



Колесниченко А.В., Маров М.Я.

Моделирование процессов
образования пылевых
фрактальных кластеров как
основы рыхлых
протопланетезималей в
Солнечном допланетном
облаке

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В., Маров М.Я. Моделирование процессов образования пылевых фрактальных кластеров как основы рыхлых протопланетезималей в Солнечном допланетном облаке // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 75. 44 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-75>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

А.В. Колесниченко, М.Я. Маров

**Моделирование процессов образования
пылевых фрактальных кластеров
как основы рыхлых протопланетезималей
в Солнечном допланетном облаке**

Москва — 2014

Колесниченко А.В., Маров М.Я.

Моделирование процессов образования пылевых фрактальных кластеров как основы рыхлых протопланетезималей в Солнечном допланетном облаке.

В работе, применительно к проблеме формирования планетезималей в Солнечном допланетном облаке, развита с учётом фрактальных представлений о свойствах пылевых кластеров в космической аэродисперсной среде эволюционная гидродинамическая модель образования и движения ворсистых пылевых агрегатов, являющихся основным структурообразующим элементом рыхлых протопланетезималей. В отличие от ряда классических исследований, в которых моделирование эволюции допланетного облака проводилось в рамках «обычной» сплошной среды, предлагается рассматривать совокупность ажурных пылевых агрегатов как особый тип среды – фрактальной среды, для которой существуют точки и области, не заполненные её частицами. Гидродинамическое моделирование подобной среды, обладающей нецелой массовой размерностью, проведено в рамках дробно-интегральной модели (её дифференциальной формы), использующей для учёта фрактальности дробные интегралы, порядок которых определяется массовой размерностью пылевых кластеров.

Ключевые слова: гидродинамика фрактальных сред, процессы коагуляции, протопланетные диски.

Aleksander Kolesnichenko, Mikhail Marov

Simulation of formation of dust fractal clusters as the basis of flocculent protoplanetesimals in the Sun protoplanetary cloud.

In this research, applied to the problem of formation of planetesimals in the Sun protoplanetary cloud, it has been developed (considering the concept of fractal properties of dust clusters) evolutionary hydrodynamic model of the formation and growth of fluffy dust aggregates aerodisperse medium of laminar disk. In contrast to a number of classical researches in which the simulation was carried out as part of the "ordinary" continuum, and often not taken into account multifractional dust component of the protoplanetary cloud and the fractal nature formed in the process of the evolution of dust clusters, it is proposed to consider a set of fluffy dust aggregates as a special type of continuum medium – a fractal medium for which there are points and areas not filled its particles. The hydrodynamic modeling of similar medium (that has non-integer mass dimensionality) is proposed to take place within the fractional integral model (its differential form) with the help of the fractional integrals, when its order is determined by dimensionality of disk medium.

Key words: hydrodynamics of fractal media, coagulation processes, protoplanetary disks.

Введение

Проблема образования планет Солнечной системы напрямую связана с ранней стадией формирования и эволюции протопланетного газопылевого диска. По современным представлениям планеты формируются после потери гравитационной устойчивости пылевым субдиском, образованным в результате дифференциального вращения вещества турбулизованного протопланетного облака по орбите вокруг солнечноподобной звезды и процессов аккреции при оседании его пылевой составляющей к экваториальной плоскости, перпендикулярной оси вращения диска (см., например, Toomre, 1964; Сафронов, 1969; Goldreich, Ward, 1973; Nakagawa и др., 1986; Витязев и др., 1990; Youdin, Shu, 2002). При этом большинство исследователей придерживается следующих этапов подобного сценария эволюции: Солнце, оказывая на турбулентное газопылевое облако силовое воздействие (вследствие турбулентной вязкости¹⁾), отдаёт ему угловой момент количества движения (Dubrulle, 1993), отодвигая тем самым вещество облака от себя к периферии, что приводит к образованию протопланетного аккреционного диска, обладающего дифференциальным вращением. Молодой диск содержит в основном водород и гелий. После прекращения сжатия протосолнечной туманности вещество в облаке быстро охлаждается, и в нём конденсируются пылевые частицы (суб)микронного размера (в общем случае композитные тела, состоящие из водяного льда, силикатов, железа и других веществ²⁾), которые оседают сквозь газ, образуя пылевой слой в окрестности экваториальной плоскости газопылевого облака. Сталкиваясь, частицы слипаются и одновременно растут, причём более крупные опускаются и растут быстрее (Nakagawa и др., 1981). Из-за баланса давления, гравитации и центробежной силы скорость орбитального движения газа меньше, чем у твёрдых частиц на том же расстоянии от звезды. В результате этого пылинки размером более нескольких миллиметров тормозятся встречным ветром, который вынуждает их по спирали опускаться к звезде (Nakagawa и др., 1986). Приближаясь к звезде, они нагреваются и постепенно содержащиеся в них фракции с низкой температурой кипения испаряются. Интервал расстояний $\sim 2-4$ а.е. (так называемая «линия льда»), на котором происходит этот процесс, делит диск на внутреннюю область, лишённую летучих веществ и содержащую тугоплавкие тела, и внешнюю, богатую летучими веществами и содержащую ледяные тела. В области «линии льда», где накапливаются испарившиеся из ледяных пылинок молекулы

¹⁾ Главным аргументом в пользу турбулентности в диске является большое число Рейнольдса $\sim 10^{14}$.

²⁾ Пылинки представляют собой мелкие кристаллические или аморфные образования, состоящие из силикатов, графита и, возможно, окислов металлов, покрытые сверху оболочкой из замёрзших газов, в частности, ледяные частицы состоят из тугоплавкого ядра и оболочки из лёгких элементов, а оксидные пылинки представляет собой смесь мелких частиц, состоящих из двухатомных окислов MgO, SiO, CaO, FeO.

воды, происходит разрыв в гидротермодинамических параметрах газа и возникает скачок давления, ускоряющий движение газа вокруг Солнца. В результате этого происходит изменение направления силы трения, которая останавливает миграцию твёрдых частиц внутрь диска, находящихся под влиянием попутного течения. А поскольку из внешних слоёв диска твёрдые частицы всё ещё продолжают поступать, то область в окрестности «линии льда» превращается в зону их скопления и роста. Тогда как мелкие частицы ещё остаются на больших Z -координатах, более крупные достигают окрестности центральной плоскости и повышают там плотность пыли (Dubrulle и др., 1995). Резкой границы пылевого слоя нет. При сильном уплотнении пылевой составляющей образовавшегося субдиска, когда плотность пыли в слое достигает некоторого критического значения, субдиск становится гравитационно неустойчивым и распадается на многочисленные пылевые сгущения (Сафронов, 1960; 1969; Goldreich, Ward, 1973; Nakamoto, Nakagawa, 1994). В районах с высокой плотностью этих сгущений последующая эволюция приводит к возникновению локальных дискретных центров уплотнения, т.е. к образованию роя первичных уединённых газопылевых агломератов (Dominik и др., 1997), служащих основой зародышей рыхлых (fluffy) прото-планетезималей. При дальнейшем объединении газопылевых агломератов в результате процессов коагуляции происходит рост первичных пылевых сгущений в крупные прото-планетезимали с большой начальной массой порядка массы астероидов $\sim 10^{15}$ - 10^{19} г и размерами в пределах 0,1-10 км (см. Weidenschilling, 1980; Сафронов, 1989; Nakagawa и др., 1983). Наконец, на заключительной стадии процесса эволюции первичного газопылевого диска, благодаря собственной гравитации, происходит формирование твёрдотельных километровых планетезималей. Частичное сохранение рассеянной пылевой компоненты вне сгущений после их образования и её дальнейшее поступление в сгущения ведёт к ускорению роста их плотности и более быстрому превращению в сплошные тела (см., например, Витязев и др., 1990; Маров и др., 2008; Колесниченко, Маров, 2014).

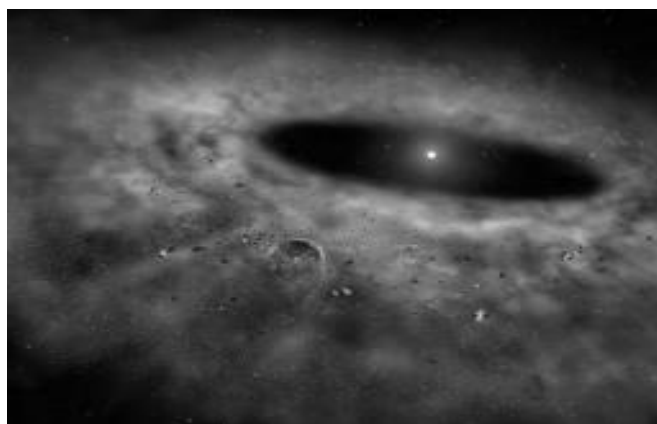


Рис.1. Допланетное газопылевое облако

К сожалению, несмотря на колоссальный прогресс в изучении внеземного вещества, получении данных наблюдений околозвёздных аккреционных дис-

ков, открытии экзопланет, совершенствовании теоретических подходов и методов математического моделирования, астрофизики всё ещё далеки от решения многих ключевых проблем указанного выше сценария. Одна из таких нерешенных проблем – поиск физического механизма объединения исходных пылевых частиц субмикронного и микронного размеров газопылевого диска в твёрдые планетезимали. Известно, что вероятность агрегации (слипания) пылевых частиц при парных столкновениях понижается, когда образовавшиеся агрегаты становятся больше $r \sim 0.1-1$ см, а при увеличении размеров до $r \gg 10$ см она стремится к нулю. Дополнительным аргументом против образования планетезималей путём их прямого роста при столкновениях пылевых частиц является существование быстрого дрейфа к Солнцу твёрдых тел метрового размера в результате потери ими момента вращения при торможении в газе протопланетного диска. Твёрдые тела с радиусом $r \sim 1$ м могут уменьшить своё расстояние от звезды вдвое всего за 10^3 лет. Собственно, по этой причине астрофизики уже на протяжении более чем тридцати лет не могут определиться с механизмом роста компактных частиц с размерами $\sim 5-10$ см до десятикилометровых планетезималей – путём их агрегации при взаимных столкновениях или модификации после стадии джинсовой неустойчивости пылевого субдиска.



Рис.2.

Вместе с тем, по мере возникновения явно выраженной границы между пылевым субдиском и газом, на границе пылевого слоя развивается экмановский погранслой, в котором возникает вполне развитая турбулентность (Goldreich, Ward, 1973), что в сочетании с дифференциальным вращением космического вещества приводит к формированию собственного источника энергии,

связанного с вязкой диссипацией крупномасштабного сдвигового (орбитально-го) течения в диске. Наличие подобного долговременного энергоисточника играет чрезвычайно важную роль в последующей самоорганизации дисковой системы, проявляющейся в поэтапном возникновении ряда пространственно-временных структур типа долгоживущих когерентных вихревых образований, колец из твёрдых мелкодисперсных частиц и т.п. (см. Горькавый, Фридман, 1994). Данный вывод дополнительно подкрепляет концепция энергетической подпитки крупномасштабных вихревых образований (в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса немагнитного допланетного диска) механизмом вихревого динамо, изложенная в статье (Колесниченко, 2014). Благодаря этому механизму в спиральной³⁾ (гиротропной) дисковой турбулентности инверсный энергетический каскад в результате перераспределения части энергии мелкомасштабной турбулентности в область больших масштабов, порождает в окрестности центральной плоскости диска иерархическую систему макроскопических энергетически ёмких когерентных вихревых структур обратно тому, что, как правило, имеет место в «обычной» зеркально-симметричной турбулентности (см. Монин, Яглом, 1996). В частности, наличие долгоживущих вихревых колец в окрестности экваториальной плоскости, служащих, по мнению ряда авторов (см. Klahr, Bodenheimer, 2003, 2006; Heng, Kenyon, 2010), питомником для формирования относительно крупных газопылевых кластеров в допланетном диске, способствует объединению мелкодисперсных частиц пыли как за счёт более тесного их сближения и роста частоты соударений, так и за счёт более низких скоростей столкновения. Действительно, когерентное поведение огромного числа твёрдых частиц аэродисперсной среды, которые участвуют в коллективных согласованных движениях, отвечающих разномасштабным вихрям (непрерывно распределённым в турбулентном потоке дискового вещества), обеспечивает благоприятные условия для их механического, физико-химического и электрического слипания (Mizuno и др., 1988; Mizuno, 1989; Колесниченко, 2004, 2005; Marov, Kolesnichenko, 2001, 2013), что, как известно, встречает известные трудности в лабораторных экспериментах (см. Barge, Sommeria, 1995; Tanga и др., 1996; Chavanis, 1999).

Таким образом, турбулентные вихри, образующиеся в допланетном диске, могут играть значительную роль в процессе эволюции пылевых частиц, сконденсированных из протозвёздных туманностей (Adams, Watkins, 1995; Brandenburg, Hodgson, 1998; Johansen и др. 2006; 2009). По оценке авторов работы (Heng, Kenyon, 2010) размеры захватываемых в вихри частиц пыли и их относительно крупных агрегатов находятся в интервале от 1 мм до 10 см. В результате возникают весьма благоприятные условия для самопроизвольного об-

³⁾ Существование спиральной турбулентности в Солнечном допланетном диске обусловлено, в конечном счёте, фактом отсутствия отражательной симметрии анизотропного поля турбулентных скоростей относительно его экваториальной плоскости (Колесниченко, 2014).

разования устойчивых пылевых структур (в общем случае фрактальных кластеров⁴⁾), формирующихся благодаря коагуляции движущихся по определённому закону твёрдых мономеров (Смирнов, 1986; 1991; Михайлов, Власенко, 1995), для стимуляции процессов конденсации твёрдых частиц и фазовых переходов в диске, турбулентного переноса и перемешивания между различными его областями, для существенной модификации спектра колебаний и т.п.

Важно отметить, что до последнего времени в большинстве теоретических моделей объединения пылевых частиц в допланетном диске изначально принималась компактная структура возникающих пылевых кластеров. Однако, как теперь стало ясно, растущие благодаря взаимным столкновениям частиц пылевые образования могут иметь весьма ажурную структуру и чрезвычайно низкую объёмную плотность (см., например, Blum 2004; Ormel и др., 2007; Suyama и др., 2008; Wada и др., 2008; Okuzumi и др., 2011; Suyama и др., 2012). Для подобных ворсистых агрегатов, имеющих по сравнению с компактными пылевыми частицами относительно большие геометрические поперечные сечения, меняется весь режим движения в газовой космической среде, в частности, из-за значительного изменения силы трения. Следовательно, для адекватного описания эволюции пылевых агрегатов в диске и, в конечном счёте, механизма образования рыхлых протопланетезималей, необходимо, в общем случае, привлекать к рассмотрению их фрактальные свойства и внутреннюю структуру.

Далее мы не будем учитывать влияние турбулентности на указанные процессы, а сосредоточимся на конструировании эволюционной модели ламинарного диска, описывающей рост ворсистых пылевых агрегатов и их гидродинамический перенос с точки зрения фрактальных представлений. Как было отмечено выше, в последние годы появилось значительное число работ, в которых рассматривается внутренняя структура пористых пылевых агрегатов в диске и её перестройка при достаточно сильных столкновениях кластеров, что, несомненно, способствует более углублённому пониманию тех реальных процессов, которые сопровождают ассоциацию мелкодисперсных пылевых частиц в протопланетезимали (см., например, Ossenkopf 1993; Kempf и др., 1999; Blum 2004; Ormel и др., 2007; Wada и др., 2008; Blum, Wurm, 2008; Suyama и др., 2008; 2012; Okuzumi и др., 2011).

