ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 71 за 2014 г.

Колесниченко А.В.

Конструирование эволюционных моделей замыкания второго порядка для турбулентных потоков на основе расширенной необратимой термодинамики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Конструирование эволюционных моделей замыкания второго порядка для турбулентных потоков на основе расширенной необратимой термодинамики // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 71. 32 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-71

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

Конструирование эволюционных моделей замыкания второго порядка для турбулентных потоков на основе расширенной необратимой термодинамики

Москва — 2014

Колесниченко А.В.

Конструирование эволюционных моделей замыкания второго порядка для турбулентных потоков на основе расширенной необратимой термодинамики.

Рассматривается современный подход к термодинамическому моделированию развитых турбулентных течений сжимаемой жидкости, базирующийся на применении формализма расширенной необратимой термодинамики, выходящей за пределы гипотезы о локальном равновесии за счёт ввода в число базисных параметров состояния новых независимых переменных − диссипативных потоков, а также модификации таких концептуальных понятий, как энтропия, температура, давление или химический потенциал. Описание турбулентного движения жидкости в рамках модели двухжидкостного континуума, состоящего из двух взаимосвязанных открытых подсистем − подсистемы осреднённого движения, которая получается в результате средневзвешенного осреднения гидродинамических уравнений для мгновенных движений одножидкостной среды и подсистемы турбулентного хаоса (связанной с пульсационным движением жидкости), позволяет в рамках указанного формализма сконструировать новые модели замыкания второго порядка, основанные на дифференциальных причинно-следственных уравнениях переноса для турбулентных потоков.

Ключевые слова: расширенная необратимая термодинамика, развитая турбулентность, модели замыкания второго порядка.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

Construction of evolutionary models of closure of second order for turbulent flows on the basis of expanded irreversible thermodynamics.

Considered a modern approach to the thermodynamic modeling of developed turbulent flow of a compressible fluid, based on the application of the formalism of extended irreversible thermodynamics that goes beyond the hypothesis of local equilibrium due to the commissioning of the number of basic parameters of the state of new independent variables − dissipative fluxes, as well as the modification of such conceptual notions as entropy, temperature, pressure or chemical potential. Description of the turbulent motion of the fluid in frameworks the two-fluid continuum model consisting of two interconnected open subsystems − the subsystem of average motion, which is obtained by the weighted average averaging of hydrodynamic equations for the instantaneous movement of fluid medium and the subsystem of turbulent chaos (coupled to pulsation motion of the fluid), allows the framework of this formalism to construct a new model of second order closure based on causal differential transport equations for turbulent flows.

Key words: extended irreversible thermodynamics, developed turbulence, second order closure model.

1. Введение

Проблема замыкания является одной из фундаментальных в феноменологической теории турбулентности. Оценивая в целом её состояние, следует признать, что в настоящее время фактически всё ещё не разработан универсальный подход к выводу замыкающих соотношений, предназначенных для описания широкого класса течений в турбулентной жидкости. Простые полуэмпирические схемы замыкания первого порядка, основанные на использовании градиентной гипотезы Буссинеска для вторых корреляционных моментов пульсирующих гидродинамических величин, не обладают достаточной общностью. При их применении предполагается, что неизвестные турбулентные потоки массы, количества движения и энергии линейно связаны с градиентами осреднённых гидродинамических параметров среды через некоторые локальные коэффициенты пропорциональности, так называемые коэффициенты турбулентного переноса. Однако подобные градиентные соотношения оказываются полностью неприменимыми в общем случае «неравновесной» по отношению к полю средних скоростей турбулентности, когда существенно влияние предыстории процесса турбулизации на локальные характеристики течения (см., например, Хинце, 1963; Монин, Яглом, 1992). Для подобного рода случаев коэффициенты турбулентного переноса вообще невозможно ввести адекватным способом (см. Иевлев, 1990).

