ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 96 за 2014 г.

Босов А.Д., Орлов Ю.Н.,
Федоров С. Л.

О распределении рядов абсолютных приростов цен на финансовых рынках

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Босов А.Д., Орлов Ю.Н., Федоров С. Л. О распределении рядов абсолютных приростов цен на финансовых рынках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 96. 15 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-96**

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А.Д. Босов, Ю.Н. Орлов, С.Л. Федоров

О распределении рядов абсолютных приростов цен на финансовых рынках

Москва — 2014

Босов А.Д., Орлов Ю.Н., Федоров С.Л.

О распределении рядов абсолютных приростов цен на финансовых рынках

Проведена фильтрация типа вложения двух случайных процессов для последовательности тиковых приростов индекса РТС. Показано, что один из рядов является стационарным, а второй – нестационарным, и определен объем выборки, на котором оба ряда становятся стационарными. Получены распределения длительностей серий двух перемежающихся рядов. С детерминацией выше 0,97 они аппроксимируются экспоненциальной зависимостью. Построена динамическая система, порождающая эмпирическое распределение расстояний между сериями равных длительностей.

Ключевые слова: нестационарный временной ряд, индекс РТС, согласованный уровень стационарности, индекс нестационарности, фильтрация

Bosov A.D., Orlov Yu.N., Fedorov S.L.

On the distribution of absolute values of returns for financial time series

For RTS index the filtration of enlargement type is carried out. The result of this filtration can be presented as composition of two series, one of which is stationary, but the second is non-stationary. The distribution function for time intervals between series of equal returns is constructed. This function has an exponential form. The dynamical system, generating the empirical distribution function between these series, is constructed.

Key words: non-stationary time series, RTS index, self-consistent stationary level, non-stationary index, filtration

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 14-01-00145

Содержание

Введение

Во многих практических применениях методов математической статистики к анализу временных рядов возникает задача определения уровня стационарности ряда в узком (относительно его функции распределения) или широком (относительно моментов распределения) смыслах. Эта задача первична по отношению к более частным вопросам, таким, как оценка среднего значения генеральной совокупности по выборке, прогноз размаха значений ряда на определенном временном горизонте и т.п.

Уровнем стационарности ряда относительно некоторого критерия, применяемого для выяснения гипотезы о стационарности функции распределения, назовем критическое значение применяемой статистики, при котором гипотеза стационарности принимается на наибольшем уровне доверия. Например, уровень стационарности выборочных функций распределения можно определять относительно критерия Колмогорова-Смирнова [1]. Этот критерий состоит в том, что если рассматриваются две независимые выборки данных длины *N*, то они признаются различными на уровне значимости α, если $1-K\left(\sqrt{\frac{N}{2}}D_N\right)<\alpha$, где $D_N=\sup\limits_x\left|F_{1,N}(x)-F_{2,N}(x)\right|$, *K* – функция Колмогорова, а $F_N(x)$ есть выборочная функция распределения (далее ВФР) данной выборки. Если имеется всего две выборки, то расстояние D_N между ними в норме *C* и есть их уровень стационарности, а достоверность того, что выборки взяты из одного распределения, равна $K\left(\sqrt{\frac{N}{2}}D_N\right)$. В случае, когда имеется много выборок, уровень значимости, на котором принимается решение о нестационарности, представляет собой оценку вероятности ошибки отклонения гипотезы о стационарности по результатам конкретных статистических экспериментов. Согласованным уровнем стационарности D_N^* (далее СУС) применительно к критерию Колмогорова-Смирнова называется такое расстояние между двумя выборками, при котором $K\left(\sqrt{\frac{N}{2}}D_N^*\right)=1-D_N^*$.

Если оказалось, что достоверность $1-D_N^*$ выполнения критерия невысока с точки зрения практических нужд, то возникает задача фильтрации данных, решение которой позволит определить (в идеале) стационарную и нестационарную составляющие временного ряда. На практике в результате фильтрации получается ряд, менее нестационарный, чем исходный (т.е. стационарный на более высоком уровне доверия), и некоторый остаток. Свойства обоих рядов можно изучать независимо, если окажется, что эти ряды слабо коррелированы. В случае высокой корреляции можно строить различные корреляционные модели, фильтрующие теперь уже корреляционную связь между рядами.

В настоящей работе рассматривается задача фильтрации нестационарной составляющей временного ряда. Эта задача имеет две различных формулировки в зависимости от того, какова физическая природа нестационарности.

Первый тип задач относится преимущественно к естественно-физической области, когда измеряется некоторая интересующая исследователя величина, но точному ее измерению препятствуют случайные факторы, искажающие показания прибора. В этом случае наблюдаемые показания $a(t)$ прибора представляют собой сумму полезного сигнала $s(t)$ и шума $w(t)$, т.е. $a(t) = s(t) + w(t)$. Как известно (см., напр., [2], стр. 398), для решения задачи линейной фильтрации надо знать спектральные характеристики сигнала и шума. Эти функции могут быть с достаточной точностью определены в радиофизических задачах, когда известна природа наблюдаемых сигналов. Если же определить такие функции не представляется возможным, то применяются различные методы сглаживания, т.е. усреднения наблюдаемого сигнала по некоторому промежутку времени. Применительно к биржевым рядам такой подход приводит к модели скользящей средней (простой или взвешенной), когда вместо исходного ряда $a(t)$ рассматривается ряд выборочных средних в скользящем окне определенной длины.

