, дает возможность прямого непосредственного исследования различающихся по физическому содержанию процессов, причем критические эффекты при изменении макропараметров среды здесь можно учитывать более последовательно вне рамок ограничивающих феноменологических допущений (в частности, с помощью методов теории бифуркации решений нелинейных уравнений в точках дискретного и псевдодискретного спектра). При этом собственно генезис и развитие/распад когерентных состояний в макроструктурах требует учета при своем описании изменения топологии системы "в целом" (локальные внутрикластерные переходы состояний относительного равновесия в близкие геометрические конфигурации, вообще говоря, определяются не только взаимодействием с ближайшими соседями, но и коллективными эффектами за счет влияния соседних мезоструктур, хотя в ряде случаев существует возможность их "размыкания" по масштабам). Одна из рационально выглядящих методик описания данных процессов связана с введением самосогласованной с динамикой когерентной макроструктуры метрики на (ко)касательном расслоении над многообразием внешних координат системы (кластеров) вихрей. Поэтому представляется целесообразным обратиться к детальному исследованию вопроса (вообще говоря, включающего в себя целый комплекс задач) построения базиса соответствующей физической геометрии (лагранжевой или гамильтоновой). Геометрические методы такого рода очевидным образом могут быть использованы не только для установления гамильтоновой иерархической структуры гидродинамического течения с последующим разделением последнего на кластерные многочастичные подмножества, но также и для обобщения развитой теории на римановы многообразия. Для этого необходимо включать в рассмотрение лагранжевы пространства с соответствующими нелинейными связностями (в частности, Бервальда, Черна–Рунда, Хашигучи и др.) и эффективными метриками. Выбор надлежащего метода поднятия тензорной структуры конфигурационного пространства приводит к метрикам типа Сасаки, Чигера–Громолла и т. д. С использованием аналогов коэффициентов Кристоффеля этих метрик можно сконструировать кинетические уравнения с наперед заданными свойствами, которые могут обеспечить априори задаваемый выбор их свойств. Это представляется целесообразным для моделирования как многочастичной динамики на многообразиях с ненулевой кривизной, так и при учете эффектов влияния тормозного излучения, самодействия и пр. (например, в самогравитирующей излучающей плазме либо пылевом облаке), так и для включения эффектов трения, вязкости и вообще потерь энергии, характерных, в частности, для уравнения Навье–Стокса и модифицированного уравнения Эйлера с эффективным учетом вязкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 14-01-00670.

Список литературы

[1] Белоцерковский О.М., Гиневский А.С., *Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей.* М.: Физматлит. 1995.

[2] Хлопков Ю.И., Жаров В.А., Горелов С.Л., *Когерентные структуры в турбулентном пограничном слое.* М.: МФТИ. 2002.

[3] Reynolds O., *On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion* // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. V. 186. P. 123. 1895.

[4] Prandtl L., *Bericht über undersuchungen zür ausgebildeten turbulent* // Z. Angew. Math. Mech. T. 5. SS. 136–139. 1925.

[5] Townsend A.A., *The structure of turbulent shear flow.* Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1956.

[6] Hussain A.K.M.F., Reynolds W.C., *The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow* // J. Fluid Mech. V. 41. PP. 241–258. 1970.

[7] Hussain A.K.M.F., *Cardiovascular flow dynamics and measurements.* Eds. N.H.C. Hwang and N. Norman. U. Park Pr. Baltimore. 1977. P. 541.

[8] Hussain A.K.M.F., *Investigation of coherent structures in free turbulent shear flow.* In: Proc. Sixth Biennal Symposiom on Turbulence. Dept. of Chemical Engineering. Univ. of Missouri–Rolla. 1979.

[9] Wygnanski I., Oster D., Fiedler H., *The forced plane turbulent mixing layer: a challenge for the predictor.* In: Proc. Second Symposium on Turbulent Shear Flows. London. 1979.

[10] Knight D.D., Murray B.T., *Theoretical investigation of interaction and coalescence of large scale structures in the turbulent mixing layer.* In: Proc. of the International Conf. “The role of coherent structures in modelling turbulence and mixing”. Madrid, June 25–27, 1980. Ed. Jimenez J. PP. 62–92. Berlin — Heidelberg — New York: Springer Verlag. 1981.