В последние годы считается, что те практические задачи, которые не могут быть адекватно решены в рамках моделей замыкания первого порядка, могут быть успешно решены с помощью дифференциальных моделей более высоких порядков замыкания, поскольку в них ряд механизмов, ответственных за генерацию соответствующих корреляционных моментов, учитывается точно (см., например, сб. «Турбулентность: Принципы и применения»,1980). Однако и эти модели (например, модель второго порядка замыкания RSTM-l рейнольдсовых напряжений с масштабом (Reynolds Stress Turbulence Model-scale)), имеющие, по мнению ряда авторов, оптимальный уровень сложности, часто сталкиваются с принципиальными трудностями. Это обстоятельство связано с тем, что, например, в модельные уравнения переноса для вторых корреляционных моментов, входят неизвестные третьи корреляционные моменты, в уравнения для третьих моментов входят четвертые моменты, которые также неизвестны, и т.д. Обрыв подобного рода бесконечной цепочки уравнений переноса, так называемой «цепочки Фридмана–Келлера» (см. Keller, Friedman, 1924), возможен лишь на пути постулирования новой гипотезы замыкания, с помощью которой иерархия уравнений и неизвестных обрывается введением в рассмотрение аппроксимирующих связей между моментами высших порядков и моментами низших порядков. Роль такого рода связей могут выполнять, в частности, те же градиентные соотношения (но уже для моментов высоких порядков), содержащие различные эмпирические константы. Важно, однако, иметь в виду, что при наличии такой формы аппроксимирующих соотношений для статистических корреляционных моментов высоких порядков явно или неявно предполагается (как и в случае моделей турбулентности первого приближения) существование некоторого внутреннего равновесия в структуре турбулентности (хотя полного равновесия с полем осреднённых скоростей может и не быть) при рассматриваемых условиях[1)], что, естественно, приводит к снижению общности подобного подхода. Таким образом, известные в литературе методы инвариантного моделирования, основанные на дифференциальных уравнениях переноса для моментов высоких порядков (в основе вывода которых лежит так называемый «принцип локального подобия» (см. Иевлев, 1975, 1990)), далеко не всегда обеспечивают точные результаты расчётов широкого класса турбулентных течений.

Именно по этой причине возникает необходимость рассмотрения и других универсальных подходов к проблеме замыкания осреднённых гидродинамических уравнений, в частности, с использованием методов классической неравновесной термодинамики (КНТ). Используемый в монографии (Колесниченко, Маров, 2009) онзагеровский формализм КНТ позволил получить наиболее общую структуру замыкающих градиентных соотношений для различных турбулентных потоков в многокомпонентной химически активной среде. К сожалению, любая термодинамическая теория не даёт какой-либо информации о коэффициентах турбулентного переноса. По этой причине для определения этих коэффициентов приходится либо использовать эмпирические данные, либо опираться на различные алгебраические модели замыкания для определения моментов второго порядка (например, модель турбулентности ASTM-l Algebraic Stress Turbulence Model-scale), когда в уравнениях соответствующей дифференциальной модели отбрасываются члены с конвективным переносом и диффузией турбулентности. Тем не менее, законы классической неравновесной термодинамики, играющие первостепенную роль при моделировании новых феноменологических моделей в области механики (см. Седов, 1973), могут быть использованы для установления самого общего вида определяющих (за-

[1)] Следует отметить, что время установления «внутреннего равновесия» обычно меньше, чем необходимое время для того, чтобы общая интенсивность турбулентности достигла уровня, соответствующего равенству производства и диссипации турбулентной энергии, поэтому «внутреннее равновесие» часто существует (Иевлев, 1990).

мыкающих) соотношений для различных (в частности, многокомпонентных, многофазных, химически активных, электропроводящих и т.п.) турбулентных сред, отражая их специфические свойства (см. Колесниченко, 1980,1998, 2002, 2003, 2004, 2014; Колесниченко, Маров, 1999, 2009).

В связи с применением метода Онзагера−Казимира КНТ для вывода замыкающих соотношений в турбулентности важно ещё раз подчеркнуть следующее: фундаментальным предположением, на котором основан этот формализм, является предположение о локальном равновесии, при котором, например, энтропия вне состояния равновесия зависит от тех же независимых переменных состояния, которые определены для состояния локального термодинамического равновесия. Именно по этой причине градиентные соотношения в теории турбулентности (выведенные нами в результате последовательного применения формализма КНТ) не решают проблемы замыкания в тех важных для практических приложений случаях, когда существенно воздействие на пространственно-временное распределение осреднённых параметров состояния турбулизованной среды механизмов конвекции, диффузии, возникновения, перераспределения и диссипации стохастических характеристик поля пульсирующих гидродинамических параметров. Таким образом, в общем далёком от равновесия случае существуют, по-видимому, дополнительные скрытые переменные состояния (не фигурирующие в традиционном описании системы в состоянии «локального равновесия»), которые влияют на вид замыкающих соотношений, описывающих такого рода неравновесные ситуации.

