



Афенди́ков А.Л., Меркулов К.Д.,
Пленкин А.В.

Динамическая локальная
адаптация сеток на основе
вейвлет-анализа в задачах
газовой динамики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Афенди́ков А.Л., Меркулов К.Д., Пленкин А.В. Динамическая локальная адаптация сеток на основе вейвлет-анализа в задачах газовой динамики // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 99. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-99>

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

А.Л. Афендииков, К.Д. Меркулов, А.В. Пленкин

Динамическая локальная адаптация сеток
на основе вейвлет-анализа
в задачах газовой динамики

Москва — 2014

Афендииков А.Л., Меркулов К.Д., Пленкин А.В.

**Динамическая локальная адаптация сеток на основе вейвлет-анализа
в задачах газовой динамики**

Для решения некоторых задач газовой динамики используются двухуровневые декартовы сетки с динамической локальной адаптацией, которая производится на основе вейвлет-анализа решения.

Ключевые слова: идеальный газ, задача Седова, В-сплайн, вейвлет

Andrei Afendikov, Kirill Merkulov, Andrei Plenkin

**Local mesh adaptation in gas dynamic problems with the use of wavelet
analysis**

Two level Cartesian mesh adaptation based on wavelet analysis is used for numerical simulation of some gas dynamic problems.

Key words: gas, Sedov problem, B-spline, wavelet

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда,
проект 14-11-00872.

Оглавление

Введение	3
1.1. Уравнения движения	3
1.2. Основы численного метода.....	4
2. Двумерная декартова сетка с локальной адаптацией.....	6
2.1. Формат хранения локально адаптивных сеток.....	6
2.2. Алгоритм обхода сетки и поиска соседей	8
2.3. Схема газодинамического расчета на неструктурированной сетке.....	8
2.4. Сравнение расчетов на сетках нулевого и первого уровней	9
2.5. Расчет на сетке, динамически изменяющейся по заданному закону.....	12
3. Критерий гладкости сеточного решения на основе вейвлет-анализа.....	13
3.1. Проекция решения на мелкую виртуальную сетку	13
3.2. Основные конструкции базисных вейвлетов	13
3.3. Вейвлет разложение.....	15
3.4. Флаги адаптация расчетных сеток	16
3.5. Примеры выходных данных вейвлет-анализа сеточных решений	17
4. Результаты расчетов на локально адаптивных сетках	19
4.1. Задача Седова о сильном точечном взрыве.....	19
4.2. Взаимодействие двух точечных взрывов	23
Заключение	24
Список литературы	24

Введение

Вопрос о динамической адаптации сеток для оптимизации численного решения задач газовой динамики не нов [1-5,13]. Однако при проведении расчетов на параллельном суперкомпьютере подобная адаптация приобретает дополнительную специфику, которая делает необходимым развитие новых подходов.

В настоящей работе для решения этой задачи предлагается использовать вариант схемы Свелденса, примененной к B -сплайнам на параллелепипеде на последовательности вложенных декартовых сеток. Для обеспечения прозрачности изложения сначала рассматривается одномерный случай для равномерных сеток на отрезке. На многомерный случай конструкция переносится с помощью тензорного произведения, что адекватно использованному в расчетах адаптированному варианту метода свободной границы на декартовых сетках. Эффективность подхода проверена на задаче Седова о сильном взрыве [6].

1. Дискретизация

1.1. Уравнения движения

В настоящей работе предлагается вариант адаптации сеток для решения задачи о движении идеального газа, пригодный для массивного распараллеливания. Математическая постановка задачи сводится к решению системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0, \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) + \operatorname{grad}(p) = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} H) = 0, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

в области $V(\Gamma) \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной некоторой заданной замкнутой кривой

$\Gamma = \Gamma(x, y)$. Здесь введены стандартные обозначения: \mathbf{U} - вектор скорости, ρ - плотность, p - давление, $H = E + p/\rho$ - полная удельная энтальпия, $E = e + 0.5\mathbf{U}^2$ - полная удельная энергия, e - удельная внутренняя энергия.

Уравнения системы соответствуют законам сохранения массы, импульса и энергии. Газ предполагается идеальным, т.е. $p = (\gamma - 1)\rho e$.

Для уравнений Эйлера ставится стандартная начально-краевая задача в области $V(\Gamma)$. В расчетах, представленных в работе, использовались только граничные условия нулевого сноса и твердой стенки [7].

1.2. Основы численного метода

Запишем систему (1.1) в консервативных переменных

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} \right] = 0, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{Q} = (\rho, \rho U_x, \rho U_y, \rho E)^T$ - вектор консервативных переменных, а $\mathbf{F}_k = (\rho U_k, \rho U_k U_x + p\delta_k, \rho U_k U_y + p\delta_k, \rho U_k H)^T$, $k = x, y$ - векторы потоков по направлениям.

Эта система численно решается на временном шаге Δt на неподвижной декартовой сетке. Для этого используется метод конечного объема с использованием приближенного решения задачи о распаде произвольного разрыва по Русанову [8]. Ввиду независимости двух пространственных переменных и потоков по ним схему расчета можно расщепить на два этапа, насчитывая сначала потоки по одной оси, потом по другой, в конце суммируя их. По каждой из осей для потоков в двух направлениях от текущей ячейки можно проводить одинаковую процедуру.

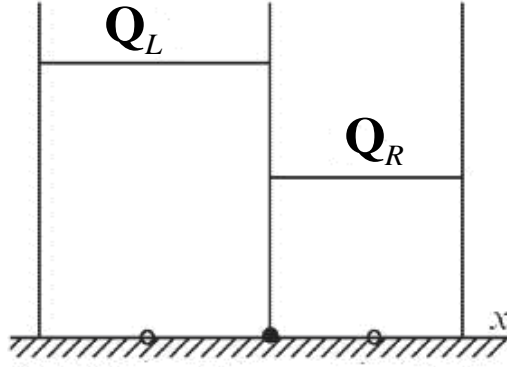


Рис. 1.1. К задаче Римана и описанию методов аппроксимации потока.

Описание метода расчета потоков приведем для одномерного случая. Обозначим за \mathbf{Q}_L и \mathbf{Q}_R значения вектора \mathbf{Q} слева и справа от грани ячейки (см. рис. 1.1), соответственно. Вертикальные линии соответствуют границам ячеек, горизонтальные - величинам вектора-состояния. Аналогично, величины \mathbf{F}_L и \mathbf{F}_R будут значениями вектора потока \mathbf{F} слева и справа от грани, соответственно. Тогда $\mathbf{A}_L = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \right)_L$, $\mathbf{A}_R = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \right)_R$ - значения матриц Якоби слева и справа от грани, соответственно. За $\lambda_{\max}(\mathbf{A}_L)$, $\lambda_{\min}(\mathbf{A}_L)$, $\lambda_{\max}(\mathbf{A}_R)$, $\lambda_{\min}(\mathbf{A}_R)$, соответственно, обозначим максимальное и минимальное собственные значения матриц \mathbf{A}_L и \mathbf{A}_R . Тогда, формулы вычисления искомого потока \mathbf{F}_i^0 на грани для метода Русанова будут выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{F}_i^0 = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R - s_{\max} (\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L)), \quad (1.3)$$

где s_{\max} - максимальный спектральный радиус, вычисляемый следующим образом:

$$\begin{aligned} s_{\max} &= \max(s_+, -s_-), \\ s_+ &= \max(\lambda_{\max}(\mathbf{A}_L), \lambda_{\max}(\mathbf{A}_R), 0), \\ s_- &= \min(\lambda_{\min}(\mathbf{A}_L), \lambda_{\min}(\mathbf{A}_R), 0). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Устойчивость оператора в правой части (1.3) обеспечивается переменным шагом по времени, который вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta t = K_{safe} \cdot (\Delta t)_{CFL}, \quad 0 < K_{safe} < 1, \quad (1.5)$$

где K_{safe} – коэффициент запаса, $(\Delta t)_{CFL}$ – максимальный курантовский шаг. $(\Delta t)_{CFL}$ пересчитывается (см. [7]) по формуле

$$\begin{aligned} (\Delta t)_{CFL} &= \min(\tau_x, \tau_y), \\ \tau_i &= \min_{\Omega} \left(\frac{\Delta i}{c_0 + |U_i|} \right), \quad i = x, y, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где Δi – пространственный шаг по i -му направлению в конкретной ячейке, c_0 – скорость звука в ячейке, а минимум берется по всей расчетной области.