В отличие от этих работ и ряда классических исследований (см., например, Сафронов, 1969; Weidenschilling, 1980; Nakagawa и др., 1981; 1986), в которых моделирование велось в рамках «обычной» сплошной среды и зачастую не принимались во внимание многофракционность пылевой составляющей первичного протопланетного облака, а также фрактальная природа формирующихся в процессе его эволюции пылевых кластеров (изучались в основном компактные пылевые образования с постоянной плотностью или пористые тела), в

⁴⁾ Под фрактальным пылевым кластером обычно понимают систему взаимодействующих частиц-мономеров, которая обладает свойством масштабного самоподобия в интервале размеров $r_0 \ll R$, где r_0 – масштабная единица измерения (например, радиус мономера) линейного размера кластера R .

данной работе предлагается рассматривать совокупность пылевых агрегатов, как особый тип сплошной среды – фрактальной среды⁵⁾, для которой существуют точки и области, не заполненные её частицами⁶⁾. В работе гидродинамическое моделирование фрактальной газопылевой среды, обладающей нецелой массовой размерностью D_f , проводится в рамках дробно-интегральной модели, использующей различные интегралы дробных порядков, для которых порядок дробного интегрирования определяется массовой размерностью пылевых кластеров, а сам интеграл интерпретируется как особый тип интеграла на фрактале с точностью до числового множителя (см. Tarasov, 2005; 2010). При этом мы воспользовались обобщёнными дифференциальными уравнениями гетерогенной механики (описывающими законы сохранения массы, импульса и внутренней энергии для фрактальных сред), которые, являясь следствием модели в дробно-интегральной форме, содержат производные только целого порядка, что существенно облегчает их применение для различных прикладных задач.

Данное исследование посвящено исключительно математическим аспектам моделирования протопланетного ламинарного диска, в котором в процессе его эволюции формируются разномасштабные пылевые фрактальные агрегаты. При этом рассматривается самая ранняя стадия этого процесса, происходящая без перестройки внутренней структуры пылевых кластеров. Более поздняя фаза кластер-кластерной агрегации, связанная с их сжатием при столкновениях с энергиями, превышающими некоторое критическое значение, учтена в модели опосредованно через использование массовой размерности среды, равной $D_f = 2.5$ (характерной для достаточно сжатых агрегатов). Помимо этого, мы ограничились рассмотрением только броуновской и гравитационной коагуляции пылевых мономеров и фрактальных кластеров (находящихся в кинетическом и диффузионном режимах движения), что позволяет достаточно точно рассчитать процесс седиментации ажурных пылевых агрегатов и определить их максимальные размеры в случае пренебрежения радиальным дрейфом и фрагментацией. Следующий шаг моделирования должен включать в себя учёт радиального дрейфа и радиального перемешивания пылевых образований, когда мономерам и кластерным агрегатам «позволено» двигаться во внутренние области диска и исчезать в зоне испарения. В этом более общем случае нужно будет решать 2+1-мерное кинетическое уравнение коагуляции, в котором одно измерение связано с радиальной координатой диска ϖ , другое измерение – с

⁵⁾ Фрактальными средами являются среды с нецелой массовой размерностью (являющейся физическим аналогом размерности Хаусдорфа, не требующим, однако, перехода к пределу бесконечно малых диаметров покрывающих множеств).

⁶⁾ Заметим, что дробные частные производные имеют важное значение для построения обобщённой гидродинамики эредитарных и нелокальных сред (см. Учайкин, 2008). Дробный векторный анализ на фрактальных множествах как обобщение математического анализа на гладких многообразиях в настоящее время активно разрабатывается в литературе (см., например, Strichartz, 1999; Кулак, 2002).

высотой Z над экваториальной плоскостью, а третья координата отвечает массе пылевых кластеров. Специфические особенности развиваемого здесь подхода предполагается в последующем продемонстрировать на ряде численных примеров, относящихся к моделированию эволюции пылевых фрактальных кластеров в конкретных областях протопланетного газопылевого облака.

1. Коагуляция пылевых фрактальных кластеров в допланетном облаке

Процесс коагуляции малых (суб)миллиметровых пылевых частиц протопланетного диска, начинается с формирования разветвлённых цепочных структур – фрактальных нитей с размерами, значительно превышающими размер кластеров, которые из них формируются (Jullien, 1986). Затем, в условиях эволюции дисковой системы такие нити перепутываются и образуют клубки – первичные фрактальные кластеры (ФК). В дальнейшем в процессе кластер-кластерной коагуляции происходит частичное их слияние с образованием крупных фрактальных агрегатов, являющихся основным структурообразующим элементом рыхлых протопланетезималей, возникающих в результате протекания физико-химических и динамических процессов, сходных с процессами роста ФК.



Рис.3. Фрактальная модель космической пылинки

При моделировании дисковой газопылевой среды будем исходить из того, что на самой ранней стадии эволюции диска мелкодисперсные твёрдые частицы (мономеры), двигаясь вместе с газом и сталкиваясь на предельно низких скоростях (~ 10 см/с), слипаются друг с другом (при этом ближайшие соседи образуют химическую связь в зонах контакта), создавая пылевые фрактальные кластеры с квазимонодисперсным распределением по размерам. Благодаря низкоскоростным столкновениям растущие пылевые кластеры имеют ворсистую (fluffy) структуру с дробной фрактальной размерностью $1.7 < D_f < 2.1$ (см. Meakin, 1984). По мере связывания мономеров в крупные пылевые кластеры механизм «частица-кластер» замещается агрегацией «кластер-кластер» (см. Meakin, 1983; Meakin и др., 1989), что приводит к формированию фрактальных

агрегатов с более высоким значением массовой размерности D_f . В частности, в случае ледяных частиц кластеры могут расти без значительных сбоев в результате кластер-кластерной коагуляции при скоростях столкновения вплоть до нескольких десятков м/с ($\sim 50-60$ м/с) (см., например, Wada и др., 2009). При этом массовая размерность кластеров может достигать значений ~ 2.5 , что свидетельствует, в частности, о том, что крупные сжатые пылевые агрегаты в допланетном облаке (размер сжатия агрегата является функцией энергии соударения) могут формироваться при столкновениях «пушистых» ФК. Эти результаты, по мнению авторов статей (Wada и др., 2008; 2009), подтверждают также сценарий, по которому протопланетезимали могут образовываться путём столкновения пылевых фрактальных агрегатов.

Далее все первичные мелкодисперсные компактные частицы газопылевого протопланетного облака вне зависимости от их реальной формы, размера и материала будем считать твёрдыми сферами, имеющими один и тот же радиус r_0 и массу μ_0 , поскольку форма мономера (сферическая, эллипсоидальная и т.п.) оказывает незначительное влияние ($\lesssim 2\%$) на фрактальную размерность образующихся кластеров (см., например, Vertini и др., 2009). На первоначальном этапе роста (на основе механизма «частица-частица») пылевые образования состоят из небольшого числа первичных мономеров и по этой причине не могут, вообще говоря, считаться фракталами. Но, по мере дальнейшего слипания мономеров в кластеры, механизмом «кластер-кластер» формируются фрактальные пылевые агрегаты относительно крупных размеров. При этом число n_0 первичных пылевых частиц (ядер), входящих в состав изотропного ФК и масса кластера m^{cl} определяются следующими асимптотическими формулами (см., например, Смирнов, 2011)

$$n_0 = (R_g / r_0)^{D_f}, \quad m^{cl} = \mu_0 n_0 = \mu_0 (R_g / r_0)^{D_f}, \quad R_g / r_0 \gg 1, \quad (1)$$

в которых $R_g = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{centre}|^2 \right)^{1/2}$ – радиус гирации⁷⁾ (характерный размер изотропного кластера), определяемый как среднеквадратичный радиус агрегата, измеряемый от его центра тяжести (см. Mandelbrot, 1982; Okuzumi и др., 2009); N – число элементов изображения, принадлежащих кластеру; \mathbf{x}_i – радиус вектор i -го мономера, входящего в кластер, \mathbf{x}_{centre} – положение центра масс ФК;

⁷⁾ В случае анизотропных агрегатов для количественного описания степени анизотропии обычно определяют все компоненты тензора инерции $R_{mn}^2 = n_0^{-1} \sum_{i,j=1}^{n_0} (x_{mi} - x_{mj})(x_{ni} - x_{nj})$ для кластера; диагонализация этого тензора даёт главные радиусы гирации, отношение которых определяет степень анизотропии ФК.

$$D_f = \ln n_0 / \ln(R_g / r_0), \quad (1 < D_f < D) \quad (2)$$

– фрактальная массовая размерность (или фрактальная размерность числа частиц) кластера, являющаяся количественной характеристикой заполнения им евклидова пространства (с размерностью D), а также характеризующая самоподобие его внутренней структуры. При этом размерность D_f не зависит от того, является ли упаковка сфер радиуса r_0 плотной, случайной или пористой с однородным распределением пустот. Реальная структура кластеров характеризуется чрезвычайно сложной и нерегулярной геометрией. Хотя размерность D_f и не отражает полностью геометрических свойств фрактала, она, однако, позволяет учитывать основные свойства фрактальных структур при моделировании широкого класса явлений. Далее мы ограничимся рассмотрением случая гомогенной фрактальной среды, когда степенной закон (1) не зависит от расположения (перемещения) кластеров в пространстве. Кроме этого, будем предполагать, что внутренняя структура всех кластеров, формирующихся в аэродисперсной дисковой среде, одинакова, поскольку они образуются в одних и тех же условиях изучаемых областей диска. Именно по этой причине численные значения массовой размерности D_f кластеров (при однотипном способе их сборки) будем считать одинаковыми для всего ансамбля разномасштабных ФК в диске.

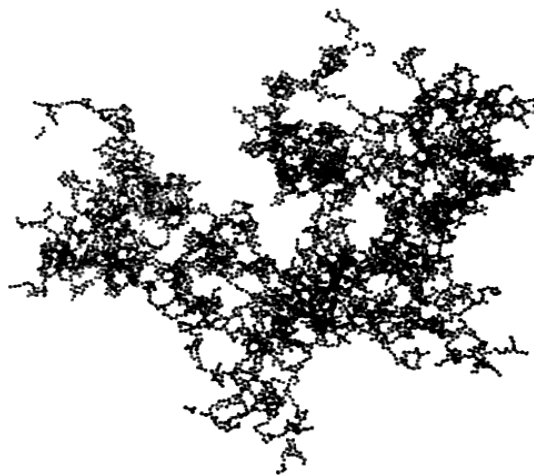


Рис. 4. Фрактальный агрегат

При объединении большого числа малых кластеров (в результате процесса кластер-кластерной ассоциации) образуются обладающие самоподобными свойствами на малых расстояниях⁸⁾ однородные рыхлые агрегаты, в которых по

⁸⁾ Для кластера со случайным расположением частиц свойство самоподобия следует понимать статистически: если в разных частях кластера вырезать большое число кусков, находящихся в одинаковом объёме, то в среднем они будут содержать одинаковое число частиц.

мере увеличения их радиуса гирации увеличиваются размеры пустот, а средняя плотность (средняя массовая плотность вещества в объёме, занимаемом кластером) убывает по закону $\bar{\rho}^{cl} = \rho_0 \left(r_0 / R_g \right)^{3-D_f}$, где $\rho_0 = 3\mu_0 / 4\pi r_0^3$ – массовая плотность материала первичных ядер. Отсюда следует вывод, что чем больший объём занимают части фрактального агрегата, тем больше пустот всех размеров он содержит. Таким образом, одним из характерных свойств фрактального агрегата является его способность захватывать большое пространство (за счёт создания ажурной, сильно разветвлённой структуры) при использовании меньшего по сравнению с плотным (компактным) агрегатом количества вещества, необходимого для его образования. Поскольку существуют пустоты в любой фрактальной среде, которые не заполнены веществом, то и дисковая среда пылевых фрактальных агрегатов не может в общем случае описываться как традиционная сплошная среда, но должна рассматриваться как особый тип сплошной среды, для моделирования которой необходимо привлекать модели, использующие интегрирование в пространстве с нецелой размерностью (см. Roy, Ray, 2009).

Компактность и физические свойства отдельного кластера зависят как от характера движения первичных мономеров и кластеров (прямолинейное или броуновское) до столкновения, так и от вероятности слипания мономеров и кластеров при их соприкосновении. В зависимости от числовой плотности $N_1(\mathbf{x}, t)$ мономеров (не входящих в состав кластеров) в единице объёма дисковой среды возможны два механизма роста кластеров с фрактальной структурой: в результате прилипания к кластеру мономеров или благодаря процессу кластер-кластерной агрегации. При этом в первом случае процесс роста кластера может происходить либо в результате присоединения к нему единичных ядер,двигающихся прямолинейно (*кинетический режим*), либо когда много первичных пылевых мономеров,двигающихся диффузионно, одновременно объединяются с кластером (*диффузионный или гидродинамический режим*).

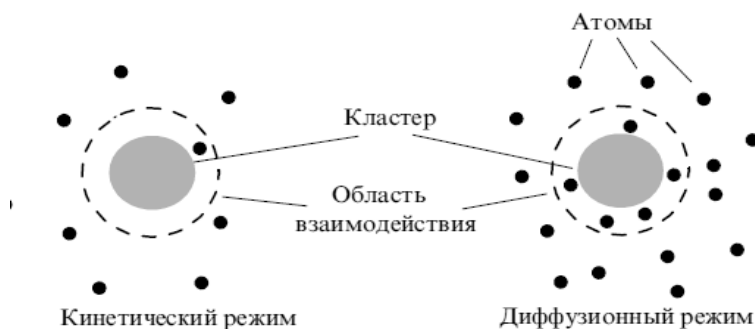


Рис.5.

Дробная массовая размерность D_f пылевых кластеров в дисковой среде определяет, в конечном счёте, их аэродинамические свойства, стабильность и динамику роста (см. Wiltzius, 1987; Chen и др., 1987), а также пространственно-временную эволюцию этих рыхлых образований (Смирнов, 1991). В частности,

в силу рыхлой структуры и, следовательно, меньшей массовой плотности, ФК обладают гораздо большей седиментационной устойчивостью (т.е. низкой скоростью оседания частиц) по сравнению с плотными трёхмерными кластерами. К сожалению, сведения о дробной размерности, структуре и свойствах природных ФК имеют слабое экспериментальное подтверждение и всё ещё базируются на результатах теоретических моделей. В частности, массовую размерность D_f определяют, как правило, на основе численного моделирования поведения кластера в гравитационном (или электрическом) поле с помощью “in-situ”-методов процесса его сборки. Эти методы различаются специфическими деталями кластер-кластерной агрегации, к которым, в частности, относятся: характер движения кластеров (прямолинейное или броуновское), характер объединения кластеров в зависимости от вероятности слипания при их взаимном касании, наличие или отсутствие полного реструктуринга (при котором кластеры связываются в трёх точках), нарушение изотропии объединяемых кластеров, связанное с наведённым электрическим диполем во внешнем электрическом поле или наведённым магнитным моментом во внешнем магнитном поле (Matthews и др. 2012), несферичность сталкивающихся кластеров (Perry и др., 2012), наличие вращательной диффузии ФК, приводящей к захвату налетающего кластера краями образуемого пылевого агрегата (что способствует уменьшению его фрактальной размерности) и т.п. (см. Meakin, 1983; Kolb и др., 1983; Емец и др., 1994). В Табл.1 представлены значения фрактальной размерности кластеров, образующихся в трёхмерном пространстве при различных механизмах роста.