[11] Kirby M., Armbruster D., *Reconstructing phase space from PDE simulations* // Z. Angew. Math. Phys. V. 43. PP. 999–1022. 1992.

[12] Liu J.T.C., *Contributions to the understanding of large–scale coherent strucrures in developing free turbulent shear flows* // Advances in Appl. Mech. V. 26. PP. 45–62. 1988.

[13] Moin P., Moser R.D., *Characteristic–eddy decomposition of turbulence in a tunnel* // J. Fluid Mech. V. 200. PP. 471–509. 1989.

[14] Rajaee M., Karlsson S.K.F., *Shear flow coherent structures via Karhunen–Loeve expansion* // Phys. Fluids A. V. 2. PP. 2249–2251. 1990.

[15] Holmes P., Lumley J.L., Berkooz G., *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*. Cambridge: Cambridge University Press. 1996.

[16] van Saarloos W., Bedeaux D., Mazur P., *Non–linear hydrodynamic fluctuations around equilibrium* // Physica. V. 110A. PP. 147–170. 1982.

[17] Pumir A., *A numerical study of pressure fluctuations in three–dimensional, incompressible, homogeneous, isotropic turbulence* // Phys. Fluids. V. 6. PP. 2071—2083. 1994.

[18] Alam Sarker M.S., Kishore N., *Distribution functions in the statistical theory of convective MHD turbulence of an incompressible fluid* // Astroph. and Space Sci. V. 181. PP. 29–42. 1991.

[19] Santangelo P., Benzi R., Legras B., *The generation of vortices in high–resolution, two–dimensional, decaying turbulence and the influence of initial conditions on the breaking of self–similarity* // Phys. Fluids A. V. 1. PP. 1027–1034. 1989.

[20] Shlesinger M.F., West B.J., Klafter J., *Levy dynamics of enhanced diffusion: application to turbulence* // Phys. Rev. Lett. V. 58. PP. 1100-–1103. 1987.

[21] Колесниченко А.В., *К термодинамическому моделированию развитой турбулентности при учете когерентных вихревых структур* // Мат. моделирование. Т. 16. № 9. СС. 92–126. 2004.

[22] Колесниченко А.В., *Синергетический подход к описанию стационарно–неравновесной турбулентности* // Мат. моделирование. Т. 16. № 1. СС. 37–66. 2004.

[23] Kolesnichenko A.V., *A synergetic approach to the description of advanced turbulence* // Sol. Syst. Res. V. 36. № 2. P. 107. 2002.

[24] Колесниченко А.В., *О возможности синергетического рождения мезомасштабных когерентных структур в макроскопической теории развитой турбулентности* // Мат. моделирование. Т. 17. № 10. СС. 47–78. 2005.

[25] Седов Л.И., *Механика сплошной среды. Т. 2.* М.: Наука. 1970.

[26] Rist U., Fasel H., *Direct numerical simulation of controlled transition in a flat–plate boundary layer* // J. Fluid Mech. V. 298. PP. 211–248. 1995.

[27] Le H., Moin P., Kim J., *Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward–facing step* // J. Fluid Mech. V. 330. PP. 349–374. 1997.

[28] Choi H., Moin P., Kim J., *Direct–numerical simulation of turbulent flow over riblets* // J. Fluid Mech. V. 225. P. 503—539. 1993.

[29] Launder B.E., Spalding D.B., *Mathematical models of turbulence*. Academic Press. 1972.

[30] Erlebacher G., Hussaini M.Y., Speziale C.G., Zang T.A., *Towards a large–eddy simulation of compressible turbulent flows* // J. Fluid Mech. V. 238. PP. 155—185. 1992.

[31] El Hady N.M., Zang T.A., *Large–eddy simulation of nonlinear evolution and breakdown to turbulence in high–speed boundary layers* // Theor. Comput. Fluid Dyn. V. 7. PP. 217–240. 1995.

[32] Ducros F., Comte P., Lesieur M. *Large–eddy simulation of transition to turbulence in a boundary layer developing spatially over a flat plate* // J. Fluid Mech. V. 326. PP. 1-–36. 1996.

[33] Aksman M.J., Novikov E.A., Orszag S.A., *Vorton method in three–dimensional hydrodynamics* // Phys. Rev. Lett. V. 54. PP. 2410-2413. 1985.

