ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 72 за 2014 г.

Колесниченко А.В.

Термодинамический вывод дробного уравнения Фоккера-Планка для фрактального турбулентного хаоса со степенной памятью

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Термодинамический вывод дробного уравнения Фоккера-Планка для фрактального турбулентного хаоса со степенной памятью // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 72. 32 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-72**

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

А.В. Колесниченко

Термодинамический вывод дробного уравнения Фоккера-Планка для фрактального турбулентного хаоса со степенной памятью

Москва — 2014

Колесниченко А.В.

Термодинамический вывод дробного уравнения Фоккера−Планка для фрактального турбулентного хаоса со степенной памятью.

Рассмотрен стохастико-термодинамический подход к выводу обобщённых уравнений Фоккера−Планка−Колмогорова (ФПК) с дробными производными, описывающих немарковские процессы турбулентного переноса в подсистеме турбулентного хаоса на основе дробной динамики, учитывающей структуру и метрику фрактального времени. Реальное турбулентное движение жидкости, как известно, является перемежающимся, поскольку обнаруживает промежуточные свойства между свойствами регулярного и хаотического движения. С другой стороны, возможная немарковость процесса турбулизации течения, происходящая за счёт многомасштабных пространственно-временных корреляций пульсирующих гидродинамических параметров, на физическом языке означает наличие памяти. Введение дробных производных по времени в кинетические уравнения ФПК, предназначенные для определения функций распределения вероятности различных статистических характеристик структурированной турбулентности, позволяет учесть в контексте единого математического формализма эффекты памяти, нелокальности и перемежаемости во времени, с которой обычно связывают наличие турбулентных всплесков на фоне менее интенсивных низкочастотных колебаний фоновой турбулентности.

Ключевые слова: математическое моделирование, термодинамика необратимых процессов, развитая турбулентность, уравнение Фоккера−Планка, фракталы.

AleksandrVladimirovich Kolesnichenko

Thermodynamic derivation of the fractional Fokker−Planck equation for fractal turbulent chaos with power memory.

A stochastic-thermodynamic approach to the derivation of the generalized fractional Fokker–Planck–Kolmogorov (FPK) equations is considered. The equations describe turbulent transfer processes in a subsystem of turbulent chaos on the basis of fractional dynamics, which takes into account the structure and metric of fractal time. The actual turbulent motion of a fluid is known to be intermittent, since it demonstrates the properties that are intermediate between the properties of regular and chaotic motions. On the other hand, the process of the flow turbulization may be non-Markovian because of the multidimensional spatiotemporal correlations of pulsating parameters; in a physical language, this means that the process has a memory. The introduction of fractional time derivatives into the FPK kinetic equations, used to find the probability distribution functions for different statistical characteristics of structured turbulence, makes it possible to use an unified mathematical formalism in considering the effects of memory, non-locality, and time intermittence, with which we usually associate the presence of turbulent bursts against the background of less intense low-frequency oscillations in the background turbulence.

Key words: mathematical modelling, thermodynamics of irreversible processes, advanced turbulence, Fokker−Planck equation, fractals.

1.Введение

Турбулентность без преувеличения является самым распространённым видом движения «космической жидкости» во Вселенной и, вместе с тем, принадлежит к числу наиболее сложных природных явлений, связанных с возникновением и развитием многомасштабных пространственно-временных когерентных структур (КС) при определённых режимах течения в существенно неравновесной открытой системе (см. Климонтович,1990, 2002). Процессы самоорганизации на фоне мелкомасштабного турбулентного движения являются важнейшим механизмом, формирующим, в частности, свойства астро- и геофизических объектов на разных стадиях их эволюции, включая возникновение галактик и галактических скоплений, рождение звёзд из диффузной среды газопылевых облаков, образование протопланетных дисков и последующую аккумуляцию планетных систем, формирование газовых оболочек планет (атмосфер), динамику больших вихрей в атмосферах и в околопланетной плазме и т.д. К сожалению, прямое численное моделирование нестационарных турбулентных движений на основе точных (мгновенных) гидродинамических уравнений сопряжено обычно со значительными математическими трудностями, а построение общей теории структурированной турбулентности, из-за чрезвычайной сложности механизмов возникновения и эволюции взаимодействующих вихревых образований при больших числах Рейнольдса, вряд ли вообще возможно в обозримом будущем. Всё это требует развития новых модельных подходов к описанию предельно развитой турбулентности, которые, несмотря на все упрощения «реального мира», отражают в главном специфику структурированного турбулентного течения (при минимуме необходимых вычислительных усилий).

В работах (Колесниченко, 2002, 2003; 2004a,b; Marov, Kolesnichenko, 2013) была сформулирована концепция самоорганизации и вихревого структурообразования при необратимых процессах в развитых турбулентных течениях, которая является отражением общей концепции нелинейной динамики, связанной с возникновением упорядоченных структур при значительном отклонении от равновесия. В этих работах проблема возникновения и эволюции когерентных вихревых образований в турбулентной сжимаемой среде рассматривалась с позиций стохастической термодинамики необратимых процессов (Кайзер, 1990), исходя из анализа соотношения порядка и хаоса в открытых диссипативных системах. Исходным предположением используемого в них подхода послужила допустимость описания турбулентного движения жидкости в рамках модели двухжидкостного континуума, состоящего из двух открытых взаимосвязанных подсистем − подсистемы осреднённого движения, которая получается в результате теоретико-вероятностного осреднения гидродинамических уравнений для мгновенных движений одножидкостной среды и подсистемы турбулентного хаоса (связанной с пульсационным движением жидкости). Эти континуумы заполняют одновременно один и тот же объём координатного пространства непрерывно. Подсистема осреднённого движения предназначена для моделирования динамики среднего течения, в частности, моделирования крупномасштабных вихревых образований. Стационарно-неравновесная подсистема турбулентного хаоса (мелкозернистая турбулентная надструктура) связана с вихревым (пульсационным) движением жидкости, причём, в соответствии с точкой зрения Пригожина на турбулентность, как на течение макроскопически более высокоорганизованное, чем течение ламинарное (см. Пригожин, Стенгерс, 1986), её можно рассматривать как конгломерат вихревых пространственно-временных образований различных масштабов и моделировать континуумом с некоторой внутренней структурой. Для каждого из двух указанных континуумов вводились локальные (для макроскопически малых объёмов $d\mathbf{r}$) гидротермодинамические параметры, такие как плотность, давление, термодинамическая температура, внутренняя энергия, энтропия и т.п. При этом для описания квазистационарного вихревого континуума, относящегося к турбулентному хаосу, помимо обобщённых термодинамических переменных (см. Blackadar, 1955), вводились в рассмотрение дополнительные внутренние переменные, отвечающие, в конечном счёте, возбужденным макроскопическим степеням свободы турбулентной жидкости. Поля гидродинамических скоростей для указанных подсистем предполагались совпадающими, поскольку в процессе реального турбулентного течения не происходит разделения соответствующих лагранжевых объёмов (эффекта диффузии) – подсистема мелкомасштабного вихревого хаоса не имеет диффузионной скорости относительно подсистемы осреднённого движения. Кроме этого, считалось, что обобщённые термодинамические параметры состояния, характеризующие мелкомасштабную стационарно-неравновесную вихревую структуру хаоса, связаны обычными для локально-равновесной термодинамики соотношениями типа тождеств Гиббса, Гиббса−Дюгема и т.п. Другими словами считалось, что подобного рода соотношения остаются справедливыми и вдали от локального равновесия[1)] в тех случаях, когда подсистема хаоса находится в устойчивом стационарно-неравновесном состоянии. Данное ключевое предположение явилось своего рода «новым» по-

[1)] Поскольку энергия турбулентных движений благодаря вязкости непрерывно рассеивается, то ситуация, при которой достигается локальное статистически равновесное состояние турбулентного хаоса, оказывается, в общем случае, невозможной. Вместе с тем, в случае стационарного течения турбулентной жидкости, когда вязкая диссипация энергии за большое время в среднем компенсируется энергией от стационарного источника неравновесности, стохастические процессы в подсистеме турбулентного хаоса в принципе не отличаются от случайных процессов в какой-либо диссипативной системе.

стулатом, на котором, собственно, и основывался стохастико- термодинамический подход к модельному описанию развитой структурированной турбулентности. Специфической особенностью этого подхода является введение в модель турбулентного хаоса набора случайных параметров $\mathbf{q}(t)$ – пульсирующих внутренних координат (типа скорости диссипации турбулентной энергии, собственных завихрённостей пульсирующего поля скоростей, относящихся к микро- и мезомасштабным вихревым образованиям и т.п.), характеризующих структуру и временную эволюцию вихревого контитуума. Были развиты представления о стационарно-неравновесном состоянии диссипативно активной подсистемы турбулентного хаоса, возникающем вследствие притока негэнтропии от внешней среды (т.е. от подсистемы осреднённого движения) и появлении в подсистеме турбулентного хаоса относительно устойчивых вихревых когерентных образований (отвечающих реальным вихревым структурам в турбулентном потоке) при изменении параметров, управляющих режимом турбулентного течения, например, числа Рейнольдса $\mathbf{Re}$. Это позволило рассматривать процесс перестройки мелкомасштабного турбулентного хаоса, как процесс самоорганизации в открытой системе.

Методами стохастической теории необратимых процессов и расширенной необратимой термодинамики были получены определяющие (замыкающие) градиентные соотношения для турбулентных потоков и сил, которые замыкают систему осреднённых гидродинамических уравнений и с достаточной для практики полнотой описывают процессы переноса и самоорганизации в стационарно-неравновесном случае. В частности, при учёте центрального для данного подхода постулата Пригожина, касающегося направления протекания необратимых процессов в каком-либо локальном объёме $d\mathbf{q}$ пространства внутренних координат (см. Пригожин, 1960, Гл.3, § 11), в рамках данного подхода удалось получить термодинамическим путем эволюционные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова в пространстве конфигураций $\mathbf{q}$. Эти кинетические уравнения предназначены для определения временной эволюции плотностей распределения условных вероятностей различных стохастических характеристик турбулентности. Кроме этого они позволили исследовать марковские стохастические диффузионные процессы перехода в конфигурационном пространстве внутренних координат (из одного стационарно-неравновесного устойчивого состояния в другое), вызванные последовательной потерей устойчивости гидродинамической системой при изменении управляющих параметров. Было показано, что подобные переходы могут быть описаны как неравновесные «фазовые переходы второго рода» в вихревом континууме, в результате которых внутренние координаты в бифуркационных точках меняются скачкообразно (см.