Таблица 1. Фрактальная размерность кластера, образующегося при ассоциации твёрдых частиц (Смирнов, 1981)

Модель агрегации	Вероятность прилипания, κ^P	Фрактальная размерность
Прямолинейная траектория, кластер-частица	1	$2,97 \pm 0,08$
Броуновское движение, кластер-частица	1 0,25	$2,51 \pm 0,06$ $2,48 \pm 0,12$
Прямолинейная траектория, кластер-кластер	1	$2,00 \pm 0,05$
Броуновское движение, кластер-кластер	1	$1,78 \pm 0,05$
Кластер-кластер, малая вероятность прилипания (RLCA-модель)	$\kappa^P < 1$	$2,11 \pm 0,03$

Исторически первая компьютерная модель для описания процесса сборки кластера была предложена в работе (Witten, Sander, 1981) и получила название DLA-модель (Diffusion Limited Aggregation). В этой модели предполагается, что частицы, совершая броуновское движение в пространстве, соприкасаются с кластером и прилипают к нему. Виттен-сэндеровская модель хорошо применима для изучения агрегационных явлений, вызванных внешними полями, где, в дополнение к межчастичному взаимодействию, существует внешнее поле, которое приводит к взаимодействию частицы и агрегата. В случае ССА-модели (Cluster-Cluster Aggregation) (см. Meakin, 1983) на первой стадии процесса образуется большое число кластеров малых размеров, которые далее объединяются в кластеры бóльших размеров. В результате образуются более рыхлые кластеры, чем в рамках DLA-модели, поскольку при таком способе сборки труднее заполнить пустоты. В этих моделях считается, что ассоциирующие частицы совершают диффузионное движение в пространстве, т.е. длина пробега частиц мала по сравнению с характерными размерами области, ответственной за рост кластера. Кроме этого, предполагается, что соприкосновение частиц ведет к их слипанию с вероятностью порядка единицы. В RLCA-модели (Reaction Limited Cluster Aggregation) (см., например, Jullien, 1984) вероятность прилипания при касании частиц считается малой, поэтому при кластер-кластерной агрегации кластеры могут глубже проникать друг в друга и в результате образуется более компактный кластер. Наконец, в случае баллистической модели сборки кластеров (BCSA) считается, что длина пробега частиц велика по сравнению с размерами области прилипания и потому траектории их движения являются прямолинейными; при таком способе сборки кластер становится наиболее компактным (см. Vold, 1963; Sutherland, 1966).

2. Базовые уравнения модели

Основные допущения

Огромное разнообразие, взаимовлияние и сложность физико-химических и динамических эффектов, происходящих в допланетном газопылевом облаке, с необходимостью требует разумной схематизации описания эволюции дисковой гетерогенной среды. В связи с этим далее будем предполагать, что движение газа и дисперсной составляющей диска можно адекватно описать при следующих допущениях:

- i) первичные пылевые частицы (мономеры) – однородные по составу, твёрдые и недеформируемые, сферичные по форме и монодисперсные;
- ii) предполагается несжимаемость материала мономеров, $\rho_0 = \text{const}$;
- iii) истинная плотность материала мономеров много больше истинной плотности газовой составляющей дисковой системы, $\rho_0 \gg \tilde{\rho}_g$;
- iv) объёмное содержание s^{cl} дисперсной фазы не очень велика ($(s^{\text{cl}})^2 \ll 1$),

так что членами порядка $(s^{cl})^2$ можно пренебречь;

v) несущая фаза – сжимаемый совершенный газ;

vi) вязкость дисперсной фазы можно не учитывать;

vii) предполагается условие термического равновесия газовой и дисперсной фаз, $T_g = T_d = T$;

viii) суммарный гетерогенный континуум рассматривается в однодавленческом приближении, $p_g = p_d = p(\rho_g, T)$;

ix) вкладом от приповерхностного слоя кластеров в динамику дисковой системы в целом можно пренебречь (заметим, что наличие в гетерогенной системе межфазных границ, моделируемых математическими поверхностями, на которых терпят разрыв непрерывности поля различных гидротермодинамических параметров, приводит к весьма серьёзным осложнениям континуальной теории такой системы (см. Нигматулин, 1982));

x) при описании динамического взаимодействия фаз вращением пылевых кластеров можно пренебречь;

xi) предполагается, что фрактальная среда пылевых кластеров внутри некоторого макрообъёма \mathcal{W} имеет массовую размерность D_f , а размерность на его границе $\partial\mathcal{W}$ равна d (в общем случае размерность d не равна ни 2, ни $D_f - 1$).

Для применимости континуального приближения линейные размеры элементарного объёма $\delta\mathcal{V}$ дисковой среды считаются намного больше линейных размеров любых дисперсных включений, но намного меньше характерного гидродинамического размера рассматриваемой модели L_{hydr} .

Таким образом, эволюционирующее газопылевое протопланетное ламинарное облако предполагается рассматривать как гетерогенный термодинамический комплекс, состоящий из двух взаимосвязанных подсистем, которые заполняют одновременно один и тот же объём евклидова пространства – газовой фазы солнечного состава (континуальная среда) и полидисперсной фазы пылевых частиц (фрактальная среда с нецелой массовой размерностью D_f , меньшей размерности D координатного пространства задачи), которые находятся при общей абсолютной температуре $T(\mathbf{x}, t)$ и давлении $p(\mathbf{x}, t)$. Газовую фазу, являющуюся несущей средой, будем описывать далее моделью вязкой жидкости. В свою очередь, полидисперсную пылевую фазу будем считать многоскоростной средой, состоящей из нескольких фракций: фракции первичных пылевых конденсированных мономеров и внедрённого в них большого числа фракций пылевых фрактальных агрегатов, отличающихся друг от друга только размерами. Другими словами, элементарный макрообъём $\delta\mathcal{V}$ дисковой среды содержит, помимо несущей газовой фазы, описываемой обычными структурными параметрами (такими как числовая $n_g(\mathbf{x}, t)$ и массовая $\rho_g(\mathbf{x}, t) = n_g \mu_g$ плотности, давление $p_g(\mathbf{x}, t)$, температура $T_g(\mathbf{x}, t)$, гидродинамическая скорость

$U_g(\mathbf{x}, t)$ и т.п.), ещё множество твёрдых фрактальных образований, которое можно разбить на k ($k=1, 2, \dots, Q$) фракций – пылевых кластеров с одинаковыми размерами. Если пронумеровать эти фракции в порядке возрастания размеров кластеров, то 1-фракция будет содержать первичные мономеры, 2-фракция содержит ассоциации двух мономеров и т.д. В результате мы получим Q фракций, характеризуемых следующими макрохарактеристиками:

$$\begin{aligned} m_k^{\text{cl}} &= n_{0,k} \mu_0, \quad R_{gk} = r_0 n_{0,k}^{1/D_f}, \quad V_k^{\text{cl}} = (4\pi/3) R_{gk}^3, \\ \rho_k^{\text{cl}}(\mathbf{x}, t) &= \mu_0 n_{0,k} N_k^{\text{cl}}, \quad N_k^{\text{cl}}(\mathbf{x}, t), \quad \tilde{\rho}_k^{\text{cl}} = m_k^{\text{cl}} / V_k^{\text{cl}}, \\ s_k^{\text{cl}}(\mathbf{x}, t) &= V_k^{\text{cl}} N_k^{\text{cl}}, \quad U_k(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь r_0 и μ_0 – радиус и масса первичных мономеров, из которых составлен фрактальный агрегат (ФА); $\rho_0 = 3\mu_0 / 4\pi r_0^3$ – массовая плотность материала первичных ядер; $n_{0,k} = (R_{gk} / r_0)^{D_f}$ – число первичных мономеров, входящих в состав k -го ФК; R_{gk} – радиус гирации k -го ФК, состоящего из $n_{0,k}$ пылевых мономеров; D_f – фрактальная размерность отдельного кластера и фрактальной среды в целом; $V_k^{\text{cl}} = (4/3)\pi r_0^3 n_{0,k}^{3/D_f}$, $m_k^{\text{cl}} = \mu_0 (R_{gk} / r_0)^{D_f}$, $U_k(\mathbf{x}, t)$ – соответственно объём⁹⁾, масса и гидродинамическая скорость ФК k -сорта; $N_k^{\text{cl}}(\mathbf{x}, t)$ – числовая плотность ФК k -го сорта (число кластеров в единице макрообъёма δV дисковой среды); $\rho_k^{\text{cl}}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 (R_{gk} / r_0)^{D_f} N_k^{\text{cl}}$ – массовая плотность ФК k -го сорта; $\tilde{\rho}_k^{\text{cl}}(\mathbf{x}, t) = \rho_0 (R_{gk} / r_0)^{D_f - 3}$ – истинная массовая плотность ФК; $s_k^{\text{cl}}(\mathbf{x}, t)$ – объёмное содержание фрактальных кластеров k -го сорта, $s_k^{\text{cl}}(\mathbf{x}, t) = \rho_k^{\text{cl}} / \tilde{\rho}_k^{\text{cl}}$; при этом объёмное содержание (концентрация) s_g несущей фазы выражается в виде

$$s \equiv s_g = 1 - s^{\text{cl}}, \quad s^{\text{cl}} = \sum_{k=1}^Q s_k^{\text{cl}} = \sum_{k=1}^Q V_k^{\text{cl}} N_k^{\text{cl}}.$$

Заметим, что необходимость введения в рассмотрение объёмных содержаний заключается в том, что в отличие от гомогенной смеси, где каждый компонент может рассматриваться как занимающий весь элементарный объём пространства непрерывно и равномерно с другими компонентами, в гетерогенной системе каждая фракция занимает лишь часть элементарного объёма. Кроме этого, поскольку пылевые кластеры разных сортов двигаются друг относительно дру-

⁹⁾ Более общее определение объёма ФК задаётся формулой (4).

га со скоростями $\mathbf{w}_{kj}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{U}_k - \mathbf{U}_j$ ($k, j = 1, \dots, Q$), возможны столкновения между ними, что приводит в общем случае к взаимному обмену массой, импульсом, моментом импульса и энергией. Хотя сочетание столкновительной фрагментации и электрического отталкивания частиц и налагает серьёзные ограничения на формирование и рост пыли в допланетном диске (см. Okuzumi, 2009), далее мы не будем принимать во внимание воздействие этих явлений на процесс коагуляции в диске.

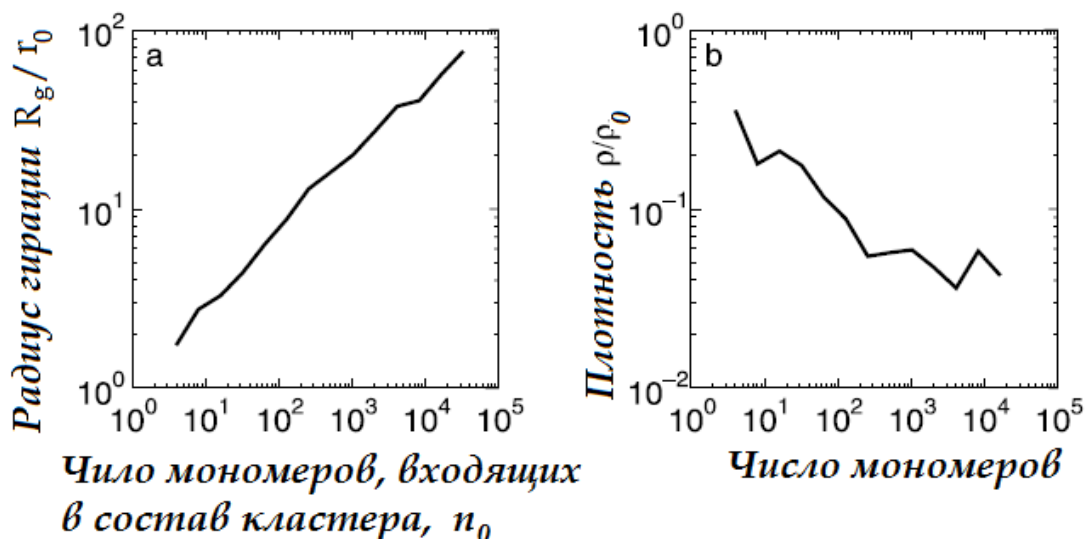


Рис. 6.

Для описания фрактальных сред будем использовать два ключевых понятия: $c_D(D_f, \mathbf{x}')$ – функция плотности разрешённых состояний¹⁰⁾, описывающая, как плотно упакованы разрешённые состояния в D -мерном евклидовом пространстве ($D=1,2,3$) (при этом выражение $c_D(D_f, \mathbf{x}')dV_D$ представляет собой число разрешённых мест в элементарном объёме dV_D); $\rho(\mathbf{x}', t)$ – функция распределения физических величин (таких как масса, числовая плотность и т.п.) на множестве разрешённых состояний в координатном пространстве в момент времени t . Здесь $\mathbf{x}' = \mathbf{x}/L_{\text{hydr}}$ – безразмерная координата. Вид и свойства функции $c_D(D_f, \mathbf{x}')$ определяются свойствами и симметриями фрактального распределения. Если предположить, что фрактальная среда обладает сферически симметричным распределением вещества в ней, то в этом случае можно использовать следующее выражение для плотности состояний:

¹⁰⁾ Функция плотности разрешённых состояний определяет (с точностью до числового множителя) ядро интеграла дробного порядка, равного D_f . Существует множество различных определений дробного интегрирования, ядра которых интерпретируются как плотности разрешённых состояний. В данной работе используется дробное интегрирование по Риссу (см. Самко и др., 1987).

$$c_3(D_f, \mathbf{x}') = \frac{2^{3-D_f} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D_f/2)} |\mathbf{x}'|^{D_f-3}, \quad \left(c_2(d, \mathbf{x}') = \frac{2^{2-d}}{\Gamma(d/2)} |\mathbf{x}'|^{d-2} \right),$$

являющиеся ядром интеграла дробного порядка D_f (см. Tarasov, 2005), задающего интегрирование Рисса с точностью до числового множителя (Самко и др., 1987). В этом случае, например, объём шара W радиуса R фрактальной среды с массовой размерностью D_f определяется формулой

$$\mathcal{V}_{D_f}(W) = \int_W d\mathcal{V}_{D_f} = \frac{2^{3-D_f} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D_f/2)} \int_W |\mathbf{x}'|^{D_f-3} d\mathcal{V}_3,$$

где $d\mathcal{V}_{D_f} = c_3(D_f, \mathbf{x}') d\mathcal{V}_3$. Используя сферические координаты, можно получить

$$\mathcal{V}_{D_f}(W) = \frac{\pi 2^{5-D_f} \Gamma(3/2)}{\Gamma(D_f/2)} \int_W |\mathbf{x}'|^{D_f-1} d|\mathbf{x}'| = \frac{2^{5-D_f} \pi \Gamma(3/2)}{D_f \Gamma(D_f/2)} R^{D_f} \sim R^{D_f}, \quad (4)$$

или

$$\mathcal{V}_{D_f}(W) = \frac{\pi^{3/2-D_f/3} 2^{4-D_f-2D_f/3} 3^{D_f/3}}{D_f \Gamma(D_f/2)} (\mathcal{V}_3(W))^{D_f/3},$$

где $\mathcal{V}_3(W) = (4\pi/3)R^3$ и использованы формулы $\Gamma(3/2) = (1/2)\Gamma(1/2)$ и $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Важно иметь в виду, что уравнения, которые связывают различные физические величины (например, массу, объём, момент инерции), не зависят от числового множителя в функции $c_3(D_f, \mathbf{x}')$, однако зависимость от радиус-вектора \mathbf{x}' существенна для этих уравнений (Tarasov, 2010). Отметим также, что в случае иных симметрий среды с дробной размерностью, для функции плотности разрешённых состояний $c_D(D_f, \mathbf{x}')$ нужно использовать выражения для ядер интегралов дробного порядка, отвечающих этой симметрии, т.е. фигурирующих в дробно-интегральной модели данной фрактальной среды (в частности, в случае распределения вещества с фрактальной размерностью, соответствующей симметрии параллелепипеда, нужно использовать плотность состояний по Риману–Лиувиллю) (Самко и др., 1987).