Однако следует заметить, что концепция «сигнал + шум» не вполне адекватна реально происходящим процессам, если с ее помощью моделируются цены на бирже. Цена в определенный момент времени – это и есть полезный сигнал, так как именно по этой цене была совершена покупка, а не по какой-то другой, скрытой в шуме. Поэтому более корректной представляется модель вложенных случайных процессов, когда имеются несколько стационарных или нестационарных временных рядов, которые случайно перемежаются между собой. Например, можно представить себе пианиста, который левой рукой играет одно произведение, а правой – другое, причем процесс ординарный, т.е. в один момент времени осуществляется нажатие только одной клавиши. Слушатель, воспринимая общий поток звуков и не видя собственно процесса извлечения последовательности звуков, вполне может считать, что ему исполняют какофонию, тогда как на самом деле между собой случайно перемежаются звуки двух вполне гармоничных произведений.

Строго говоря, реальный процесс биржевой торговли двумерный по каждому финансовому инструменту – это цена и объем сделки. Мы будем рассматривать только первую его составляющую.

В настоящей работе модель вложения случайных процессов применяется к тиковому ряду индекса РТС. Идея разделения исходного ряда на квазистационарные составляющие основана на том, что для любого ряда значений случайной величины всегда существует фильтрация стационарного вложения – например, прироста ряда на 1 пункт. Именно, ряд из тождественных единиц без «пробелов», очевидно, стационарный, хотя такая фильтрация тривиальна и не несет в себе нового содержания по сравнению с исходным рядом. Если никакая фильтрация (приростов на 2 пункта, 3 пункта и т.д., а также аналогичных отрицательных приростов) не изменяет уровень стационарности оставшегося ряда, то данный метод не подходит для анализа нестационарных свойств.

На практике оказывается, что если задать коридор, внутри которого только и рассматриваются приросты ряда, в нашем случае – индекса РТС, то с уменьшением ширины коридора увеличивается уровень стационарности ряда, заключенного внутри этого коридора. Поэтому можно предположить, что существует такая ширина коридора, отличная от тривиальной (нулевой), внутри которой ряд тиковых приростов становится стационарным с точностью, достаточной для практического применения. Поскольку корреляционные функции между всеми такого рода составляющими исходного ряда близки к нулю (порядка 0,02 по абсолютной величине), то оба ряда (результат фильтрации и остаток) можно изучать независимо.

Предлагается рассмотреть фильтрацию следующего вида. Во-первых, исходный ряд преобразуется в ряд первых (т.е. соседних) разностей. Во-вторых, из этого ряда приростов удаляются все нулевые значения. Оставшийся ряд разбивается на две составляющих. Первая содержит приросты индекса, равные ± 1, а вторая – все остальные приросты. Объектом статистического анализа являются длительности в терминах числа событий (а не реального времени!), с которыми чередуются между собой оба ряда. По построению фильтрации, чередование происходит строго через раз, т.е. серия приростов с единичной абсолютной величиной чередуется с серией приростов с другими величинами. Будем для определенности считать, что ряд из единичных приростов «первый», длительности соответствующих серий нумеруются нечетными порядковыми номерами, а ряд остальных приростов «второй», его длительности нумеруются четными номерами. Анализ ряда, таким образом, сводится к анализу длительностей серий событий первого и второго типов.

1. Индекс нестационарности ряда в норме C

В работе [3] была сформулирована методика расчета индекса нестационарности временного ряда. Повторим для замкнутости изложения основные положения этой методики.

Анализируется временной ряд $\xi(t)$. На практике он представляет собой конечную последовательность $N+1$ чисел (элементов ряда), каждое число имеет свой порядковый номер, т.е. номер события. Затем рассматривается последовательность из N чисел, называемых первыми разностями:

$$z(t) = \xi(t+1) - \xi(t), \qquad (1)$$

после чего величины $z(t)$ нормируются на отрезок $[0;1]$. Получившиеся числа обозначаются далее как $x(t)$:

$$x(t)=\frac{z(t)-z_{\min}}{z_{\max}-z_{\min}},\ t=1,2,...,N. \tag{2}$$

При численном анализе функции распределения $F(x)$ промежуток $[0;1]$ равномерно разбивается на достаточно большое число классовых интервалов, чтобы можно было вычислять выборочную функцию распределения с точностью, превосходящей статистическую ошибку в определении эмпирических вероятностей в предположении стационарности распределения. Поскольку в работе анализируются функции распределения, а не плотности вероятности, то мелкость разбиения не играет роли, если она достаточно мелкая. Внутри k-го классового интервала эмпирическая вероятность f_k есть частота попадания в него элементов выборки из рассматриваемого ряда. Соответствующая ВФР имеет вид

$$F(x)=(nx-j)f_{j+1}+\sum_{k=1}^{j}f_k,\quad x\in\left[\frac{j}{n};\frac{j+1}{n}\right],\quad j=0\div n-1. \tag{3}$$