[34] Meiburg E., *Three dimensional vortex dynamics simulations in fluid vortices*. Ed. Green S.I. Kluwer Academic Publishers. PP. 651-685. 1995.

[35] Белоцерковский О.М., *Численное моделирование в механике сплошные сред.* М.: Физматлит. 1994.

[36] Белоцерковский О.М., Гущин В.А., *Новые численные модели в механике сплошных сред* // Успехи механики. Т. 8. № 1. СС. 97–150. 1985.

[37] Белоцерковский О.М., *Прямое численное моделирование свободной развитой турбулентности* // ЖВМиМФ. Т. 25. № 12. СС. 1857–1882. 1985.

[38] Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Чечёткин В.М., *Турбулентность: новые подходы.* М.: Наука. 2002.

[39] von Helmholtz H., *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen* // J. Reine Angew. Math. T. 55. SS. 25–55. 1858.

[40] Kirchhoff G., *Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik.* Leipzig: Teubner. 1876.

[41] Montgomery D., Joyce G., *Statistical mechanics of "negative temperature" states* // Phys. Fluids. V. 17. P. 1139–1145. 1974.

[42] Chen P., Cross M.C., *Mean field equilibria of single coherent vortices* // Phys. Rev. E. V. 54. PP. 6356–6363. 1996.

[43] Григорьев Ю.Н., Левинский В.Б., *Вариационная модель организованной завихренности на плоскости* // ЖПМТФ. № 5. СС. 60–68. 1985.

[44] Miller J., Weichman P.B., Cross M.C., *Statistical mechanics, Euler's equation, and Jupiter's Red Spot* // Phys. Rev. A. V. 45. № 4. PP. 2328–2359. 1992.

[45] Michel J., Robert R., *Statistical mechanical theory of the Great Red Spot of Jupiter* // J. Stat. Phys. V. 77. № 3–4. PP. 645–666. 1994.

[46] Robert R., *A maximum entropy principle for two–dimensional Euler equation* // V. 65. № 3–4. PP. 531–553. 1991.

[47] Sommeria J., Nore C., Dumont T., Robert R., *Theorie statistique de la tache rouge de Jupiter* // C. R. Acad. Sci. Paris (ser. II). V. 312. PP. 999–1005. 1991.

[48] Turkington B., *Statistical equilibrium measures and coherent states in two–dimensional turbulence* // Comm. Pure Appl. Math. V. 52. № 7. PP. 781–809. 1999.

[49] Zou J., Holloway G., *Entropy maximization in topohraphic turbulence* // J. Fluid Mech. V. 263. PP. 361–374. 1994.

[50] Brands H., Chavanis P.H., Pasmanter R., Sommeria J., *Maximum entropy versus minimum enstrophy vortices* // Phys. Fluids. V. 11. PP. 3465–3477. 1999.

[51] Chavanis P.H., *Dynamical and thermodynamical stability of two–dimensional flows: variational principles and relaxation equations* // Europhys. Phys. Journ. B. V. 70. PP. 73–105. 2009.

[52] Волевич Л.Р., *Исследование неустойчивости Гельмгольца–Кельвина.* Препринт № 38 ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. М. 1979.

[53] Веретенцев А.Н., Рудяк В.Я., Яненко Н.Н., *Вариационный метод построения дискретных вихревых моделей.* Препринт № 29 ИТПМ СО АН СССР. Новосибирск. 1982.

[54] Caglioti E., Rousset F., *Quasi–stationary states for particle systems in the mean–field limit* // J. Stat. Phys. V. 128. PP. 241–263. 2007.

[55] Bühler O., *Statistical mechanics of strong and weak point vortices in a cylinder* // Phys. Fluids. V. 14. № 7. PP. 2139–2149. 2002.

[56] Lamb H., *Hydrodynamics* (6th ed.). London — New York : Cambridge University Press. 1975.

[57] Bragg S.L., Hawthorne W. R., *Some exact solutions of the flow through annular cascade actuator discs* // J. Aero. Sci. V. 17. PP. 243—248. 1950.

[58] Серрин Дж., *Математические основы классической механики жидкости.* М.: ИИЛ. 1963.