Кадомцев, Рязанов, 1983). Заметим, что специфика подобного подхода состоит, в частности, в том, что появляется средство исследования (на уровне теории случайных функций) свойств и поведения тех стационарно-необратимых диссипативных процессов в подсистеме турбулентного хаоса, которые связаны с пульсациями, устойчивостью и бифуркационными изменениями отдельных стационарных состояний.

Вместе с тем, важно иметь в виду, что марковский диффузионный процесс (отвечающий выделенным возбуждённым макроскопическим степеням свободы турбулентного течения), описываемый кинетическим уравнением ФПК, не помнит своего прошлого, т.е. не обладает памятью. В то же время статистика сильно нелинейных случайных полей гидротермодинамических величин в реальном турбулентном течении жидкости не носит в общем случае марковского характера, особенно на больших масштабах (см. Монин, Яглом, 1996). Немарковость процесса турбулизации течения, которая возможна в некоторых областях конфигурационного пространства $\mathbf{q}(t)$ за счёт многомасштабных пространственно-временных корреляций пульсирующих параметров (не убывающих в общем случае экспоненциально) на физическом языке означает наличие памяти. Именно по этой причине, необходимо обобщение модели эволюции мелкомасштабных характеристик турбулентного поля, основанной на классических уравнениях ФПК, на более реалистичный случай турбулентности, обладающей памятью.

В связи с развитием термодинамических методов описания структурированного поля течения турбулентной жидкости (см. Колесниченко, 2005a,b) нас интересуют в основном такие состояния вихревого хаоса, которые при нарастании интенсивности гидротермодинамических пульсаций (связанных с динамическим проявлением огромного числа степеней свободы, не учтённых в модели) могут возбудить каскад инициированных мультипликативным шумом фазовых переходов к новым (квази)стационарным состояниям вихревой подсистемы. Подобные переходы, которым в пульсирующем потоке жидкости отвечает множество устойчивых разномасштабных когерентных структур, возможны, как было показано в работе (Колесниченко, 2002), при условии обмена энтропией и энергией с подсистемой осреднённого движения. Известно, что если моделировать мультипликативный шум в системе степенной функцией (что, как правило, и делается), то область определения стохастической среды в конфигурационном пространстве $\mathbf{q}$ приобретает, в общем случае, фрактальный характер (см., например, Олемской, 1998). Фрактальная среда является, как правило, средой с памятью. Диффузионные процессы на фрактальных структурах существенно не гауссовы (в классическом понимании гауссовского процесса) и определяются сложным взаимодействием корреляций, действующих на сколь угодно больших пространственно-временных масштабах. Последовательный учёт этих корреляций в адекватной теории структурированной турбулентности требует, вообще говоря, отказа от классического кинетического уравнения ФПК (описывающего движение «идеального» хаоса в непрерывном конфигурационном пространстве) и от традиционного представления о диффузионном переносе плотности вероятности $P_2(\mathbf{q},t)$ как о броуновском движении частиц в монотонной среде. Это связано с тем, что в общем случае в подсистеме турбулентного хаоса имеет место фрактальное броуновское движение вихревых частиц (случайный процесс, обладающий памятью (см. Mandelbrot, Van Ness, 1968)) и нелинейная зависимость потока вероятности $\mathbf{J}(\mathbf{q},t)$ от топологии фрактала.

Отметим также, что в то время как ламинарное и идеальное хаотическое движение жидкости обладает определённой степенью монотонности, реальное турбулентное движение является перемежающимся[2)], поскольку обнаруживает промежуточные свойства между свойствами регулярного и хаотического движения. Одним из характерных свойств фазового пространства, отвечающего реальному турбулентному движению жидкости, является его неполнота, проявляющаяся в наличие многочисленных «островков» в фазовом объёме стохастического «моря», куда не могут проникнуть хаотические траектории (см. Заславский, 2004). В геометрическом пространстве такому состоянию подсистемы вихревого хаоса отвечает наличие ламинарных пятен, вспышек (всплесков) и перемежаемости. Ламинарные пятна проявляются в виде локализованных пространственных образований регулярного движения жидкости на фоне хаотического вихревого течения; турбулентные всплески связаны с интенсивными пульсациями широкого спектра колебаний на фоне менее интенсивных низкочастотных колебаний гидротермодинамических параметров регулярного течения. Таким образом, сама специфика структурированной турбулентности обеспечивает физическую основу для замены однородного пространства-времени на фрактальное пространство-время. В связи со сказанным, адекватное кинетическое описание фрактальных свойств эволюции подсистемы турбулентного хаоса требует некоторого обобщения. Необходимые обобщения могут быть получены за счёт привлечения методов дробного интегро-дифференциального исчисления (см., например, Самко и др., 1987; Нахушев, 2003), адекватного сложным нелинейным системам с многомасштабными корреляциями в пространстве и во времени. Уравнения с дробными производными, полученные в различных областях физики и механики, учитывают эффекты памяти, про-

---

[2)] Перемежаемость во времени (в пространстве) – это чередование ламинарных и турбулентных областей во времени или в пространстве странственно-временной перемежаемости и нелокальности, выходящей далеко за границы традиционной гауссовой статистики. Дробные производные по координатам обычно отражают самоподобную неоднородность среды, в которой развивается процесс. Возникающие при этом структуры являются фракталами.

В данной работе на основе стохастической неравновесной термодинамики предложен новый подход к получению обобщённых уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) с дробными производными, описывающих процессы турбулентного переноса в подсистеме мелкомасштабного турбулентного хаоса на основе дробной динамики, учитывающей структуру и метрику фрактального времени. Введение дробных производных по времени $\partial^{\omega}/\partial t^{\omega}$ (параметр ω связан с фрактальной размерностью активного времени) в кинетические уравнения ФПК позволяет учесть эффекты памяти и перемежаемости во времени (наличие турбулентных всплесков) в контексте единого математического формализма. Далее для простоты мы ограничимся рассмотрением пространственно однородного случая стохастической подсистемы турбулентного хаоса, описываемой набором внутренних координат $\mathbf{q}(t)$, которые случайным образом изменяются со временем t.

2. Моделирование структурированной турбулентности методами стохастической термодинамики

Обсудим более детально обоснование ряда постулатов, а также физических и математических предположений, на которых основан развитый ниже подход. Проблема осреднения, тесно связанная с теорией турбулентности, является одной из центральных в механике сплошных сред, а в случае такой сложной системы, как турбулентная температурно-неоднородная сжимаемая жидкость, именно от способа осреднения зависит само построение макроскопической модели (см., например, Marov, Kolesnichenko, 2001; 2013). В классических теориях турбулентности для всех без исключения гидродинамических параметров осреднения вводятся некоторым одинаковым образом, причём, как правило, без весовых коэффициентов. Вместе с тем, подобное идентичное для всех параметров осреднение в общем случае жидкости с переменной массовой плотностью $\rho(\mathbf{r},t)$ (где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки в декартовой прямоугольной системе координат) приводит не только к громоздким гидродинамическим уравнениям масштаба среднего движения, но и к затруднениям физической интерпретации некоторых отдельных членов в них. Поэтому при построении макроскопической модели развитой сжимаемой турбулентности удобно использовать, наряду с теоретико-вероятностными средними значениями $\overline{f}(\mathbf{r},t)$ каких-либо гидродинамических параметров среды $f(\mathbf{r},t)$, так называемые, средневзвешенные значения этих параметров (средние по Фавру), задаваемые соотношением $\langle f(\mathbf{r},t)\rangle = \overline{\rho f(\mathbf{r},t)}/\bar{\rho}$; здесь $f = \bar{f} + f'$, $\overline{f'} = 0$; $f = \langle f\rangle + f''$, $\overline{f''} \neq 0$; f', f'' – соответствующие турбулентные пульсации (см. Колесниченко, Маров, 1999).

В работе автора (2002) был исследован стационарно-неравновесный режим полностью развитой турбулентности в жидкости, при котором процесс последовательного дробления крупных вихрей создает непрерывный поток энергии вдоль иерархии вихрей различных размеров через инерционный интервал от энергетического к вязкому, где и происходит её диссипация в тепло. Поскольку турбулентность сопровождается диссипацией кинетической энергии, то для поддержания её стационарного режима (когда накачка и диссипация энергии взаимно уравновешиваются) необходим постоянно действующий внешний (по отношению к среде) источник. При этом предполагалось, что непрерывный процесс перекачки кинетической энергии осреднённого движения от крупномасштабных вихрей к малым может быть адекватно описан в рамках случайного каскада Ричардсона−Колмогорова. Кроме этого использовалась концепция теории Колмогорова (1941), согласно которой в пределе очень больших чисел Рейнольдса $\mathbf{Re}$, соответствующих крупномасштабным движениям в потоке, несмотря на анизотропность, неоднородность и нестационарность осреднённого течения, случайный характер дробления вихрей и хаотичность передачи их энергии по каскаду вниз приводят к тому, что статистический режим турбулентных пульсаций в границах небольшой пространственно-временной области осреднения мгновенных гидродинамических уравнений, является почти[3)] локально изотропным – однородным, изотропным и квазистационарным, т.е. изменяющимся в зависимости лишь от управляющих параметров, и прежде всего от числа Рейнольдса $\mathbf{Re}$, определяющего, в конечном счёте, число каскадов в иерархии вихрей различных порядков. С учетом сделанных предположений было показано, что для континуума, отвечающего пульсирующему хаосу, устанавливается такое «квазилокальное равновесие», при котором производство энтропии турбулизации (из-за внутренних диссипативных процессов) компенсируется её оттоком, так что суммарное возникновение энтропии хаоса отсутствует. Поддержание подобного стационарно-неравновесного состояния в подсистеме вихревого хаоса осуществляется благодаря притоку отрицательной энтропии (негэнтропии) от подсистемы осреднённого движения. Как известно, такой обмен энтропией между двумя взаимосвязанными открытыми системами

[3)] Полной локальной изотропии из-за наличия мелкомасштабных структур естественно быть не может.

