ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 82 за 2014 г.

Лапик М.А.

Формула Буярова-Рахманова для внешнего поля в векторной задаче равновесия логарифмического потенциала

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лапик М.А. Формула Буярова-Рахманова для внешнего поля в векторной задаче равновесия логарифмического потенциала // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 82. 15 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-82

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им.М.В.Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

М.А.Лапик

Формула Буярова–Рахманова для внешнего поля в векторной задаче равновесия логарифмического потенциала

Москва, 2014

М.А. Лапик Email: mashalapik@gmail.com

Формула Буярова–Рахманова для внешнего поля в векторной задаче равновесия логарифмического потенциала[1]

Аннотация. Целью этой работы является продолжение обобщения теоремы Буярова – Рахманова (1999) со скалярного на векторный случай задачи равновесия логарифмического потенциала во внешнем поле. Обобщение проводится на примере двумерной задачи с матрицей взаимодействия Никишина. Получены выражения для внешнего поля через носители равновесных мер.

Стр. 15, библ. назв. 27

Ключевые слова: логарифмический потенциал, внешнее поле.

M. A. Lapik Email: mashalapik@gmail.com

The Buyarov–Rahmanov formula for external field in the vector extremal logarithmic potential problem

Abstract. The aim of the paper is to prolong the generalization of the scalar problem Buyarov–Rakhmanov theorem (1999) to vector extremal logarithmic potential problem in the presence of the external field. We consider the generalization in two dimensional extremal problem with Nikishin matrix of interaction. We have got the expressions for dependence of the external field from supports of extremal measures.

Pages 15, Bibl. 27

Key words: logarithmic potential, external field.

Содержание

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект N 14-21-00025)

1 Введение

Е.А. Рахманов в [18], изучая слабую асимптотику масштабированных ортогональных полиномов относительно весов Фройда, показал, что она тесно связана с потенциалом некоторой равновесной меры во внешнем поле. Тогда же А.А. Гончар и Е.А. Рахманов (см. [8]) ввели понятие векторной задачи равновесия логарифмического потенциала в связи с рассмотрением полиномов совместной ортогональности, которые возникли при рассмотрении аппроксимаций Эрмита – Паде. Такие задачи равновесия были исследованы в серии работ [10], [11], [9], [5], [22], [27], [21]. В настоящие время векторные задачи равновесия возникают во многих известных проблемах, см. [2], в частности, в теории случайных матриц [3]. Важным применением равновесных мер в задачах математической физики является полученное Л. Пастуром и М. Щербиной [25], а также П. Дейфтом с соавторами [23] доказательство гипотезы об универсальности предельного поведения ансамблей матричных случайных величин. А.И. Аптекаревым, П. Блехером и А. Куэларсом в [20] с помощью векторных задач равновесия получена предельная теорема распределения собственных значений Гауссовых случайных матриц с внешним источником, используемая в описании броуновских мостов.

Мы будем рассматривать векторные задачи равновесия теории логарифмического потенциала во внешнем поле. В [7] (см. так-же [6]) В.С. Буяров и Е.А. Рахманов провели глубокое исследование семейств экстремальных мер, параметризованных массой, в скалярной задаче. Они предложили явные формулы, позволяющие найти экстремальную меру во внешнем поле и выразить внешнее поле через семейство носителей экстремальных мер. Нашей целью является получение аналогичных результатов в векторном случае. Во многом мы будем следовать идеям и методам работы [7].

Утверждения, изложенные в настоящей работе, легко распространяются на более общие случаи векторных задач равновесия. Конкретнее, можно рассматривать задачи произвольной размерности или с некоторым другим классом матриц взаимодействия, а так же векторными массами. Для упрощения обозначений мы рассматриваем размерность 2 и специальный случай матрицы взаимодействия (называемый случаем Никишина). Доказательство Теоремы 2 приведены в работе автора [14], настоящая работа является ее логическим продолжением.

Автор выражает глубокую благодарность А.И. Аптекареву, В.С. Бу-

ярову, В.Г. Лысову и Д.Н. Тулякову за полезные обсуждения в процессе написания этой работы.