Современная термодинамика включает в себя несколько относительно новых направлений, таких как: классическая неравновесная термодинамика (КНТ) (см., например, де Гроот, Мазур, 1964); термодинамическая теория с внутренними переменными (см. Пригожин, Кондепуди, 2002); рациональная термодинамика (Truesdell,1984), основанная на кинетической теории газов теория, включающая флуктуации (Кайзер,1990); теория нелинейных динамических систем (см. Анищенко и др. 2003) и некоторые другие. Все эти научные направления опираются на общую идею, согласно которой модели механики сплошной среды и сопряжённые им термодинамики разрабатываются параллельно и в близком соотнесении между собой. При этом термодинамические теории основаны на «принципе локального подобия» и отличаются одна от другой только выбранными независимыми переменными, определением энтропии (и потока энтропии), интерпретацией второго закона и т.п. Вместе с тем, в последние годы были выполнены интенсивные исследования в области так называемой расширенной необратимой термодинамики (РНТ), выходящей за пределы гипотезы о локальном равновесии за счёт расширения числа базисных независимых переменных при рассмотрении неравновесных состояний системы, а также за счёт модификации таких концептуальных понятий, как энтропия, температура, давление или химический потенциал (см. Keizer, 1983; Nettleton, Sobolev, 1995; Müller, Ruggeri 1998; Jou и др. 2005; Жоу и др., 2006; Lebon и др.,1992, 1995, 2008). Эта теория вводит в рассмотрение в качестве дополнительных независимых переменных диссипативные термодинамические потоки, фигурирующие в уравнениях баланса массы, импульса и энергии. К ним, в частности, относятся: тензор напряжений (минус его гидростатическая часть), тепловой поток (полный поток энергии минус потоки, связанные с адвекцией и механической энергией) и т.п. Использование в качестве независимых переменных диссипативных термодинамических потоков позволяет получить при исследовании высокочастотных явлений (к которым относится и гидродинамическая турбулентность) удовлетворительные, с практической точки зрения, результаты, которые не могут быть получены при использовании КНТ. В частности, в случае проблемы теплопереноса в недеформированном теле, когда энтропия системы зависит не только от классической переменной – удельной внутренней энергии e, − но также от теплового потока $\mathbf{q}$, формализм РНТ позволяет получить известное гиперболическое уравнение Максвелла−Каттанео

$$\tau \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -(\mathbf{q} + \nabla T),$$

обобщающее приближённый закон Фурье для теплопроводности на случай учёта большого времени релаксации τ теплового потока (например, в растворах полимеров, в процессах сверхтекучести и сверхпроводимости) или на случай высокочастотных (скоротечных) процессов теплопередачи при импульсах с крутым фронтом (например, при распространении ударной взрывной волны, при распространении тепла при низких температурах и т.п.). Заметим, что несовместимый с предположением о локальном состоянии равновесия закон Максвелла−Каттанео показал свою адекватность при описании результатов множества термодинамических экспериментов с тепловыми волнами.

Таким образом, формализм РНТ позволяет разработать методику получения как определяющих материальных уравнений для классических переменных, задаваемых обычными законами баланса, так и для нахождения соответствующих эволюционных уравнений (совместимых со вторым законом термодинамики) для диссипативных потоков, описывающих реакцию системы на воздействие высокочастотных (коротковолновых) возмущений – путём введения функций памяти и обобщённых коэффициентов переноса, зависящих от частоты и волнового вектора. В связи с этим отметим, что одной из побудительных причин для разработки расширенной необратимой термодинамики было разрешение следующего кардинального вопроса: вызывает ли возникшее возмущение мгновенный отклик во всех точках рассматриваемой системы? Формализм РНТ предназначен как раз для описания явлений с относительно длительным временем релаксации и большой длиной корреляций, а также высокочастотных и коротковолновых явлений (см. Casas-Vazquez, Jou, 2003). Он позволяет распространить область применения неравновесной термодинамики на случаи исследования эредитарных явлений, а также нелокальных и нелинейных эффектов. Наиболее полный список технологических применений РНТ, а также её приложений к различным областям физики был приведён в монографии (Jou и др., 2001). Турбулентный перенос в этом списке отсутствовал. В более новой монографии этих же авторов (см. Lebon и др., 2008) приведён перечень важных проблем, которые нуждаются в рассмотрении методами РНТ. Среди них и проблема моделирования развитой турбулентности, которая, по мысли авторов, всё ещё является стимулирующей задачей.