часто является достаточным условием возникновения новых когерентных структур в одной из них (Пригожин, Стенгерс, 1994).

При макроскопическом описании структуры турбулентного хаоса в цитируемых выше работах автора был применен альтернативный статистическому термодинамический формализм, основанный на включении в модель, помимо обобщённых экстенсивных термодинамических переменных типа внутренней энергии $U_{turb}(\mathbf{r},t)$ и удельного объёма $v(\mathbf{r},t) \equiv 1/\bar{\rho}$, ещё и некоторой бесконечной последовательности внутренних переменных $n(q_k,\mathbf{r},t)$, где параметры $q_k(\mathbf{r},t)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ изменяются непрерывно. Внутренние переменные $n(q_k,\mathbf{r},t)$ могут представлять собой, например, концентрации мелкомасштабных вихрей или температурных неоднородностей в состояниях, характеризуемых данными значениями параметров q_k (так называемых внутренних координат). При этом предполагалось, что подобные мелкомасштабные структуры каким-то образом локализованы, как в координатном пространстве $\mathbf{r}$, так и в пространстве конфигураций $\mathbf{q}$. Таким образом, внутренние координаты q_k (характеристики ансамбля вихревых и температурных структур, отвечающие мелкомасштабным турбулентным пульсациям) могут быть, вообще говоря, случайными функциями, пульсирующими около своих стационарных (средних) значений q_k^{st}. В качестве внутренних координат $q_k(\mathbf{r},t)$ хаоса могут фигурировать следующие положительные величины (являющиеся чётными функциями пульсирующих скоростей, температур или концентраций): $e(\mathbf{r},t) = \mathbf{u}''^2/2$ − кинетическая энергия вихрей; $\varepsilon(\mathbf{r},t) = \frac{\nu}{2}\sum_{i,j}(\partial u_i''/\partial x_j + \partial u_j''/\partial x_i)^2$ − скорость диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло под влиянием молекулярной вязкости; $\varepsilon_T(\mathbf{r},t) = \chi\sum_j(\partial T''/\partial x_j)^2$ − скалярная диссипация температурных неоднородностей и т.п.

Очевидно, что чисто термодинамическое описание стационарно- неравновесной вихревой структуры подсистемы турбулентного хаоса, сжатое по необходимости, является до известной степени неполным, поскольку любые две подобные подсистемы с одинаковым набором экстенсивных термодинамических параметров состояния не могут быть (как и в классической термодинамике) тождественными во всех отношениях. Происходит это, в частности, от того, что вихревая подсистема, находящаяся в том или ином стационарном состоянии вдали от локального термодинамического равновесия, при определённых значениях управляющих параметров может приблизиться к стационарному состоянию с нейтральной устойчивостью (к так называемой критической точке потери устойчивости), и вслед за тем скачкообразно перейти к другому асимптотически устойчивому стационарному состоянию, соответствующему той или иной форме надмолекулярного когерентного поведения огромного числа вихревых частиц, например, осцилляциям разномасштабных вихрей (Колесниченко, 2004а). Причиной этого являются возникающие стохастические мезомасштабные (турбулентные) пульсации гидродинамических параметров системы (и, в частности, внутренних координат состояния турбулентного хаоса), которые следует отличать от стохастических молекулярных пульсаций, обусловленных атомной структурой системы. Мезомасштабные турбулентные пульсации, собственно, и служат мерой различий в любом множестве термодинамически одинаковых вихревых подсистем, обладающих одними и теми же термодинамическими параметрами. Эти пульсации, не подавляемые в сильно неравновесных условиях, а напротив, усиливающиеся при определённых обстоятельствах внутренними диссипативными процессами в точках бифуркации (в которых система "может выбирать" между различными состояниями), приводят, в конечном счёте, к разным типам хаотической подсистемы. Таким образом, из-за постоянно происходящих турбулентных пульсаций гидродинамических параметров любое стационарно-неравновесное состояние подсистемы турбулентного хаоса следует представлять себе, как состояние не одной отдельной подсистемы, а физического ансамбля – множества подсистем, тождественных с точки зрения их сжатого описания. Для адекватного моделирования подобного физического ансамбля необходимо привлекать, в общем случае, формализм обобщённой статистической термодинамики, или статистические методы в неравновесной термодинамике (Кайзер, 1990).

Для удобства читателя повторим здесь кратко (но с необходимыми модификациями, учитывающими многомерность пространства конфигураций, отвечающего подсистеме турбулентного хаоса) стохастико-термодинамический вывод кинетического уравнения ФПК, предложенный в работе (Колесниченко, 2003). Будем предполагать, что для полного статистического описания стохастического векторного процесса $\mathbf{q}(\mathbf{r},t)$ в турбулентном континууме (набора структурных мелкомасштабных характеристик хаоса $q_k(\mathbf{r},t)$, который удобно собрать в один вектор-столбец в n-мерном пространстве конфигураций) достаточно знать одноточечную плотность вероятности $W_1(\mathbf{q},t)$ и совместную двухточечную плотность распределения вероятности $W_2(\mathbf{q}_0,t_0;\mathbf{q},t)$. Как известно, случайные процессы, полностью описываемые только этими двумя функциями, являются марковскими процессами[4]. Будем также использовать двухточечную плотность условной вероятности, $P_2(\mathbf{q}_0, t_0 | \mathbf{q}, t)$, которая позволяет найти вероятное значение параметра $\mathbf{q}$ в момент времени t, если в момент времени t_0, с вероятностью равной единице, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$. Эти плотности вероятности будем употреблять для получения средних значений функций $f(\mathbf{q}(t))$ от случайного вектора состояния $\mathbf{q}(t)$: в частности, формула

$$\overline{f(\mathbf{q}(t))} \equiv \int f(\mathbf{q}(t))\, W_1(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q}$$

определяет безусловное среднее величины $f(\mathbf{q}(t))$, а формула

$$\overline{f(\mathbf{q}(t))}^{0} \equiv \int f(\mathbf{q}) P_2(\mathbf{q}_0 | \mathbf{q}, t) d\mathbf{q}$$

вводит среднее значение $f(\mathbf{q}(t))$ в момент времени t при условии, что $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$ (условное среднее). Связь между этими средними значениями по условному подансамблю $\overline{f(\mathbf{q}(t))}^{0}$ и всему физическому ансамблю $\overline{f(\mathbf{q}(t))}$ неявно содержится в соотношении $P_2(\mathbf{q}_0, t_0 | \mathbf{q}, t) = W_2(\mathbf{q}_0, t_0; \mathbf{q}, t) / W_1(\mathbf{q}_0, t_0)$, которое, собственно, и определяет, так называемую, вероятность перехода P_2. Далее мы будем, в основном, рассматривать, так называемый, стационарный физический ансамбль турбулентного хаоса, состоящий из адекватных в указанном выше смысле подсистем, поддерживаемых непрерывно действующими внешними источниками турбулентности в таком состоянии, при котором случайные переменные $\mathbf{q}(t)$ являются инвариантными относительно сдвига по оси времени, т.е. $\mathbf{q}(t_p + \tau) = \mathbf{q}(t_p)$ при всех p и τ. Ясно, что в этом случае одновременная плотность вероятности $W_1(\mathbf{q})$ не зависит от времени, а плотности совместных вероятностей зависят лишь от попарных разностей $(t - t_0)$, например, $P_2(\mathbf{q}_0, t_0 | \mathbf{q}, t) = P_2(\mathbf{q}_0, 0 | \mathbf{q}, t - t_0)$. Имея это ввиду, далее везде будем опускать в выражениях для W_2 и P_2 начальный момент времени и записывать их сокращенно: $P_2(\mathbf{q}_0 | \mathbf{q}, t)$ и т.д.

В работе автора (2002) для непрерывного марковского стационарно-неравновесного стохастического процесса $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$, описывающего эволюцию

---

[4]) Можно сказать, что это кардинальное предположение определяет класс случайных процессов (турбулентных пульсаций), к которому применима рассматриваемая стохастико-термодинамическая модель развитой турбулентности.

внутренних параметров турбулентного хаоса, включая временную эволюцию статистических характеристик вихревых структур в случайном каскаде Ричардсона−Колмогорова, было термодинамически выведено так называемое обратное кинетическое уравнение ФПК для описания эволюции плотности условной вероятности $P_2 \equiv P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)$ для вектора состояния $\mathbf{q}$ по отношению к начальным параметрам $t_0, \mathbf{q}_0$. В матричных обозначениях оно имеет вид

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \left[\mathbf{K}(\mathbf{q}, T_{\mathrm{turb}}) P_2\right] + \frac{1}{2} \mathcal{R} T_{\mathrm{turb}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left\{ \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \frac{\partial P_2}{\partial \mathbf{q}} \right\}. \qquad (1)$$

Здесь вектор $\mathbf{K}(\mathbf{q}, T_{\mathrm{turb}})$ и тензор второго ранга $\frac{1}{2}\mathcal{R}T_{\mathrm{turb}}\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ в правой части определяют соответственно дрейфовую и диффузионную части потока вероятности, причем $P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)\, P_2-$ положительная функция, обладающая следующими свойствами:

$$\int P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t) d\mathbf{q} = 1, \quad \int W_1(\mathbf{q}_0) P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t) d\mathbf{q}_0 = W_1(\mathbf{q}), \quad \lim_{t\to\infty} P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t) = W_1(\mathbf{q}). \qquad (2)$$

Последнее соотношение означает, что для стационарных процессов условная плотность асимптотически со временем перестает зависеть от начального условия. Параметр $\mathcal{R}T_{\mathrm{turb}} \equiv \varepsilon$ отражает интенсивность естественного (внутреннего) источника пульсаций переменных $\mathbf{q}$, связанного с собственным нелинейным возмущающим механизмом системы – с “тепловой” структурой турбулентного хаоса.