Приведём теперь основные гидродинамические уравнения для моделирования несущей газовой фракции и пылевых ФК в случае изотермического ламинарного диска, вращающегося вокруг прото-Солнца с угловой скоростью $\Omega(\varpi, z)$.

Уравнения сохранения масс отдельных фракций

Далее будем исходить из того, что фрактальные кластеры k -го сорта ведут

себя подобно макроскопическим частицам сферической формы, обладающим массой m_k^{cl} и радиусом R_{gk} , причём при лобовом соударении пары кластеров происходит с некоторой вероятностью их объединение в единый агрегат, состоящий из суммарного количества первичных мономеров обоих кластеров: $n_{0,k-i} + n_{0,i} = n_{0,k}$. При этом мы будем пренебрегать воздействием энергии удара на изменение внутренней структуры кластерных агрегатов (см. Ossenkohf, 1993). Тогда обобщённые уравнения сохранения масс газовой и дисперсных фракций с учётом «фазовых переходов» принимают следующий вид (см. Нигматулин, 1987; Tarasov, 2010):

$$\frac{d}{dt} \rho_g + \rho_g \nabla \cdot \mathbf{U}_g = 0, \quad \rho_g = \tilde{\rho}_g s, \quad (5)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{D,k} \rho_k^{cl} + \rho_k^{cl} \nabla^D \cdot \mathbf{U}_k = \sum_{j=1, j \neq k}^Q J_{jk} = m_k^{cl} \overset{\circ}{N}_k^{cl}, \quad \rho_k^{cl} = m_k^{cl} N_k^{cl}, \quad (6)$$

(k, j = 2, ..., Q; k ≠ j).

Здесь $\left(\frac{d}{dt} \right)_{D,k} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + c(D_f, d, \mathbf{x}') \mathbf{U}_k \cdot \nabla$ – обобщённая (на фрактальные среды)

полная производная по времени; $\nabla^D \cdot \mathbf{U}_k \equiv c_3^{-1}(D_f, \mathbf{x}') \nabla \cdot \{c_2(d, \mathbf{x}') \mathbf{U}_k\}$ – обобщённая дивергенция, $c(D_f, d, \mathbf{x}') \equiv c_3^{-1}(D_f, \mathbf{x}') c_2(d, \mathbf{x}')$; ∇^D – обобщённый оператор набла; $J_{jk} = m_k^{cl} \psi_{j,k}$ – интенсивность обмена массами за счёт столкнове-

ний ФК, которая характеризуется общим числом соударений $\psi_{j,k} = \Phi_{j,k} N_k^{cl} N_j^{cl}$ в единице объёма дисковой системы; $\Phi_{j,k}$ – интенсивность скорости ассоциации кластеров k-го и j-го сортов (так называемое ядро коагуляции); $\tilde{\rho}_g$, $\rho_g = \tilde{\rho}_g s$ – соответственно истинная и приведённая массовая плотность газовой

фазы; $\overset{\circ}{N}_k^{cl}$ – полная скорость изменения числовой плотности N_k^{cl} кластеров k-го сорта за счёт процессов коагуляции, определяемая в общем случае уравнением Смолуховского

$$\overset{\circ}{N}_k^{cl} \equiv \frac{1}{2} \sum_{j=1; k>j}^{k-1} \Phi_{j,(k-j)} N_j^{cl} N_{(k-j)}^{cl} - N_k^{cl} \sum_{j=2}^Q \Phi_{k,j} N_j^{cl}, \quad (k=1, 2, \dots, Q). \quad (7)$$

Рассмотрим элементарную схему для подсчёта числа соударений $\psi_{j,k}$ между кластерами k-го и j-го сортов в единицу времени в единице объёма

космического пространства. Если выделить один пробный кластер k -го сорта, то за единицу времени об него ударятся все кластеры j -го сорта, находящиеся в цилиндре радиуса $R_{gk} + R_{gj}$ и высотой $|\mathbf{w}_{kj}|$, объём которого $V_{j,k} = \pi(R_{gk} + R_{gj})^2 |\mathbf{w}_{kj}|$. Таким образом, число кластеров j -го сорта, столкнувшихся в единицу времени с одним кластером k -го сорта, будет равно $N_j^{\text{cl}} V_{j,k}$, а общее число соударений в единице объёма равно

$$\Psi_{j,k} = N_k^{\text{cl}} N_j^{\text{cl}} V_{j,k} = \kappa^P \pi (R_{gk} + R_{gj})^2 |\mathbf{w}_{kj}| N_k^{\text{cl}} N_j^{\text{cl}}, \quad (8)$$

где коэффициент $\kappa^P \leq 1$ определяет долю соударений, приведших к переходу частиц j -го сорта в k -фракцию. Из формулы (8) следует выражение для интенсивности скорости ассоциации кластеров k -го и j -го сортов

$$\Phi_{k,j} = \pi (R_{gk} + R_{gj})^2 |\mathbf{w}_{kj}| \kappa^P = \kappa^P \sigma_{k,j} |\mathbf{w}_{kj}|, \quad (9)$$

где $\sigma_{k,j} = \pi (R_{gk} + R_{gj})^2$ – сечение захвата.

Уравнения движения отдельных фракций во фрактальной среде

Далее для простоты будем предполагать, что сопротивление газовой среды движению k -кластера такое же, как и для сферической частицы с радиусом R_{gk} , соответствующей эффективному размеру кластера. Несущую газовую фазу будем описывать моделью вязкой жидкости. Тогда уравнение движения несущей фазы и Q уравнений движения для разномасштабных ФК могут быть записаны в следующем общем виде:

$$\rho_g \frac{d}{dt} \mathbf{U}_g = -s \nabla p_g + \nabla \cdot \mathbf{P}_g - \sum_{k=1}^Q \mathbf{F}_{k,g} - \rho_g \frac{GM_\odot}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}, \quad (10)$$

$$\rho_k^{\text{cl}} \left(\frac{d}{dt} \right)_{D,k} \mathbf{U}_k = -s_k^{\text{cl}} \nabla^D p + \mathbf{F}_{g,k} - \sum_{j=1; j \neq k}^Q \left[\mathbf{J}_{jk} (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_k) + \mathbf{F}_{j,k} \right] - \rho_k^{\text{cl}} \frac{GM_\odot}{|\mathbf{x}|^3}. \quad (11)$$

$k=1, \dots, Q; \quad k \neq j$,

Здесь $GM_\odot \mathbf{x} / |\mathbf{x}|^3 = \mathbf{g}$ – вектор ускорения гравитационной силы; $\mathbf{x} = \sum_\alpha \mathbf{e}_\alpha x_\alpha$ – центральный радиус-вектор; G и M_\odot – гравитационная постоянная и масса протозвезды; $\mathbf{P}_g = \eta_g (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^* - (2/3) \mathbf{I} (\nabla \cdot \mathbf{U}))$ – тензор вязких напряжений; ν_g , $\eta_g = \rho_g \nu_g$ – коэффициенты кинематической и сдвиговой вязкости для

газа; $\mathbf{I} = \{\delta_{\alpha\beta}\}$ – единичный тензор;

$$\mathbf{F}_{g,k} \cong -k_B T_g \frac{N_k^{\text{cl}}}{D_{g,k}} (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_g) \quad (12)$$

– сила взаимодействия между кластерами k -го сорта и несущей газовой фазой; $D_{g,k}$ – коэффициент бинарной диффузии кластеров k -го сорта в газе; k_B – постоянная Больцмана;

$$\mathbf{F}_{j,k} = m_k^{\text{cl}} \psi_{j,k} (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_k) = \Phi_{j,k} m_k^{\text{cl}} N_k^{\text{cl}} N_j^{\text{cl}} (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_k) \quad (13)$$

– сила взаимодействия кластеров k -го и j -го сортов (за счёт их столкновения).

Диффузия пылевых фрактальных кластеров в несущей среде

Перенос ФК в газопылевом диске определяется их взаимодействием с молекулами несущего газа и двигающимися вместе с ними мелкодисперсными пылевыми частицами, и это взаимодействие имеет разный характер в зависимости от радиуса гирации кластеров или массовой плотности ρ_g газа. В разреженной аэродисперсной среде, когда $\lambda \gg R_g$, где λ – длина свободного пробега частиц (атомов или молекул газа) в газе, сила торможения движущегося кластера создается в результате однократных столкновений частиц газа с кластером, что соответствует *кинетическому режиму* переноса кластеров в несущей фазе. В плотном газе, когда $\lambda \ll R_g$, в каждый момент времени большое число частиц газа одновременно взаимодействует с кластером, и движение кластера соответствует *диффузионному (гидродинамическому) режиму*.

В случае кинетического режима движения коэффициент диффузии $D_{g,k}^{\text{kin}}$ малых кластеров в газе определяется формулой

$$D_{g,k}^{\text{kin}} = \frac{3}{8\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{k_B T_g \mu_g}}{\rho_g} \frac{1}{R_{gk}^2} = \frac{3}{8\sqrt{2\pi}} \frac{c_{gs}}{n_g} \frac{1}{R_{gk}^2}, \quad \lambda > R_{gk}, \quad (14)$$

а сила сопротивления несущей среды (9) описывается законом Эпштейна

$$\mathbf{F}_{g,k}^{\text{kin}} \cong -k_B T_g \frac{N_k^{\text{cl}}}{D_{g,k}^{\text{kin}}} (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_g) = -\frac{8\sqrt{2\pi}}{3} c_{gs} \rho_g R_{gk}^2 N_k^{\text{cl}} (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_g), \quad \lambda > R_{gk}. \quad (15)$$

Здесь $c_{gs} = \sqrt{k_B T_g / \mu_g}$ – изотермическая скорость звука в газе.

В другом предельном случае (в диффузионном режиме движения) коэффициент диффузии крупных кластеров в газе определяется формулой

$$D_{g,k}^{\text{dif}} = \frac{2k_B T_g}{\pi R_{gk}^2 \rho_g C_D(Re_{g,k}) |\mathbf{w}_{gk}|} = \frac{4k_B T_g}{\pi R_{gk} \eta_g Re_{g,k} C_D(Re_{g,k})}, \quad \lambda \ll R_{gk}, \quad (16)$$

где для коэффициента сдвиговой вязкости далее будем использовать первое приближение теории Чепмена–Энскога (см. Чепмен, Каулинг, 1960)

$$\eta_g = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\mu_g c_{sg}}{\sigma_g} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\rho_g \lambda c_{sg}}{3}. \quad (17)$$

Здесь $\sigma_g = \pi r_g^2 (= 1/\lambda n_g)$ – газокинетическое сечение столкновения частиц в газе, $\sigma_g = 2 \times 10^{-15} \text{ см}^2$; r_g – радиус взаимодействия молекул несущей фазы; C_D – эффективный коэффициент аэродинамического сопротивления кластера k -го сорта (сферы радиуса R_{gk}) относительно несущей фазы, который в общем случае достаточно сложным образом зависит от числа Рейнольдса $Re_{g,k} = 2R_{gk} |\mathbf{w}_{gk}| / v_g$. Далее будем использовать следующее выражение для коэффициента C_D , получившее достаточно широкое распространение в астрофизической литературе (Whipple, 1972):

$$C_D(Re_{g,k}) = \begin{cases} 24Re_{g,k}^{-1} + 3,6Re_{g,k}^{-0,313}, & Re_{g,k} \leq 500; \quad (\text{закон Стокса}) \\ 9,5 \times 10^{-5} Re_{g,k}^{1,397}, & 500 < Re_{g,k} \leq 1500; \\ 2,61, & Re_{g,k} > 1500. \end{cases}$$

Поскольку нами не предполагается учитывать процессы дробления ФК при столкновениях, то вполне естественно предположить, что относительные скорости \mathbf{w}_{gk} их столкновения малы (столкновения кластеров с большими относительными скоростями сопровождаются, как известно, их разрушением). Тогда, при малых числах Рейнольдса $C_D(Re_{g,k}) \cong 24/Re_{g,k}$, коэффициент диффузии кластеров (при гидродинамическом режиме движения) принимает вид:

$$D_{g,k}^{\text{dif}} = \frac{k_B T_g}{6\pi R_{gk} \eta_g} = \left(\frac{k_B T_g \mu_0^{1/D_f}}{6\pi r_0 \eta_g} \right) (m_k^{\text{cl}})^{-1/D_f}, \quad \lambda \ll R_{gk}, \quad (18)$$

а соответствующая сила сопротивления $\mathbf{F}_{g,k}^{\text{dif}}$ (12) задаётся законом Стокса

$$\mathbf{F}_{g,k}^{\text{dif}} = 6\pi R_{gk} \eta_g N_k^{\text{cl}} (\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_k) = \left(\frac{6\pi r_0 \eta_g}{\mu_0^{1/D}} \right) N_k^{\text{cl}} (m_k^{\text{cl}})^{1/D_f} (\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_k). \quad (19)$$

Формулы (14) и (16) для коэффициентов диффузии кластеров в диффузионном и кинетическом режимах удобно объединить, и использовать для коэффициента диффузии кластеров в несущей фазе соотношение

$$\mathcal{D}_{g,k} = \mathcal{D}_{g,k}^{\text{dif}} + \mathcal{D}_{g,k}^{\text{kin}} = \frac{k_B T_g}{6\pi \eta_g R_{gk}} \left(1 + \frac{15\pi}{32\sqrt{2}} \frac{\lambda}{R_{gk}} \right) \cong \frac{k_B T_g}{6\pi \eta_g R_{gk}} (1 + 1,5 \mathcal{Kn}_k), \quad (20)$$

которое переходит в (16) или (14) в пределе малых и больших чисел Кнудсена $\mathcal{Kn}_k = \lambda / R_{gk}$ соответственно. Здесь $\lambda = (\sigma_g n_g)^{-1}$ – длина свободного пробега частиц в газовой среде относительно столкновений друг с другом. Использование формулы (20) позволяет учитывать при моделировании эволюции протопланетного облака плавный переход от кинетического режима взаимодействия кластеров с несущим газом к диффузионному режиму по мере увеличения плотности частиц газа n_g или радиусов R_{gk} (масс) ФК при приближении к центральной плоскости диска, причём этот переход управляется параметром $n_g R_g$.