Близость между ВФР в норме C в разные моменты времени определяется формулой

$$\rho(F,F')=\|F-F'\|=\sup_x|F(x,t)-F'(x,t')|. \tag{4}$$

Будем далее обозначать ВФР величин x, построенную по выборке длины N, отсчитанной назад от момента времени t, через $F_N(x,t)$. Моментом времени мы здесь считаем номер события. Поскольку критерий Колмогорова-Смирнова применяется к независимым выборкам, то мы будем рассматривать расстояния между встык-выборками длины N, обозначаемые как

$$\rho_N(t)=\sup_x|F_N(x,t)-F_N(x,t+N)|. \tag{5}$$

Пусть расстояние (5) вычислено в последовательные моменты времени $t_0+1,...,t_0+T$. По этим T статистическим экспериментам строится выборочная функция распределения $G_N(\rho)$ расстояний (5) между встык-выборками длины N. В соответствии с работами [3, 4] для распределения $G_N(\rho)$ согласованным уровнем стационарности называется величина $\rho^*(N)$, являющаяся решением уравнения

$$G_N(\rho)=1-\rho. \tag{6}$$

В норме C уровень стационарного шума $\varepsilon_0(N)$ между двумя независимыми выборками длины N определяется решением трансцендентного уравнения (см. [4])

$$1-\varepsilon=K\left(\sqrt{\frac{N}{2}}\varepsilon\right). \tag{7}$$

Величина $\varepsilon_0(N)$ есть доля выборок из стационарного ряда, расстояние между которыми больше, чем $\varepsilon_0(N)$. Подчеркнем, что вид функции $\varepsilon_0(N)$ не зависит от конкретного временного ряда, если только он стационарный в смысле своей ВФР. Аналогично и $\rho^*(N)$ есть доля выборок из рассматриваемого временного ряда, расстояние между которыми больше, чем $\rho^*(N)$. Индексом нестационарности будем называть отношение

$$J(N) = \frac{\rho^*(N)}{\varepsilon_0(N)}. \tag{8}$$

Этот индекс показывает, во сколько раз доля расстояний, больших СУС, превосходит аналогичный показатель для стационарных рядов. Если $J(N) \leq 1$, ряд считается стационарным, а если $J(N) > 1$, то ряд нестационарный.

Описанная методика применяется к анализу тикового ряда индекса РТС, из которого исключены совпадающие значения (так называемый ряд дистинктивных тиков) и произведена фильтрация в виде разделения на два ряда, как описано во введении.

2. Результаты расчетов индекса нестационарности для тиков РТС

Рассматриваются длины встык-выборок от 1 до 15 тыс. абсолютных величин приростов дистинктивных тиков ряда РТС. Индекс нестационарности для этого ряда приведен на рис. 1. Данные для расчетов взяты за третий квартал 2014 г.

Рис. 1. Индекс нестационарности абсолютных приростов ряда дистинктивных тиков РТС

Из рис. 1 следует, что функция распределения абсолютных приростов ряда дистинктивных тиков РТС становится стационарной на длине 7 тыс.

событий и далее остается стационарной. Наиболее заметно нестационарность проявляется на длине 2 тыс. тиков.

Стационарная плотность распределения абсолютных приростов, построенная по выборке в 40 тыс. данных, показана на рис. 2. Пунктом абсолютных приростов считается прирост, кратный 10.

Рис. 2. Вероятность абсолютных приростов ряда РТС

Из рис. 2 следует, что стационарная плотность распределения тиковых приростов не очень информативна для идентификации текущей ситуации: наблюдается ли тренд вверх или вниз, или реализуется боковое движение, в зависимости от длины выборки. Неопределенность состоит в том, что последовательность приростов на 1 пункт случайно прерывается другими редкими приростами, и это прерывание нестационарно.

Первые два прироста (на 1 пункт и на 2 пункта) составляют более 0,99 нормировки распределения приростов. Определяющим является ряд из приростов на 1 пункт. Именно это наблюдение привело к предположению, что для дальнейшего анализа ряд наиболее вероятных приростов должен быть отфильтрован.

В результате фильтрации исходный тиковый ряд абсолютных приростов представляется как чередование двух рядов – приростов на 1 пункт и остальных приростов. Последовательность непрерывающихся событий первого типа (приростов на 1 пункт) будем называть первой серией, а второго типа (приростов более чем на 1 пункт) – серией второго типа. Элементами каждого из рядов являются целочисленные длительности серий каждого типа. Для рядов из длительности серий рассматриваются встык-выборки от 1 до 15 тыс. серий для каждого ряда. Индекс нестационарности для этих рядов показан на рис. 3.