2. Двумерная декартова сетка с локальной адаптацией.

2.1. Формат хранения локально адаптивных сеток.

Одна из наиболее трудоемких и сложных задач при использовании сеток с локальной адаптацией – это поиск наиболее оптимального и удобного формата представления данных. Для адаптации изначально структурированных декартовых сеток, где разбиение подразумевается по какому-либо заранее выбранному закону, удобно использовать различные древовидные структуры. Кроме того, для них хорошо известны быстрые рекурсивные алгоритмы обхода и перестроения.

В работе представлен следующий формат описания двумерной сетки с возможностью локальной адаптации. Каждая ячейка может разбиваться только на четыре равных делением пополам по каждому из направлений. Берется первоначальная прямоугольная сетка (допустима неравномерная) размера $M \times N$ с ячейками особого типа:

```

// ячейка адаптивной сетки
typedef struct tree_elem
{
    int level; // уровень текущей ячейки
    int row_on_level; // вертикальный индекс ячейки на ее уровне
    int column_on_level; // горизонтальный -//-
    int divided_flag; // ячейка: 0 - конечная, 1 - родительская
    // ссылки на потомков
    p_tree_elem left_top;
    p_tree_elem right_top;
    p_tree_elem left_bottom;
    p_tree_elem right_bottom;

    cell_type *cur_cell;
} tree_elem;

```

Каждая ячейка описывается своим уровнем (для базовой сетки размера $M \times N$ он равен нулю), виртуальным положением на этом уровне - парой параметров `row_on_level`, `column_on_level`, показывающей, какую строку и столбец занимала бы ячейка в случае полного заполнения данного уровня. Кроме того, она имеет поле-флаг `divided_flag`, показывающее, является ли данная ячейка конечной расчетной (листом соответствующего дерева) или подразбитой на 4 ячейки следующего уровня. Для подразбитой ячейки указатели `p_tree_elem left_top`, `right_top`, `left_bottom`, `right_bottom` указывают на потомков данной ячейки (то есть на те 4 ячейки, на которые подразбита данная). Для конечной ячейки эти указатели пустые, но зато поле `cur_cell` указывает на структуру, описывающую реальную физическую ячейку типа `cell_type`:

```

// физическая ячейка
typedef struct cell_type
{
    real_type state[NCTOT]; // вектор газодинамических компонент
    real_type x_left, x_right, y_top, y_bottom; // координаты
                                                    // границ ячейки
} cell_type;

```

Она хранит в себе координаты ячейки и газодинамические характеристики внутри нее. В случае фиктивной ячейки (подразбитой), указатель `cur_cell`, естественно, нулевой.

Такой тип данных позволяет описывать адаптивные сетки совершенно различных конфигураций без использования лишней памяти.

На текущий момент наш метод подразумевает только два уровня адаптации сетки (нулевой соответствует ячейкам исходной сетки и первый – ячейки, полученные из базовых делением пополам вдоль каждой из осей). Однако формат данных и большая часть алгоритмов, описанных ниже, могут быть легко приспособлены для многоуровневой адаптации.

2.2. Алгоритм обхода сетки и поиска соседей

Обход квадратного массива (матрицы) деревьев, описанных выше, осуществляется простой процедурой: мы обходим в двойном цикле по всем элементам базовой сетки, в случае, когда текущая ячейка является конечной, применяем целевую функцию к ней, в противном случае вызываем ее же для всех четырех потомков данной ячейки.

Для поиска соседей удобно использовать еще одну особенность сеток описанного формата: ячейка 1-го уровня с индексами (i, j) обязательно имеет своим родителем ячейку с индексами $([i/2], [j/2])$, а нумерация обоих индексов начинается с нуля, $i = \overline{0, M-1}$; $j = \overline{0, N-1}$. Тогда для случая двух уровней соседей текущей ячейки по каждой из осей можно получить простым оптимизированным перебором на основе половинного деления и умножения индексов.

2.3. Схема газодинамического расчета на неструктурированной сетке

Если расчетная стека состоит одновременно из ячеек разных уровней (например, нулевого и первого), она становится неконформной и рассчитывать суммарные потоки через ячейку приходится по более сложной формуле:

$$\mathbf{Q}_{lvl,i,j}^{n+1} = \mathbf{Q}_{lvl,i,j}^n - \frac{\Delta t}{V_{lvl,i,j}} \left[\sum_{\sigma x} s_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} + \sum_{\sigma y} s_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} \right], \quad (2.1)$$

где $Q_{lvl,i,j}^n$ – значение вектора консервативных переменных в ячейке уровня lvl с виртуальными индексами (i, j) на этом уровне на временном шаге с номером n . Потоки по каждому из направлений суммируются вдоль всей границы ячейки, умноженные на соответствующие площади части границы.

При измельчении сетки всем потомкам сносится значение примитивного вектора переменных (ρ, U_x, U_y, p) , при объединении четырех ячеек в одну в качестве значения консервативного вектора переменных в ячейке берется среднее арифметическое в ячейках-потомках.

2.4. Сравнение расчетов на сетках нулевого и первого уровней

Для демонстрации эффекта от измельчения сетки для уточнения результатов в рамках используемой программы были проведены два расчета. В обоих использовалась квадратная область $[0;1] \times [0;1]$ с граничными условиями нулевого сноса. Часть области выше главной диагонали (где $y > x$) считалась на измельченной сетке, нижняя – на базовой. Размер базовой сетки – 200×200 ячеек. Здесь и далее все расчеты проводились с коэффициентом запаса K_{safe} равным $1/2$.

Начальным условием первой задачи являются симметричные относительно разделяющей сетку диагонали точечные взрывы (круглые области радиуса 0.05 в точках $(0.2; 0.8)$ и $(0.8; 0.2)$ с $\rho = 1, p = 10$). В остальной части области задаются начальные данные - $(\rho, U_x, U_y, p)_{t=0} = (1, 0, 0, 1)$. На рис. 2.1 показаны распределения давления и плотности в расчетной области на момент времени $t = 1$, на рис. 2.2 – распределения двух компонент скорости. Уже по этим данным видно, что двукратное измельчение сетки позволяет лучше улавливать фронты ударных волн, точнее описывать конфигурацию течения.