[59] Веденяпин В.В., Фимин Н.Н., *Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона–Якоби*, ДАН. Т. 446. № 6. СС. 15–22. 2012.

[60] Козлов В.В., *Гидродинамика гамильтоновых систем* // Вестник МГУ. Сер. Матем., Механ. № 6. СС. 10–22. 1983.

[61] Козлов В.В., *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике.* Изд–во Удмуртского гос. ун–та. Ижевск. 1995.

[62] Onsager L. *Statistical hydrodynamics* // Nuovo Cimento Suppl. V. 6. PP. 279–289. 1949.

[63] Robert R., *A maximum–entropy principle for two–dimensional perfect fluid dynamics* // J. Stat. Phys. V. 65. PP. 531–533. 1991.

[64] Miller J., *Statistical mechanics of Euler equation in two dimensions* // Phys. Rev. Lett. V. 65 (17). PP. 2137–2140. 1990.

[65] Ellis R.S., Haven K., Turkington B., *Nonequivalent statistical equilibrium ensembles and refined stability theorems for most probable flows* // Nonlinearity. V. 15. PP. 239–255. 2002.

[66] Chavanis P.-H., *Statistical mechanics of geophysical turbulence: application to Jovian flows and Jupiter's great Red Spot* // Physica D. V. 200. PP. 257–272. 2005.

[67] Bouchet F., Sommeria J., *Emergence of intense jets and Jupiter's Great Red Spot as maximum entropy structures* // J. Fluid Mech. V. 464. PP. 165–207. 2002.

[68] Modica L., *The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion* // Arch. Rat. Mech. Anal. V. 98. PP. 123–142. 1987.

[69] Leonard A., *Vortex methods for flow simulation* // J. Comput. Phys. V. 37. № 3. PP. 289–335. 1980.

[70] Chorin A.J., *Numerical study of slightly viscous flow* // J. Fluid Mech. V. 57. PP. 785–798. 1973.

[71] Kuwahara K., Takami H., *Numerical studies of two dimensional vortex motion by a system of point vortices* // J. Phys. Soc. Japan. V. 34. № 1. PP. 247–253. 1973.

[72] Scully M.P., *Computation of helicopter rotor wake geometry and its influence on rotor harmonic airloads* // Massachusets Inst. of Technology Publ. ARSL TR 178–1. Cambridge. 1975.

[73] Hopfinger E.J., van Heijst G.J.F., *Vortices in rotating fluids* // Annu. Rev. Fluid Mech. V. 25. PP. 241–289. 1993.

[74] Штым А.Н., *Аэродинамика циклонно–вихревых камер*. Владивосток: Дальневост. ун–т. 1985.

[75] Leibovich S., *Waves and bifurcations in vortex filaments* // in: Studies of vortex dominated flows: Proc. Symp. July 9–11 1985, NASA Langley Research Center. Ed. M.Y. Hussaini, M.D. PP. 3–14. Salas: Springer. 1986.

[76] Rosenhead L., *The spread of vorticity in the wake behind a cylinder* // Proc. Roy. Soc. London. V. A127. PP. 590–612. 1930.

[77] Lynden–Bell D., *Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems* // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. V. 136. P. 101. 1967.

[78] Hohl F., Campbell J.W., *Statistical mechanics of a collisionless self–gravitating system* // Astrn. J. V. 73. № 7. PP. 611–615. 1968.

[79] Lynden–Bell D., Wood R., *The gravo–thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red–giant structure for stellar systems* // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. V. 138. P. 495. 1968.

[80] Binney J., Tremaine S., *Galactic dynamics.* Princeton: Princeton University Press. 1987.

[81] Saslaw W.C., *Gravitational physics of stellar and galactic systems*. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1985.

[82] Chavanis P.H., *Contribution à la mècanique statistique des tourbillons bidimensionnels. Analogie avec la relaxation violente des systèmes stellaires.* Ph.D. Thesis. Ecole Normale Suprerieure de Lyon. 1996.

[83] Chavanis P.H., *On the analogy between two–dimensional vortices and stellar systems.* in: Proceedings of the IUTAM Symposium on Geometry and statistics of Turbulence. Hayama: Kluwer Academic publishers. 2000.