Цель данной работы как раз и состоит в том, чтобы, используя формализм расширенной необратимой термодинамики, попытаться сконструировать новую термодинамическую модель турбулентности сжимаемой теплопроводной жидкости, основанную на причинно-следственных уравнениях переноса для одноточечных корреляционных моментов второго порядка (турбулентных потоков импульса и тепла), которые замыкают систему осреднённых гидродинамических уравнений турбулентной одножидкостной среды с переменной плотностью и переменными теплофизическими свойствами. При таком подходе среди определяющих соотношений могут быть как связи между равновесными параметрами состояния (различные уравнения состояния турбулизованной среды), так и соотношения между параметрами, описывающими процесс – кинетические конститутивные соотношения, например, эволюционные уравнения, связывающие между собой тензор рейнольдсовых напряжений и тензор скоростей деформации в турбулизованной жидкости с поперечным сдвигом скорости. Использование подобного рода замыкающих дифференциальных уравнений позволяет получить замкнутую систему уравнений, описывающих турбулизованную среду, а в совокупности с граничными и начальными условиями решать конкретные гидродинамические задачи в рамках полученной модели.

2. Вывод методами КНТ замыкающих градиентных соотношений для турбулентных потоков

Для большей наглядности используемого далее современного термодинамического подхода к конструированию в соответствии со вторым законом термодинамики эволюционных моделей замыкания второго порядка для турбулентных потоков, основанного на применении методов РНТ, мы сначала кратко повторим вывод градиентных замыкающих соотношений для этих потоков методом Онзагера-Казимира в рамках КНТ, полученный в работе (Колесниченко, 1998). Чтобы не перегружать изложение общих термодинамических принципов построения замкнутой модели турбулентности чрезмерно громоздкими и утомительными математическими выкладками, ограничимся в этой статье разбором простейшего случая развитой изотропной турбулентности в сжимаемой однокомпонентной жидкости.

Наряду с традиционным теоретико-вероятностным осреднением пульсирующих термогидродинамических параметров, будем далее использовать весовое (средневзвешенное) осреднение Фавра (Favre, 1969), позволяющее в значительной степени упростить запись и анализ осреднённых уравнений движения с переменными теплофизическими свойствами. Ниже для обозначения осреднённых параметров задачи будем употреблять два символа: черта сверху означает традиционное теоретико-вероятностное осреднение какой-либо пульсирующей величины $\mathcal{A}(\mathbf{r},t)$ по ансамблю возможных реализаций (времени и/или пространству), в то время как угловые скобки означают весовое осреднение Фавра, задаваемое соотношением $\langle\mathcal{A}\rangle \equiv \overline{\rho\mathcal{A}}/\overline{\rho}$ (здесь $\mathcal{A}=\overline{\mathcal{A}}+\mathcal{A}'=\langle\mathcal{A}\rangle+\mathcal{A}''$; $\mathcal{A}',\mathcal{A}''$ – соответствующие турбулентные пульсации, $\overline{\mathcal{A}'}=0$, $\overline{\rho\mathcal{A}''}=0$). Применяемые в данной статье свойства весового осреднения Фавра можно найти в монографиях (Ван Мигем, 1977; Колесниченко, Маров, 1999).