При написании формул (18) и (19) мы считали, что соответствующие числа Рейнольдса малы. Выясним, при каких максимальных размерах ФК это допущение справедливо на примере его квазистационарного свободного оседания в газе к экваториальной плоскости диска под влиянием Z -компоненты силы тяготения Солнца $\mathbf{g}_z = \Omega_K^2 \mathbf{z}$ (здесь $\Omega_K = \sqrt{GM_\odot / \varpi^3}$ – кеплеровская угловая скорость на экваториальной плоскости диска). При указанных условиях уравнение движение k -кластера (11) сводится к виду

$$6\pi R_{gk} \eta_g \mathbf{w}_{gk}|_z = \mathbf{g}_z m_k^{\text{cl}} = \mathbf{g}_z \left(\frac{4\pi \rho_0}{3} r_0^{3-D_f} \right) R_{gk}^{D_f}. \quad (21)$$

Отсюда для скорости гравитационного оседания (вдоль оси Z) одиночного ФК k -го сорта в неограниченном газопылевом диске будем иметь

$$\mathbf{w}_{gk}|_z \equiv -U_{kz} = \Omega_K^2 \mathbf{z} \left(\frac{2\rho_0}{9\eta_g} r_0^{3-D_f} \right) R_{gk}^{D_f-1} = \Omega_K^2 \mathbf{z} \left(\frac{\mu_0}{6\pi r_0 \eta_g} \right)^{1/D_f} (m_k^{\text{cl}})^{1-1/D_f}. \quad (22)$$

Определим число Рейнольдса формулой $Re_{g,k} = 2R_{gk} U_{kz} / \nu_g$; тогда условие на радиус гирации ФК, при выполнении которого число Рейнольдса мало ($Re_{g,k} \ll 1$), имеет вид:

$$1 \gg \mathcal{R}_{e,g,k} = g_z \left(4\rho_0 r_0^{3-D_f} / 9\eta_g^2 \right) \mathbf{R}_{gk}^{D_f},$$

откуда

$$\mathbf{R}_{gk} \ll r_0^{1-3/D_f} \left(\frac{9\eta_g^2}{4g_z \rho_g \rho_0} \right)^{1/D_f}. \quad (23)$$

Это неравенство позволяет оценить максимальный размер стоксовских пылевых ФК. Из этой оценки (менее жёсткой по сравнению с оценкой $\mathbf{R} \ll \left(9\eta_g^2 / 4g_z \rho_g \rho_0 \right)^{1/3}$ для компактных тел) следует, в частности, что в гравитационном поле пушистые фрактальные агрегаты оседают значительно медленнее, чем компактные частицы той же массы.

Заметим, что в силу структурных особенностей кластеров сила сопротивления газовой среды более точно определяется рассеянием её частиц на первичных ядрах фрактальных агрегатов (см. Михайлов, Власенко, 1995). Соответственно этому механизму рассеяния длина свободного пробега мономеров λ_f внутри кластера (при средней плотности числа мономеров входящих в кластер $\bar{n}_{0,k} = n_{0,k} / \mathcal{V}_k^{\text{cl}} = 3\mathbf{R}_{gk}^{D_f-3} / 4\pi r_0^{D_f}$) определяется соотношением

$$\lambda_f = \frac{1}{\pi r_0^2 n_{0,k}} = \frac{4}{3} \mathbf{R}_{gk} \left(r_0 / \mathbf{R}_{gk} \right)^{D_f-2}, \quad (24)$$

согласно которому для кластеров с фрактальной размерностью $D_f < 2$ выполняется условие $\lambda_f > \mathbf{R}_{gk}$. Поскольку при таком способе описания условие применимости формулы Стокса для силы сопротивления движению фрактального агрегата имеет вид $\lambda \ll \mathbf{R}_{gk}$ и $\lambda_f \ll \mathbf{R}_{gk}$, то из формулы (24) видно, что для фрактальных агрегатов с $D_f < 2$ это условие не выполняется, в силу чего формула Стокса для таких кластеров неприменима.

Итак, с учётом формул (14) и (20), уравнения движения (10)) и (11) могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{U}_g}{\partial t} + \mathbf{U}_g \cdot \nabla \mathbf{U}_g = \\ & = -\frac{s \nabla p_g}{\rho_g} - \sum_{k=1}^Q g(m_k^{\text{cl}}) \rho_k^{\text{cl}} (\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_k) + v_g \nabla^2 \mathbf{U}_g + \frac{1}{3} v_g \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}_g) - \frac{GM_\odot}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathbf{U}_k}{\partial t} + c(D_f, d, \mathbf{x}') \mathbf{U}_k \cdot \nabla \mathbf{U}_k = \\
& = -\frac{s_k^{\text{cl}} \nabla^D p}{\rho_k^{\text{cl}}} - \mathcal{G}(m_k^{\text{cl}}) \rho_g (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_g) - m_k^{\text{cl}} \sum_{j=1; j \neq k}^Q \mathcal{K}_{k,j} \rho_j^{\text{cl}} (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_j) - \frac{GM_\odot}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}, \quad (26) \\
& \quad (k=1, \dots, Q; k \neq j),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
& \mathcal{K}_{k,j} = \Phi_{k,j} / m_k^{\text{cl}} m_j^{\text{cl}}, \quad (27) \\
& \mathcal{G}(m_k^{\text{cl}}) = \begin{cases} \mathcal{G}^{\text{kin}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \left(\frac{r_0^{D_f-3} c_{gs}}{\rho_0} \right) (R_{gk})^{2-D_f} = \frac{8\sqrt{2\pi}}{3} \left(\frac{r_0^2 c_{gs}}{\mu_0^{2/D_f}} \right) (m_k^{\text{cl}})^{(2-D_f)/D_f}, \lambda > R_{gk}; \\ \mathcal{G}^{\text{dif}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \left(\frac{3r_0^{D_f-3} \lambda c_{sg}}{2\rho_0} \right) R_{gk}^{1-D_f} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \left(\frac{r_0 \lambda c_{sg}}{(\mu_0)^{1/D_f}} \right) (m_k^{\text{cl}})^{(1/D_f)-1}, \lambda < R_{gk}. \end{cases} \quad (28)
\end{aligned}$$

Система уравнений неразрывности в форме (5) и (6) и уравнений движения (25) и (26) для полей $\rho_g(\mathbf{x}, t)$, $\rho_k^{\text{cl}}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{U}_g(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{U}_k(\mathbf{x}, t)$ и $p_g(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t)$, являющаяся обобщением уравнений гетерогенной механики на фрактальные жидкости, лежит в основе моделирования эволюции газа и пылевых фрактальных агрегатов в ламинарном изотермическом диске в общем случае произвольных скоростей столкновений кластеров.

3. Кинетика процессов кластеризации в пылевой фрактальной среде

Кинетическое уравнение коагуляции

Строгое решение задачи образования и эволюции фрактальных кластеров включает одновременно с оценкой их скоростей также и определение функции распределения (спектра) кластеров по размерам (массам) в произвольный момент времени t в точке \mathbf{x} (см., например, Пискунов, 2010), т.е. совместное решение обобщённого нелинейного пространственно неоднородного кинетического уравнения коагуляции и гидродинамических уравнений для фрактальной среды.

В наиболее общем случае, включающем, в частности, моделирование изменения внутренней структуры ФК при столкновениях, кластеры удобно охарактеризовать некоторым набором параметров $\mathbf{Y} = \{ Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots \}$, в качестве

которых могут быть использованы массы кластеров либо их объёмы (что важно при описании пористых тел), а в случае коагуляции композитных частиц – массы отдельных примесей и т.п. (см. Ossenkopf, 1993; Okuzumi и др., 2009). Кроме этого, будем считать, что дисковая система достаточно разрежена, так что слияние ФА происходит только за счёт парных столкновений, определяемых частотой соударений кластеров $\Phi(\mathbf{Y}_k, \mathbf{Y}_j)$ с параметрами \mathbf{Y}_k и \mathbf{Y}_j в единице объёма среды. Будем также предполагать, что набор параметров для характеристики полученного в результате столкновения пылевого агрегата \mathbf{Y}_{k+j} полностью определяется параметрами сталкивающихся кластеров, т.е. $\mathbf{Y}_{k+j} = \mathbf{Y}_{k+j}(\mathbf{Y}_k; \mathbf{Y}_j)$. Тогда эволюция функции распределения $f(\mathbf{Y}_k, \mathbf{x}, t)$ ФА с параметрами \mathbf{Y}_k описывается следующим многомерным уравнением Смолуховского:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{Y}_k, \mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla^D \cdot (f(\mathbf{Y}_k, \mathbf{x}, t) \mathbf{U}_k) = & -f(\mathbf{Y}_k, \mathbf{x}, t) \int \Phi(\mathbf{Y}_k, \mathbf{Y}_j) f(\mathbf{Y}_j, \mathbf{x}, t) d\mathbf{Y}_j + \\ & + \frac{1}{2} \iint \Phi(\mathbf{Y}_j, \mathbf{Y}_m) f(\mathbf{Y}_j, \mathbf{x}, t) f(\mathbf{Y}_m, \mathbf{x}, t) \times \delta\{\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{j+m}(\mathbf{Y}_j; \mathbf{Y}_m)\} d\mathbf{Y}_j d\mathbf{Y}_m, \end{aligned} \quad (29)$$

являющимся обобщением на фрактальные пространственно-неоднородные среды дискретного уравнения Смолуховского (7) для описания процесса коагуляции. Здесь $f(\mathbf{Y}, \mathbf{x}, t)$ – функция распределения (спектр) ФА по множеству параметров \mathbf{Y} , нормированная условием $\int f(\mathbf{Y}, \mathbf{x}, t) d\mathbf{Y} = N^{cl}(\mathbf{x}, t)$ (тогда $f(\mathbf{Y}, \mathbf{x}, t) d\mathbf{Y}$ – число кластеров с параметрами от \mathbf{Y} до $\mathbf{Y} + d\mathbf{Y}$, находящихся в момент времени t в элементарном объёме в окрестности точки \mathbf{x}); N^{cl} – полная числовая плотность ФК в единице объёма космической среды; $\Phi(\mathbf{Y}_k, \mathbf{Y}_j) = \Phi(\mathbf{Y}_j, \mathbf{Y}_k)$ – ядро коагуляции (константа скорости ассоциации кластеров k -го и j -го сортов), которое определяется как произведение сечения столкновения и относительной скорости сталкивающихся частиц. Для решения этого уравнения необходимо задать начальный спектр $f(\mathbf{Y}, \mathbf{x}, 0) = f_0(\mathbf{Y}, \mathbf{x})$ и граничные условия.

Согласно ряду исследований (Ossenkopf, 1993; Okuzumi и др., 2009), достаточно большая энергия соударений может приводить к перестройке внутренней структуры фрактальных агрегатов, которые при этом будут сжиматься и становиться относительно компактными. Однако подобное сжатие всё ещё должно быть подтверждено как теоретическими, так и экспериментальными исследованиями. Чтобы излишне не усложнять рассматриваемую модель, вероятное дробление кластерных образований при их лобовых столкновениях с большими скоростями далее рассматривать не будем (Wada и др., 2009). Если предположить, что множество \mathbf{Y} состоит только из одного параметра m^{cl} , то уравнение

(29) в цилиндрической системе координат сведётся к следующему 2+1-мерному варианту уравнения Смолуховского:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(m^{cl})}{\partial t} + \frac{2^{D_f-2}\Gamma(D_f/2)}{\sqrt{\pi}} |\mathbf{x}|^{D_f-3} \left\{ \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left[\varpi f(m^{cl}) U_{\varpi}(m^{cl}) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[f(m^{cl}) U_z(m^{cl}) \right] \right\} = \\ & = -f(m^{cl}) \int_0^{\infty} \Phi(m^{cl}, m_1^{cl}) f(m_1^{cl}) dm_1^{cl} + \frac{1}{2} \int_0^{m^{cl}} \Phi(m_1^{cl}; m^{cl}-m_1^{cl}) f(m_1^{cl}) f(m^{cl}-m_1^{cl}) dm_1^{cl}, \end{aligned} \quad (30)$$

в котором $|\mathbf{x}| = \sqrt{\varpi^2 + z^2}$ и для простоты принято, что $d = 2$. Здесь также учтён закон сохранения масс при столкновениях $m_{j+m}^{cl}(m_j^{cl}; m_k^{cl}) = m_j^{cl} + m_k^{cl}$.

Ядра коагуляции фрактальных кластеров

Кинетика процессов коагуляции кластеров существенным образом зависит от конкретного вида ядра. Приведём некоторые упрощённые выражения $\Phi_{k,j}$ для практически важных механизмов коагуляции фрактальных кластеров¹¹⁾. Рассмотрим две группы моделей образования кластеров в дисковой фрактальной среде. К первой группе моделей мы отнесем модели, связанные с прилипанием мономеров к кластеру, причём переход от кинетического режима к диффузионному связан с характером движения отдельного мономера. В этих моделях переход от одного режима к другому определяется не только радиусом действия поля отдельного кластера, но также и концентрацией сталкивающихся с ним мономеров. Ко второй группе моделей отнесём модели, описывающие рост ФА в результате ассоциации двух кластеров, причём переход от кинетического режима агрегации к диффузионному зависит от соотношения между длиной пробега отдельного кластера в аэродисперсной среде и средним расстоянием

¹¹⁾ Важно иметь в виду, что поперечное сечение взаимодействия двух кластеров лишь приблизительно равно сумме квадратов радиусов гирации. Это справедливо, в частности, для кластеров типа RLCA, имеющих сравнительно компактную структуру. Но особенно это касается фрактальных кластеров ССА-модели, которые имеют чрезвычайно пушистую и открытую структуру (см. Suyama и др. 2012). В работе (Okuzumi и др. 2009) было предложено практически удобное соотношение между поперечным сечением и радиусом гирации для фрактальных агрегатов различных способов сборки и было показано, что безразмерное отношение поперечных сечений к квадратам радиуса гирации сильно эволюционирует для кластеров указанных типов, особенно на ранней ступени их роста в допланетном диске. В связи с этим предложенные ниже соотношения для ядер коагуляции ФК следует рассматривать как первый шаг их аппроксимации.

между пылевыми частицами.

Мономер-кластерная коагуляция. При низкой температуре, которую считаем здесь одинаковой для несущей мелкодисперсной смеси и пылевого фрактального кластера, испарением мономеров с его поверхности можно пренебречь, так что прилипание мономеров к поверхности кластера ведёт к его росту.