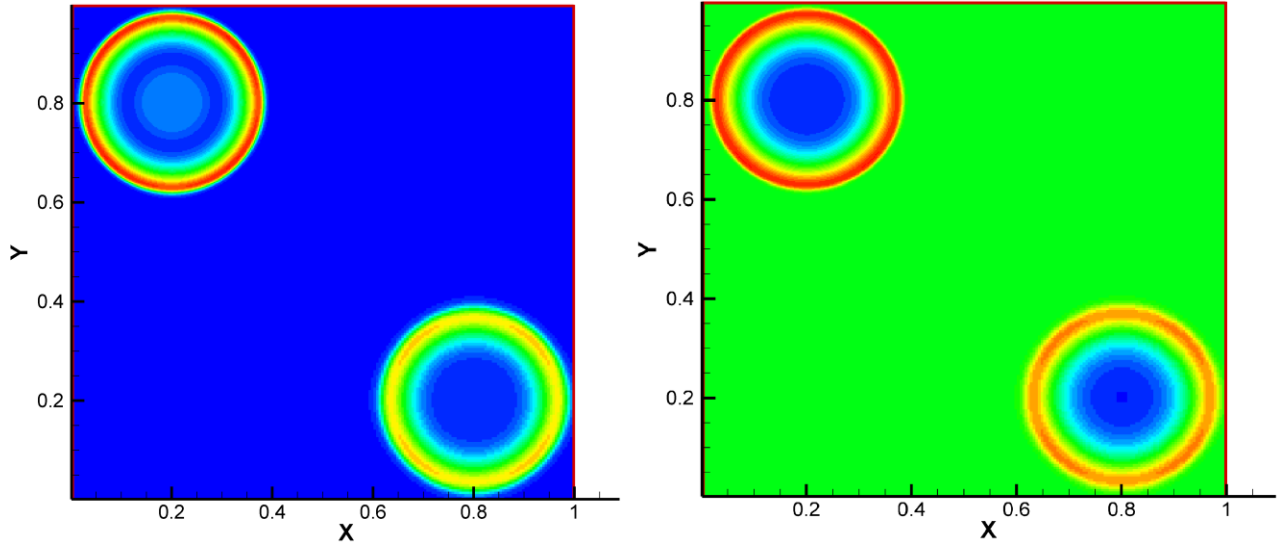


Рис. 2.1. Поля давления (слева) и плотности (справа) после расчета идентичной задачи на базовой (200×200 ячеек, ниже главной диагонали) и мелкой (400×400 ячеек, выше главной диагонали) сетках.

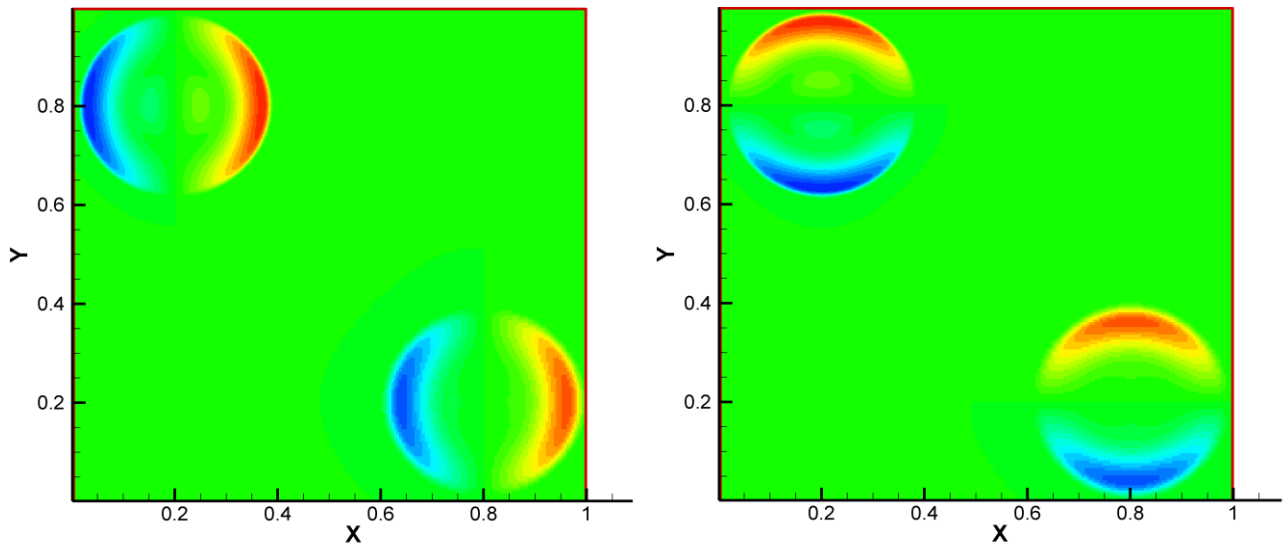


Рис. 2.2. Поля скоростей U_x (слева) и U_y (справа) после расчета идентичной задачи на базовой (ниже главной диагонали) и мелкой (выше главной диагонали) сетках.

Во второй задаче аналогичный точечный взрыв помещен в центр исходного квадрата. В качестве результатов представлены поля плотности и давления (рис. 2.3), а также срезы плотности и давления по второй диагонали квадрата (рис. 2.4).

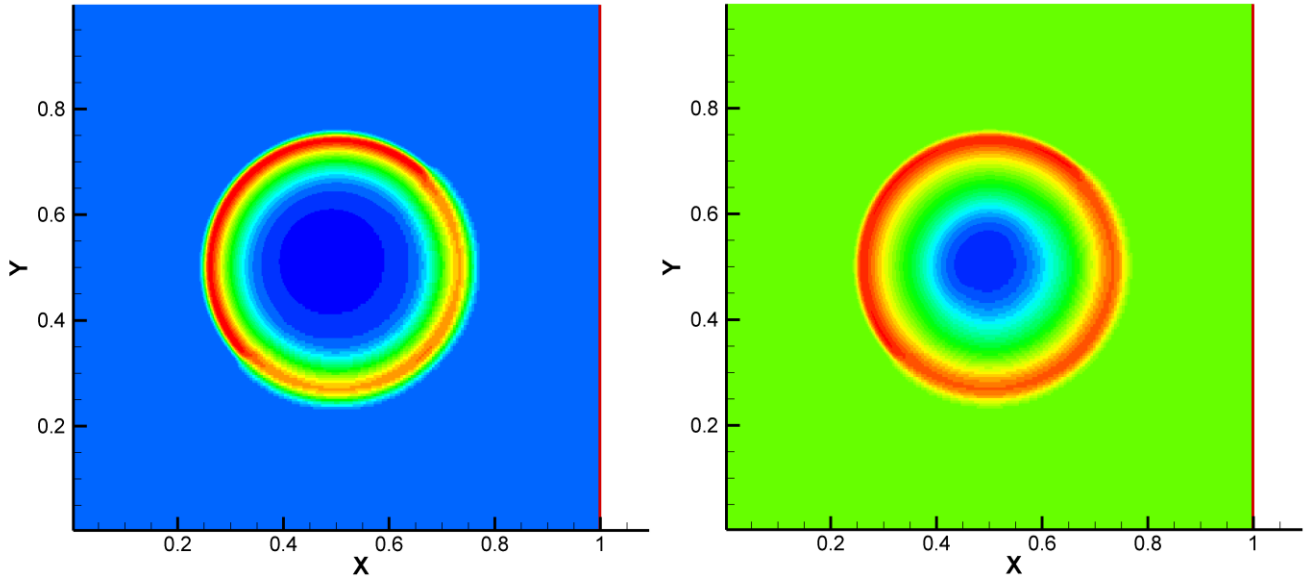


Рис. 2.3. Поля давления (слева) и плотности (справа) после расчета идентичной задачи на базовой (ниже главной диагонали) и мелкой (выше главной диагонали) сетках.

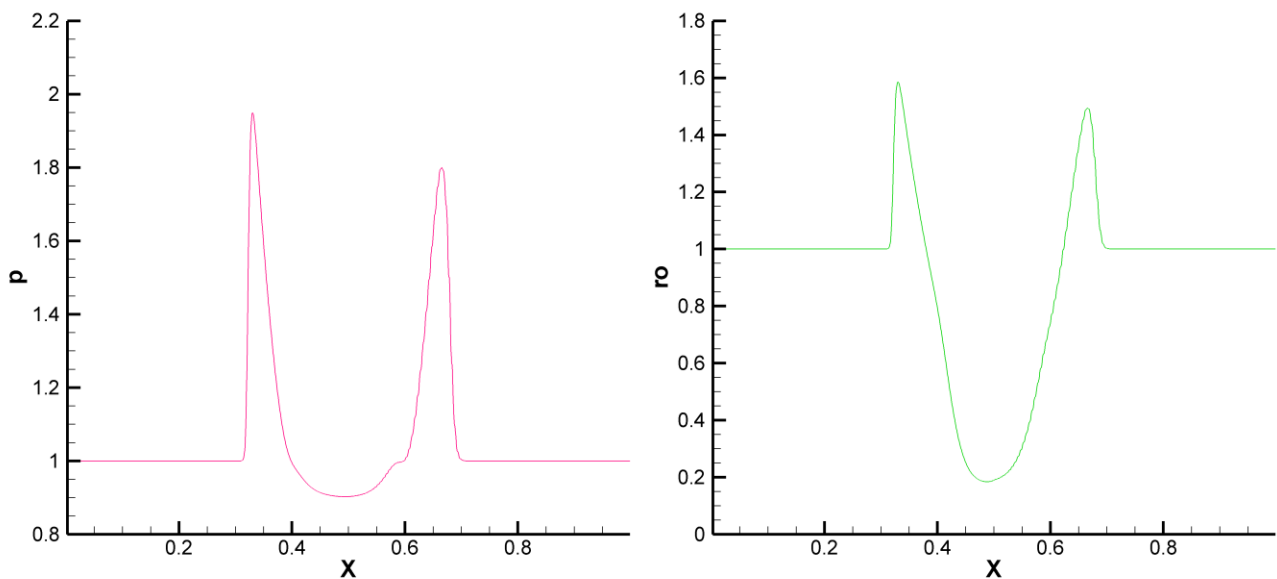


Рис. 2.4. Срезы давления (слева) и плотности (справа) уровней вдоль второй диагонали квадрата.