2.1. Осреднённые гидродинамические уравнения

Осреднённые гидродинамические уравнения, предназначенные для описания крупномасштабных турбулентных течений вязкой теплопроводной жидкости могут быть получены в рамках континуальной модели турбулизованной среды путём осреднения по ансамблю возможных реализаций пульсирующего поля параметров состояния общих законов сохранения массы, количества движения и энергии, записанных в дифференциальной форме. Эти уравнения, при использовании средневзвешенного осреднения Фавра, имеют вид (Колесниченко, 1998):

$$\bar{\rho}\frac{d\langle v\rangle}{dt} = \nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle, \quad (\langle v\rangle = 1/\bar{\rho}), \tag{1}$$

$$\bar{\rho}\frac{d\langle\mathbf{u}\rangle}{dt} = -\nabla\bar{p} + \nabla\cdot\left(\bar{\mathbf{\Pi}} + \mathbf{R}\right) + \bar{\rho}\mathbf{F}, \tag{2}$$

$$\bar{\rho}\frac{d\langle e\rangle}{dt} = -\nabla\cdot\left(\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^{turb}\right) - \bar{p}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle + \overset{\circ}{\bar{\mathbf{\Pi}}}\cdot\cdot\overset{\circ}{\mathbf{D}} - \overline{\mathbf{u}''\cdot\nabla p'} + \mathbf{J}_v^{turb}\cdot\nabla\bar{p} + \bar{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle, \tag{3}$$

$$\bar{p} = \bar{\rho}\mathcal{R}\langle T\rangle. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{u}, p, v, e$ – соответственно мгновенные значения скорости, давления, удельного объёма ($v = 1/\rho$) и удельной внутренней энергии жидкой частицы; $\mathbf{\Pi}$, $\mathbf{q}$ – молекулярный тензор вязких напряжений и молекулярный поток тепла; $d(..)/dt \equiv \partial(..)/\partial t + \langle\mathbf{u}\rangle\cdot\nabla(..)$ – полная производная по времени относительно осреднённого поля скоростей; $\mathbf{F}$ – внешняя сила, действующая на единицу массы; $\langle\mathbf{u}\rangle \equiv \overline{\rho\mathbf{u}}/\bar{\rho}$ – осреднённая по Фавру гидродинамическая скорость среды; $\mathbf{R} \equiv -\bar{\rho}\langle\mathbf{u}''\mathbf{u}''\rangle$ – тензор рейнольдсовых напряжений; $\mathbf{J}_v^{turb} \equiv \bar{\rho}\langle v''\mathbf{u}''\rangle = -\overline{\rho'\mathbf{u}''}/\bar{\rho}$, $\mathbf{q}^{turb} \equiv \overline{\rho(e + p/\rho)''\mathbf{u}''}$ – соответственно турбулентные потоки удельного объёма и тепла; $\mathcal{R}$ – газовая постоянная; $\langle\varepsilon_b\rangle = \overline{\mathbf{\Pi}\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}''}/\bar{\rho}$ – средневзвешенное значение удельной скорости диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло под влиянием молекулярной вязкости; $\bar{\mathbf{\Pi}}$, $\mathbf{D} \equiv (\nabla\langle\mathbf{u}\rangle)^s = \frac{1}{2}\left[\nabla\langle\mathbf{u}\rangle + (\nabla\langle\mathbf{u}\rangle)^T\right]$, $\overset{\circ}{\bar{\mathbf{\Pi}}}$, $\overset{\circ}{\mathbf{D}}$ – соответственно осреднённый тензор вязких напряжений, тензор скоростей деформации для осреднённого континуума и их части с нулевым следом, определяемые соотношениями:

$$\overset{\circ}{\mathbf{D}} \equiv \mathbf{D} - \tfrac{1}{3}(\mathbf{D}\cdot\cdot\mathbf{U})\mathbf{U} = \mathbf{D} - \tfrac{1}{3}(\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle)\mathbf{U}, \quad \overset{\circ}{\bar{\mathbf{\Pi}}} \equiv \bar{\mathbf{\Pi}} - \tfrac{1}{3}(\bar{\mathbf{\Pi}}\cdot\cdot\mathbf{U})\mathbf{U} = \bar{\mathbf{\Pi}} - \pi\mathbf{U}, \tag{5}$$

где $\pi \equiv \frac{1}{3}\bar{\mathbf{\Pi}}\cdot\cdot\mathbf{U}$ – объёмное вязкое давление; ∇ – оператор Гамильтона; $\mathbf{U}$ – единичный тензор; символы $\mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{B}$ и $\mathbf{AB}$ означают соответственно внутреннее произведение двух тензоров и внешнее произведение двух векторов (диада);

символ $\nabla \cdot \mathbf{A}$ означает обобщённую дивергенцию, поскольку $\mathbf{A}$ не всегда является вектором. Следует отметить, что в рамках полной макроскопической модели турбулентности система (1)-(4) описывает крупномасштабную структуру турбулентного поля.