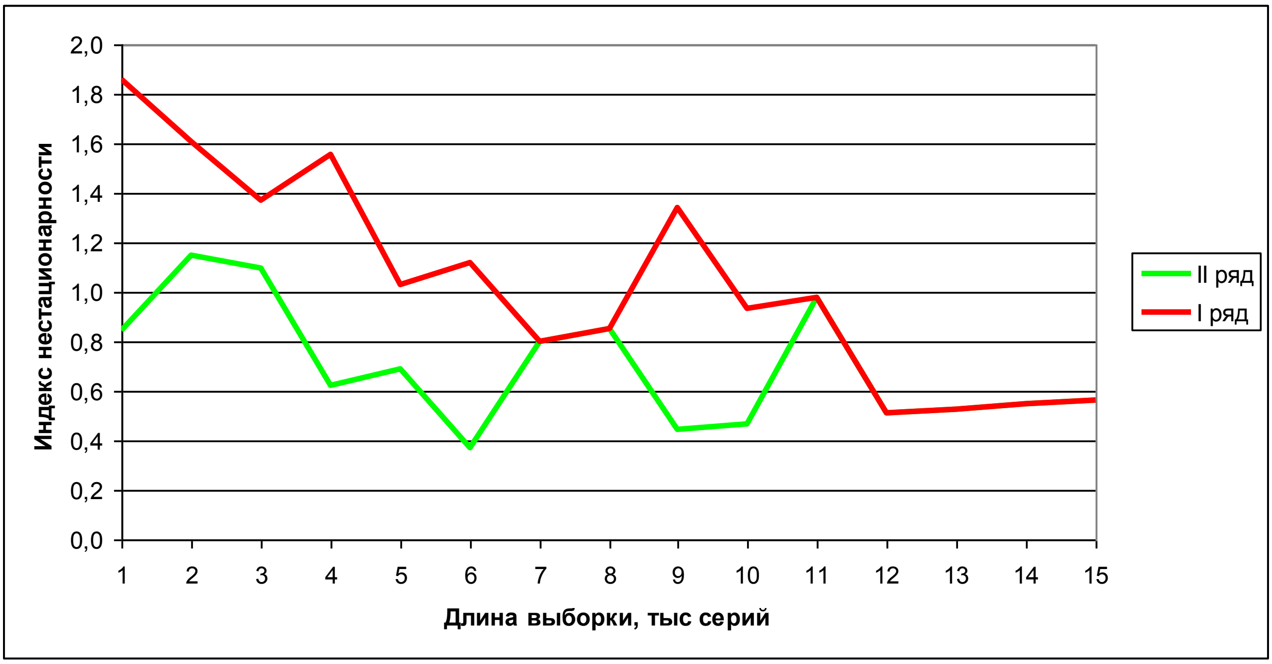

Рис. 3. Индекс нестационарности рядов серий I и II типов

Из графиков рис. 3 видно, что индекс нестационарности первого ряда больше единицы на выборках до 5 тыс., тогда как второй ряд приближенно стационарный на всех выборках. Это означает, что нестационарность присуща именно последовательности приростов на 1 абсолютный пункт, ибо этот ряд нестационарно прерывается вторым рядом, длительность которого является стационарным случайным процессом. Анализ распределений серий обоих типов проводится в следующем разделе.

3. Распределение серий по длительности

Итак, как было выяснено выше, распределение серий второго типа по длительности стационарно, а первого – нет. Уровень стационарности, т.е. СУС $\rho^*(N)$, определяемый в (6), для серий первого типа на длинах 1-5 тыс. серий примерно в полтора раза превосходит стационарную величину, определяемую по критерию Колмогорова-Смирнова. Для выборок длины 1 тыс. СУС $\rho^*(N)$ равен 0,12, а для выборок 3-5 тыс. он порядка 0,07. Расстояние между плотностями тех же распределений приблизительно в 2 раза больше. Это означает, что если считать процесс стационарным, то будет наблюдаться отличие фактического распределения от прогнозного, взятого с предыдущего шага по времени (величина шага здесь равна ширине окна выборки), в среднем равное 0,14 в норме L1. Следовательно, прогноз, если таковой будет строиться, должен давать ошибку, в среднем меньшую, чем указанная величина.

Распределения рядов серий обоих типов по длительности представлена на рис. 4 и 5.