2 Скалярная экстремальная задача

2.1 Основные определения

Напомним основные аспекты скалярной теории логарифмического потенциала, которыми мы будем пользоваться, более подробно см. [17], [26], [12]. Пусть $\mathcal{M}^x(\Gamma)$ есть множество борелевских мер μ массы $|\mu| = x$ с компактными носителями на регулярном компакте Γ: $S_\mu \Subset \Gamma \subset \mathbb{R}$. *Логарифмическим потенциалом* скалярной меры μ с компактным носителем называют функцию

$$U^\mu(z) = \int \log \frac{1}{|z-y|}\, d\mu(y).$$

Эта функция всюду определена, но может принимать значение $+\infty$, супергармонична в $\mathbb{C}$ и гармонична вне носителя меры, т.е.

$$U^\mu \in SpH(\mathbb{C}) \bigcap SbH(\overline{\mathbb{C}} \setminus S_\mu).$$

В каждой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ потенциал непрерывен в тонкой топологии, т.е. существует множество E_0, разреженное в точке z_0 и такое, что

$$U^\mu(z_0) = \lim_{z \to z_0, z \notin E_0} U^\mu(z).$$

Энергией меры во внешнем поле Q называют величину

$$I^Q(\mu) = \iint \Big(\log \frac{1}{|z-y|} + Q(y) + Q(z)\Big)\, d\mu(y)\, d\mu(z) = \int \Big(U^\mu + 2Q\Big)\, d\mu, \tag{1}$$

где Q – непрерывная функция, причем минимум Q равен нулю:

$$Q : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \min_\Gamma Q = 0.$$

Экстремальной мерой в поле Q называют меру $\lambda^x_Q(\Gamma) = \lambda^x$ с минимальной энергией (1) в классе $\mathcal{M}^x(\Gamma)$

$$I^Q(\lambda^x) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}^x(\Gamma)} I^Q(\mu). \tag{2}$$

Существует единственная экстремальная мера λ^x, которая характеризуется с помощью следующих соотношений *равновесия*:

$$U^{\lambda^x} + Q \begin{cases} = F^x & \text{на} \quad S^{\lambda^x} \supset S_{\lambda^x}, \\ > F^x & \text{на} \quad \Gamma \setminus S^{\lambda^x}, \end{cases} \tag{3}$$

где константа F^x существует и единственная и называется *константой равновесия*, множество $S^{\lambda^x_Q}$ – *множеством равновесия*, а экстремальную меру называют еще *равновесной мерой*. Мерой Робена компакта Γ называют равновесную меру без поля $\omega_\Gamma = \lambda_0^1$. Энергию $W(\Gamma) = I^0(\omega_\Gamma)$ меры Робена компакта Γ называют *постоянной Робена* компакта Γ, а *логарифмической емкостью* называют величину $cap(\Gamma) = \exp(-W)$. Константа равновесия для меры Робена, как легко понять, равна $W(\Gamma)$.

Условия равновесия (3) верны для регулярных компактов. Для произвольных компактов условия равновесия (3) усложняются: условие $U^{\lambda^x_Q} + Q \geq F^x$ верно квазивсюду на Γ и всюду на носителе равновесной меры $U^{\lambda^x_Q} + Q \leq F^x$ (см. [26]). Из (3) следует, что потенциал экстремальной меры непрерывен в $\mathbb{C}$, поскольку он непрерывен на носителе экстремальной меры (принцип непрерывности, см. [17], Гл. 5, Теорема 1.4).

2.2 Формулы Буярова-Рахманова

Для полноты изложения мы приведем результаты Буярова – Рахманова, в несколько ослабленной форме, в наших обозначениях и для нашей постановки задачи.

Теорема 1. ***(Буяров-Рахманов,1999)***

1. *Семейства носителей равновесных мер $S_x = S_{\lambda^x}$ и множеств равновесия $S^x = S^{\lambda^x}$ монотонно возрастают по x, для любого x и для любого $0 < \varepsilon < x$ верно $S^{x-\varepsilon} \subset S_x \subset S^x$. Эти семейства непрерывны справа:*

$$\bigcap_{\varepsilon>0} S^{x+\varepsilon} = \bigcap_{\varepsilon>0} S_{x+\varepsilon} = S^x, \tag{4}$$

и слева:

$$\overline{\bigcup_{\varepsilon>0} S_{\lambda^{x-\varepsilon}}} = \overline{\bigcup_{\varepsilon>0} S^{\lambda^{x-\varepsilon}}} = S_x. \tag{5}$$

2. *Функция F^x выпукла вверх на $\mathbb{R}_+$ как функция от x, и всюду существуют левые и правые производные*

$$\frac{\partial_+}{\partial x} F^x = W(S^x) = -\ln cap(S^x), \quad \frac{\partial_-}{\partial x} F^x = W(S_x) = -\ln cap(S_x). \tag{6}$$

3. *Семейство равновесных мер λ^x монотонно возрастает, непрерывно и дифференцируемо всюду, за исключением не более чем счетного множества. Существуют всюду левые производные и правые производные:*
$$\frac{\partial_+}{\partial x}\lambda^x = \omega_{S^x}, \quad \frac{\partial_-}{\partial x}\lambda^x = \omega_{S_x}. \tag{7}$$