[84] Chavanis P.H., Sommeria J., Robert R., *Statistical mechanics of two–dimensional vortices and collisionless stellar systems* // Astroph. J. V. 471. P. 385. 1996.

[85] Chavanis P.H., *From Jupiter's great red spot to the structure of galaxies: statistical mechanics of two–dimensional vortices and stellar systems* // Ann. N.-Y. Acad. Sci. V. 867 P. 120. 1998.

[86] Chukbar K.V., *Statistics of two–dimensional vortices and the Holtsmark distribution* // Plasma Phys. Rep. V. 25. P. 77. 1999.

[87] Bixon M., Zwanzig R., *Boltzmann–Langevin equation and hydrodynamic fluctuations* // Phys. Rev. V. 187. P. 267. 1969.

[88] Ueyama H., *The stochastic Boltzmann equation and hydrodynamic fluctuations* // J. Stat. Phys. V. 22. № 1. PP. 1–26. 1980.

[89] Kline S.J., Reynolds W.D., Schraub F.A., Runstadler P.W., *The structure of turbulent boundary layers* // J. Fluid Mech. V. 30. PP. 741–773. 1967.

[90] Crow S.C., Champagne F.H., *Orderly structure in jet turbulence* // J. Fluid Mech. V. 48. PP. 547–591. 1971.

[91] Brown G.L., Roshko A., *On density effects and large structure in turbulent mixing layers* // J. Fluid Mech. V. 64. PP. 775–816. 1974.

[92] Perry A.E., Lim T.T., Chong M.S., Tex E.W. *The fabric of turbulence* // AIAA Paper. 1980. V. 80. P. 1358.

[93] Lesieur M. *Turbulence in fluids.* Dordrecht — Boston — London: Kluwer Academic Publishers. 1997.

[94] Hussain A.K.M. *Role of coherent structures in turbulent shear flows* // Proc. Indian Acad. Sci. (Engg. Sci.) 1981. V. 4. Pt. 2. P. 129–175.

[95] van de Fliert B.W., van Groesen E., *Monopolar vortices as relative equilibria and their dissipative decay* // Nonlinearity. V. 5. PP. 473–495. 1992.

[96] van de Fliert B.W., van Groesen E., *On variational principles for coherent vortex structures* // Appl. Scient. Research. V. 51. PP. 399–403. 1993.

[97] Fledderus E.R., van Groesen E., *Deformation of coherent structures* // Rep. Prog. Phys. V. 59. PP. 511–600. 1996.

[98] Briggs R.J., Daugherty J.D., Levy R.H., *Role of Landau damping in crossed–field electron beams and inviscid shear flow* // Phys. Fluids. V. 13. P. 421. 1970.

[99] Driscoll C.F., Fine K.S., *Experiments in vortex dynamics in pure electron plasmas* // Phys. Fluids B. V. 2. P. 1359. 1990.

[100] Davidson R.C., *Physics of non–neutral plasmas.* Addison–Wesley, Reading. 1990.

[101] Farmer J.D., Hart J., Weidman P., *A phase space analysis of baroclinic flow* // Phys. Letters A. V. 91. PP. 22–24. 1982.

[102] Kuo H.L.. *Dynamics of quasigeostrophic flows and instability theory* // Adv. Appl. Mech. V. 13. PP. 247-330. 1973.

[103] O'Neil K.A., *Stationary configurations of point vortices* // Trans. Am. Math. Soc. V. 302. PP. 383-425. 1987.

[104] Aref H., Vainchtein D.L., *Asymmetric equilibrium patterns of point vortices* // Nature (London). V. 392. PP. 769-770. 1998.

[105] Boyland L., Stremler M.A, Aref H., *Topological fluid mechanics of point vortex motions* // Physica D. V. 175. PP. 69–95. 2002.

[106] Beck C., Cohen E.G.D., *Superstatistics* // Physica A. V. 322. PP. 267–275. 2003.

[107] Rizzo S., Rapisarda A., *Application of superstatistics to atmospheric turbulence*, in *Complexity, Metastability and Nonextensivity.* Eds. Beck C., Benedek G., Rapisarda A., Tsallis C. Singapore: World Scientific. 2005.

[108] Bouchard J.-P., Potters M., *Theory of financial risk and derivative pricing.* Cambridge: Cambridge University Press. 2003.