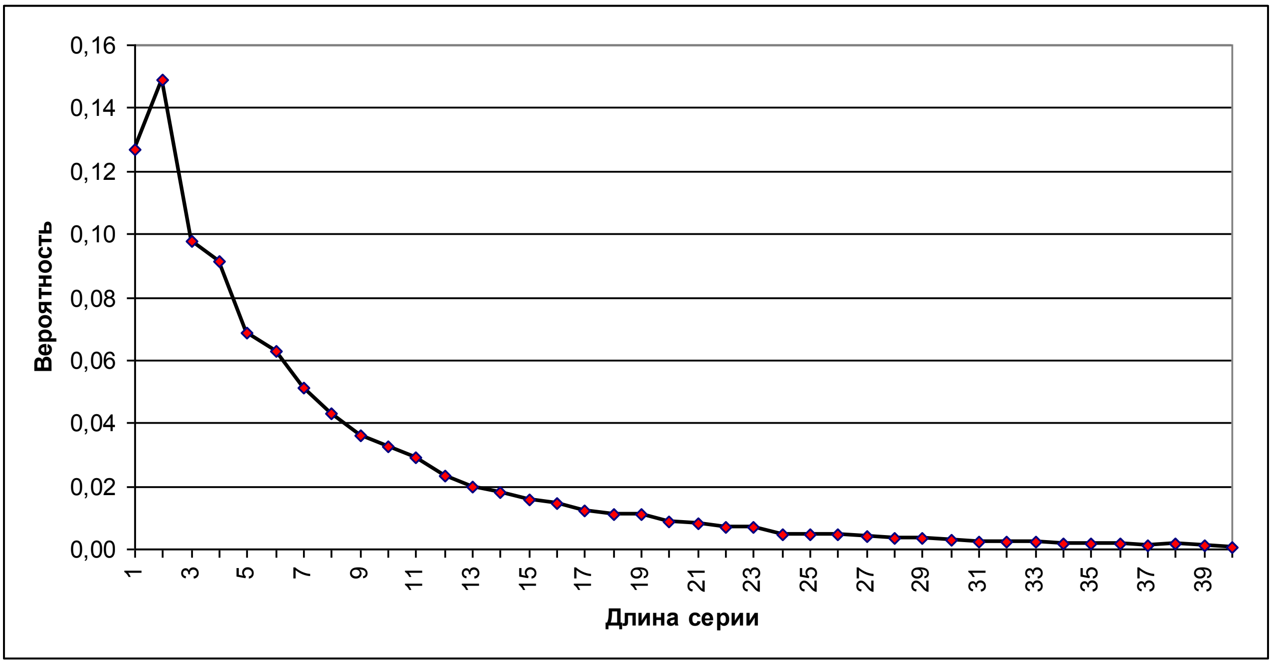

Рис. 4. Распределение серий первого типа по длительности

Характерно, что распределение первого типа немонотонно. Длина серии, равная двум, более вероятна, чем единичная, после чего зависимость от длины становится монотонной. Начиная с длины 5, вероятность аппроксимируется экспоненциальной зависимостью с детерминацией 0,99, которая имеет вид

$$P_1(n) = 0{,}09e^{-0{,}12n}, \ n \geq 5. \quad (9)$$

Средняя длина серии первого типа равна 8. Этой же величине равно и стандартное отклонение длин серий.

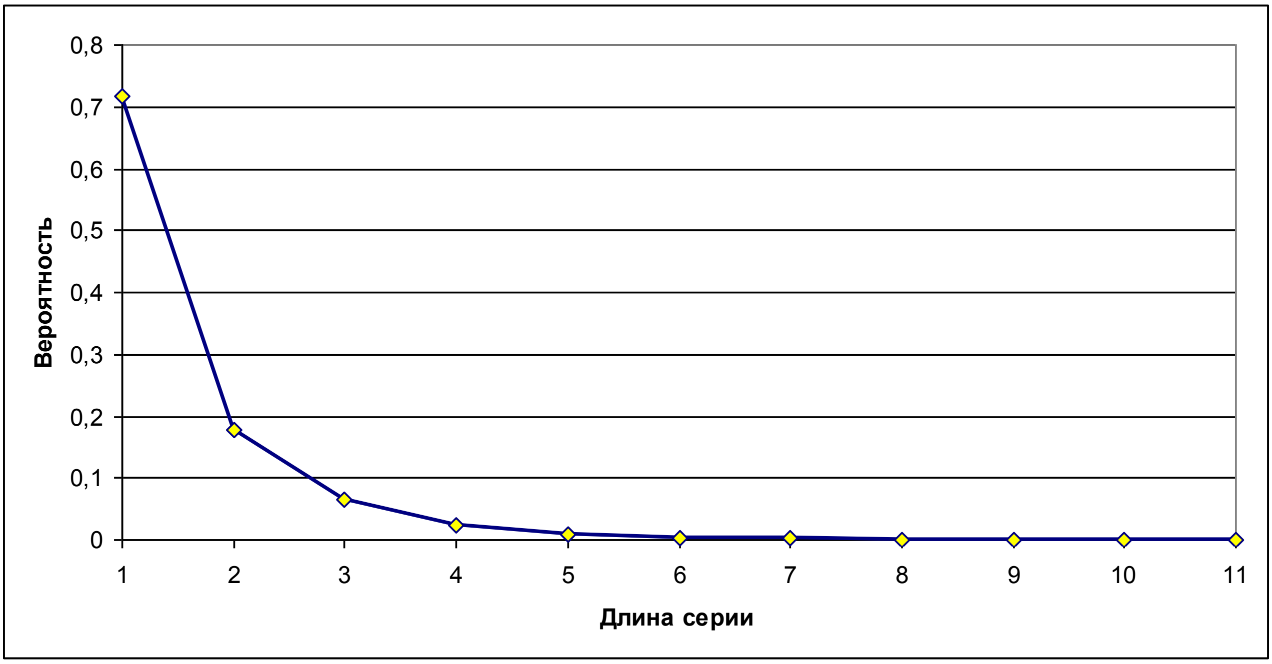

Рис. 5. Распределение серий второго типа по длительности

Единичная длина серии второго типа наиболее вероятна, остальные длины укладываются в экспоненциальную зависимость с детерминацией 0,995:

$$P_2(n) = 0{,}76 e^{-0{,}85n}, \; n \geq 2. \quad (10)$$

Средняя длина серии второго типа, как и среднеквадратичное отклонение, равны 1.