4. *Для экстремальной меры справедливо представление при $x > 0$*
$$\lambda^x = \int_0^x \omega_{S_\tau}\, d\tau. \tag{8}$$

5. *Для константы равновесия справедливо представление при $x > 0$*
$$F^x = \int_0^x W(S_\tau)\, d\tau = -\int_0^x \ln cap(S_\tau) d\tau. \tag{9}$$

6. *Для внешнего поля Q справведлива формула: для любого $y \in \bigcup_{x>0} S_{\lambda^x}$*
$$Q(y) = \int_0^{+\infty} g_\tau(y)\, d\tau, \tag{10}$$
где $g_\tau(y)$ – функция Грина области $\overline{\mathbb{C}} \setminus S_\tau$, с полюсом в бесконечности.

Нашей дальнейшей целью будет обобщение этой теоремы на векторный случай. В следующем разделе мы приведем основные определения векторной теории логарифмического потенциала, которые нам понадобятся для последующего изложения. Там же мы сформулируем основные результаты этой работы и их доказательства.

3 Векторная экстремальная задача

3.1 Основные определения

Введем необходимые понятия для формулировки основного результата.

Пусть $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_i\}_{i=1}^2$ – непересекающиеся регулярные компакты в $\mathbb{C}$ с пустой внутренностью $\Gamma_i^0 = \emptyset$. Обозначим $\mathcal{M}_{\mathbf{\Gamma}}^x$ – множество векторных борелевских мер $\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$:
$$\mathcal{M}^x = \mathcal{M}_{\mathbf{\Gamma}}^x = \{\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2),\ S_{\mu_i} \subset \Gamma_i,\ i = 1, 2;\ \mu_1(\Gamma_1) = 2x,\ \mu_2(\Gamma_2) = x\}.$$

Внешним полем будем называть непрерывную вектор-функцию, минимум которой равен 0 на каждой компоненте:

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2), \qquad Q_i : \Gamma_i \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \min_{\Gamma_i} Q_i = 0, \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

Вектор-функцию $\mathbf{W}^{\overline{\mu}}_{\mathbf{Q}} = (W^{\overline{\mu}}_{\mathbf{Q},1}, W^{\overline{\mu}}_{\mathbf{Q},2})$, такую, что

$$\left(W^{\overline{\mu}}_{\mathbf{Q},1},\ W^{\overline{\mu}}_{\mathbf{Q},2}\right) = \left(U^{\mu_1},\ U^{\mu_2}\right) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \left(Q_1 \ \ Q_2\right),$$

называют *векторным логарифмическим потенциалом* меры $\overline{\mu} \in \mathcal{M}^x$ во *внешнем поле* $\mathbf{Q}$ с *матрицей взаимодействия* Никишина $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Задачи теории потенциала с такими матрицами впервые появились в [15], последние продвижения [22], [21], [27], [19]. *Энергия во внешнем поле* для векторных мер задается функционалом

$$I^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}) = I^{\mathbf{Q}}_1(\overline{\mu}) + I^{\mathbf{Q}}_2(\overline{\mu}), \quad I^{\mathbf{Q}}_i(\overline{\mu}) = \int \Big(W^{\overline{\mu}}_{\mathbf{Q},i}(z) + Q_i(z)\Big) d\mu_i(z). \tag{12}$$

Аналогично скалярному случаю ставится *векторная экстремальная задача во внешнем поле*: найти меру $\overline{\lambda}^x_Q = \overline{\lambda}^x \in \mathcal{M}^x$ с минимальной энергией (12) в классе $\mathcal{M}^x$:

$$I^{\mathbf{Q}}(\overline{\lambda}^x) = \inf_{\overline{\mu} \in \mathcal{M}^x} I^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}). \tag{13}$$

Экстремальные меры этой задачи играют ключевую роль в описании асимптотики и сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде важного модельного класса аналитических функций, т.н. систем Никишина, см. [16], [17], [10], [1], [4], [9], [5].

Существует единственное решение задачи (13), см. [10], [9]. Там же были приведены условия равновесия для векторной задачи во внешнем поле, однозначно характеризующие экстремальную меру. Точнее, существуют и единственны такие константы F^x_i, $i = 1, 2$, что

$$W^{\overline{\lambda}^x}_{\mathbf{Q},i} \begin{cases} = F^x_i & \text{на} \quad S_{\lambda^x_i}, \\ \geq F^x_i & \text{на} \quad \Gamma_i. \end{cases} \tag{14}$$

Множество, на котором в (14) достигается равенство, называют *множеством равновесия*, а экстремальную меру еще называют равновесной мерой. Мы будем обозначать множество равновесия $\mathbf{S}^{\overline{\lambda}^x} = (S^{\overline{\lambda}^x}_1, S^{\overline{\lambda}^x}_2)$. Очевидно, что справедливо включение $\mathbf{S}_{\overline{\lambda}^x} \subset \mathbf{S}^{\overline{\lambda}^x}$, при этом множество равновесия и носитель могут существенно отличаться, см. следующий пример.