Графики показывают, что результат расчета на мелкой сетке более гладкий, профили давления и плотности получаются более четкими, пики большими по амплитуде. По срезам хорошо видна и количественная разница между двумя результатами.

2.5. Расчет на сетке, динамически изменяющейся по заданному закону

Для верификации модуля перестройки сетки был проведен отдельный тест. Осуществлялась продувка квадратной области $[0;1] \times [0;1]$ с вектором начальных данных $(\rho, U_x, U_y, p) = (1, 1, 2, 1)$. На всех границах – условие нулевого сноса. По грубой сетке размером в 500×500 ячеек двигалась полоса измельчения шириной в 10 ячеек (см. рис. 2.5).

При достижении границы полоса отражалась и двигалась в обратном направлении. За 1000 курантовских временных шагов суммарная ошибка по области оставалась порядка машинного нуля (порядка 10^{-14}). Это свидетельствует о том, что переход между уровнями не вносит расчетных ошибок.

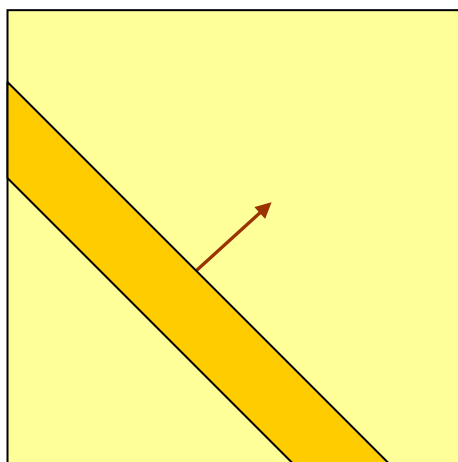


Рис. 2.5. Конфигурация расчетной сетке для верификации модуля ее перестройки (желтым показана грубая, оранжевым - мелкая сетка).

3. Критерий гладкости сеточного решения на основе вейвлет-анализа

3.1. Проекция решения на мелкую виртуальную сетку

Так как существующий модуль анализа коэффициентов позволяет работу со структурированными сетками, перед вейвлет-анализом текущего распределения в области для неконформной сетки необходимо провести простую процедуру проекции сеточного решения на один конкретный уровень. Нам необходимо уловить максимальное количество особенностей решения на текущем шаге, поэтому будем проектировать решения на мелкую сетку (для двухуровневого случая – на сетку 1-го уровня). Для физических ячеек 1-го уровня с индексами (i, j) просто используем их, а если таковых нет, то будем использовать значения параметров для их потенциальных родителей (ячеек 0-го уровня с индексами $([i/2], [j/2])$).

3.2. Основные конструкции базисных вейвлетов

Обозначим,

$$\delta_k(x, t) := (k+1)(t-x)_+^k$$

где $f(\xi)_+ = f(\xi)\theta(\xi)$, $\theta(\xi)$ - функция Хевисайда, и через $\Delta = \{x_0, \dots, x_{k+1}\}$ - набор узлов. Без ограничения общности для упрощения обозначений можно положить $x_0 = 0$. Тогда B -сплайн k -ой степени на равномерной сетке с шагом $h = x_{i+1} - x_i$ определяется формулой

$$B_k(x) := \frac{1}{h^{k+1}(k+1)!} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^{k-j+1} \delta_k(x, jh) \quad (3.1)$$

Напомним, что p -й момент этого сплайна вычисляется по формуле:

$$M^p(B_k(x)) := \int_{-\infty}^{+\infty} B_k(x) x^p dx = \frac{p! h^p}{(k+p+1)!} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^{k+1-j} (j)^{k+p+1} \quad (3.2).$$

Известно, что для B -сплайнов, построенных на равномерных сетках, выполняется двухмасштабное соотношение см. [11,12]

$$B_k(x/2) = 2^{-k-1} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} B_k(x - jh) \quad (3.3)$$

Это соотношение служит основой построения вейвлетов Баттла-Лемарье [9,10], однако наличие неограниченного носителя делает их неудобными для вычислительных приложений.

Заметим, что если построить B -сплайн $\tilde{B}_k(x)$ по сетке $\tilde{\Delta} = \{0, 2h, \dots, 2(k+1)h\}$ с удвоенным шагом, то

$$B_k(x/2) = \tilde{B}_k(x). \quad (3.4)$$

Пусть на отрезке $[0, b]$ задана равномерная сетка из $2L+1$ узлов. Сплайны $B_{k,j}(x) := B_k(x - jh)$, $j=0, \dots, 2L-k-1$, линейно независимы и, аналогично, линейно независимы сплайны

$$\tilde{B}_{k,l}(x) := \tilde{B}_k(x - 2lh), \quad l=0, \dots, L-k-1. \quad (3.5)$$

Обозначим $V_0 = \mathit{span}_j B_{k,j}(x)$, $V_1 = \mathit{span}_l \tilde{B}_{k,l}(x)$.

Поскольку $V_1 \subset V_0$, то можно определить алгебраическое дополнение к V_1 так, что

$$V_0 = V_1 + W_1,$$

причем $\dim V_1 = L-k$, а $\dim W_1 = L$. Обозначим $\tilde{w}_j(x) := B_{k,2j}(x)$, $l=0, \dots, L-1$, тогда, например, можно взять $W_1 = \mathit{span}_l \tilde{w}_j(x)$.

Методом лифтинга Свелденса [14] построим вейвлет $w(x)$, имеющих p нулевых моментов:

$$w(x) = B_k(x) - \sum_{j=0}^p \alpha_j \tilde{B}_{k,j}(x), \quad (3.6)$$

которые будут служить заменой вейвлетам Баттла-Лемарье.

Коэффициенты α_j могут быть найдены из системы:

$$\sum_{j=0}^p M^i(\tilde{B}_{k,j}) \alpha_j = M^i(B_k), \quad , 0 \leq i \leq p. \quad (3.7)$$

Далее приводится пример таблицы коэффициентов α_j для случая, когда точки $\{x_i\}$ распределены равномерно, а множество прореженных узлов $\{z_i\}$ получается из множества $\{x_i\}$ выбрасыванием узлов строго через один: $z_i = x_{2i}$.

Таблица. 3.1. Таблица коэффициентов α_j для $k=4$.

p+1 \ j	0	1	2	3
1	1	0	0	0
2	2	-1	0	0
3	2.875	-2.75	0.875	0
4	3.625	-5	3.125	-0.75

3.3. Вейвлет разложение

Пусть дискретная функция $\{f_i\}$ $0 \leq i < 2N$ задана в узлах равномерной сетки. Если отождествить значения функции с коэффициентами её разложения по базису из функций биортогональных В-сплайнам порядка k , заданным на этой сетке, и проредить узлы исходной сетки через один, построив на новой сетке соответствующий базис В-сплайнов, то можно определить сглаживающее и вейвлет-разложения, соответствующие переходу на разреженную сетку.