Отметим, что торговый день содержит в среднем 250 тыс. тиков, из которых примерно четверть составляют тики с ненулевыми приростами. Тогда за день происходит в среднем по 7 тыс. событий первого и второго типов. Как следует из рис. 3, на таких длинах первый ряд становится стационарным, но для анализа внутрисуточного изменения функции распределения первого типа это уже не актуально, ибо сутки закончились. Поэтому представляет интерес моделирование временного ряда длительностей серий первого типа на выборках меньших длин, например, на выборках длин 1-2 тыс.

4. Распределение расстояний между сериями равной длительности

Чем больше длительность серии первого ряда, начиная с двух, тем реже она встречается и, соответственно, тем больше характерное расстояние между такими сериями, выраженное в количестве серий других длительностей. Проанализируем расстояния между сериями равных длительностей для первого ряда. Расстоянием будем называть число серий других длительностей, которыми разделены две последовательные серии одной и той же длительности.

Во-первых, следует отметить, что наблюдается скэйлинг максимального наблюдаемого расстояния между равными длительностями и величиной самой длительности. Максимум M_n расстояний между двумя последовательными сериями длины n с достоверностью 0,98 дается линейной зависимостью

$$M_n = 20(n+1), \; n \geq 2. \quad (11)$$

Во-вторых, оказывается, что вероятность $f_n(k)$ того, что расстояние между сериями длины n равно k, для всех n с достоверностью 0,98 аппроксимируется экспоненциальной зависимостью вида

$$f_n(k) = a_n \exp(-a_n k), \quad (12)$$

где величины a_n также имеют экспоненциальный скэйлинг похожего вида:

$$a_n = b e^{-bn}, \; b \approx 0{,}2; \; n \geq 2. \quad (13)$$

Тем самым распределения расстояний между сериями равных длин обладают определенным подобием, что позволяет предположить наличие динамической системы, которая может приближенно моделировать последовательности серий ряда длительностей первого типа.

Характерные примеры распределений расстояний между сериями приведены на рис. 6 и 7.