Пример. Пусть $\Gamma_1 = (-\infty, -1]$, $\Gamma_2 = [1, \infty)$. Фиксируем $x = 1$ и внешнее поле $Q_i(y) = y^2 - 1$, $i = 1, 2$.

В этой постановке Γ_i, $i = 1, 2$ не являются компактами. Но, учитывая, что внешнее поле растет быстрее, чем потенциал, мы можем считать Γ_i, $i = 1, 2$ достаточно большими компактами, чтобы не входить в противоречие с нашими определениями экстремальной задачи. Такой рост внешних полей обеспечивает компактность носителей.

Докажем, что компоненты носителя экстремальной меры суть отрезки. Мы можем рассматривать векторную задачу как две скалярных с внешими полями $-U^{\lambda_2^x} + Q_1$ и $-U^{\lambda_1^x} + Q_2$ на первой и второй компонентах соответственно. Из условий равновесия (14) следует, что λ_1^x и λ_2^x являются решениями соответствующих скалярных задач. Внешние поля $-U^{\lambda_2^x} + Q_1$ и $-U^{\lambda_1^x} + Q_2$ суть дважды дифференцируемые функции на Γ_1 и Γ_2 соответственно с положительными вторыми производными. По теореме 1.10 главы IV [26] из выпуклости внешнего поля следует, что носитель экстремальной меры есть интервал.

В дальнейшем мы независимо покажем, что пересечение (по x) всех носителей экстремальных мер и множество, где внешнее поле достигает минимума, в нашей нормировке равно 0, совпадают (см. Следствие 1). Следовательно, для некоторых $a, b > 1$

$$\mathbf{S}_{\overline{\lambda}^1} = ([-a, -1], [1, b]).$$

Рассмотрим модифицированное внешнее поле: для произвольного $b' > b$:

$$Q_1'(y) = \begin{cases} y^2 - 1 \text{ на } [1, b], \\ \left(2U^{\lambda_1^1} - U^{\lambda_2^1}\right)(b) + b^2 - 1 - \left(2U^{\lambda_1^1} - U^{\lambda_2^1}\right)(y) \text{ на } (b, b'], \\ \left(2U^{\lambda_1^1} - U^{\lambda_2^1}\right)(b) + b^2 - 1 - \left(2U^{\lambda_1^1} - U^{\lambda_2^1}\right)(y) + y^2 - b'^2 \\ \text{ на } (b', +\infty), \end{cases}$$

$$Q_2'(y) = Q_2(y) = y^2 - 1 \text{ на } (-\infty, -1].$$

Внешнее поле осталось непрерывным, а для экстремальной меры $\overline{\lambda}^1_{\mathbf{Q}}$ выполнены условия равновесия (14) с внешним полем $\mathbf{Q}'$. Следовательно, $\overline{\lambda}^1_{\mathbf{Q}} = \overline{\lambda}^1_{\mathbf{Q}'}$. Мы показали, что для некоторого $b' > b$

$$\mathbf{S}^{\overline{\lambda}^1} = ([-a, -1], [1, b']).$$

3.2 Формулы Буярова-Рахманова для векторных задач

Мерой Робена компакта (не обязательно регулярного) $\mathbf{K} \subset \mathbf{\Gamma}$ называют меру $\overline{\omega}_{\mathbf{K}} \in \mathcal{M}^1_{\mathbf{K}}$, минимизирующую энергию (12) в отсутствии внешнего поля ($\mathbf{Q} \equiv 0$). В [17] показано, что условия равновесия для меры $\overline{\omega}_{\mathbf{K}}$ суть

$$\begin{cases} 2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}} \begin{cases} \leq \gamma_1 & \text{на} \quad S_{\omega_{\mathbf{K},1}} \\ \geq \gamma_1 & \text{q.e. на} \quad K_1, \end{cases} \\ 2U^{\omega_{\mathbf{K},2}} - U^{\omega_{\mathbf{K},1}} \begin{cases} \leq \gamma_2 & \text{на} \quad S_{\omega_{\mathbf{K},2}} \\ \geq \gamma_2 & \text{q.e. на} \quad K_2. \end{cases} \end{cases} \tag{15}$$