Уравнение (1) удобно для изучения стохастических процессов, связанных с начальными условиями вида $P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},0) = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)$, которые соответствуют дельтаобразной плотности вероятности, сосредоточенной в точке $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$. Другими словами, предполагается, что в момент $t = 0$ из точки $\mathbf{q}_0$ конфигурационного пространства выходит большое число (ансамбль) траекторий, движущихся независимо друг от друга, и при этом ищется плотность их распределения в какой-либо области $\mathbf{q}$-пространства в момент времени t. Сверх этого, на функцию $P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)$ могут быть наложены те или иные граничные условия по $\mathbf{q}$, которые должны быть специально сформулированы для анализа конкретных задач. Если в начальный момент времени $t = 0$ задано не начальное состояние $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$, а начальное распределение $W_1(\mathbf{q}_0)$, то, умножая (1) на $W_1(\mathbf{q}_0)$ и интегрируя по $\mathbf{q}_0$, можно получить (используя второе соотношение (2)) так называемое прямое уравнение ФПК, для которого одноточечная плотность вероятности $W_1(\mathbf{q})$ является стационарным решением.

Термодинамический вывод кинетического уравнения

Заметим, что уравнение (1) – это просто уравнение неразрывности

$$\partial P_2 / \partial t = -\partial \mathbf{J}(\mathbf{q}, t) / \partial \mathbf{q}$$

для нормированного к единице числа вихревых структур $n(\mathbf{q}, t)$ в единице объёма $\mathbf{q}$-пространства (так называемое основное кинетическое уравнение), в котором

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, t) \equiv \mathbf{K}(\mathbf{q}, \varepsilon) P_2(\mathbf{q}, \mathbf{r}, t) - \frac{1}{2} \varepsilon\, \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \frac{\partial P_2(\mathbf{q}, \mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{q}} \cdot \qquad (4)$$

– поток вероятности состояния $\mathbf{q}$, принимающего в начальный момент времени значение $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$. Здесь $P_2(\mathbf{q}_0 | \mathbf{q}, t) \equiv n(\mathbf{q}(\mathbf{q}_0, t))/n_\Sigma$; $n_\Sigma(\mathbf{r}, t) = \int n(\mathbf{q}(\mathbf{r}), t)\, d\mathbf{q}$ – полное число вихревых структур в элементарном объёме среды.

Для термодинамического вывода уравнения (1) была использована глубокая аналогия между консекутивной химической реакцией ($s_1 \to s_2 \to s_3 \to ...$) и каскадным процессом Ричардсона–Колмогорова, который рассматривался как своего рода химическое превращение с соответствующим химическим потенциалом $\mu_{turb}(\mathbf{q})$ для внутренних степеней свободы $\mathbf{q}$ и химическим сродством де Донде $\mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q}) = -\partial \mu_{turb} / \partial \mathbf{q}$, представляющим собой движущую силу каскадного процесса и отвечающим протеканию одного эквивалента $n(\mathbf{q}) \to n(\mathbf{q} + \partial \mathbf{q})$ процесса дробления вихрей.

Важно ясно себе представлять, что понятие химического потенциала отличается большой общностью: оно применимо почти к любой сплошной модельной среде, если для неё возможно ввести понятие термодинамической температуры. В работе (Marov, Kolesnichenko, 2001) формализм химического потенциала был распространён на стационарно-неравновесный турбулентный хаос, для которого интенсивные термодинамические параметры, такие как обобщённые температура T_{turb} (не сводящаяся в общем случае к абсолютной температуре) и давление p_{turb} турбулизации, а также химический потенциал $\mu_{turb}(\mathbf{q})$ для внутренних степеней свободы $\mathbf{q}$, определялись из фундаментального соотношения Гиббса для обобщённой энтропии S_{turb} (заданной a priori в виде характеристической функции

$$\mathcal{S}_{\rm turb} = {\rm S}_{\rm turb}\left({\rm U}_{\rm turb},\, 1/\bar{\rho},\, {\rm n}(\mathbf{q})/\bar{\rho}\right)$$

(см., например, Мюнстер, 2002)) с помощью обычных соотношений

$$\frac{1}{\rm T_{turb}} = \left(\frac{\partial {\rm S_{turb}}}{\partial {\rm U_{turb}}}\right)_{1/\bar{\rho},\,{\rm n}/\bar{\rho}}; \qquad \frac{\rm p_{turb}}{\rm T_{turb}} = \left(\frac{\partial {\rm S_{turb}}}{\partial (1/\bar{\rho})}\right)_{\rm U_{turb},\,n/\bar{\rho}};$$

$$\frac{\mu_{\rm turb}(\mathbf{q})}{\rm T_{turb}} = -\left(\frac{\partial {\rm S_{turb}}}{\partial\,({\rm n}(\mathbf{q})/\bar{\rho})}\right)_{1/\bar{\rho},\,{\rm U_{turb}}},$$

в которых, однако, химический потенциал $\mu_{\rm turb}(\mathbf{q})$ для внутренних степеней свободы определяется, как функциональная производная. По предположению, введённая таким образом энтропия турбулизации ${\rm S_{turb}}$ содержит все термодинамические сведения о подсистеме стационарно-неравновесного турбулентного хаоса, т.е. связана с устойчивостью, пульсациями и динамическими изменениями в (квази)стационарном состоянии так же, как локальная равновесная энтропия в (квази)равновесном состоянии (Кайзер, 1990). Тогда дифференциальная форма фундаментального соотношения Гиббса для энтропии турбулизации ${\rm S_{turb}}$, записанная вдоль траектории движения центра масс физически элементарного объёма $d\mathbf{r}$, принимает следующий вид (Колесниченко, 2002):

$$\frac{d{\rm S_{turb}}}{dt} = \frac{1}{\rm T_{turb}}\frac{d{\rm U_{turb}}}{dt} + \frac{\rm p_{turb}}{\rm T_{turb}}\frac{d(1/\bar{\rho})}{dt} + \frac{1}{\rm T_{turb}}\int_{\mathbf{q}} \mathbf{J}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{A}_{\rm turb}(\mathbf{q})d\mathbf{q},$$

где $d(..)/dt \equiv \partial(..)/\partial t + \langle\mathbf{u}\rangle\cdot\nabla(..)$ – полная субстанциональная производная по времени относительно осреднённого поля скоростей; ∇ – оператор Гамильтона; $\langle\mathbf{u}\rangle(\mathbf{r},t) \equiv \overline{\rho\mathbf{u}}/\bar{\rho}$ – осреднённая по Фавру гидродинамическая скорость сжимаемой среды. При отождествлении “внутренней энергии” ${\rm U_{turb}}$ хаоса с энергией турбулентности $\langle e\rangle \equiv \overline{\rho(\mathbf{u}'')^2}/2\bar{\rho}$ (осреднённой по Фавру удельной кинетической энергии пульсационной составляющей скорости) и в предположении, что подсистема турбулентного хаоса в термодинамическом смысле является идеальным классическим газом с тремя степенями свободы, по которым энергия распределена равномерно, будем иметь

$$\bar{\rho}{\rm U_{turb}} = {}^3\!/_2\,\mathcal{R}\bar{\rho}{\rm T_{turb}} = {}^3\!/_2\,{\rm p_{turb}},$$

$$\mu_{\rm turb}(\mathbf{q},t) = \mathcal{R}{\rm T_{turb}}\ln\left[{\rm n}(\mathbf{q},t)/{\rm n}_\Sigma\right] + \Phi(\mathbf{q},{\rm T_{turb}}), \qquad (5)$$

где $\mathcal{R}\equiv k_B/m$; k_B – постоянная Больцмана; $m(=\bar{\rho}/n_\Sigma)$ – масса вихревого моля; $\Phi(\mathbf{q},T_{turb})$ – так называемая потенциальная энергия (на единицу массы) по внутренней координате $\mathbf{q}$, которая может зависеть от обобщённой температуры T_{turb}. Это одно из ключевых допущений модели (Колесниченко, 1998).

Определяющие соотношения для турбулентных термодинамических потоков и сил, замыкающие систему осреднённых гидродинамических уравнений сжимаемой жидкости (приведённые, например, в монографиях (Marov, Kolesnichenko, 2001;2013))), могут быть получены из балансового уравнения для энтропии суммарного континуума $S_\Sigma=\langle S\rangle+S_{turb}$ (для так называемой сигма-функции Σ), которое в случае стационарно-неравновесного состояния подсистемы турбулентного хаоса, имеет вид (Колесниченко, 2002):

$$\bar{\rho}\frac{dS_\Sigma}{dt}+\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{j}^\Sigma}{\langle T\rangle}+\frac{\mathbf{J}_e^{turb}}{T_{turb}}\right)\cong\frac{1}{\langle T\rangle}\left(-\mathbf{j}^\Sigma\cdot\frac{\nabla\langle T\rangle}{\langle T\rangle}+\overset{\circ}{\mathbf{R}}\cdot\cdot\overset{\circ}{\mathbf{E}}+\bar{\rho}\int_{\mathbf{q}}\mathbf{J}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q})d\mathbf{q}\right)\geq 0. \tag{6}$$

Здесь $\langle S\rangle$ и $\langle T\rangle$ – осреднённые по Фавру удельная энтропия и абсолютная температура подсистемы осреднённого движения;

$$\mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q},t)\equiv-\frac{\partial\mu_{turb}(\mathbf{q},t)}{\partial\mathbf{q}}=-\frac{\mathcal{R}T_{turb}}{n(\mathbf{q},t)}\frac{\partial n(\mathbf{q},t)}{\partial\mathbf{q}}-\frac{\partial\Phi(\mathbf{q},T_{turb})}{\partial\mathbf{q}}$$

– обобщённое химическое сродство для состояния $\mathbf{q}$ (функция состояния подсистемы турбулентного хаоса); $\mathbf{j}^\Sigma(\mathbf{r},t)\equiv(\overline{\mathbf{j}}+\mathbf{j}^{turb}-\overline{p'\mathbf{u}''})$ – полный поток тепла в подсистеме среднего движения; $\overline{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{j}^{turb}(\mathbf{r},t)\equiv\overline{\rho h''\mathbf{u}''}$ – соответственно осреднённый молекулярный и турбулентный поток тепла ($h\equiv U+p/\rho$ – мгновенное значение удельной энтальпии среды); $\mathbf{J}_e^{turb}(\mathbf{r},t)\equiv\overline{\rho(\mathbf{u}''^2/2+p'/\rho)\mathbf{u}''}$ – “диффузионный” поток турбулентной энергии; $\mathbf{R}(\mathbf{r},t)\equiv-\overline{\rho\mathbf{u}''\mathbf{u}''}$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\equiv$ $\tfrac{1}{2}(\nabla\langle\mathbf{u}\rangle+\nabla^T\langle\mathbf{u}\rangle)$ – соответственно тензор рейнольдсовых напряжений и тензор скоростей деформации для осреднённого континуума, а $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(\mathbf{r},t)$ и $\overset{\circ}{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ – их части с нулевым следом, определяемые соотношениями: $\overset{\circ}{\mathbf{E}}\equiv$ $\mathbf{E}-\tfrac{1}{3}(\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle)\mathbf{I}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{R}}\equiv\mathbf{R}+\tfrac{2}{3}\bar{\rho}\langle e\rangle\mathbf{I}$; $\mathbf{I}$ – единичный тензор; символы $\mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{B}$ и $\mathbf{AB}$ ($\nabla\mathbf{A}$) означают соответственно внутреннее произведение двух тензоров и внешнее произведение двух векторов (диада); символ $\nabla \cdot \mathbf{A}$ означает обобщенную дивергенцию, поскольку $\mathbf{A}$ не всегда является вектором; индекс "T" означает транспонирование.