Сглаживающее преобразование определим формулой

$$c_i = \sum_{j=0}^{k+1} \beta_j \tilde{f}_{2i+j}, \quad \beta_j := 2^{-k-1} \binom{k+1}{j}, \quad \text{где } 0 \leq i < N, \quad (3.8)$$

$$a \quad \tilde{f}_l = \begin{cases} f_l, & l < 2N \\ 2f_{2N-1} - f_{2N-1-l}, & l \geq 2N \end{cases}$$

Где для удобства дальнейшего применения проводится нечетное (или четное) продолжение функции $\{f_i\}$ на $2N \leq i < 4N$ и ее распространение на все узлы с целочисленными индексами периодизацией (см.[11, 12]). Вейвлетные коэффициенты для вейвлета, имеющего p нулевых моментов, для нечетного продолжения определяются по формуле:

$$d_i = f_{2i} - \sum_{j=0}^p \alpha_j \tilde{c}_{i+j}, \text{ где } 0 \leq i < N, \text{ а } \tilde{c}_l = \begin{cases} c_l, & l < N \\ 2c_{N-1} - c_{N-1-l}, & l \geq N \end{cases}. \quad (3.9)$$

В двумерном случае разложение функции $\{g_{ij}\}$, $0 \leq i < 2N$, $0 \leq j < 2N$ производится сначала по строкам, где каждая строка разлагается на сглаженную компоненту $\{l_{ij}\}$, $0 \leq i < 2N$, $0 \leq j < N$ и вейвлетную компоненту $\{h_{ij}\}$, $0 \leq i < 2N$, $0 \leq j < N$. Затем обе компоненты разлагаются по столбцам. В результате получаем одну сглаженную компоненту $\{ll_{ij}\}$, $0 \leq i < N$, $0 \leq j < N$ и три вейвлетных компоненты: $\{lh_{ij}\}$, $\{hl_{ij}\}$, $\{hh_{ij}\}$, $0 \leq i < N$, $0 \leq j < N$.

3.4. Флаги адаптация расчетных сеток

Пусть на прямоугольной сетке задана расчетная величина $\{g_{ij}\}$, $0 \leq i < 2N$, $0 \leq j < 2N$ (например, плотность или давление газодинамического течения). И задан порог δ (величина которого обуславливается шагом расчетной сетки и качеством расчета). Тогда можно вычислить вейвлет-разложение $\{g_{ij}\}$ и определить множество флагов:

$$flag_{ij} = 1, \text{ если } \left(lh_{\lfloor j/2 \rfloor \lfloor j/2 \rfloor} > \delta \right) \vee \left(hl_{\lfloor j/2 \rfloor \lfloor j/2 \rfloor} > \delta \right) \vee \left(hh_{\lfloor j/2 \rfloor \lfloor j/2 \rfloor} > \delta \right), \quad (3.10)$$

$$flag_{ij} = 0, \text{ в противном случае, } \quad 0 \leq i < 2N, \quad 0 \leq j < 2N.$$

Ненулевые флаги определяют области, где необходимо сохранить мелкую сетку, в остальных областях можно использовать более грубую сетку.

Из (2) и (3) следует, что:

$$d_i = d_i(f_{2i}; \dots; f_{2i+2p+k-1}). \quad (3.11)$$

Таким образом, преобразование является сильно несимметричным. Поэтому флаги смещаются относительно положения индексируемых ими особенностей. Определим величину $s = \left[\frac{(2p+k)}{4} \right]$ и используем смещенные флаги:

$$\tilde{flag}_i = \begin{cases} flag_{i+s}, & i+s < 2N \\ flag_{2N-1}, & i+s \geq 2N \end{cases}, \quad 0 \leq i < 2N. \quad (3.12)$$

3.5. Примеры выходных данных вейвлет-анализа сеточных решений

Для получения динамической адаптивной сетки будем позволять огрублять сетку только там, где коэффициенты вейвлет-разложения решения меньше некоторого порога. Первый шаг расчета всегда будем проводить на мелкой сетке (1-го уровня). Если коэффициент разложения решения на мелкой виртуальной сетке малый, а ячейка мелкая (1-го уровня, мелкой сетки), позволим огрубить ее. Если ячейка базовая, а вейвлет-разложение дает, хотя бы для одного из четырех виртуальных потомков, высокое значение коэффициента, будем делить ячейку.

Реализованный программный модуль вейвлет-анализа сеточного решения позволяет раскладывать решение по базису из вейвлетов разных порядков (где под порядком подразумевается величина k , где k степень сплайна) с различным числом нулевых моментов. Кроме того, результаты анализа очень чувствительны к величине погрешности `border` (числа-порога, начиная с которого мы полагаем коэффициенты разложения равными нули). Ясно, что величина `border` должна быть порядка пространственного шага h , что соответствует точности решения полученного методом первого порядка. Расчеты показывают, что наилучшие результаты получаются при величинах в несколько раз меньше данного шага, например $2h/3, h/2, h/3, h/4$.

На рис. 3.1 представлены значения флагов адаптации (красный цвет соответствует значению 1, возможности огрубить сетку, синий – 0 и необходимости дальнейшего расчета на мелкой) для одного и того же сеточного решения и

разных порядках и числе нулевых моментов применяемых вейвлетов при постоянном пороге. Адаптация проводилась по полю давления, также представленному на изображении.