В [14] доказали, что условия равновесия для меры $\overline{\omega}_{\mathbf{K}}$ можно записать как

$$\begin{cases} 2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}} \begin{cases} = \gamma_1 & \text{q.e. на} \quad S_{\omega_{\mathbf{K},1}} \\ < \gamma_1 & \text{на} \quad \overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_{\mathbf{K},1}}, \end{cases} \\ 2U^{\omega_{\mathbf{K},2}} - U^{\omega_{\mathbf{K},1}} \begin{cases} = \gamma_2 & \text{q.e. на} \quad S_{\omega_{\mathbf{K},2}} \\ < \gamma_2 & \text{на} \quad \overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_{\mathbf{K},2}}. \end{cases} \end{cases} \tag{16}$$

Из этих неравенств и (15), в частности, следует, что *cap* $(\mathbf{K} \setminus \mathbf{S}_{\omega_{\mathbf{K}}}) = 0$.

Энергию векторной меры Робена компакта $\mathbf{K}$ обозначим $\mathcal{W}(\mathbf{K}) = 2\gamma_1 + \gamma_2$; по аналогии со скалярным случаем, величину $\exp(-\mathcal{W}(\mathbf{K}))$ назовем векторной *логарифмической емкостью* компакта $\mathbf{K}$, а $\mathcal{W}(\mathbf{K})$– *векторной постоянной Робена.*

Далее мы будем исследовать свойства $\mathbf{S}_{\overline{\lambda}^x}$, $\mathbf{S}^{\overline{\lambda}^x}$, $\overline{\lambda}^x$, $F^x = 2F^x_1 + F^x_2$, $\mathcal{W}(\mathbf{S}_{\overline{\lambda}^x})$, $\mathcal{W}(\mathbf{S}^{\overline{\lambda}^x})$ в зависимости от x. Введем упрощающие обозначения: $\mathbf{S}_x = \mathbf{S}_{\overline{\lambda}^x}$, $\mathbf{S}^x = \mathbf{S}^{\overline{\lambda}^x}$, $W^x_i = W^{\overline{\lambda}^x}_{\mathbf{Q},i}$, $S_{x,i} = S_{\lambda^x_i}$, $S^x_i = S^{\overline{\lambda}^x}_i$, $\overline{\omega}_x = \overline{\omega}_{\mathbf{S}_x}$, $\overline{\omega}^x = \overline{\omega}_{\mathbf{S}^x}$, $\mathcal{W}^x = \mathcal{W}(\mathbf{S}^x)$, $\mathcal{W}_x = \mathcal{W}(\mathbf{S}_x)$.

В этой статье сходимость векторных и скалярных мер понимается в слабом смысле. Все векторные равенства следует понимать покомпонентно.

В [14] было получено обобщение пунктов 1-4 Теоремы 1 (Буярова – Рахманова) на векторный случай. Мы приведем здесь эту теорему.

Теорема 2. *1. Семейства носителей равновесных мер* $\mathbf{S}_x$ *и множеств равновесия* $\mathbf{S}^x$ *монотонно возрастают по* x*, для любого* x *и для любого* $0 < \varepsilon < x$ *верно* $\mathbf{S}^{x-\varepsilon} \subset \mathbf{S}_x \subset \mathbf{S}^x$*. Эти семейства непрерывны справа:*

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \mathbf{S}^{x+\varepsilon} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathbf{S}_{x+\varepsilon} = \mathbf{S}^x, \tag{17}$$

и слева:
$$\overline{\bigcup_{\varepsilon>0}\mathbf{S}_{x-\varepsilon}} = \overline{\bigcup_{\varepsilon>0}\mathbf{S}^{x-\varepsilon}} = \mathbf{S}_x. \tag{18}$$

2. *Функции $\mathcal{W}_x$ и $\mathcal{W}^x$ монотонно убывают по x, для любого x верно $\mathcal{W}^x \le \mathcal{W}_x$. Всюду, за исключением не более чем счетного множества, $\mathcal{W}^x = \mathcal{W}_x$. Разрывы имеют место только там, где $\mathcal{W}^x \ne \mathcal{W}_x$ или $\mathcal{W}_x \ne \mathcal{W}_{x-0}$, причем $\mathcal{W}^x$ непрерывна справа, а $\mathcal{W}_x$– непрерывна слева всюду, за исключением не более чем счетного множества E_0:*
$$\lim_{\varepsilon\to0+}\mathcal{W}^{x+\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to0+}\mathcal{W}_{x+\varepsilon} = \mathcal{W}^x, \quad \lim_{\varepsilon\to0+}\mathcal{W}^{x-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to0+}\mathcal{W}_{x-\varepsilon} \overset{E_0^c}{=} \mathcal{W}_x. \tag{19}$$