Для дальнейших целей нам понадобится также уравнение баланса для турбулентной энергии $\langle b \rangle \equiv \overline{\rho |\mathbf{u}''|^2} / 2\overline{\rho}$, которое, как известно, лежит в основе многих современных полуэмпирических моделей турбулентности. Это уравнение, вывод которого для сжимаемой среды приведён, например, в монографии (Колесниченко, Маров, 1999), имеет вид:

$$\overline{\rho}\frac{d\langle b \rangle}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho}\langle b \rangle\right) + \nabla \cdot \left(\overline{\rho}\langle b \rangle \langle \mathbf{u} \rangle\right) = -\nabla \cdot \mathbf{J}^{turb}_{\langle b \rangle} + \sigma_{\langle b \rangle}, \quad (^1)$$

$$\mathbf{J}^{turb}_{\langle b \rangle} \equiv \overline{\rho(|\mathbf{u}''|^2 / 2)\mathbf{u}'' - \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u}''}, \quad (^2) \qquad (6)$$

$$\sigma_{\langle b \rangle} \equiv \mathbf{R} \cdot\cdot \nabla \langle \mathbf{u} \rangle - \overline{\mathbf{u}'' \cdot \nabla p'} - \mathbf{J}^{turb}_{(1/\rho)} \cdot \nabla \overline{p} - \overline{\rho}\langle \varepsilon_b \rangle. \quad (^3)$$

Здесь $\mathbf{J}^{turb}_{\langle b \rangle}(\mathbf{r}, t)$, $\sigma_{\langle b \rangle}(\mathbf{r}, t)$ – соответственно турбулентно-диффузионный поток и локальное производство (сток) осреднённой кинетической энергии турбулентных пульсаций (турбулентной энергии). Левая часть уравнения (6) характеризует изменение во времени турбулентной энергии $\langle b \rangle$, а также конвективный перенос величины $\langle b \rangle$ осреднённым движением; второе слагаемое в правой части ($6^{(3)}$) характеризует работу сил давления в пульсационном движении; третье – скорость порождения энергии турбулентности под действием эффектов плавучести; наконец, пятое слагаемое – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности в тепловую энергию вследствие молекулярной вязкости. Величина $\mathbf{R} \cdot\cdot \nabla \langle \mathbf{u} \rangle$ представляет собой скорость перехода кинетической энергии среднего движения в кинетическую энергию турбулентных пульсаций.

2.2. Проблема замыкания

Как нетрудно заметить, осреднённые уравнения движения (1)-(4) турбулизованной сжимаемой жидкости имеют ту же форму, что и гидродинамические уравнения для ламинарного режима течения. Однако система уравнений (1)-(4) является незамкнутой, поскольку содержит, наряду с осреднёнными молекулярными потоками $\overline{\mathbf{q}}$ и $\overline{\mathbf{\Pi}}$, неопределенные турбулентные потоки $\mathbf{R}$, $\mathbf{q}^{turb}$ и

$\mathbf{J}_{v}^{turb}$(одноточечные корреляционные моменты второго порядка), которые появляются при осреднении исходных нелинейных гидродинамических уравнений для мгновенного движения среды. В результате возникает центральная проблема теории турбулентности (известная как проблема замыкания), связанная с конструированием определяющих (замыкающих) соотношений для этих неопределенных величин. Относительно осреднённых молекулярных потоков $\overline{\mathbf{q}}$ и $\overline{\mathbf{\Pi}}$ важно иметь ввиду следующее: поскольку при использовании средних по Фавру не удается достаточно просто осреднить их актуальные аналоги (в частности, легко проверить, что прямое осреднение соотношений Навье−Стокса для тензора $\mathbf{\Pi}$, при использовании средневзвешенного значения $\langle\mathbf{u}\rangle$ для скорости, значительно усложняет его вид), то, с точки зрения скоординированного построения феноменологической модели сжимаемой турбулентности, представляется более правильным выполнить непосредственный вывод определяющих соотношений для этих потоков в рамках осреднённого турбулизованного континуума, например, методами Онзагера-Казимира КНТ, как это обычно делается для их регулярных аналогов. Этот подход (см. Kolesnichenko, Marov, 1985) для моделирования турбулизованной жидкости целесообразно использовать ещё и потому, что он позволяет буквально тем же способом получить замыкающие соотношения (градиентные модели турбулентности) для неизвестных турбулентных потоков, т.е. линейно связать их с градиентами осреднённых параметров состояния среды через некоторые коэффициенты пропорциональности (коэффициенты турбулентного переноса).