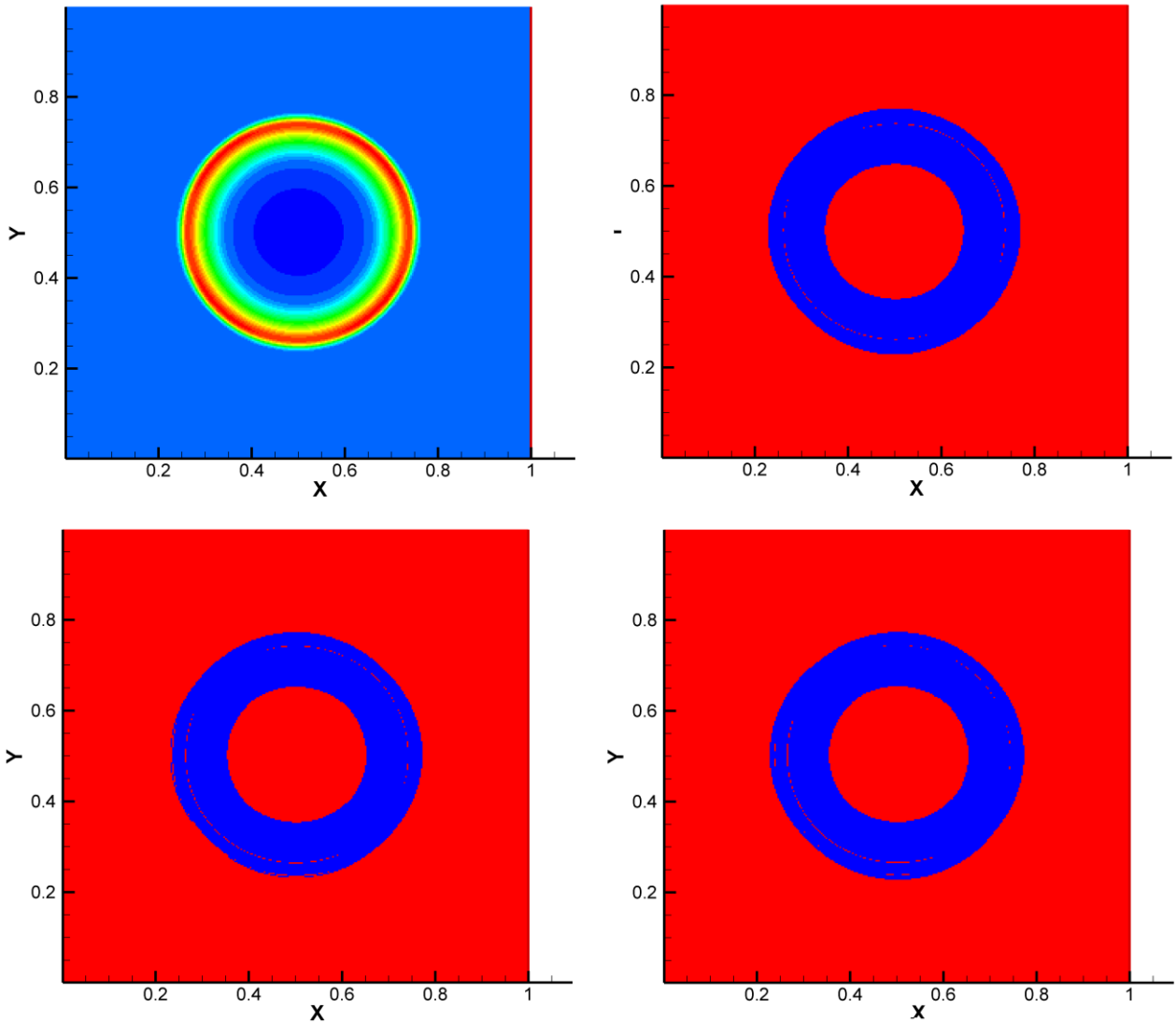


Рис. 3.1. Поле давления (слева сверху) и значения соответствующих флагов адаптации для вейвлетов (1,2) справа сверху, (1,3) слева внизу и (2,1) справа внизу, где в записи (a,b) a - порядок вейвлета, b -число нулевых моментов.

На рис. 3.2 показано влияние величины порога для того же самого решения и одного типа вейвлета на распределение флагов адаптации. Используется вейвлет первого порядка с двумя нулевыми моментами. Здесь видно, что уменьшения порога увеличивает число мелких ячеек. При увеличении порога можно добиться наименьшего размера сетки, быстрого счета и точного описа-

ния волновых фронтов, однако чрезмерное увеличение порога приводит к большим погрешностям в решении.

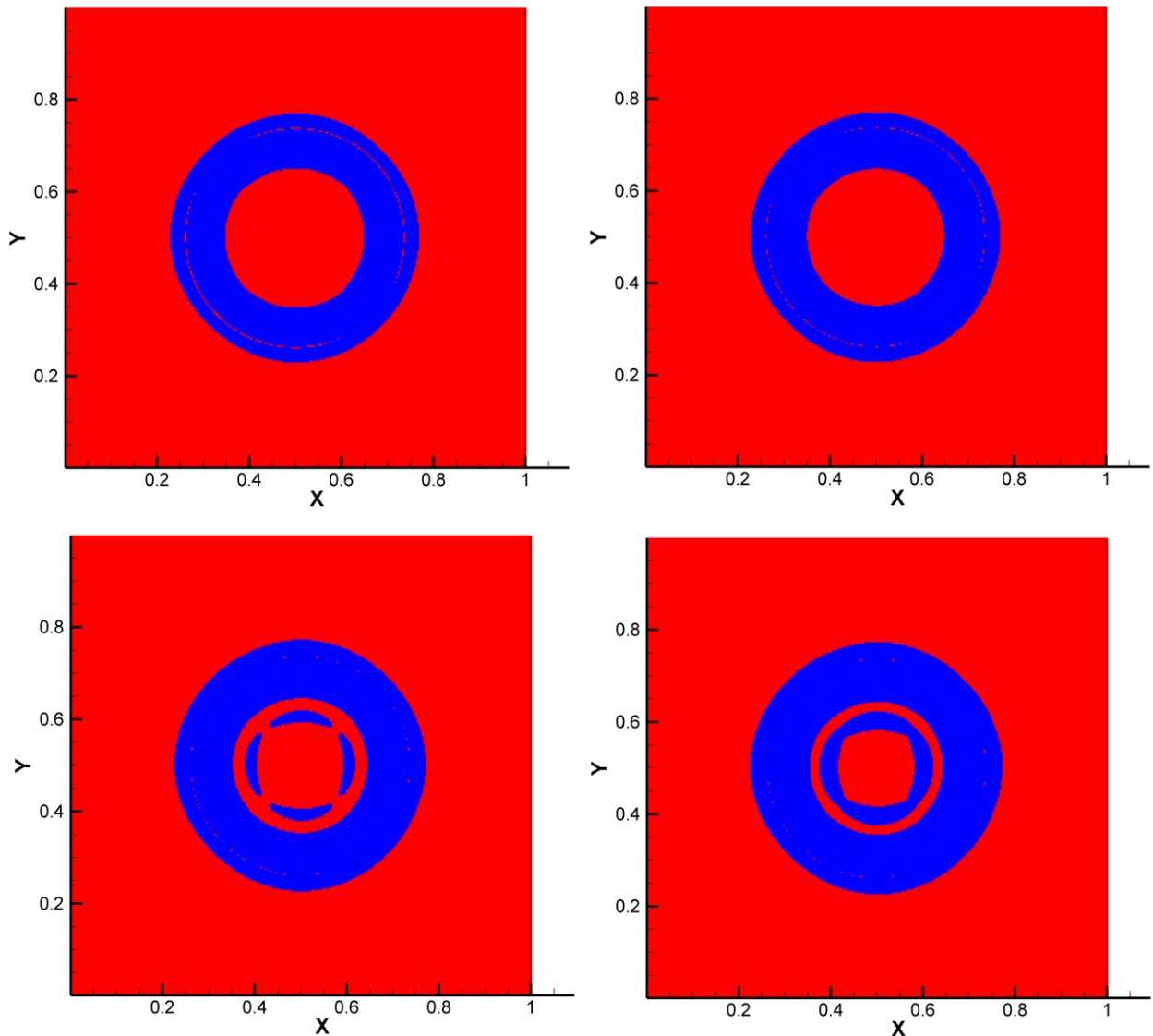


Рис. 3.2. Влияние порога обнуления вейвлет-коэффициента на матрицу флагов адаптации сетки (слева направо, сверху вниз пороги, равные $2h/3, h/2, h/3, h/4$ соответственно).

4. Результаты расчетов на локально адаптивных сетках

4.1. Задача Седова о сильном точечном взрыве

В данном разделе представлены расчеты задач на сетке с динамической адаптацией и анализ их результатов. Для одной из задач Седова о точечном взрыве [6] были проведены расчеты на адаптивной сетке, постоянной базовой

сетке и сетке вдвое мельче, соответствующей 1-му уровню адаптации. Адаптация проводилась по полю плотностей.

При базовой сетке в 200×200 ячеек получены результаты, представленные на рис. 4.1, для сетки 1000×1000 ячеек – на рис. 4.2. На этих рисунках показаны распределения давлений, полученные по итогам расчета на разных сетках и профиль давлений вдоль горизонтального среза (вдоль оси x), проходящего через эпицентр взрыва.

В таблице 4.1 представлены времена расчета этой задачи для базовой, мелкой и адаптивной сетки с базовой величиной в 200×200 ячеек, в таблице 4.2 – аналогичные данные для базовой сетки величиной 1000×1000 ячеек.

Приведенные численные эксперименты демонстрируют, что адаптация сетки позволяет получить результат, мало отличимый от результата по точной (более мелкой) сетке значительно быстрее.