3. *Функция $F^x = 2F_1^x + F_2^x$ везде выпукла вверх и всюду левые, за исключением множества E_0, и правые производные равны постоянным Робена $\boldsymbol{S}_x$ и $\boldsymbol{S}^x$ соотвественно:*
$$\frac{\partial_+}{\partial x}F^x = \mathcal{W}^x, \quad \frac{\partial_-}{\partial x}F^x \overset{E_0^c}{=} \mathcal{W}_x. \tag{20}$$

4. *Константы равновесия F_i^x дифференцируемы всюду, за исключением не более чем счетного множества. Всюду существуют правые производные, и всюду, за исключением, быть может, множества E_0, существуют левые производные, равные константам равновесия для мер Робена множеств $\mathbf{S}^x$ и $\mathbf{S}_x$:*
$$\frac{\partial_+}{\partial x}F_i^x = \gamma_i^x, \quad \frac{\partial_-}{\partial x}F_i^x \overset{E_0^c}{=} \gamma_{x,i}. \tag{21}$$

5. *Семейство равновесных мер $\overline{\lambda}^x$ монотонно возрастает, непрерывно и дифференцируемо всюду, за исключением не более чем счетного множества. Существуют всюду, за исключением множества E_0, левые производные, и всюду существуют правые производные:*
$$\frac{\partial_+}{\partial x}\overline{\lambda}^x = \overline{\omega}^x, \quad \frac{\partial_-}{\partial x}\overline{\lambda}^x \overset{E_0^c}{=} \overline{\omega}_x. \tag{22}$$

6. *Для экстремальной меры справедливо представление при $x > 0$*
$$\overline{\lambda}^x = \int_0^x \overline{\omega}_\tau \, d\tau. \tag{23}$$

Теперь мы готовы сформулировать основной результат настоящей работы, т.е. сформулировать и доказать обобщение пунктов 5-6 Теоремы 1 (Буярова–Рахманова) на векторный случай.

Теорема 3. *1. Для $F^x = 2F_1^x + F_2^x$ верна следующая интегральная формула:*

$$F^x = \int_0^x \mathcal{W}_\tau \, d\tau. \tag{24}$$

2. Для констант равновесия F_i^x верны интегральные формулы

$$F_i^x = \int_0^x \gamma_{\tau,i} \, d\tau. \tag{25}$$

3. Для компонент внешнего поля Q_i, $i = 1, 2$ верна следующая интегральная формула: для любого $y \in \bigcup_{x>0} S_{x,i}$

$$Q_i(y) = \int_0^{+\infty} \left[\gamma_{\tau,i} - W_{0,i}^{\overline{\omega}_\tau}(y) \right] \, d\tau. \tag{26}$$

Заметим, что формулы для констант равновесия, как и формулы для экстремальных мер, полностью аналогичны скалярному случаю. Формула (26) аналогична (10) потому, что функция Грина области $\overline{\mathbb{C}} \setminus S_\tau$ есть не что иное, как константа равновесия меры Робена компакта S_τ минус логарифмический потенциал этой меры Робена :

$$U^{\omega_{S_\tau}}(z) = -\ln cap(S_\tau) - g_\tau(y) = W(S_\tau) - g_\tau(y),$$

где $g_\tau(y)$ – функция Грина области $\overline{\mathbb{C}} \setminus S_\tau$, с полюсом в бесконечности.

По аналогии с (17), обозначим $\mathbf{S}^0$ пересечение всех носителей экстремальных мер, и $\mathbf{S}_0$ – множество, где внешнее поле достигает минимума:

$$\mathbf{S}^0 = \bigcap_{x>0} \mathbf{S}_x, \tag{27}$$

$$\mathbf{S}_0 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{\Gamma} : Q_i(z_i) = 0, \quad i = 1, 2\}. \tag{28}$$

Очевидно, что эти множества не пусты.

Перейдем к доказательству Теоремы 3.

□ Пункт 1 Теоремы непосредственно следует из пункта 2, но мы легко докажем его независимо. Поскольку F^x есть выпуклая функция, см. Теорему 2, пункт 3, то она является абсолютно непрерывной и, следовательно, восстанавливается по своей производной. Таким образом, формула (24) верна с точностью до аддитивной константы.