Исходя из (6), например, для изотропного осреднённого течения можно записать следующие обобщённые определяющие соотношения для турбулентных потоков и сопряженных им термодинамических сил:

$$\mathbf{j}^{\Sigma}(\mathbf{r},t) = -\lambda^{\text{turb}}\, \nabla\left(\ln\langle T\rangle\right),$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{r},t) = -\tfrac{2}{3}\bar{\rho}\langle e\rangle\,\mathbf{I} + \bar{\rho}\nu^{\text{turb}}\left(\tfrac{1}{2}(\nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \nabla^{T}\langle\mathbf{u}\rangle) - \tfrac{1}{3}(\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle)\mathbf{I}\right),$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q},\mathbf{r},t) = \int\limits_{\tilde{\mathbf{q}}} \mathbf{L}(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}})\cdot\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{q}},\mathbf{r},t)\,d\tilde{\mathbf{q}}, \qquad (7)$$

отвечающие линейному режиму[5)] стационарно-неравновесной турбулентности. Здесь $\lambda^{\text{turb}}(\mathbf{r})$ и $\nu^{\text{turb}}(\mathbf{r})$– скалярные (положительные) коэффициенты турбулентного переноса, а $\mathbf{L}(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},\mathbf{r})$ – матрица кинетических коэффициентов в интегральном феноменологическом соотношении для термодинамического потока $\mathbf{J}(\mathbf{q})$. Разумеется, эти коэффициенты, в отличие от коэффициентов молекулярного переноса, не являются материальными константами. Это связано с тем, что для осреднённого турбулентного континуума процессы переноса вещества, импульса и энергии определяются коллективными движениями молекул (вихревыми образованиями малых масштабов, типа вихревых колец или нитей), и поэтому сильно зависят от параметров интенсивности турбулентного поля, в частности, от ключевых параметров турбулентности, таких, как $\langle\varepsilon\rangle$ и $\langle e\rangle$. Таким образом, при моделировании стационарно-неравновесной турбулентности в тех приложениях, когда существенны энергетические процессы в системе, необходимо привлекать к рассмотрению уравнение переноса тепла (6) для осреднённого движения; это уравнение должно быть дополнено соотношениями (7).

Вместе с тем, согласно принципу Пригожина (см. Пригожин, 1960) необратимые процессы, описываемые внутренними переменными (в рассматриваемом случае связанные с образованием вихревых структур), должны протекать таким образом, чтобы положительными были, не только соответствующий глобальный рост суммарной энтропии системы

[5)] Заметим, что это условие не настолько сильно, чтобы лишить рассматриваемый случай практического значения. Оценивая состояние проблемы замыкания в целом, следует признать, что в настоящее время почти все полуэмпирические модели турбулентности в той или иной степени основаны на градиентных соотношениях.

$$d_i S_\Sigma / dt \equiv (1/\langle T\rangle)\int_{\mathbf{q}} \mathbf{J}(\mathbf{q})\cdot \mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q})d\mathbf{q},$$

но и локальная величина

$$d_i S_\Sigma(\mathbf{q}) / dt \equiv (1/\langle T\rangle)\mathbf{J}(\mathbf{q})\cdot \mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q}) \geq 0, \qquad (8)$$

относящаяся к приращению сигма-функции Σ в каждом элементарном объёме $d\mathbf{q}$ пространства внутренней координаты. При использовании данного принципа можно установить более простое локальное феноменологическое соотношение

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \mathbf{L}(\mathbf{q})\cdot \mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q}) = -\mathbf{L}(\mathbf{q})\cdot\left(\frac{\mathcal{R}T_{turb}}{n(\mathbf{q},t)}\frac{\partial n(\mathbf{q},t)}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \Phi(\mathbf{q},T_{turb})}{\partial \mathbf{q}}\right) = \\ = -\hat{\hat{\mathbf{L}}}(\mathbf{q})\cdot\left(\mathcal{R}T_{turb}\frac{\partial P_2(\mathbf{q},t)}{\partial \mathbf{q}} - P_2(\mathbf{q},t)\mathbf{f}(\mathbf{q},T_{turb})\right),\end{aligned} \qquad (9)$$

отвечающее протеканию одного эквивалента процесса распада турбулентных вихрей. Здесь $\mathbf{L}(\mathbf{q})$ – положительно определённая локальная матрица коэффициентов переноса, удовлетворяющая соотношению взаимности Онзагера− Казимира, $\mathbf{L}^T = \mathbf{L}$; $\hat{\hat{\mathbf{L}}} \equiv \mathbf{L}(\mathbf{q})n_\Sigma / n(\mathbf{q})$ – так называемый тензор подвижности в $\mathbf{q}$-пространстве, который можно считать не зависящим в первом приближении от плотности $n(\mathbf{q})$; $\mathbf{f}(\mathbf{q},T_{turb}) \equiv -\dfrac{\partial \Phi(\mathbf{q},T_{turb})}{\partial \mathbf{q}}$ – «сила трения» в пространстве конфигураций $\mathbf{q}$, порождённая потенциальным полем $\Phi(\mathbf{q},T_{turb})$. При написании второго соотношения в формуле (9) была использована так называемая «термодинамическая» интерпретация плотности вероятности $P_2(\mathbf{q},t)$, как величины, пропорциональной числу вихревых частиц $n(\mathbf{q},t)$ в единице объёма $\mathbf{q}$-пространства.

Сравнение выражения (9) с (4) даёт следующие выражения для тензора коэффициентов диффузии $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ и вектора дрейфа $\mathbf{K}(\mathbf{q},T_{turb})$ в кинетическом уравнении (1), описывающем временную эволюцию турбулентного хаоса

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = 2\hat{\hat{\mathbf{L}}}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{K}(\mathbf{q},T_{turb}) = \hat{\hat{\mathbf{L}}}(\mathbf{q})\cdot \mathbf{f}(\mathbf{q},T_{turb}) = -\hat{\hat{\mathbf{L}}}(\mathbf{q})\cdot\frac{\partial \Phi(\mathbf{q},T_{turb})}{\partial \mathbf{q}}. \qquad (10)$$

Из этих соотношений следует, в частности, обобщённая формула Нернста−

Эйнштейна: $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = 2\mathbf{K}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{q})$, которая может рассматриваться как пример пульсационно-диссипационной теоремы для «квазилокального равновесия» турбулентной жидкости (см. Колесниченко, 2004а).

3. Принцип причинности для немарковских процессов в подсистеме турбулентного хаоса.

Получим теперь дробное уравнение Фоккера−Планка−Колмогорова, описывающее процессы турбулентного переноса в подсистеме турбулентного хаоса на основе дробной динамики, учитывающей структуру и метрику фрактального времени.

Пусть случайный процесс $\mathbf{q}(t)$ протекает в n-мерном конфигурационном пространстве $0 \le q_k < \infty$ ($k = 1, 2, ...n$) и во времени t от начального $t = 0$ до расчётного. Далее будем предполагать, что временная область определения стохастической подсистемы турбулентного хаоса является самоподобным фрактальным множеством. Вполне допустимо, что в средах с фрактальной геометрией нарушается и линейный неэредитарный закон (7). Наличие памяти в подсистеме турбулентного хаоса означает, что если в момент времени t' на неё действует сила каскадного процесса

$$\mathbf{A}_{\text{turb}}(\mathbf{q}, t') = -\partial \mu_{\text{turb}}(\mathbf{q}, t') / \partial \mathbf{q}, \tag{11}$$

отвечающая протеканию одного эквивалента $n(\mathbf{q}) \to n(\mathbf{q} + \partial\mathbf{q})$ процесса дробления вихрей (обобщённое химическое сродство де Донде для состояния $\mathbf{q}$), то возникает поток вероятности $\mathbf{J}(\mathbf{q}, t)$, величина которого в последующий момент $t > t'$ задаётся эредитарным интегральным уравнением (линейная эредитарность)

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, t) = \int_0^t \mathbf{L}(\mathbf{q}, t - t') \cdot \mathbf{A}_{\text{turb}}(\mathbf{q}, t') dt' = \int_0^t \mathbf{L}(\mathbf{q}, \tau) \cdot \mathbf{A}_{\text{turb}}(\mathbf{q}, t - \tau) d\tau \,, \tag{12}$$

[сравни с феноменологическим соотношением (7)]. Здесь ядро интегрального оператора $\mathbf{L}(\mathbf{q}, t - t')$ отражает свойство эредитарности, т.е. влияние предыстории процесса на его состояние в данный момент времени t. Мы будем рассматривать далее только положительные времена, считая, что при $t < 0$, $P_2(\mathbf{q}, t) = 0$. Заметим, что термин эредитарность (по терминологии Вито Вольтерра) эквивалентен понятиям память, последствие, наследственность, запаздывание и т.п.