Таблица. 4.1. *Времена расчета и средний объем занимаемой памяти при численном решении задачи Седова на различных модификациях базовой сетки размером 200×200 ячеек.*

Тип сетки	Размер сетки	Время расчета, с.
Базовая	200×200	6,84
Точная	400×400	66,08
Адаптивная	Переменный	22,92

Таблица. 4.2. *Времена расчета и средний объем занимаемой памяти при численном решении задачи Седова на различных модификациях базовой сетки размером 200×200 ячеек.*

Тип сетки	Размер сетки	Время расчета, с.
Базовая	1000×1000	349
Точная	2000×2000	2871
Адаптивная	Переменный	1002

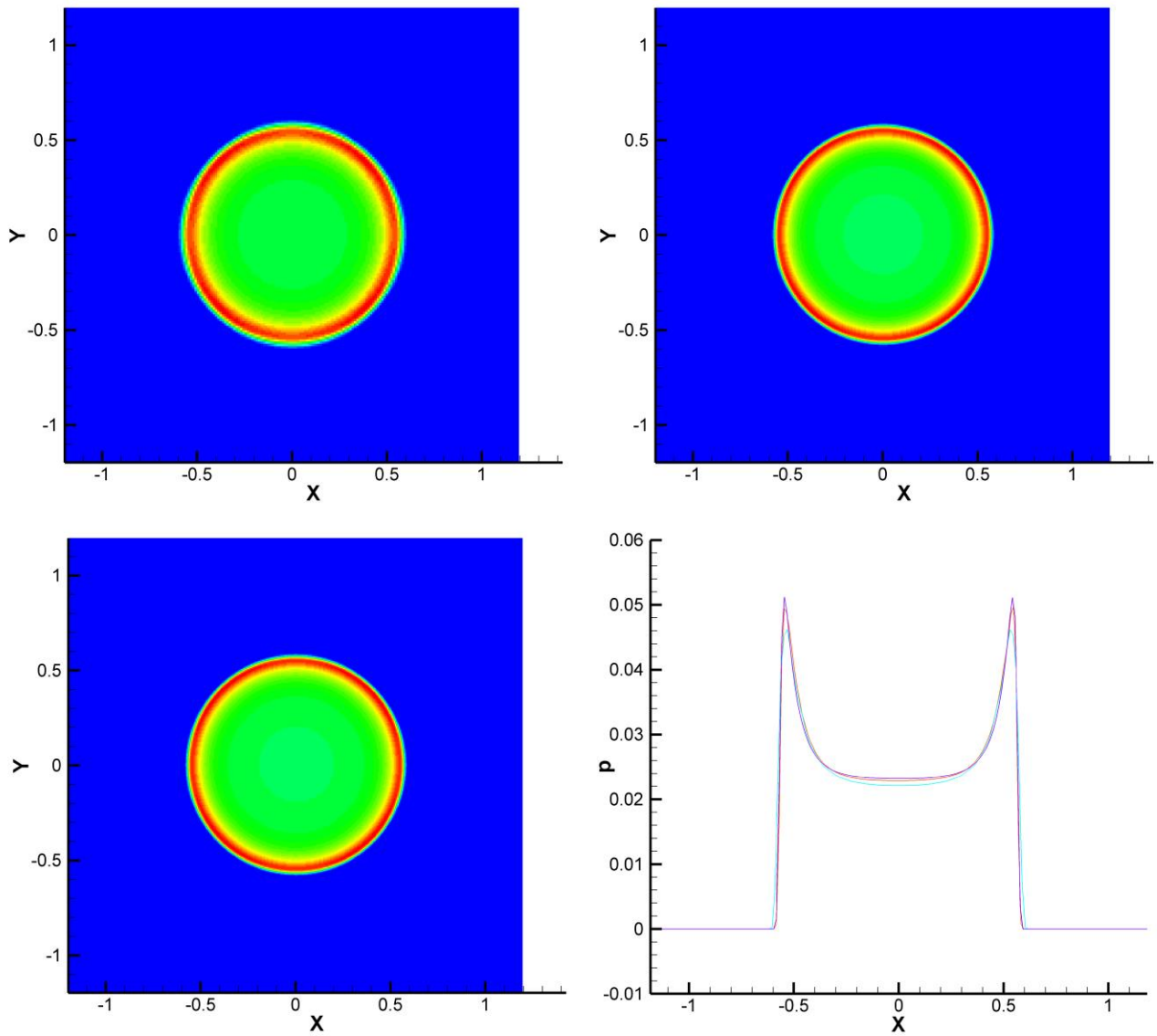


Рис. 4.1. Расчеты задачи Седова на базовой (слева сверху), мелкой (справа сверху) и адаптивной (слева внизу) сетках с базовым размером 200×200 (поля давлений). Справа внизу - профили давления (синий – мелкая сетка, розовый – адаптивная, лазурный – базовая).

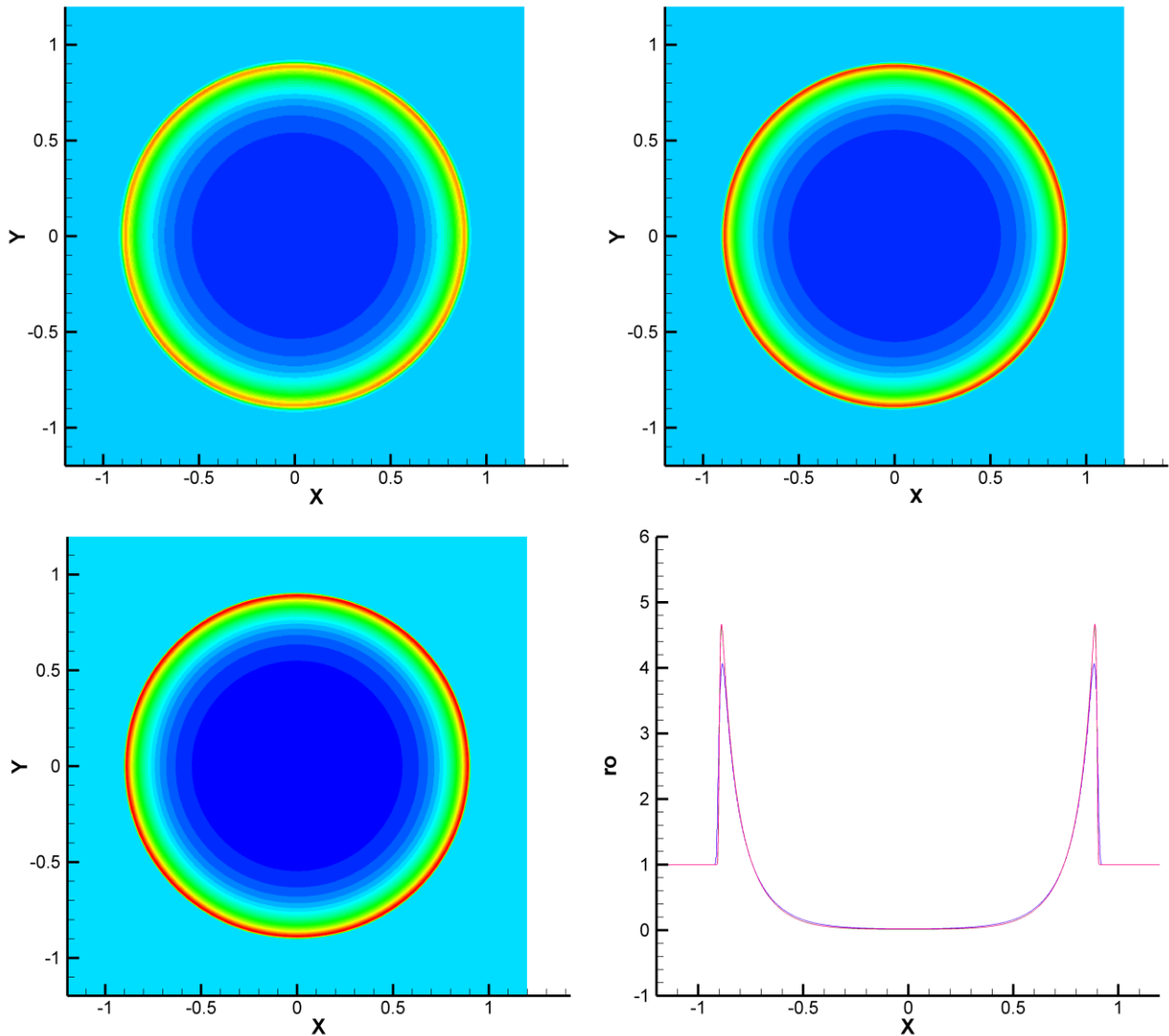


Рис. 4.2. Расчеты задачи Седова на базовой (слева сверху), мелкой (справа сверху) и адаптивной (слева внизу) сетках с базовым размером 1000×1000 (поля плотностей). Справа внизу – профили плотностей (синий – мелкая сетка, розовый – адаптивная, лазурный – базовая, почти сливаются).