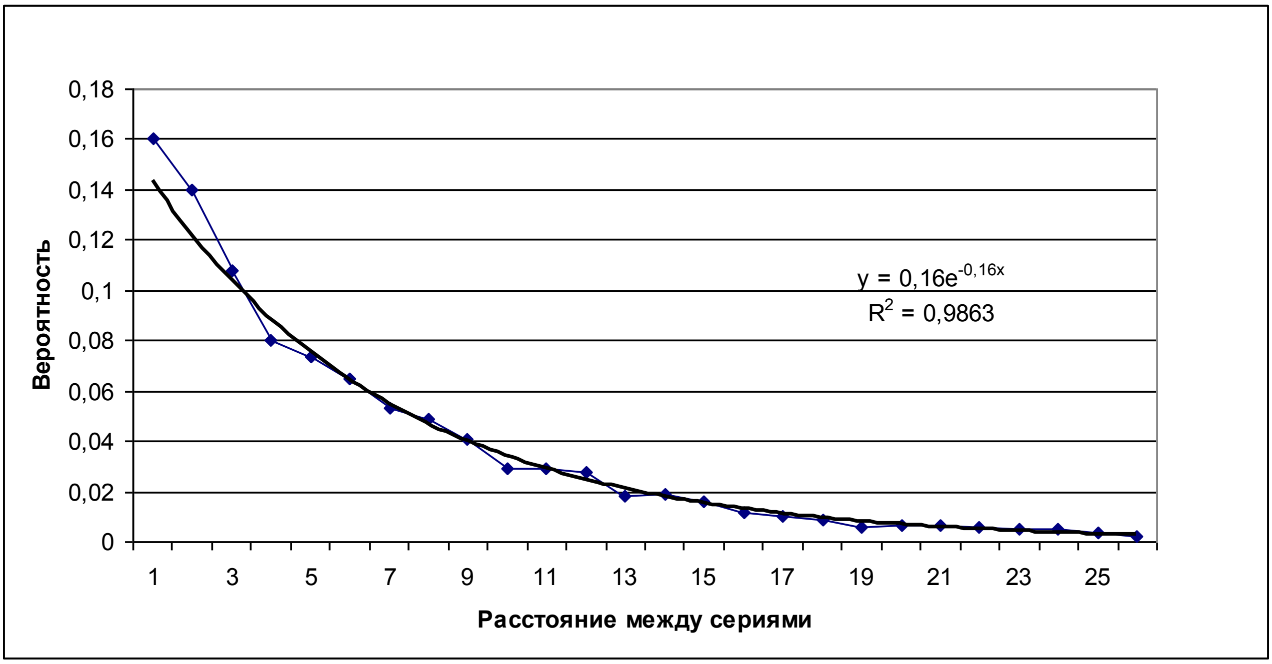

Рис. 6. Вероятность расстояний между сериями длины 2

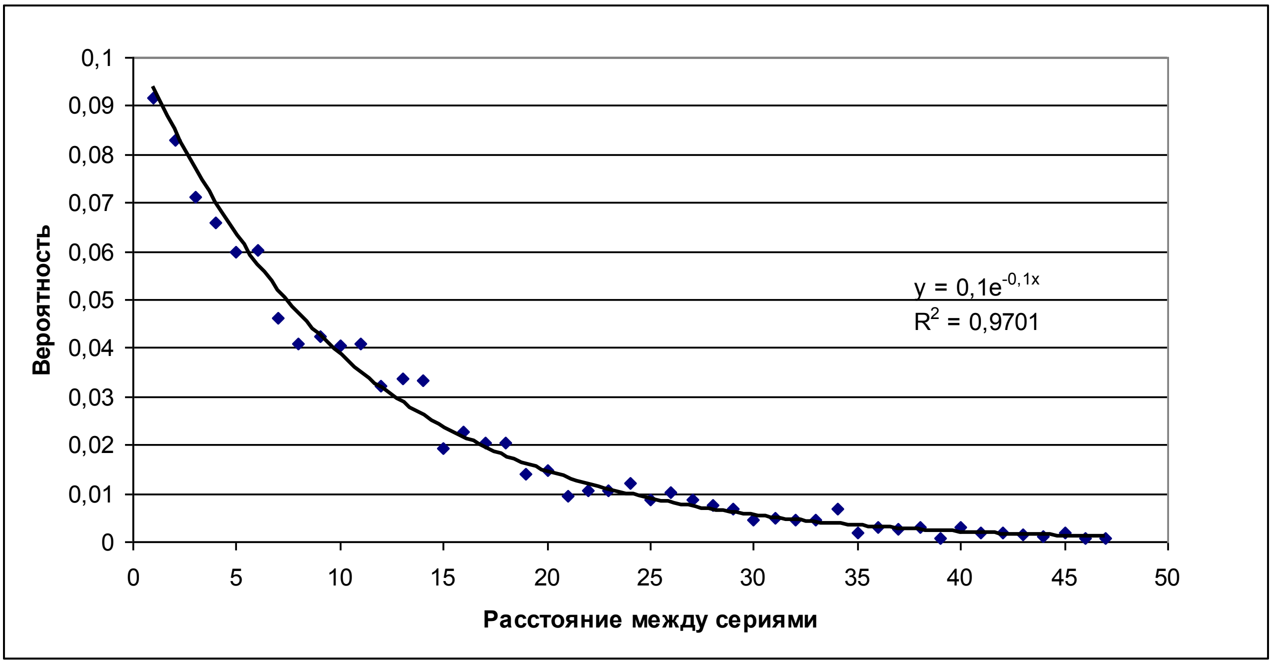

Рис. 7. Вероятность расстояний между сериями длины 4

Параметр a_n в распределениях вида (12) наилучшую детерминацию имеет также на экспоненциальной аппроксимации, показанной на рис. 8.

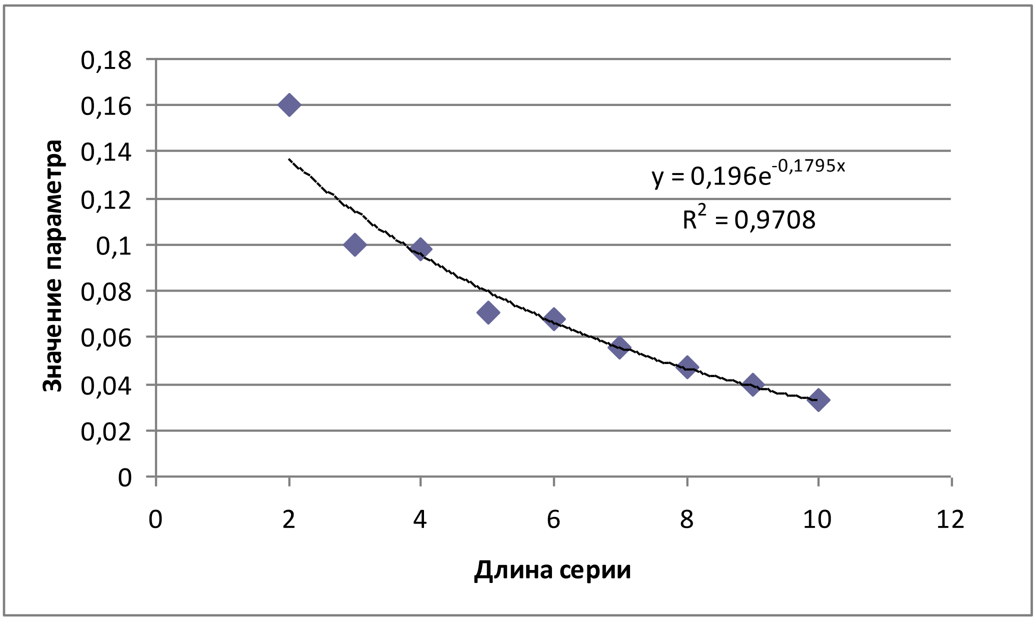

Рис. 8. Аппроксимация параметра a_n в распределении (13)

В следующем разделе будет построена хаотическая динамическая система, порождающая наблюдаемое распределение расстояний между сериями равных длительностей.

5. Расстояния между сериями как динамическая система

Динамическую систему, которая порождает эмпирическое распределение (12), можно построить следующим образом [5]. Конструкция, описанная в [5], аналогична методу построения случайной траектории, реализующей случайную величину с заданным законом распределения.