Рассматриваемые далее феноменологические модели замыкания основаны на представлении турбулизованного движения среды непрерывным континуумом, состоящим из двух взаимосвязанных термодинамических подсистем – подсистемы осреднённого движения, описываемой системой уравнений (1)-(4), и подсистемы турбулентного хаоса (так называемой турбулентной надструктуры), которая связана с пульсационным мелкомасштабным движением жидкости. Постулирование для подсистемы турбулентного хаоса термодинамического тождества Гиббса позволяет (при использовании формализма КНТ) ввести в рассмотрение такие её характеристики, как энтропия $S_{turb}(\mathbf{r},t)$ и температура $T_{turb}(\mathbf{r},t)$ турбулизации, а также пульсационное давление $p_{turb}(\mathbf{r},t)$ (см. Невзглядов,1945; Blackadar, 1955). Причём эти обобщённые параметры связаны с динамическими изменениями в квазистационарном состоянии хаоса точно таким же образом, как, например, равновесная энтропия $S(\mathbf{r},t)$ связана с и динамическими изменениями в состоянии локального равновесия. Тогда, определив явный вид величины производства энтропии σ_Σ из балансового уравнения для суммарной энтропии $S_\Sigma \equiv \langle S\rangle + S_{turb}$ турбулизованной жидкости, можно получить определяющие градиентные соотношения для турбулентных потоков. Сразу же следует подчеркнуть, что подобного рода «двухжидкостная модель» турбулентности, аналогично модели двух жидкостей в теории сверхтекучести гелия, является лишь удобным способом феноменологического описания такого сложного явления, как гидродинамическая турбулентность и не претендует на полное объяснение физики этого процесса.

Заметим, что подобный вывод замыкающих (градиентных) соотношений для системы (1)-(4) был впервые проведен методом Онзагера-Казимира в рамках КНТ в работе (Колесниченко, 1998). В данной статье будет проанализирован её модифицированный вариант в рамках выходящей за границы классического формализма РНТ, когда предположение о локальном состоянии равновесия подсистемы термодинамического хаоса больше не делается. Предполагается, что эта подсистема имеет память, т.е. её поведение в заданный момент времени определяется не только характеристическими параметрами в этот же момент времени, но и её предысторией. Это позволит получить не только «классические» замыкающие соотношения для турбулентных потоков, но и найти эволюционные (дифференциальные) уравнения для этих величин.

2.3. Уравнение баланса для средневзвешенной энтропии

Напомним сначала методику вывода градиентных соотношений для величин $\mathbf{R}$ и $\mathbf{q}^{turb}$ в рамках формализма КНТ. В работе автора (1998) было показано, что осреднение справедливого для микродвижений турбулизованной жидкости фундаментального тождества Гиббса (записанного вдоль траектории движения центра масс физического элементарного объёма $d\mathbf{r}$) приводит к следующему уравнению для средневзвешенных удельной энтропии $\langle S\rangle$ и удельной внутренней энергии $\langle e\rangle$ турбулизованной среды

$$\bar{\rho}\langle T\rangle\frac{d\langle S\rangle}{dt} = \bar{\rho}\frac{d\langle e\rangle}{dt} + \bar{\rho}\,\bar{p}\frac{d\langle 1/\bar{\rho}\rangle}{dt}. \qquad (7)$$