Поскольку реакция подсистемы не может предшествовать во времени вызывающему ее эффекту, то для матрицы $\mathbf{L}$ мы имеем следующие условия

$$\mathbf{L}(t-t')=0 \quad \text{для} \quad t<t', \tag{13}$$

или

$$\mathbf{L}(\tau)=0 \ \text{ для } \ \tau<0. \tag{14}$$

Эти соотношения выражают принцип причинности для рассматриваемого случая. Потребуем также, чтобы постоянная конечная движущая сила вызывала конечную реакцию системы; это означает, что

$$\int_0^\infty \mathbf{L}(\mathbf{q},\tau)d\tau<\infty, \tag{15}$$

т.е. указанные интегралы должны существовать и быть конечными.

Для подсистемы турбулентного хаоса, не обладающей памятью, временная зависимость функции памяти имеет вид

$$\mathbf{L}(\mathbf{q},t-t')=\mathbf{L}(\mathbf{q})\delta(t-t') \tag{16}$$

где $\mathbf{L}(\mathbf{q})$ – матрица положительных коэффициентов, $\delta(t-t')$ – дельта- функция Дирака. Подставляя (16) в (12), получаем связь

$$\mathbf{J}(\mathbf{q},t)=\int_0^t \mathbf{L}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{A}_{\text{turb}}(\mathbf{q},t')\delta(t-t')dt'=$$

$$=\mathbf{L}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{A}_{\text{turb}}(\mathbf{q},t)=-\mathbf{L}(\mathbf{q})\cdot\frac{\partial\mu_{\text{turb}}(\mathbf{q},t)}{\partial t}, \tag{17}$$

согласно которой, в случае отсутствия памяти, поток вероятности $\mathbf{J}(\mathbf{q},t)$ в момент времени t зависит только от значения химического сродства $\mathbf{A}_{\text{turb}}(\mathbf{q},t)$ для состояния $\mathbf{q}$ вихревого континуума, взятого в тот же момент времени t.

При наличии памяти, дельта-функция в (16) размывается в колоколообразную зависимость, ширина которой определяет интервал времени T, в течение которого действие химического сродства сказывается на величине потока. Для систем с так называемой идеальной памятью имеем $T\to\infty$, т.е. поток $\mathbf{J}(\mathbf{q},t)$ формируется на всём протяжении действия сродства $\mathbf{A}_{\text{turb}}(\mathbf{q},t)$ до момента t. Формально это выражается заданием ядра интегральной связи (12) в виде

$$\mathbf{L}(\mathbf{q},t-t')=\mathbf{L}(\mathbf{q})/t. \tag{18}$$

Здесь отсутствует зависимость от момента t' действия сродства $\mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q},t)$, а зависимость функции памяти от времени измерения t потока $\mathbf{J}(\mathbf{q},t)$ взята в таком виде, чтобы удовлетворить условию нормировки

$$\int_0^t \mathbf{L}(\mathbf{q},t-t')dt' = \mathbf{L}(\mathbf{q}). \tag{19}$$

Таким образом, включение памяти приводит к модификации постоянного ядра (16) в гиперболическую зависимость (18).

Феноменологическая эредитарная связь (12), записанная во временном представлении, неудобна из-за наличия свертки (т.е. интегрирования по t'). От неё можно избавиться, используя для функций $\mathbf{J}(\mathbf{q},t)$, $\mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q},t)$ и $\mathbf{L}(\mathbf{q},t)$ интегральное преобразование Лапласа

$$\mathbf{J}(\mathbf{q},t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q},p)\exp(pt)dp, \tag{20}$$

$$\mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q},t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+\infty} \mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q},p)\exp(pt)dp, \tag{21}$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{q},t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q},p)\exp(pt)dp, \tag{22}$$

где их лаплас-образы (трансформанты Лапласа) $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q},p)$, $\mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q},t)$ и $\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q},p)$ определяются формулами

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q},p) = \int_0^\infty \mathbf{J}(\mathbf{q},t)\exp(-pt)dt, \tag{23}$$

$$\mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q},p) = \int_0^\infty \mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q},t)\exp(-pt)dt, \tag{24}$$

$$\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q},p) = \int_0^\infty \mathbf{L}(\mathbf{q},t)\exp(-pt)dt. \tag{25}$$

С учетом этих соотношений, (12) записывается в виде

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q},p) = \hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q},p)\cdot\mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q},p) . \tag{26}$$

Нетрудно видеть, что лапласовский образ ядра (16), отвечающего отсутствию памяти (эквивалент «одной точки», $t = t'$), сводится к функции, не зависящей от времени

$$\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q}, p) = \mathbf{L}(\mathbf{q}). \qquad (27)$$

При идеальной полной памяти (эквивалент «прямой линии», $0 < t' < t$) в пределе $|p|t >> 1$ из (18) легко получить $\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q}, p) = \mathbf{L}(\mathbf{q}) / pt$.

Можно поставить следующий вопрос: возможно ли существование геометрического объекта, который занимает промежуточное положение между «прямой» и «точкой»? Фрактальная геометрия отвечает на этот вопрос утвердительно, поскольку такой объект существует и является канторовым множеством или так называемой канторовой пылью. Будем далее предполагать, что память у системы сохраняется только в точках множества Кантора (в общем случае несимметричного), фрактальная размерность которого определяется формулой

$$D = \ln j / \ln(1/\xi). \qquad (28)$$

Здесь j – число блоков, участвующих в построении элементарной фигуры фрактала (для триадного множества Кантора $j = 2$); ξ – показатель самоподобия, определяющий, насколько уменьшается величина блока, на каждом шаге построения множества (для симметричного триадного канторового множества, для которого на k-ом шаге построения производится удаление срединного звена, $l_k / 3$, $\xi = 1/3$). Поскольку для канторового множества размер получающегося фрагмента не должен превышать величину исходного блока, то значение параметра подобия ограничено условием $\xi j \leq 1$, которое в свою очередь приводит к результату $D \leq 1$ (для триадной канторовой пыли, $D = \ln 2 / \ln 3$) $\cong 0.6309$. Заметим, что алгоритм построения канторова множества можно найти почти во всех книгах по теории фракталов (см., например, Кроновер, 2000)).

Итак, можно ожидать, что фрактальная размерность временного канторова множества D будет связана с мерой сохранения памяти (см., например, Олемской, Флат, 1993). Возникает вопрос: как будет выглядеть трансформант $\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q}, p)$ для памяти, действующей в точках множества Кантора? Если нахождение лапласовских образов простейших временных зависимостей (16) и (18) представляет тривиальную задачу, то для памяти, действующей в точках канторовского множества, выкладки носят более громоздкий характер. Соответствующие вычисления, проведённые Нигматуллиным (1986; 1992), приводят к следующему результату:

$$\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q},p) \propto 2^{-D/2}(1-\xi)^{-D}(pt)^{-D}. \qquad (29)$$

Таким образом, физические системы, обладающие остаточной памятью в точках из множества Кантора, описываются лапласовским образом (29), где величина показателя $0 \le D \le 1$определяет меру остаточной памяти системы. Воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа (22), для временной зависимости функции памяти находим

$$\mathbf{L}(\mathbf{q},\tau) = \mathbf{L}(\mathbf{q})\frac{1}{\Gamma(D)}\left[\sqrt{2}(1-\xi)t\right]^{-D}\tau^{D-1}, \quad \tau \equiv t - t' > 0, \qquad (30)$$

где $\Gamma(z) = \int_0^\infty \exp(-\eta)\eta^{z-1}d\eta$ – гамма-функция Эйлера, $\operatorname{Re} z > 0$. Заметим, что функция $1/\Gamma(z)$ является целой и имеет нули первого порядка в точках $z = k$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$). С математической точки зрения равенство (30) означает, что эредитарное ядро, являющееся степенной функцией, удовлетворяет условию однородности:

$$\mathbf{L}(\mathbf{q},m\tau) = m^{D-1}\mathbf{L}(\mathbf{q},\tau).$$

Свойство однородности выражения (30) как раз и отражает самоподобие фазового пространства стохастической подсистемы турбулентного хаоса. Как уже говорилось, указанным свойством обладают фрактальные объекты.

Трансформанте (29) соответствует представление потока $\mathbf{J}(\mathbf{q},t)$ в форме дробного интеграла

$$\mathbf{J}(\mathbf{q},t) = \int_0^t \mathbf{L}(\mathbf{q},\tau)\cdot\mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q},t-\tau)d\tau =$$

$$= \mathbf{L}(\mathbf{q})\cdot\left[\sqrt{2}(1-\xi)t\right]^{-D}\left(\frac{1}{\Gamma(D)}\int_0^t \tau^{D-1}\mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q},t-\tau)d\tau\right) =$$

$$= \left[\sqrt{2}(1-\xi)\right]^{-D}\mathbf{L}(\mathbf{q})\cdot D_{0t}^{-D}\left(\mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q},t)\right), \qquad (31)$$

где соотношением

$$D_{0t}^{\alpha}\left(\mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q},t)\right) \equiv \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^t \tau^{-\alpha-1}\mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q},t-\tau)d\tau = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^t \frac{\mathbf{A}_{turb}(\mathbf{q},t')}{(t-t')^{1+\alpha}}dt' =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^1 (1-u)^{-\alpha-1} \mathbf{A}_{\mathrm{turb}}(\mathbf{q}, ut) du = -\frac{1}{\alpha\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^1 \mathbf{A}_{\mathrm{turb}}(\mathbf{q}, (1-u)t) du^{-\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\alpha\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^1 \frac{\partial \mu_{\mathrm{turb}}(\mathbf{q}, (1-u)t)}{\partial \mathbf{q}} du^{-\alpha}, \qquad \alpha < 0. \qquad (32)$$

введён интеграл дробной кратности (или просто дробный интеграл) от функции $\mathbf{A}_{\mathrm{turb}}(\mathbf{q}, t)$. Здесь $u = t'/t$ – безразмерное время, ограниченное условием $u \le 1$. Дробный характер этого интеграла отражается наличием показателя $-\alpha$ в дифференциале аргумента u. Отрицательный показатель $\alpha = -D$ дробного интеграла совпадает с фрактальной размерностью множества Кантора и указывает на долю «каналов», входящих в состав некоторой ветвящейся фрактальной структуры временного кластера, открытых для эволюции физической системы (Nigmatullin, 1986).