Рассмотрим произвольную точку $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbf{S}^0$, для любого $x > 0$ верно, что $\mathbf{z} \in \mathbf{S}_x$. Напишем условия равновесия в этой точке для $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} F_1^x = W_1^x(z_1) = Q_1(z_1) + \int_0^x \left[2U^{\omega\mathbf{s}_{\chi,1}} - U^{\omega\mathbf{s}_{\chi,2}}\right](z_1)\, d\chi = \\ = Q_1(z_1) + \int_0^x \gamma_{\chi,1}\, d\chi, \\ F_2^x = W_2^x(z_2) = Q_2(z_2) + \int_0^x \left[2U^{\omega\mathbf{s}_{\chi,2}} - U^{\omega\mathbf{s}_{\chi,1}}\right](z_2)\, d\chi = \\ = Q_2(z_2) + \int_0^x \gamma_{\chi,2}\, d\chi. \end{aligned} \tag{29}$$

Во втором равенстве в обеих строках мы применили формулу (23) для экстремальной меры и теорему Фубини. Из (29) следует, что внешнее поле на множестве $\mathbf{S}^0$ равно некоторой константе $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$. Следовательно, формулы (25) верны с точностью до констант $c_1, \quad c_2$, из дальнейших рассуждений будет следовать, что эти константы нулевые.

Рассмотрим произвольную точку $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbf{S}_x$, напишем условия равновесия в этой точке для $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} F_i^x = \int_0^x \gamma_{\chi,i}\, d\chi + c_i = W_i^x(z_i) = \\ = Q_i(z_i) - c_i + \int_0^x \left[W_{\mathbf{0},i}^{\omega_\chi}(z_i) - \gamma_{\chi,i}\right]\, d\chi + \int_0^x \gamma_{\chi,i}\, d\chi + c_i. \end{aligned} \tag{30}$$

Т.е. для любого $x > 0$ и $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbf{S}_x$, $i = 1, 2$

$$Q_i(z_i) - c_i = \int_0^x \left[\gamma_{\chi,i} - W_{\mathbf{0},i}^{\omega_\chi}(z_i)\right]\, d\chi. \tag{31}$$

Подынтегральное выражение в (31) больше либо равно 0, следовательно, $Q_i(z_i) - c_i \geq 0$. При $\mathbf{z} \in \mathbf{S}^0$ по формуле (31)

$$Q_i(z_i) - c_i = 0. \tag{32}$$

Учитывая нормировку внешнего поля (11), мы приходим к выводу, что $c_i = 0$ для $i = 1, 2$. Заметим, что для $\mathbf{z} \in \mathbf{S}_x$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_0^x \left[\gamma_{\chi,i} - W_{\mathbf{0},i}^{\omega_\chi}(z_i)\right]\, d\chi \\ = \int_0^{+\infty} \left[\gamma_{\chi,i} - W_{\mathbf{0},i}^{\omega_\chi}(z_i)\right]\, d\chi - \int_x^{+\infty} \left[\gamma_{\chi,i} - W_{\mathbf{0},i}^{\omega_\chi}(z_i)\right]\, d\chi \\ = \int_0^{+\infty} \left[\gamma_{\chi,i} - W_{\mathbf{0},i}^{\omega_\chi}(z_i)\right]\, d\chi \end{aligned}$$

Это завершает доказательство Теоремы 3. ■

Следствие 1. *Пересечение всех носителей экстремальных мер и множество, где внешнее поле достигает минимума, в нашей нормировке равно* 0*, совпадают:*

$$\mathbf{S}^0 = \mathbf{S}_0.$$

$\square$ По доказанному в Теореме 3, в (32) $c_i = 0$ и, следовательно, $\mathbf{S}^0 \subset \mathbf{S}_0$. Осталось доказать обратное включение. Предположим обратное:

$$\mathbf{S}^0 \setminus \mathbf{S}_0 \neq \emptyset.$$

Тогда существует $x > 0$, такой, что $\mathbf{S}^0 \setminus \mathbf{S}^x \neq \emptyset$. Рассмотрим произвольную точку $(z_1, z_2) \in \mathbf{S}^0 \setminus \mathbf{S}^x$ и напишем условия равновесия в этой точке для меры $\overline{\lambda}^x$:

$$F_i^x < W_i^x(z_i) = Q_i(z_i) + \int_0^x \left[W_{\mathbf{0},i}^{\omega_\chi}(z_i) - \gamma_{\chi,i}\right]\, d\chi + \int_0^x \gamma_{\chi,i}\, d\chi =$$
$$= \int_0^x \left[W_{\mathbf{0},i}^{\omega_\chi}(z_i) - \gamma_{\chi,i}\right]\, d\chi + F_i^x < F_i^x.$$

В последнем переходе мы использовали (16). Полученное противоречие доказывает требуемое включение и завершает доказательство. $\blacksquare$

Список литературы

[1] *А.И. Аптекарев,* Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина. Мат. сб., N6 190 (1999), 11-22.