Пусть имеется некоторая одномерная хаотическая динамическая система (ХДС), принимающая значения на $[0;1]$, с законом отображения $y_{n+1} = g(y_n)$. Функция g имеет несколько промежутков монотонности. Для простоты положим, что таких промежутков два. Возьмем, например, кусочно-линейное отображение

$$y_{n+1} = \begin{cases} 2y_n, & 0 \le y_n < 1/2; \\ 2 - 2y_n, & 1/2 \le y_n \le 1. \end{cases} \tag{14}$$

Если требуется построить ХДС с законом распределения с плотностью $f(x)$, то нужное отображение определяется функцией, обратной к интегральной функции распределения $F(x)$. В частности, для $f(x) = ae^{-ax}$ получаем $F(x) = 1 - e^{-ax}$. Обратная функция имеет вид $h(y) = -\frac{1}{a}\ln(1-y)$. Тогда на каждом из промежутков монотонности функции g (14) искомое отображение задается формулой

$$x_{n+1} = h\left(g\left(h^{-1}(x_n)\right)\right). \qquad (15)$$

Для распределения вида (12) ХДС имеет вид:

$$x_{n+1} = \begin{cases} -\dfrac{1}{a}\ln\left(2e^{-ax_n} - 1\right), & 0 \le x_n < \dfrac{1}{a}\ln 2; \\ -\dfrac{1}{a}\ln\left(1 - 2e^{-ax_n}\right), & \dfrac{1}{a}\ln 2 < x_n < +\infty. \end{cases} \qquad (16)$$

Следует заметить, что длины промежутков между сериями выражаются натуральными числами, поэтому элементы ряда таких длин определяются с помощью (16) формулой

$$l_n = [x_n] + 1. \qquad (17)$$

По построению, найденная ХДС не единственная. Можно взять и другую затравочную систему, например, логистическую.

Важно понимать, что модель (16-17) не предсказывает промежутки между сериями равных длительностей, а всего лишь дает одну из возможных траекторий таких промежутков в соответствии с их вероятностным распределением.

Уравнение (16) определяет ХДС, для которой распределение (12) является инвариантной мерой, т.е. не зависит от времени. Если же нас интересует процесс эволюции ВФР, то следует использовать модельное кинетическое уравнение, как это предложено в [6, 7]. Для одномерной плотности вероятности $f(x,t)$ регулярного диффузионного процесса применяется уравнение Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(u(x,t)f(x,t)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\lambda(x,t)f(x,t)\right). \qquad (18)$$

Здесь $u(x,t)$ скорость сноса вероятности, а $\lambda(x,t)$ неотрицательный коэффициент диффузии. Величина сноса оценивается из сопоставления двух выборочных распределений, построенных для встык-выборок, длина которых равна горизонту прогноза, а коэффициент диффузии определяется непосредственно по элементам ряда в предшествующий момент времени. Именно, $\lambda = \dfrac{d\sigma^2}{dt} - 2\mathrm{cov}_{x,v}$, где σ^2 есть выборочная дисперсия ряда, а $\mathrm{cov}_{x,v}$ есть выборочная ковариация элементов ряда и его первых разностей. Производная по времени понимается здесь в разностном смысле, как разность дисперсий в два последовательных момента времени.

Скорость $u(i,t)$ изменения ВПФР в i-ой ячейке в момент t определяется по формуле

$$u(i+1,t)f(i+1,t) = -\sum_{k=1}^{i}\left(f(k,t+1) - f(k,t)\right), \qquad (19)$$

т.е. выражается через изменение выборочной интегральной функции распределения за один шаг по времени. Динамическая система, порождающая временной ряд значений $x(t)$, приближенно находится из (19). Обозначая правую часть (19), деленную на $f(i+1,t)$, через $g(i,t)$, получаем

$$u(i,t) = g(i-1,t). \tag{20}$$

Это неавтономная (в отличие от (16)) ДС, в которой скорость $u(i,t)$ трактуется как изменение значения самого временного ряда, т.е. $u(i,t) = x(t+1) - x(t)$. Эта модель действует на ограниченном промежутке времени – именно, на том, в котором оценена скорость (20).

Литература

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Физматлит, 1961. – 406 с.
2. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей: основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. – М.: Наука, 1967. – 496 с.
3. Орлов Ю.Н., Федоров С.Л. Моделирование и статистический анализ функционалов, заданных на выборках из нестационарного временного ряда // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2014. № 43. 26 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-43
4. Орлов Ю.Н., Шагов Д.О. Индикативные статистики для нестационарных временных рядов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 53, 2011. – 20 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-53
5. Аникин В.М., Голубенцев А.Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. – Физматлит, 2007. – 326 с.
6. Орлов Ю.Н. Кинетические методы исследования нестационарных временных рядов. – М.: МФТИ, 2014. – 276 с.
7. Босов А.Д., Кальметьев Р.Ш., Орлов Ю.Н. Моделирование нестационарного временного ряда с заданными свойствами выборочного распределения // Мат. мод., 2014. № 3. С. 97-107.