4. Дробный интеграл и дробная производная

Приведем здесь для удобства читателя некоторые общие сведения из теории дробного интегрирования и дифференцирования (см., например, Нахушев, 2003). Пусть a, c, d и $\alpha \in [c, d]$ – действительные числа; $[\alpha]$–целая часть числа α (антье), удовлетворяющая неравенству $[\alpha] \le \alpha < [\alpha]+1$; $L[c,d]$–пространство действительных функций $\phi(t)$ с конечной нормой $\|\phi\| = \int_c^d \phi(t) dt$; $\Gamma(z)$–гамма-функция Эйлера. Тогда оператор

$$D_{at}^{\alpha}\left(\phi(t)\right) = \frac{\mathrm{sign}(t-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_a^t \frac{\phi(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha+1}} d\xi, \qquad \alpha \ne 0, 1, 2, ..., \qquad (33)$$

(здесь интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару), действующий на функцию $\phi(t)$ из области своего определения $D(D_{at}^{\alpha}) \subset L[c,d]$, называют оператором дробного интегро-дифференцирования порядка α, с началом в точке a и концом в точке t. Нижний предел интегрирования $t = a$ в (33) фиксирует момент времени t, с которого начинается отсчёт динамических явлений в среде (подобный выбор во многом носит условный характер). По определению

$$D_{at}^{0}\left(\phi(t)\right) = \phi(t); \qquad D_{at}^{n}\left(\phi(t)\right) = \partial^n \phi(t) / \partial t^n, \;\; n = 1, 2, ... \qquad (34)$$

При $\alpha < 0$ оператор D_{at}^{α} совпадает с оператором дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегрирования порядка α. При $\alpha > 0$ и определенных предположениях относительно гладкости функции $\phi(t) \in D(D_{at}^{\alpha})$ можно положить, что оператор дробного дифференцирования

$$D_{at}^{\alpha}\left(\phi(t)\right) = \mathrm{sign}^{[\alpha]+1}(t-a)\frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial t^{[\alpha]+1}} D_{at}^{\alpha-[\alpha]-1}\left(\phi(t)\right), \qquad (35)$$

или

$$D_{at}^{\alpha}\left(\phi(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(1+[\alpha]-\alpha)} \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial t^{[\alpha]+1}} \int_a^{t_\varepsilon} \frac{\phi(\xi)d\xi}{|t\text{-}\xi|^{\alpha-[\alpha]}}, \qquad (35^*)$$

где $t_\varepsilon = t + \varepsilon\,\mathrm{sign}(a-t)$.

Чтобы пояснить структуру оператора дробного интегрирования (формула (33) при $\alpha < 0$), напомним, что методом математической индукции легко доказывается формула для n-кратного интеграла вида (формула Коши)

$$\int_a^t dt_n \int_a^{t_n} dt_{n-1} ... \int_a^{t_2} \phi(t_1)dt_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t \frac{\phi(\xi)}{(t-\xi)^{1-n}} d\xi. \qquad (36)$$

Поскольку $(n-1)! = \Gamma(n)$, то правой части (36) можно придать смысл и при нецелых значениях n, т.е. замена факториала гамма-функцией Эйлера позволяет продолжить это выражение в область нецелых (и даже комплексных) показателей n и получить тем самым правую часть выражения (33). Для любой функции $\phi(t) \in L[c,d])$ справедлив закон композиции операторов дробного интегрирования с одинаковыми началами

$$D_{at}^{\alpha}\left(D_{at}^{-\beta}\left(\phi\right)\right) = D_{at}^{\alpha-\beta}\left(\phi\right), \qquad \forall \alpha < 0. \qquad (37)$$

В определенном смысле операции дробного дифференцирования и интегрирования являются взаимно обратными,

$$D_{at}^{\alpha}\left(D_{at}^{-\alpha}\left(\phi(t)\right)\right) = D_{at}^{0}\left(\phi(t)\right) = \phi(t).$$

Заметим теперь, что применение дифференциального оператора $\partial/\partial t$ к интегралу (35) понижает его кратность на единицу, применение его n раз даёт подынтегральную функцию $\phi(t)$, а $m > n$ раз – её $(m-n)$-производную $\partial^{(m-n)}\phi(t)/\partial t^{(m-n)}$. Распространяя это правило и на дробный интеграл (т.е. просто заменив n на $\alpha > 0$), получаем выражение.

$$\frac{\partial^{(m-\alpha)}}{\partial t^{(m-\alpha)}}\phi(t)\equiv D_{at}^{m-\alpha}\left(\phi(t)\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\partial^m}{\partial t^m}\int_a^t\frac{\phi(\xi)}{(t-\xi)^{1-\alpha}}d\xi,\quad (m=1,2,3...),\qquad(38)$$

представляющее собой дробную производную Римана−Лиувилля порядка $m-\alpha$. Чтобы интеграл сходился на верхнем пределе, ограничим значение α интервалом $0<\alpha\le 1$. В частном случае $m=1$ формула (35) переходит в

$$D_{at}^{1-\alpha}\left(\phi(t)\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_a^t\frac{\phi(\xi)}{(t-\xi)^{1-\alpha}}d\xi\qquad(38^*)$$

в силу известного тождества Абеля дробная производная (38^*) переходит в обычную «целую» производную $\partial\phi/\partial t$ при $\alpha\to 0$.

Дробные производные (35) сохраняют ряд свойств обычных производных: в частности, они являются левыми обратными операциями по отношению к дробному интегрированию (33), обладают свойствами линейности и α-однородности

$$D_{at}^{\alpha}\left(D_{at}^{-\alpha}\phi(t)\right)=\phi(t),\qquad(39)$$

$$D_{at}^{\alpha}\left(c_1\phi_1(t)+c_2\phi_2(t)\right)=c_1D_{at}^{\alpha}\left(\phi_1(t)\right)+c_2D_{at}^{\alpha}\left(\phi_2(t)\right),\qquad(40)$$

$$D_{at}^{\alpha}\left(\phi(kt+l)\right)=k^{-\alpha}D_{ak+l,t}^{\alpha}\left(\phi(t)\right),\quad (k>0).\qquad(41)$$

В то же время у них появляются специфические свойства, например, зависимость от предела «a» (нелокальность). Приведём в качестве иллюстрации несколько примеров дробных производных Римана−Лиувилля от простых функций

$$D_{at}^{\alpha}\left((t-a)^{\lambda}\right)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-\nu)}(t-a)^{\lambda-\alpha},\quad D_{at}^{\alpha}\left(t^{\lambda}\right)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\nu+1)}t^{\lambda-\alpha}$$

$$D_{at}^{\alpha}(C)=\frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\nu)},\qquad D_{0t}^{\alpha}(\exp(at))=\frac{\exp(at)\gamma(\alpha,at)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Из этих соотношений видно, что формула дифференцирования степенной функции остается той же самой, только целое n заменяется дробным α, дробная производная порядка α от постоянной C не равна нулю.

Теоретическим и прикладным аспектам дифференцирования и интегрирования произвольного порядка посвящена работа (Oldham, Spanier, 1974). В ней анализируются алгоритмы численного дробного дифференцирования. В частности, считается возможной следующая приближенная формула:

$$D_{at}^{\alpha}\left(\phi(t)\right) \approx \frac{t^{-\alpha} n^{\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{k!} \phi_k(t), \quad t > 0, \tag{42}$$

где

$$\phi_n(t) = \phi(0), \quad \phi_{n-1}(t) = \phi(t/n),$$

$$\phi_k(t) = \phi_n(t - kt/n), \ldots, \ \phi_0(t) = \phi(t).$$

Если $0 < \alpha < 1$, то можно воспользоваться следующим приближённым равенством

$$D_{at}^{\alpha}\left(\phi(t)\right) \approx \frac{t^{-\alpha} n^{\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left\{ \frac{(1-\alpha)\phi_n(t)}{n^{\alpha}} + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\phi_k(t) - \phi_{k+1}(t)\right]\left[(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}\right] \right\}. \tag{43}$$

Итак, производная дробного порядка – это нелокальная характеристика функции $\phi(t)$, поскольку она зависит не только от её значений в окрестности рассматриваемой точки (как это имеет место в случае целочисленной производной), но и от принимаемых ею значений на всем интервале $(a,0)$. Алгоритмам аппроксимации дробной производной и разностным методам решения разных уравнений переноса посвящены работы (Шхануков, 1996; Шхануков-Лафишев, Нахушева, 1998). Различные аспекты, связанные с применением уравнений в дробных производных, рассмотрены в работах (Самко и др., 1987; Нахушев, 2003) и др.

5. Уравнение ФПК для описания эволюционных процессов во фрактальном времени

Обратимся теперь к пространственно-однородному уравнению неразрывности (23) (в пространстве внутренних координат $\mathbf{q}$)

$$\frac{\partial P_2(\mathbf{q},t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{q},t)}{\partial \mathbf{q}} = 0 \tag{44}$$

в котором выражение (31) для потока вероятности $\mathbf{J}(\mathbf{q},t)$ может быть записано, с учетом формул (9) и (10), в виде

$$\mathbf{J} = -A_{\xi}\, D_{0t}^{-D} \left(\mathbf{L}(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial \mu_{turb}(\mathbf{q},t)}{\partial \mathbf{q}} \right) =$$

$$=-A_\xi D_{0t}^{-D}\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\mathbf{Q}(\mathbf{q})\frac{\partial P_2(\mathbf{q},t)}{\partial \mathbf{q}}-\mathbf{K}(\mathbf{q})P_2(\mathbf{q},t)\right). \qquad (45)$$

где $A_\xi \equiv \left[\sqrt{2}(1-\xi)\right]^{-D}$. Наличие в правой части этого уравнения дробного интеграла по времени отражает влияния памяти процесса на распределение плотности вероятности $P_2(\mathbf{q},t)$: плотность потока вероятности $\mathbf{J}(\mathbf{q},t)$в данный момент времени t определяется не локальным градиентом плотности в то же самый момент t, а её эволюцией в течение всего предшествующего периода $0<t'<t$ диффузии. Заметим, что случай пустого множества Кантора ($\xi \to 0$, $D \to 0$) соответствует линейной комбинации двух дельта-функций половинной интенсивности, локализованных на концах выбранного интервала $[0,t]$, т.е. имеет место процесс с полным отсутствием памяти (марковский процесс). С увеличением параметра подобия ξ показатель в формуле (28) возрастает, и трансформант Лапласа для функции памяти становится всё более быстро изменяющейся функцией. Предельное значение для параметра подобия равно $\xi = 1/j$; в этом случае из формулы (28) следует, что хаусдорфова размерность канторова множества равна $D=1$. При этом, на основании (32), величина $\mathbf{J}(\mathbf{q},t)$ связана с $\partial\mu_{turb}(\mathbf{q},t)/\partial\mathbf{q}$ через полный интеграл, что отвечает случаю идеальной памяти. Анализ интегро-дифференциального уравнения (44), имеющего дробный порядок, представляет весьма трудную задачу.