[2] *А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин*, Об аппроксимациях Эрмита – Паде для систем функций марковского типа. УМН, 66:6(402) (2011), 37-122.

[3] *А.И. Аптекарев, А.Э. Койэлаарс*, Аппроксимации Эрмита – Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов. УМН, 66:6(402) (2011), 123-190.

[4] *А.И. Аптекарев, Г. Лопес Лагомасино, И.А. Роча*, Асимптотика отношения полиномов Эрмита – Паде. Матем. сб., 196:8 (2005), 3-20.

[5] *А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов*, Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита – Паде. Матем. сб., 201:2 (2010), 29-78.

[6] *В.С. Буяров*, О логарифмической асимптотике многочленов, ортогональных на R с несимметричным весом. Матем. заметки, 50:2 (1991), 28-36.

[7] *В.С. Буяров, Е.А. Рахманов,* О семействах мер, равновесных во внешнем поле на вещественной оси. Мат. сб. N5 190 (1999), 11-22.

[8] *А.А. Гончар, Е.А. Рахманов,* О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа. Труды Мат. инст. АН СССР. Т.157. N1, (1981), 31-48.

[9] *А.А. Гончар, Е.А. Рахманов, В.Н. Сорокин*, Об аппроксимациях Эрмита – Паде для систем функций марковского типа. Матем. сборник **188** (1997), 671–696.

[10] *А.А. Гончар, Е.А. Рахманов,* О задаче равновесия для векторных потенциалов. УМН, том 40, выпуск 4(244), (1985), 155-156.

[11] *А.А. Гончар, Е.А. Рахманов*, Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций. Матем. сб., 134(176):3(11) (1987), 306-352.

[12] *Н.С. Ландкоф,* Основы современной теории потенциала. Москва "Наука (1966).

[13] *М.А. Лапик,* О носителе экстремальной меры в векторной задаче равновесия. Матем. сб., 197:8 (2006), 101-118.

[14] *М.А. Лапик,* О семействах векторных мер, равновесных во внешнем поле. Матем. сб., ожидается.

[15] *Е.М. Никишин*, Об асимптотике линейных форм для совместных аппроксимаций Паде. Изв. вузов. Матем., N 2, (1986), 33-41.

[16] *Е.М. Никишин*, О совместных аппроксимациях Паде. Матем. сб., 113(155): 4(12) (1980), 499-519.

[17] *Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин*, Рациональные аппроксимации и ортогональность. Москва "Наука (1988).

[18] *Е.А. Рахманов*, Об асимптотических свойствах многочленов, ортогональных на вещественной оси. Мат. сб. Т.119(162), (1982), 163-203.

[19] *Е.А. Рахманов, С.П. Суетин*, Распределение нулей полиномов Эрмита – Паде для пары функций, образующей систему Никишина. Матем. сб., 204:9 (2013), 115-160.

[20] *A.I. Aptekarev, P.M. Bleher, A.B.J. Kuijlaars,* Large n Limit of Gaussian Random Matrices with External Source, Part II. Commun. Math. Phys. 259, (2005), 367-389.

[21] *A.I. Aptekarev, G. Lopez-Lagomasino, A. Martinez-Finkelshtein*, On Nikishin systems with discrete components and weak asymptotics of multiple orthogonal polynomials. arXiv:1403.3729.

[22] *B. Beckermann, V.Kalyagin, A. Matos,* Wielonsky, Franck Equilibrium problems for vector potentials with semidefinite interaction matrices and constrained masses. Constr. Approx. 37 (2013), no. 1, 101-134.

[23] *P. Deift, T. Kriecherbauer, K.T-R. McLaughlin, S. Venakides and X. Zhou,* Uniform asymptotics of polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory. Commun. Pure Appl. Math. 52 (1999), 1335-1425 .

[24] *H.N. Mhaskar, E. B. Saff*, Where does the sup norm of a weighted polynomial live? Constr. Approx,1, (1985), 71-91.

[25] *L.Pastur, M.Shcherbina*, Universality of the Local Eigenvalue Statistics for a Class of Unitary Invariant Matrix Ensembles. J.Stat.Phys., 86, (1997), 109-147.

[26] *E. B. Saff, V. Totik*, Logarithmic Potentials with External Fields. Grundlehren Math. Wiss. 316, Springer, Berlin, 1997.

[27] *A. Hardy and A. Kuijlaars*, Weakly admissible vector equilibrium problems. J. Approx. Theory 164 (2012), 854-868.