Определим сначала константу скорости этого процесса в случае разреженной аэродисперсной среды, когда сила торможения движущегося кластера создаётся в результате однократных столкновений первичных мономеров с кластером, что соответствует кинетическому режиму переноса кластера в системе. В этом случае отдельный мономер может свободно достигнуть поверхности ближайшего к нему кластера без столкновений с другими мономерами. Для простоты будем считать, что каждый контакт мономера с поверхностью кластера приводит к его прилипанию. Кроме этого, рассматриваемая здесь модель столкновения мономера с кластером основана на допущении, что размер последнего значительно превышает радиус действия атомных сил. Тогда сечение столкновения мономера с кластером k -го сорта определяется формулой $\sigma_{1,k} = \pi R_{gk}^2$, с учётом которой константа скорости столкновения мономера с кластером может быть представлена в виде (Смирнов, 2011)

$$\Phi_{1,k}^{\text{kin}} = \langle w \pi R_{gk}^2 \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{k_B T_1}{\mu_{1k}}} \pi R_{gk}^2. \quad (31)$$

Здесь w – относительная скорость столкновения мономера и кластера; треугольные скобки означают усреднение по скоростям w на основе максвелловской функции распределения; $\mu_{1k} = \mu_0 m_k^{\text{cl}} / (\mu_0 + m_k^{\text{cl}}) \cong \mu_0$ – приведённая масса мономера и кластера, которая практически совпадает с массой мономера. Формулу (31) удобно переписать в следующих двух видах:

$$\Phi_{1,k}^{\text{kin}} \cong \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{k_B T_g}{\mu_0}} \pi R_{gk}^2 = \sqrt{\frac{8 k_B T_1}{\pi \mu_0}} \left(\frac{\pi r_0^2}{\mu_0^{2/D_f}} \right) (m_k^{\text{cl}})^{2/D_f}. \quad (32)$$

С использованием (32) можно получить следующее выражение для величин J_{1k} в уравнениях (11), описывающих рост массы кластера k -го сорта за счёт прилипания к нему первичных мономеров:

$$J_{1k} = \Phi_{1,k}^{\text{kin}} \rho_1 N_k^{\text{cl}} = \rho_1 N_k^{\text{cl}} \sqrt{\frac{8 k_B T_g}{\pi \mu_0}} \left(\frac{\pi r_0^2}{\mu_0^{2/D_f}} \right) (m_k^{\text{cl}})^{2/D_f}, \quad (k = 2, \dots, Q). \quad (33)$$

В случае диффузионного характера прилипания мономеров к поверхности кластера можно использовать известную формулу Смолуховского

$$\Phi_{1,k}^{\text{dif}} = 4\pi D_{g1}^{\text{dif}} R_{gk} \quad (34)$$

и для константы скорости столкновения мономеров с кластером (здесь D_{g1}^{dif} – коэффициент диффузии мономеров в несущей газовой среде). Тогда, с учётом формулы

$$D_{g1}^{\text{dif}} = \frac{3\sqrt{\pi k_B T_g \lambda_m}}{8\sqrt{2\mu_g}} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{2}} c_{gs} \lambda_m \quad (35)$$

для коэффициента диффузии мономеров в газе, записанной в первом приближении Чепмена–Энскога (см. Чепмен, Каулинг, 1960), для константы скорости столкновения мономеров с кластером окончательно получим

$$\Phi_{1,k}^{\text{dif}} = \frac{3\pi^{3/2}}{2\sqrt{2}} c_{gs} \lambda_m R_{gk} \quad (36)$$

(где λ_m – длина пробега мономеров в несущей газовой среде).

Отметим, что эффективность роста кластеров за счёт столкновений с мономерами в кинетическом и диффузионном режимах определяется тогда соотношением

$$\frac{\Phi_{1,k}^{\text{dif}}}{\Phi_{1,k}^{\text{kin}}} = \frac{3\pi}{8} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_1}} \frac{\lambda_m}{R_{gk}}. \quad (37)$$

Кластер-кластерная коагуляция. Рассмотрим сначала случай, когда контакт между двумя кластерами связан с их свободным движением в дисковом пространстве, т.е. в пределе низкой концентрации мономеров в дисковой аэродисперсной среде. Будем считать, что при соприкосновении двух ФК они объединяются в один, который принимает сферическую форму и участвует в дальнейшем процессе эволюции. Сечение столкновения двух кластеров определяется формулой

$$\sigma_{kj} = \pi(R_{gk} + R_{gj})^2, \quad (38)$$

где R_{gk} и R_{gj} – радиусы гирации. В рамках модели твёрдых сфер это сечение отвечает ассоциации двух кластеров, так что константа их скорости объединения равна

$$\Phi_{k,j} = \langle w\pi(R_{gk} + R_{gj})^2 \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T_g}{\pi m_{kj}^{\text{cl}}}} \pi(R_{gk} + R_{gj})^2. \quad (39)$$

Здесь w – относительная скорость столкновения кластеров, треугольные скобки означают усреднение по скоростям кластеров на основе максвелловской функ-

ции распределения, $m_{kj}^{cl} = m_k^{cl} m_j^{cl} / (m_k^{cl} + m_j^{cl})$ – приведённая масса сталкивающихся кластеров. Формуле (39) можно придать следующий вид

$$\begin{aligned} \Phi_{k,j} &= \sqrt{\frac{8k_B T_g}{\pi \mu_0}} \pi r_0^{D_f} \sqrt{\frac{R_{gk}^{D_f} + R_{gj}^{D_f}}{R_{gk}^{D_f} R_{gj}^{D_f}}} (R_{gk} + R_{gj})^2 = \\ &= \sqrt{\frac{8k_B T_g}{\pi}} \frac{\pi r_0^2}{\mu_0^{2/D_f}} \sqrt{\frac{m_k^{cl} + m_j^{cl}}{m_k^{cl} m_j^{cl}}} \left\{ (m_k^{cl})^{1/D_f} + (m_j^{cl})^{1/D_f} \right\}^2. \end{aligned} \quad (40)$$

В случае броуновской коагуляции кластеров, находящихся в дисковой аэродисперсной среде при температуре T_g , их столкновения происходят в результате хаотического блуждания кластеров (см. Blum и др., 1996). В диффузионном режиме роста ФК можно воспользоваться следующей формулой Смолуховского для скорости объединения двух подобных кластеров:

$$\Phi_{k,m} = 4\pi \kappa^p (\mathcal{D}_{g,k}^{dif} + \mathcal{D}_{g,m}^{dif})(R_{gk} + R_{gm}), \quad (41)$$

где $\mathcal{D}_{g,k}^{dif}$ и $\mathcal{D}_{g,m}^{dif}$ – коэффициенты броуновской диффузии сталкивающихся кластеров в несущей газовой среде; R_{gk} и R_{gm} – их радиусы гирации; κ^p – вероятность слипания (коэффициент захвата) кластеров. Коэффициент диффузии $\mathcal{D}_{g,k}^{dif}$ k -го кластера, совершающего диффузионное движение в газе, определяется формулой (18), из которой, в частности, видно, что этот коэффициент уменьшается с увеличением размеров кластеров. Это приводит к тому, что малые кластеры исчезают значительно быстрее, чем успевают разрушиться более крупные (см. Смирнов, 1991). Подставляя формулу (18) в (41), получим для константы $\Phi_{k,m}$ следующее представление:

$$\Phi_{k,m} = \kappa^p \left(\frac{2k_B T_g}{3\eta_g} \right) \frac{(R_{gk} + R_{gm})^2}{R_{gk} R_{gm}} = \kappa^p \left(\frac{2k_B T_g}{3\eta_g} \right) \frac{\left\{ m_k^{cl} \right\}^{1/D_f} + \left\{ m_m^{cl} \right\}^{1/D_f} \right\}^2}{(m_k^{cl} m_m^{cl})^{1/D_f}}. \quad (42)$$

Можно показать, что функция $\mathfrak{R} = (R_{gk} + R_{gm})^2 / 4R_{gk} R_{gm}$ слабо зависит от отношения радиусов сталкивающихся кластеров (например, при $R_{gk} = R_{gm}$, $\mathfrak{R} = 1$; при $R_{gk} = 9R_{gm}$, $\mathfrak{R} \cong 2,8$). Поэтому часто можно полагать, что броуновская константа скорости ассоциации двух кластеров в диффузионном режиме не зависит от размеров объединяющихся кластеров, а следовательно, и от их масс, т.е.

$$\Phi_{k,m} \cong \kappa^p \frac{8k_B T_g}{3\eta_g} = \kappa^p \frac{2\sqrt{2\pi}c_{sg}}{n_g \lambda}. \quad (43)$$

Отметим, что поскольку при получении выражений (35) и (42) была использована формула (18), то они справедливы лишь при условии $\lambda \ll R_{gk}$, где λ – длина свободного пробега частиц в несущей газовой фазе.

Рассмотрим теперь случай гравитационной коагуляции ФК, когда в каждый момент времени большое число мономеров одновременно взаимодействуют с оседающими к экваториальной плоскости диска кластерами (движение последних носит диффузионный характер). Константу скорости процесса, в котором происходит контакт двух падающих в поле силы тяжести кластеров, определим в рамках модели твёрдых сфер. Пусть ФК k -го сорта, имеющие большую скорость оседания, догоняют более мелкие кластеры размера R_{gj} , падающие более медленно. Поскольку сечение столкновения двух кластеров в рамках модели твёрдых сфер равно $\sigma_{k,j} = \pi(R_{gk} + R_{gj})^2$, то коэффициент гравитационной коагуляции в поле притяжения аккреционного диска при условии, что вероятность слипания ФК при их соприкосновении равна κ^p , определяется соотношением

$$\Phi_{k,j} = \kappa^p \pi (R_{gk} + R_{gj})^2 U_{kz}. \quad (44)$$

В случае, когда радиус падающих кластеров много больше длины свободного пробега частиц аэродисперсной среды ($\lambda \ll R_g$), скорость U_{kz} гравитационного оседания (вдоль оси z) одиночного k -кластера в неограниченном газопылевом диске определяется формулой

$$U_{kz} = -\Omega_K^2 z \left(\frac{2\rho_0}{9\eta_g} r_0^{3-D_f} \right) R_{gk}^{D_f-1}. \quad (45)$$

Подставляя (45) в (44), окончательно получим

$$\begin{aligned} \Phi_{k,j} &= \kappa^p \Omega_K^2 z \left(\frac{\mu_0}{6\eta_g r_0^{D_f}} \right) (R_{gk} + R_{gj})^2 (R_{gk}^{D_f-1} - R_{gj}^{D_f-1}) = \\ &= \kappa^p \Omega_K^2 z \left(\frac{r_0}{6\eta_g \mu_0} \right)^{1/D_f} \left\{ (m_k^{cl})^{1/D_f} + (m_j^{cl})^{1/D_f} \right\}^2 \left\{ (m_k^{cl})^{1-1/D_f} - (m_j^{cl})^{1-1/D_f} \right\}, \end{aligned} \quad (46)$$

где предполагается, что $k > j$.

В заключение этого раздела следует отметить, что процессы коагуляции

частиц в аэродисперсной среде могут быть вызваны одновременным воздействием различных механизмов столкновения частиц в различных их сочетаниях. Поэтому применительно к допланетному диску следует в общем случае проанализировать механизмы броуновской коагуляции заряженных частиц, турбулентно-броуновской коагуляции заряженных и нейтральных частиц, турбулентно-броуновской коагуляции заряженных частиц в гравитационном поле и т.п. Следует, однако, подчеркнуть, что расчёт всех этих коэффициентов коагуляции представляет достаточно сложную задачу и в общем случае данная проблема до настоящего времени полностью не решена.

4. Стационарная модель эволюции протопланетного диска

Необходимые для моделирования физические параметры и количественные характеристики Солнечного протопланетного диска представлены в Табл.2. Пылевые частицы, так же, как и газ, двигаются со скоростью приблизительно равной кеплеровской скорости вращения $\mathbf{U}_K = (0, \varpi \Omega_K, 0)$, поскольку солнечная гравитация является доминирующей силой. Поэтому удобно переписать уравнения движения (25) и (26) в цилиндрической системе координат (ϖ, ϕ, z) (с началом в центре протосолнца), вращающейся с угловой скоростью $\Omega(\varpi, z) = \sqrt{GM_\odot/|\mathbf{x}|^3} \cong \Omega_K [1 - (3/4)z^2/\varpi^2]$, и вместо скоростей \mathbf{U}_k и \mathbf{U}_g использовать скорости $\mathbf{V}_k = \mathbf{U}_k - \varpi \Omega(\varpi, z) \mathbf{e}_\phi$ и $\mathbf{V}_g = \mathbf{U}_g - \varpi \Omega(\varpi, z) \mathbf{e}_\phi$. Тогда, оставляя члены только первого порядка малости и пренебрегая процессами фрагментации (т.е. предполагая малыми относительные скорости столкновения кластеров), будем иметь (ср. Nakagawa и др. 1986):

$$\partial \mathbf{V}_{g\varpi} / \partial t = - \sum_{k=1}^Q \mathcal{G}(m_k^{cl}) \rho_k^{cl} (\mathbf{V}_{g\varpi} - \mathbf{V}_{k\varpi}) + 2\Omega_K \mathbf{V}_{g\phi} - (1/\rho_g)(\partial p_g / \partial \varpi), \quad (47)$$

$$\partial \mathbf{V}_{g\phi} / \partial t = - \sum_{k=1}^Q \mathcal{G}(m_k^{cl}) \rho_k^{cl} (\mathbf{V}_{g\phi} - \mathbf{V}_{k\phi}) - (1/2)\Omega_K \mathbf{V}_{g\varpi}, \quad (48)$$

$$\partial \mathbf{V}_{gz} / \partial t = - \sum_{k=1}^Q \mathcal{G}(m_k^{cl}) \rho_k^{cl} (\mathbf{V}_{gz} - \mathbf{V}_{kz}) - \Omega_K^2 z - (1/\rho_g)(\partial p_g / \partial z), \quad (49)$$

$$\partial \mathbf{V}_{k\varpi} / \partial t = - \mathcal{G}(m_k^{cl}) \rho_g (\mathbf{V}_{k\varpi} - \mathbf{V}_{g\varpi}) + 2\Omega_K \mathbf{V}_{k\phi}, \quad (50)$$

$$\partial \mathbf{V}_{k\phi} / \partial t = - \mathcal{G}(m_k^{cl}) \rho_g (\mathbf{V}_{k\phi} - \mathbf{V}_{g\phi}) - (1/2)\Omega_K \mathbf{V}_{k\varpi}, \quad (51)$$

$$\partial V_{kz} / \partial t = -\mathcal{G}(m_k^{\text{cl}}) \rho_g (V_{kz} - V_{gz}) - \Omega_K^2 z. \quad (52)$$

В стационарном случае из уравнений (50) и (51) легко получить ϖ и ϕ -компоненту скорости кластера k -го сорта в виде

$$V_{k\varpi}(m_k^{\text{cl}}) = \frac{1}{1+\mathcal{L}^2} V_{g\varpi} + \frac{2\mathcal{L}}{1+\mathcal{L}^2} V_{g\phi}, \quad (53)$$

$$V_{k\phi}(m_k^{\text{cl}}) = -\frac{1}{2(1+\mathcal{L}^2)} V_{g\varpi} + \frac{2}{2(1+\mathcal{L}^2)} V_{g\phi}, \quad (54)$$

где $\mathcal{L}(m_k^{\text{cl}}) \equiv \Omega_K / \rho_g \mathcal{G}(m_k^{\text{cl}})$. Подставляя соотношения (53) и (54) в (47) и (48), мы получим для ϖ и ϕ -компонент скорости газа выражения

$$V_{g\varpi} = \frac{2\chi}{\chi^2 + (1+\mathcal{V}^2)^2} \eta U_K, \quad V_{g\phi} = -\frac{(1+\mathcal{V})}{\chi^2 + (1+\mathcal{V}^2)^2} \eta U_K, \quad (55)$$

где

$$\chi \equiv \sum_k \frac{\mathcal{L}}{1+\mathcal{L}^2} \frac{\rho_k^{\text{cl}}}{\rho_g}, \quad \mathcal{V} \equiv \sum_k \frac{1}{1+\mathcal{L}^2} \frac{\rho_k^{\text{cl}}}{\rho_g}, \quad \eta \equiv -\frac{1}{2U_K^2} \frac{\varpi}{\rho_g} \frac{\partial p_g}{\partial \varpi}. \quad (56)$$

Вертикальная скорость газа V_{gz} всегда пренебрежимо мала по сравнению со скоростью оседания кластеров V_{kz} (см. Nakagawa и др. 1986). Следовательно, из уравнения (52) будем иметь

$$V_{gz} = 0, \quad (57)$$

$$\begin{aligned} V_{kz}(m_k^{\text{cl}}) &= -\Omega_K^2 z \frac{1}{\mathcal{G}(m_k^{\text{cl}}) \rho_g} = \\ &= -\Omega_K^2 z / \sqrt{\frac{8}{\pi}} \left(\frac{3r_0^{D_f-3} \rho_g \lambda c_{sg}}{2\rho_0} \right) R_{gk}^{1-D_f} = \Omega_K^2 z \left(\frac{\mu_0}{6\pi r_0 \eta_g} \right)^{1/D_f} (m_k^{\text{cl}})^{1-1/D_f}. \end{aligned} \quad (58)$$

На первоначальном этапе моделирования эволюции диска была использована следующая дискретная форма уравнения (30):

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k^{\text{cl}}(z, t)}{\partial t} + \frac{2^{D_f-2} \Gamma(D_f/2)}{\sqrt{\pi}} |z|^{D_f-3} \frac{\partial}{\partial z} \left(N_k^{\text{cl}}(z, t) U_{kz} \right) &= -N_k^{\text{cl}}(z, t) \sum_{j=1}^Q \Phi_{k,j} N_j^{\text{cl}}(z, t) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \Phi_{j,(k-j)} N_j^{\text{cl}}(z, t) N_{(k-j)}^{\text{cl}}(z, t), \quad (k=1, 2, \dots, Q), \end{aligned} \quad (59)$$

на основе которой были выполнены предварительные численные расчёты. При этом для получения достоверных результатов и их понимания потребовалось провести необходимые рациональные схематизации уравнений (47)-(52), приводящие к обозримым и решаемым уравнениям.