Если расчет любой задачи на точной сетке примерно в 8 раз медленнее расчета на базовой, то адаптивный расчет данной задачи в среднем только в 4 раза медленнее. Если считать решение на мелкой сетке эталонным, то точность решения на адаптивной в l_1 норме (рассматривались поля плотностей, норма – сумма модулей отклонений расчетных значений от эталонных в референтных точках) гораздо выше, чем у решения на базовой сетке (426,8 против 3177,2 для базовой сетки 200×200 и 213,4 против 874,2 для базовой сетки 1000×1000).

4.2. Взаимодействие двух точечных взрывов

Кроме того, был проведен расчет с несимметричной конфигурацией (взаимодействие точечных взрывов разной интенсивности). Расчеты проводились, как и для предыдущего раздела, на трех типах сетки – базовой, мелкой и адаптивной. Базовый размер сетки был равен 500×500 . Полученные распределения плотностей и флагов адаптации по окончании расчета на сетке с динамической локальной адаптацией представлены аналогично рис. 4.1 и 4.2 на рис. 4.3. Адаптация проводилась по полю плотностей, представленному на изображении, порог обнуления вейвлет-коэффициентов полагали равным $h/4$.

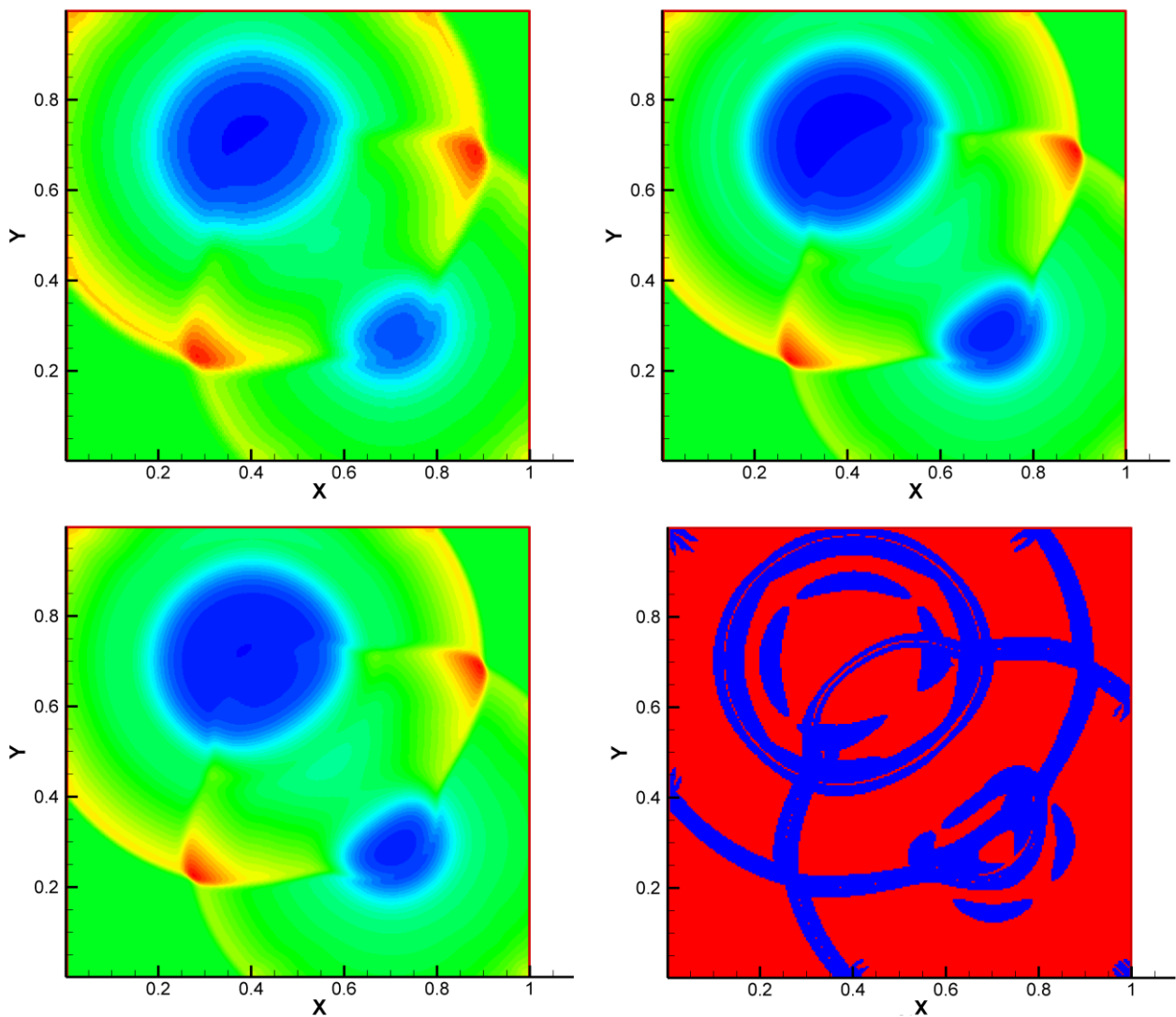


Рис. 4.3. Поля плотностей на базовой (слева сверху), мелкой (справа сверху) и адаптивной (слева внизу) сетках, флаги адаптации (внизу справа) после расчета на динамически адаптивной сетке для задачи взаимодействия точечных взрывов.

Заключение

Предложенный алгоритм продемонстрировал высокую эффективность на примере решения задачи о сильном взрыве. Он допускает обобщение на трехмерные задачи с неравномерной начальной декартовой сеткой и приспособлен для переноса на архитектуру К-100.

Список литературы

1. *F. Bramkamp, Ph. Lamby, and S. Mueller.* An adaptive multiscale finite volume solver for unsteady and steady state flow computations. *Comp. Phys.*, 197(2):460-490, 2004.
2. *A. Harten.* Multiresolution algorithms for the numerical solution of hyperbolic conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, 48(12):1305-1342, 1995.
3. *A. Harten.* Multiresolution representation of data: A general framework. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(3):1205-1256, 1996.
4. *G. Zumbusch.* Parallel multilevel methods. Adaptive mesh refinement and loadbalancing. *Advances in Numerical Mathematics.* Teubner, Wiesbaden, 2003.
5. *S. Osher and R. Sanders.* Numerical approximations to nonlinear conservation laws with locally varying time and space grids. *Math. Comp.*, 41:321-336, 1983.
6. *Л.И. Седов.* Механика сплошной среды, т. I, II. М.: Наука. – 1970– 1072 с.
7. *С. К Годунов, А.В Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов* Численное решение многомерных задач газовой динамики. Под ред. С.К. Годунова. М.: Наука. – 1976. – 400 с.
8. *В.В. Русанов.* Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // ЖВМиМФ – 1(2):267-279, 1961
9. *P.G. Lemaire.* Ondelettes à localisation exponentielle, *J. Math. Pure Appl.* **67**, 227-236, 1988
10. *G. Battle.* A block spin construction of ondelettes, Part I: Lemarié functions. *Comm. Math. Phys.*, 110:601-615, 1987
11. *C.K. Chui,* An introduction to wavelets, wavelet analysis and its applications, Vol 1, Academic Press, Massachusetts, 1992.
12. *G. Plonka and M. Tasche.* On the computation of periodic spline wavelets. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2:1–14, 1995.
13. *O.V. Vasilyev.* Solving multi-dimensional evolution problems with localized structures using second generation wavelets. *Int. J. Comp. Fluid Dyn.* 17:151–168, 2003.
14. *W. Sweldens.* The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 3:186–200, 1996