Для перехода к дробно-дифференциальному уравнению применим к обеим частям уравнения (44) дифференциальный оператор D_{0t}^{D} с показателем $D \in (0,1]$; в результате получим следующее уравнение в частных производных дробного порядка

$$\frac{\partial^\omega P_2(\mathbf{q},t)}{\partial t^\omega}+A_\xi\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{K}(\mathbf{q})P_2(\mathbf{q},t)-\frac{\varepsilon^2}{2}\mathbf{Q}(\mathbf{q})\frac{\partial P_2(\mathbf{q},t)}{\partial \mathbf{q}}\right)=0, \qquad (46)$$

где параметр ω связан с фрактальной размерностью активного времени, $\omega \equiv 1-D$. Это уравнение можно назвать уравнением аномальной диффузии в пространстве внутренних координат подсистемы турбулентного хаоса. Уравнение (46) принимает обычный диффузионный вид (1) при $\omega=1$ ($D=0$). Введение дробной производной $\partial^\omega/\partial t^\omega$ в кинетическое уравнение (46) позволяет учесть временной элемент «странных» кинетических процессов в хаотической фрактальной вихревой подсистеме (случайные блуждания подсистемы во фрактальном времени (СБФВ)), которые проявляются как эффекты памяти в турбулентной жидкой среде. Моделирование при $0 \le D < 1$ эволюции турбулентного хаоса на основании уравнения (46) вскрывает ещё одно свойство турбулентности – наличие турбулентных вспышек (всплесков пульсаций), связанных с временной перемежаемостью (см. Бойко и др. 2006). В каком бы масштабе мы не наблюдали распределение точек на временной оси, оно выглядит прерывистым. Области сгущения чередуются (перемежаются) с пустотами. Среднее число точек на интервале $(0, t)$ растет пропорционально t^D, т.е. здесь мы имеем дело со стохастическим фракталом (см. Кроновер, 2000) с фрактальной размерностью D.

Заметим, что в общем случае в зависимости от конкретного значения параметра ω различают супердиффузионные или персистентные $(1 < \omega \le 2)$ и субдиффузионные или антиперсистентные $(0 \le \omega < 1)$ процессы. В случае субдиффузионного процесса активное время представляет собой канторово множество, содержащее разрывы в каждой точке луча времени t. Разрывы соответствуют тем интервалам времени, в которые система в очередной раз между последовательными смещениями вихревых частиц в конфигурационном пространстве выключает память, т.е. наблюдается более медленное течение активного времени (по сравнению с реальным временем t), при котором соответствующие динамические явления протекают в замедленном ритме. В отличие от нормальной диффузии, ширина диффузионного пакета в случае субдиффузии растёт со временем по закону $t^{D/2}$, где $0 \le D < 1$. Таким образом, нормальная форма диффузионного пакета в этом случае не сохраняется и для её исследования необходима дополнительная информация о временной эволюции диффузионного процесса (см. Олемской,1998; Учайкин, 2003). Эта информация может быть извлечена из конкретной физической ситуации, либо привнесена в виде некоторого принципа, в качестве которого может быть выбран принцип автомодельности (самоподобия), когда плотность распределения $P_2(q, t)$ выражается соотношением $P_2(q, t) = t^{-D/2} P_2(qt^{-D/2}, 1)$, где D не обязательно 1.

6. Заключение

В заключение суммируем полученные результаты. Работа посвящена разработке феноменологической модели развитой турбулентности в сжимаемой однородной среде с учетом происходящих в ней нелинейных кооперативных процессов. Исходной концепцией служит представление турбулентного движения жидкости в виде термодинамического комплекса, состоящего из двух континуумов – подсистемы осредненного движения и подсистемы турбулентного хаоса, рассматриваемого, в свою очередь, как конгломерат вихревых структур различных пространственно-временных масштабов. Развиваемый стохастико-термодинамический подход к моделированию подсистемы турбулентного хаоса основан на введении в модель набора случайных величин – пульсирующих внутренних координат (типа скорости диссипации турбулентной энергии), характеризующих структуру и временную эволюцию пульсирующего поля гидродинамических параметров течения. Это даёт возможность термодинамическими методами вывести кинетические уравнения ФПК, предназначенные для описания эволюции функции распределения вероятности мелкомасштабных характеристик турбулентности. Эти уравнения служат, в частности, основой при анализе марковских диффузионных процессов перехода в пространстве внутренних координат из одного стационарно-неравновесного состояния в другое в результате последовательной потери устойчивости (росте надкритичности) подсистемой турбулентного хаоса, далёкого от полного хаоса термодинамического равновесия.

В работе предложен также термодинамический вывод обобщённых уравнений ФПК с дробными производными, описывающих немарковские процессы эволюции внутренних координат подсистемы турбулентного хаоса на основе дробной динамики. Введение дробных производных по времени в кинетическое уравнение ФПК позволяет учесть в контексте единого математического формализма эффекты перемежаемости во времени, с которой обычно связывают наличие турбулентных всплесков на фоне менее интенсивных низкочастотных колебаний фоновой турбулентности. Данное исследование нацелено, в частности, на создание репрезентативных моделей космических и природных сред. Оно является развитием синергетического подхода к моделированию структурированной турбулентности астро- и геофизических систем, развиваемого автором в серии работ (см. Колесниченко, 2002-2005;2013).

Список литературы

Бойко А.В., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В. Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях. М.- Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований. 2006. 304 с.

Заславский Г.М. Физика хаоса в гамильтоновых системах. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2004. 288 с.

Кадомцев Б.Б., Рязанов А.И. Что такое синергетика?// Природа. 1983. № 8. С. 2-11.

Кайзер Дж. Статистическая термодинамика неравновесных процессов. М.: Мир, 1990. 607 с.

Климонтович Ю. Л. Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Наука. 1990. 284 с.

Климонтович. Ю.Л. Введение в физику открытых систем. М.: Изд-во «Янус-К». 2002. 284 с.

Колесниченко А.В. Соотношения Стефана-Максвелла и поток тепла для турбулентных многокомпонентных сплошных сред// В сб. «Проблемы современной механики. К юбилею акад.Л.И. Седова» (под ред. акад. Григоряна С.С.) М.: МГУ. 1998. С. 52-74.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность многокомпонентных сред. М.: Наука. 1999. 385 с.

Колесниченко А.В. Синергетический подход к описанию развитой турбулентности// Астрон. вестн. 2002. Т.36. № 2. С.121-139.

Колесниченко А.В. Синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности астрогеофизических систем// В сб. «Современные проблемы механики и физики космоса». М.: Физматлит, 2003. С. 123-162.

Колесниченко А.В. Термодинамическое моделирование развитой структурной турбулентности при учёте флуктуаций диссипации энергии//Астрон. вестн. 2004a. Т.38. № 2. С. 144-170.

*Колесниченко А.В.*О синергетическом механизме возникновения когерентных структур в континуальной теории развитой турбулентности//Астроном. вестн. 2004b. Т. 38. №. 5. С. 405-427.

Колесниченко А.В. О возможности синергетического рождения мезомасштабных когерентных структур в макроскопической теории развитой турбулентности//Математ. модел. 2005a. Т. 17. № 10. С.47-79.

Колесниченко А.В. О роли индуцированных шумом неравновесных фазовых переходов в структурировании гидродинамической турбулентности//Астроном. вестн. 2005b. Т. 39. №. 3. С.243-262.

Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса//Доклады АН СССР. 1941. Т. 30. С. 299-303.

Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет. 2000. 352 с.

Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т.2. С-Пб: Гидрометеоиздат, 1996. 742 с.

Мюнстер А. Химическая термодинамика. М.: Едиториал УРСС. 2002. 295 с.

Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит. 2003. 272 с.

Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация//Теор. и мат. физика. 1992. Т. 90. № 3. С. 354-368.

Олемской А.И. Флат А.Я. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды// УФН. 1993. Т. 163. № 12. С. 1-50.

Олемской А.И. Теория стохастических систем с сингулярным мультипликативным шумом// УФН. 1998. Т. 168. № 3. С. 287-321.

Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов. М.: Ин. Лит. 1960. 160 с.

Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. М.: Прогресс, 1986. 310 с.

Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. М.: Издательская группа «Прогресс», 1994. 240 с.

Самко С.Г., Килбас А,А., Маричев О.И. Интегралы и и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.

Шхануков М.Х. О сходимости разностных схем для дифференциальных уравнений с дробной производной// ДАН. 1996. Т. 348. № 6. С. 746-748.

Шхануков-Лафишев М.Х., Нахушева Ф.М. Краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка и сеточные методы их решения// В сб.: «Неклассические уравнения математической физики». Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН. 1998. С. 37-44.

Учайкин В.В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы//УФН. 2003. Т. 173. № 8. С. 847-876.

Blackadar A.K. Extension of the laws of thermodynamics to turbulent system//J. Meteorology. 1955. V. 12. P. 165-175.

Mandelbrot D.D.,van Ness J.W. Fractinal Brownian Motions, Fractional Noises and Applications// SIAM Review. 1987.V. 10. № 4. P. 422-437.

Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Mechanics of turbulence of multicomponent gases. Dordrecht, Boston, London.: Kluwer Academic Publishers. 2001. 375 p.

Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Turbulence and Self-Organization. Modeling Astrophysical Objects. Springer. 2013. 657 p.

Nigmatullin R.R. The realization of generalized transfer equation in a medium with fractal geometry// Phys. Status Solidi. B. 1986. V.133. P.425-430.

Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus (Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order). N.-Y.;London.: Acad. Press. 1974. 233 p.

Оглавление