Пример расчёта массовой плотности пылевой фазы субдиска.

Плотность увеличивается в процессе вертикального и радиального сжатия субдиска. Широкая диагональная полоса – критическая плотность, при которой субдиск становится гравитационно-неустойчивым и распадается на пылевые сгущения. Кривые 1-6 соответствуют моментам времени: $0,1 \times 10^3$, 5×10^3 , 2×10^4 , 5×10^4 и 1×10^5 лет от начала образования субдиска (начальный радиус $r_{d0} = 100$ а.е., диаметры частиц $d = 10$ см и $d = 1$ см)..

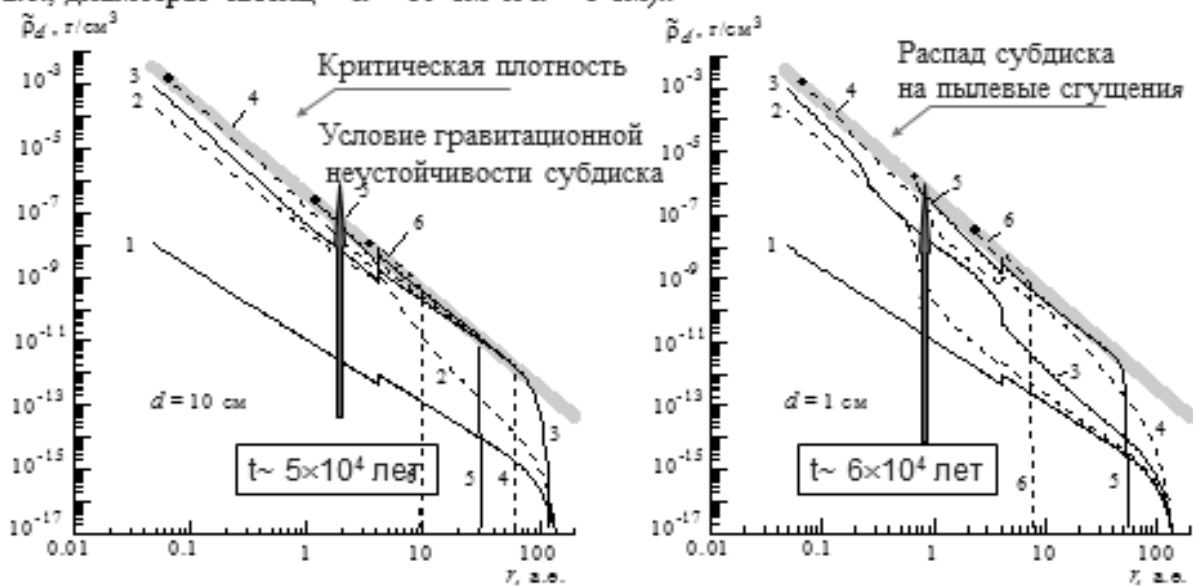


Рис.7.

При попытке объяснить рост пылевых агрегатов до метрового размера в допланетном диске мы столкнулись с необходимостью преодолеть, по крайней мере, две трудности, вызванные, с одной стороны, быстрой потерей «строительного» материала вследствие радиального дрейфа частиц, а с другой стороны – фрагментацией крупных тел в результате разрушительных столкновений. К примеру, временной масштаб радиального дрейфа для тел метровых размеров на 1 а.е. составляет $\sim 10^2$ лет, в течение которых эти тела дрейфуют во внутренние области диска и там испаряются. Поскольку скорость радиального дрейфа довольно сильно зависит от размеров тел (например, скорость радиального дрейфа тел метрового размера на 1 а.е. в диске составляет ~ 50 м/с, а скорость дрейфа тел десяти метрового размера – уже в 10 раз меньше), то предотвратить до некоторой степени дрейф пылевых агрегатов в зону испарения может только относительно быстрый их рост. Тем не менее, общая эволюция диска включает в себя значительные потери материала частиц за счёт процесса испарения (в частности, в зоне «линии льда»), которому трудно помешать. Моделирование этого явления стало одной из основных задач предпринятого исследования.

Ещё одним препятствием роста твёрдых частиц является их фрагментация. В то время как низкие скорости столкновения частиц приводит к их слипанию, высокая скорость ударного взаимодействия приводит к дроблению. Например, для рыхлых объектов столкновения со скоростью, превышающей на 4% скорость звука, приводят к разрушению. Именно по этой причине частицы примерно метрового размера, по-видимому, представляют верхний предел коагуляционного роста.

Таблица 2. Физические параметры и количественные характеристики Солнечного протопланетного диска ($\varpi = 1$ а.е.)

Массовая плотность газа, $\rho_g = 2,4 \times 10^{-9} f_g (\varpi / 1 \text{ а.е.})^{-11/4}$, гсм ⁻³	$5,7 \times 10^{-9}$ г/см ³
Температура газа, $T_g = 2,8 \times 10^2 (\varpi / 1 \text{ а.е.})^{-1/2}$, К	225 °К
Молекулярный вес молекул газа, μ_g	$3,9 \times 10^{-24}$ г
Сечение столкновения частиц в газе σ_g , см ²	2×10^{-15} см ²
Длина свободного пробега частиц в газе, $\lambda = 120 (\varpi / 5 \text{ а.е.})^{11/4}$, см	0,34 см
Изотермическая скорость звука, $c_{gs} = 6,7 \times 10^4 (\varpi / 5 \text{ а.е.})^{-1/4}$ см/с	$1,1 \times 10^5$ см/с
Кеплеровская угловая скорость, $\Omega_K = 1,8 \times 10^{-8} (\varpi / 5 \text{ а.е.})^{-3/2}$, рад/с	3×10^6 см/с
Газовая полутолщина диска, $Z_H = c_{gs} / \Omega_K$	$5,1 \times 10^{11}$ см.
Пылевая полутолщина диска	$3,1 \times 10^8$ см
Критическое число Рейнольдса, Re	180
Радиус мономера, r_0	0,1 мкм
Массовая плотность материала первичных ядер, $\rho_0 = 3\mu_0 / 4\pi r_0^3$	$1,4$ г/см ³
Масса мономера, μ_0	$5,9 \times 10^{-15}$ г
$\eta = 1,8 \times 10^{-3} (\varpi / \text{а.е.})^{1/2}$	$1,8 \times 10^{-3}$

В силу многосложности процесса эволюции протопланетного диска наиболее удобно при его моделировании последовательно включать в рассмотрение различные механизмы, влияющие на возникновение, рост, разрушение и динамику пылевых агрегатов. В дальнейшем нами предполагается реализовать 2+1-мерную коагуляционную нестационарную модель (30), в которой первое измерение связано с радиальной координатой диска, второе измерение связано с высотой над средней плоскостью и третья координата – это масса растущего пылевого кластера. Пыль может двигаться как вертикально, так и радиально из-за радиального дрейфа. Но, поскольку коагуляция (суб)микронных частиц пыли является начальным этапом формирования планетезималей в дисках, то на первоначальном этапе можно будет ограничиться рассмотрением броуновской и гравитационной коагуляции пылевых мономеров и фрактальных кластеров, находящихся в кинетическом и диффузионном режимах движения, что позволит достаточно аккуратно рассчитать процесс их вертикального оседания и определить их максимальные размеры в случае пренебрежения радиальным дрейфом и фрагментацией. Второй этап должен включать в себя радиальный дрейф пыли, когда частицам «разрешено» двигаться во внутренние области диска и исчезать в зоне испарения. Он позволит выявить, какие параметры диска влияют на временной масштаб этого дрейфа и при каких его параметрах пылевые частицы смогут преодолеть дрейфовый барьер. Наконец, последний третий этап, включающий фрагментацию частиц, позволит определить, в каких областях диска и при каких его параметрах возможно для пыли преодолеть и этот барьер.

Следует отметить, что частицы, наиболее близкие к радиальному барьеру в наибольшей степени восприимчивы к режиму движения несущего газа и к гравитационному эффекту пыли. Например, при наличии магнито-вращательной турбулентности в диске частицы могут быть захвачены в очень вытянутых вихрях газа, что может замедлить радиальный дрейф в два раза (Johansen и др. 2006;2009). При определённых условиях слой из твёрдых частиц сам по себе может стать гравитационно-неустойчивым (Johansen, Youdin, 2007), а в районах с высокой плотностью пыли частицы сближаются благодаря их собственной гравитации и могут сформировать планетезимали за несколько оборотов (см. Johansen и др. 2007).

Результаты численной реализации намеченной здесь программы исследований, предполагающей решение весовым методом Монте-Карло обобщённого уравнения Смолуховского (30) и решение обобщённых гидродинамических уравнений для дисковой фрактальной среды (47-52), будут представлены в последующих публикациях.

5. Заключение

Изучение проблемы происхождения и эволюции Солнечной системы, возникновения разнообразных природных условий на Земле и других планетах

представляет одно из важнейших направлений современного естествознания. Её решение связано с проведением комплекса исследований по самым актуальным вопросам астрофизики, геофизики и космохимии, на основе развития теории, обобщения и анализа экспериментальных данных и разработки математических моделей. За последние годы, благодаря впечатляющим успехам астрофизики, открытиям протопланетных дисков и внесолнечных планетных систем, бурному развитию вычислительной математики, расширились возможности комплексных исследований физической структуры и эволюции протопланетного газопылевого диска вокруг молодых звёзд солнечного типа, из которых, по современным представлениям, формируются планеты.

Создание адекватных космогонических моделей связано в общем случае с изучением динамической и тепловой эволюции гетерогенного газопылевого вещества дифференциально вращающегося протопланетного диска при учёте магнито-гидродинамических, турбулентных и радиационных эффектов, а также с участием фазовых переходов, химических реакций и коагуляционных процессов. От пространственно-временного распределения гидротермодинамических параметров дисковой среды и их численных значений зависит агрегатное состояние основных компонентов дискового вещества, расположение фронтов конденсации-сублимации, и, следовательно, химический состав планет, их спутников, астероидов и комет. Важным ограничением в определении степени приближения подобного рода моделей к реальности служат космохимические данные, получаемые в результате прямого изучения внеземного вещества.

К сожалению, большое число проблем, связанных с данным направлением исследований, пока остаётся нерешённым. К ним, в первую очередь, относятся вопросы о ранних этапах эволюции Солнечной системы и причинах её уникальности по сравнению с известными планетными системами у других звёзд. Первостепенный интерес представляет разработка численных моделей эволюции протопланетного облака, которая последовательно приводит к формированию аккреционного газопылевого диска вокруг молодого Солнца, к уплотнению пылегазового субдиска в окрестности экваториальной плоскости и его распаду (вследствие гравитационной неустойчивости) на многочисленные пылевые сгущения, к возникновению локальных дискретных центров уплотнения, т.е. к образованию роя первичных уединённых газопылевых агрегатов, служащих основой зародышей протопланетезималей. Таким образом, в связи с реконструированием эволюции газопылевого облака, окружавшего прото-Солнце, на первый план выступают следующие проблемы планетной космогонии:

(i) построение численной модели формирования пылевого слоя (субдиска) в окрестности центральной плоскости прото-Солнца, изучение механизмов его уплотнения в спокойном газе и при наличии турбулентности;

(ii) моделирование механизмов развития гравитационной неустойчивости во вращающемся субдиске, когда плотность его вещества за счёт вертикального и радиального сжатия становится выше критического значения;

- (iii) образования и эволюции протопланетных пылевых сгущений для внутренней зоны диска и для его периферии;
- (iv) моделирование процессов аккумуляции твёрдотельных планетезималей;
- (v) образование Земли и планет.

В качестве первоначального этапа анализа этой комплексной проблемы в предложенной статье рассматривается ранняя стадия эволюции допланетного газопылевого облака. При этом образование, рост и динамика фрактальных пылевых сгущений играют решающую роль в понимании его эволюции. До последнего времени в большинстве теоретических моделей агрегации пылевых частиц в диске изначально принималась компактная структура возникающих пылевых образований. Однако, как теперь стало ясно, растущие благодаря взаимным столкновениям частиц пылевые кластеры могут иметь весьма рыхлую (пушистую) структуру и чрезвычайно низкую объёмную плотность. Для подобных ворсистых агрегатов, имеющих, по сравнению с компактными пылевыми частицами, относительно большие геометрические поперечные сечения, существенно меняется режим движения в газовой несущей среде, в частности, из-за значительного изменения влияния силы трения. Поскольку эти процессы нельзя непосредственно наблюдать, то обоснованное объяснение первоначальной фазы роста пылевых кластеров существенно зависит от предложенной теоретической модели. По нашему мнению, для адекватного моделирования эволюции пылевых агрегатов в диске и, в конечном счёте, механизма образования рыхлых протопланетезималей, необходимо, в общем случае, учитывать фрактальные свойства солнечного допланетного облака.

В статье изложен новый оригинальный подход к моделированию гидродинамических и коагуляционных процессов в дисковой среде, рассматриваемой как термодинамический комплекс, состоящий из двух взаимодействующих подсистем, которые заполняют одновременно один и тот же объём евклидова пространства – газовой фазы солнечного состава (континуальная среда) и полидисперсной фазы пылевых образований (фрактальная среда с нецелой массовой размерностью). В свою очередь, полидисперсная фаза считается многоскоростной гетерогенной средой, состоящей из фракций пылевых фрактальных агрегатов и фракции первичных конденсированных мономеров. Поскольку в среде подобных пылевых образований существуют пустоты, которые не заполнены веществом, то она не может, в общем случае, описываться как традиционная сплошная среда. Именно по этой причине предлагается рассматривать дисковую среду как фрактальную среду, для описания которой необходимо в общем случае привлекать методы дробной гидромеханики, использующей производные и интегралы дробных порядков. Заметим, что уравнения с дробными производными оказались особенно эффективными для описания физических систем, обладающих такими свойствами, как степенная нелокальность, долговременная память (эредитарность) и фрактальность. Для моделирования дисковой фрактальной среды в статье предлагается использовать обобщённые дифферен-

циальные уравнения гетерогенной механики, которые, являясь следствием феноменологической модели в дробно-интегральной форме (см. Tarasov, 2005), содержат производные только целого порядка, что существенно упрощает их применение.

Данная работа, являясь первой в ряду намеченных исследований, посвящена математическим аспектам подобного гидродинамического моделирования протопланетного ламинарного диска, в котором в процессе его эволюции формируются и взаимодействуют друг с другом разномасштабные пылевые фрактальные агрегаты, служащие, в конечном счёте, основой зародышей рыхлых протопланетезималей. Обсуждается стационарная модель эволюции дисковой фрактальной среды. При этом для получения достоверных результатов и их понимания проведены необходимые рациональные схематизации, приводящие к обозримым и решаемым уравнениям. Поскольку строгое решение задачи образования и эволюции фрактальных кластеров включает одновременно с оценкой их скоростей также и определение функции распределения (спектра) кластеров по размерам, т.е. решение обобщённого нелинейного пространственно-неоднородного кинетического уравнения Смолуховского, то в работе получены практически важные аппроксимационные модели для ядер коагуляции фрактальных кластеров. При этом рассмотрены две группы моделей образования кластеров в дисковой фрактальной среде. К первой группе моделей отнесены модели, обусловленные прилипанием мономеров к кластеру, причём проанализирован связанный с характером движения отдельного мономера, переход от кинетического режима к диффузионному. Ко второй группе моделей отнесены модели, описывающие рост фрактальных агрегатов в результате ассоциации двух кластеров. Таким образом, предпринятое здесь исследование открывает, по нашему мнению, перспективы существенно более адекватного моделирования коагуляционных и гидродинамических процессов в допланетном диске.

Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН № 22.

Список литературы

Витязев А.В., Печерникова Г.Н., Сафронов В.С. Планеты земной группы. Происхождение и ранняя эволюция. М.: Наука. 1990. 296 с.

Горькавый Н.Н., Фридман А.М. Физика планетных колец: Небесная механика сплошной среды. М.: Наука. 1994. 348 с.

Емец Е.П., Новоселова А.Э., Полуэктов П.П. In situ- определение фрактальной размерности аэрозольных частиц // УФН.1994. Т.164. № 9. С. 959-966.

Колесниченко А.В. О синергетическом механизме возникновения когерентных структур в континуальной теории развитой турбулентности // Астрон. вестн. 2004. Т. 38. № 5. С. 405-427.

Колесниченко А.В. О роли индуцированных шумом неравновесных фазовых переходов в структурировании гидродинамической турбулентности // *Астрон. вестн.* 2005. Т. 39. № 3. С. 243-262.

Колесниченко А.В. К теории инверсного каскада энергии в спиральной турбулентности астрофизического диска // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* 2014. № 70. 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-70>

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2014. 632 с.

Кулак М.И. Фрактальная механика материалов. Минск: Вышэйшая школа. 2002. 302 с.

Маров М.Я., Колесниченко А.В., Макалкин А.Б., Дорофеева В.А., Зиглина И.Н., Чернов А.А. От прото-солнечного облака к планетной системе: Модель ранней эволюции газопылевого диска // *Проблемы зарождения и эволюции биосферы / Ред. акад. Галимов Э.М., М.: URSS, 2008. С. 223-273.*

Михайлов Е.Ф., Власенко С.С. Образование фрактальных структур в газовой фазе // *УФН.* 1995. Т. 165. № 3. С. 263-283.

Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т.2. СПб.: Гидрометеоздат. 1996. 742 с.

Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука. 1987. 464 с.

Пискунов В.Н. Динамика аэрозолей. М.: Физматлит. 2010. 293 с.

Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.

Сафронов В.С. О гравитационной неустойчивости в плоских вращающихся системах с осевой симметрией // *ДАН СССР.* 1960. Т. 130. № 1. С. 53-56.

Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука. 1969. 244 с.

Смирнов Б.М. Фрактальные кластеры // *УФН.* 1986. Т.149. № 2. С. 177-219.

Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. М.: Наука. 1991. 134 с.

Смирнов Б.М. Процессы с участием кластеров и малых частиц в буферном газе // *УФН.* 2011. Т. 181. № 7. С. 713-745.

Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во «Артишок». 2008. 512 с.

Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов // М.: ИЛ. 1960. 510 с.

Adams F.C., Watkins R. Vortices in circumstellar disks // *Astrophys. J.* 1995. V. 451. P. 314-327.

Barge P., Sommeria J. Did planet formation begin inside persistent gaseous vortices? // *Astron. and Astrophys.* 1995. V. 295. P. L1-L4.

Bertini I., Gutierrez P. J., Sabalo W. The influence of the monomer shape in the first stage of dust growth in the protoplanetary disk // *Astron. and Astrophys.* 2009. V. 504. P. 625-633.

Blum J. Grain growth and coagulation/ 2004. In *ASP Conf. Ser. Vol.309, Astrophysics of Dust*, ed. A.N. Witt, G.C. Clayton and B.T. Draine (San Francisco: ASP). P. 369.

Blum J., Wurm G., Kempf S., Henning Th. The Brownian motion of dust in the solar nebula: an experimental approach to the problem of pre-planetary dust aggregation // *Icarus.* 1996. V. 124. P. 441-451.

Blum J., Wurm G. The growth mechanisms of macroscopic bodies in protoplanetary disks // *Annual Review of Astronomy & Astrophysics.* 2008. V. 46. P. 21-56.

Brandenburg A., Hodgson L.S. Turbulence effects in planetesimal formation // *Astron. Astrophys.* 1998. V. 330. P. 1169-1174.

Chen Z.-Y., Meakin P., Deutch J. M. Comment on «Hydrodynamic Behavior of Fractal Aggregates» // *Phys. Rev. Lett.* 1987. 59. № 18. P. 2121.

Chavanis P.-H. Trapping of dust by coherent vortices in the solar nebula // *arXiv:astro-ph/9912087.* 1999. V. 16. P. 1-54.

Dominik C., Tielens A.G.G.M. The physics of dust coagulation and the structure of dust aggregates in space // *Astrophys. J.* 1997. V. 480. P. 647-673.

Dubrulle B. Differential rotation as a source of angular momentum transfer in the solar nebula // *Icarus.* 1993. V. 106. P. 59-76.

Dubrulle B., Morfill G., Sterzik M. The dust subdisk in the protoplanetary nebula // *Icarus.* 1995. V. 114. P. 237-246.

Johansen A., Klahr H., Henning T. Gravoturbulent formation of planetesimals // *Astrophys. J.* 2006. V. 636. P. 1121-1134.

Johansen A., Youdin A. Protoplanetary disk turbulence driven by the streaming instability: nonlinear saturation and particle concentration // *Astrophys. J.* 2007. V. 662. P. 627-641.

Johansen A., Oishi J.S., MacLow M.M., Klahr H., Henning T., Youdin A. Rapid planetesimal formation in turbulent circumstellar disks // *Nature.* 2007. V. 448. P. 1022-1025.

Johansen A., Youdin A., Klahr H. Zonal flows and long-lived axisymmetric pressure bumps in magnetorotational turbulence // *Astrophys. J.* 2009. V. 697. P. 1269-1289.

Jullien R. A new model of cluster aggregation // *J. Phys. A.* 1986. V. 19. № 11. P. 2129-2136.

Jullien R. Transparency effects in cluster-cluster aggregation with linear trajectories // *J. Phys.* 1984. Ser. A. V. 17. P. L771-L776

Goldrich P., Ward W.R. The formation of planetesimals // *Astrophys. J.* 1973. V. 183. № 3. P. 1051-1061.

Heng K., Kenyon S. J. Vortices as nurseries for planetesimal formation in protoplanetary discs // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2010. V. 408. № 3. P. 1476-1493.

Klahr H., Bodenheimer P. Turbulence in accretion disks: vorticity generation and angular momentum transport via the global baroclinic instability // *Astrophys. J.* 2003. V. 582. P. 869-892.

Klahr H., Bodenheimer P. Formation of giant planets by concurrent accretion of solids and gas inside an anticyclonic vortex // *Astrophys. J.* 2006. V. 639. P. 432-440.

Kolb M., Botet R., Jullien R. Scaling of kinetically growing clusters // *Phys. Rev. Lett.* V.51. № 13. P. 1123-1126.

Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature//N.Y.: Freeman. 1982. 468 p.

Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Mechanics of turbulence of multicomponent gases. Dordrecht, Boston, London.: Kluwer Academic Publishers. 2001. 375 p.

Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Turbulence and Self-Organization. Modeling Astrophysical Objects. Springer. 2013. 657 p.

Matthews L.S., Land V., Hyde T.W. Charging and coagulation of dust in protoplanetary plasma environments // *Astrophys. J.* 2012. V. 744. № 1 (arXiv: 1104.5677. 19 p.).

Meakin P. Formation of fractal clusters and networks by irreversible diffusion-limited aggregation // *Phys. Rev. Lett.* 1983. V. 51. № 13. P. 1119-1122.

Meakin P. Effects of cluster trajectories on cluster-cluster aggregation: A comparison of linear and Brownian trajectories in two- and three-dimensional simulations// *Phys. Rev.* 1984. V. 29. № 2. P. 997-999.

Meakin P., Donn B., Mulholland G. Collisions between point masses and fractal aggregates// *Langmuir.* 1989. V. 5. P. 510-518.

Mizuno H., Markiewicz W.J., Volk H.J. Grain growth in turbulent protoplanetary accretion disks // *Astron. Astrophys.* 1988. V. 195. P. 183-192.

Mizuno H. Grain growth in the turbulent accretion disk solar nebula // *Icarus.* 1989. V. 80. P. 189-201.

Nakagawa Y., Nakazawa K., Hayashi C. Growth and sedimentation of dust grains in the primordial solar nebula // *Icarus.* 1981. V. 45. P. 517-528.

Nakagawa Y., Hayashi C., Nakazawa K. Accumulation of planetesimals in the solar nebula // *Icarus*. 1983. V. 54. P. 361-376.

Nakagawa Y., Sekiya M. Hayashi C. Settling and growth of dust particles in a laminar phase of a low-mass Solar nebula// *Icarus*. 1986. V. 67. P. 375-390.

Nakamoto T., Nakagawa Y. Formation, early evolution, and gravitational stability of protoplanetary disks // *Astrophys. J.* 1994. V. 421. P. 640-651.

Okuzumi S. Electric charging of dust aggregates and its effect on dust coagulation in protoplanetary disks// *Astrophys. J.* 2009. V. 698. P. 1122-1135.

Okuzumi S., Tanaka H., Sakagami M.-A. Numerical modeling of the coagulation and porosity evolution of dust aggregates // *ApJ*. 2009. V. 707. P 1247-1264.

Okuzumi S., Tanaka H., Takeuchi T., Sakagami M.-A. Electrostatic barrier against dust growth in protoplanetary disks.1. Classifying the evolution of size distribution // *ApJ*. 2011. V. 731. P. 95.

Ormel C. W., Spaans M., Tielens A. G. G. M. Dust coagulation in protoplanetary disks: porosity matters // *Astron. Astrophys.* 2007. V. 461. P. 215-236.

Ossenkopf V. Dust coagulation in dense molecular clouds: the formation of fluffy aggregates// *Astron. Astrophys.* 1993. V. 280. P. 617-646.

Perry J., Kimery J., Matthews L. S., Hyde T. W. Effects of monomer shape on the formation of fractal aggregates under a power law distribution//43rd Lunar and Planetary Science Conference, held 2012 at The Woodlands, Texas. LPI. Contribution. №. 1659. id.2615.

Roy N., Ray A.K. Fractal features in accretion discs // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2009. V. 397. № 3. P. 1374-1385.

Strichartz R.S. Analysis on fractals// *Notices of the American Mathematical Society*. 1999. V. 46. № 10. P. 1199-1208.

Sutherland D. N. Comments on Vold's simulation of floc formation // *J. colloid and Interface Sci.* 1966. V. 22. P. 300-302.

Suyama T., Wada K., Tanaka H. Numerical simulation of density evolution of dust aggregates in protoplanetary disks. I. Head-on collisions // *Astroph. J.* 2008. V. 684. P .1310-1322.

Suyama T., Wada K., Tanaka H., Okuzumi S. Geometrical cross sections of dust aggregates and a compression model for aggregate collisions // *arxiv:1205.1894v1 [astro-ph. EP]*. 2012. 28 P.

Tanga P., Babiano A., Dubrulle B. Provenzale A. Forming planetosimals in vortices// *Icarus*. 1996. V. 121. P.158-170.

Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars // *Astrophys. J.* 1964. V. 139. P. 1217-1238.

Tarasov V.E. Fractional hydrodynamic equations for fractal media // *Annls of Physics*. 2005. V. 318. № 2. P. 286-307.

Tarasov V.E. Fractional dynamics: Applicationsof fractional calculus to dynamics of particles, fields and media // Springer. Higher Education Press. 2010. 516 p.

Wada K., Tanaka H., Suyama T., Kimura H., Yamamoto T. Growth and disruption of dust aggregates by collisions // *Cosmic Dust - Near and Far ASP Conference Series*, V. 414, proceedings of a conference held 2008 in Heidelberg, Germany/ Edited by Henning T., Grün E., and Steinacker J./ San Francisco: Astron. Soc. Pacific. 2009. P. 347.

Wada K., Tanaka H., Suyama T., Kimura H., Yamamoto T. Collisional growth conditions for dust aggregates// *Astrophys. J.* 2009. V. 702. P. 1490-1501.

Wada K., Tanaka H., Suyama T., Kimura H., Yamamoto T. Simulation of dust aggregate collisions. ii. compression and disruption of three-dimensional aggregates in head-on collisions// *Astrophys. J.* 2008. V. 677. P. 1296-1308.

Weidenschilling S.J. Dust to planetesimals: Settling and coagulation in the solar nebula// *Icarus*. 1980. V. 44. P. 172-189.

Wiltzius P. Hydrodynamic behavior of fractal aggregates // *Phys. Rev. Lett.* 1987. V. 58. № 7. P. 710-713.

Witten T.A., Sander L.M. Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon // *Phys. Rev. Lett.* 1981. V. 47. P. 1400-1403.

Vold M.J. Computer simulation of floc formation in a colloidal suspension// *J. colloid and Interface Sci.* 1963. V. 18. P. 684-695.

Youdin A.N., Shu F. Planetesimal formation by gravitational instability// *Astrophys. J.* 2002. V. 580. P. 494-505.

Оглавление

Введение	3
1. Коагуляция пылевых фрактальных кластеров в допланетном облаке	9
2. Базовые уравнения модели.....	14
3. Кинетика процессов кластеризации в пылевой фрактальной среде	25
4. Стационарная модель эволюции протопланетного диска	32
5. Заключение.....	36
Список литературы.....	39