Путём исключения из правой части этого тождества субстанциональных производных от параметров $(1/\bar{\rho})$ и $\langle e\rangle$ с помощью осреднённых уравнений (1) и (3), получается уравнение субстанционального баланса осреднённой энтропии смеси в следующем явном виде

$$\bar{\rho}\frac{d\langle S\rangle}{dt}+\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{q}^{\Sigma}}{\langle T\rangle}\right)=\sigma_{\langle S\rangle}\equiv\sigma^{(i)}_{\langle S\rangle}+\sigma^{(e)}_{\langle S\rangle}, \qquad (8)$$

где положительная величина

$$\sigma^{(i)}_{\langle S\rangle}(\mathbf{r},t)\equiv\frac{1}{\langle T\rangle}\left(-\mathbf{q}^{\Sigma}\cdot\nabla\ln\langle T\rangle+\bar{\pi}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle+\mathring{\bar{\mathbf{\Pi}}}\cdot\cdot\mathring{\mathbf{D}}\right) \qquad (9)$$

определяет скорость локального производства осреднённой энтропии $\langle S\rangle$ жидкости, обусловленного необратимыми процессами переноса внутри подсистемы осреднённого движения, а величина

$$\sigma^{(e)}_{\langle S\rangle}(\mathbf{r},t)\equiv\frac{1}{\langle T\rangle}\left(\overline{\mathbf{u}''\cdot\nabla p'}+\mathbf{J}^{\mathrm{turb}}_{(1/\rho)}\cdot\nabla\bar{p}+\bar{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle\right)\equiv\frac{\mathfrak{I}}{\langle T\rangle} \qquad (10)$$

отражает обмен энтропией между подсистемами турбулентного хаоса и осреднённого движения. Здесь и далее везде использовано следующее обозначение $\mathbf{q}^{\Sigma}(\mathbf{r},t)=\bar{\mathbf{q}}+\mathbf{q}^{\mathrm{turb}}$ для полного потока тепла в турбулизованном жидкостном континууме.

Так как величина $\sigma^{(e)}_{\langle S\rangle}(\mathbf{r},t)$ может быть разной по знаку, в зависимости от конкретного режима турбулентного течения, то энтропия $\langle S\rangle$ подсистемы осреднённого движения может как возрастать, так и уменьшаться, что свойственно любой термодинамически открытой системе (Эбелинг, 2004). Таким образом, одной только осреднённой энтропии $\langle S\rangle$ недостаточно для адекватного термодинамического описания всех особенностей поля турбулентности, поскольку она не связана с параметрами состояния, характеризующими внутреннюю структуру подсистемы турбулентного хаоса, например, с таким ключевым параметром, как энергия турбулентности $\langle b\rangle\equiv\overline{\rho|\mathbf{u}''|^2}/2\bar{\rho}$.

2.4. Уравнения баланса для энтропии турбулентного хаоса

Будем далее охарактеризовывать физически элементарный объём $d\mathbf{r}$ турбулентного хаоса следующими обобщёнными параметрами состояния: экстенсивными переменными $e_{\mathrm{turb}}(\mathbf{r},t)$ (плотность внутренней энергии турбулизации) и $S_{\mathrm{turb}}(\mathbf{r},t)$ (обобщённая локальная энтропия турбулизации) и интенсивными переменными $T_{turb}(\mathbf{r},t)$ (обобщённая температура турбулизации, характеризующая степень интенсивности турбулентных пульсаций) и $p_{turb}(\mathbf{r},t)$ (давление турбулизации) (см. Blackadar,1955). При всём этом важно ясно себе представлять, что энтропия S_{turb} и энергия e_{turb} турбулизации, рассматриваемые нами в качестве первичных концепций, вводятся здесь *a priori* и только для обеспечения связности теории; они могут не иметь, вообще говоря, точной физической интерпретации (см. Жоу и др., 2006). Тем не менее, здесь будем полагать, что термодинамические соотношения общего характера, справедливые в состоянии локального равновесия системы, остаются в силе также и для квазиравновесного состояния турбулентного хаоса. В частности, справедлив второй закон термодинамики, который в этом случае служит исключительно в качестве ограничения на форму представления соответствующих определяющих соотношений.

Перейдем теперь к следствиям из сделанных предположений. Следуя изящному методу Гиббса (см., например, Мюнстер, 2002), выберем в качестве локальной характеристической функции (содержащей все термодинамические сведения о подсистеме турбулентного хаоса в равновесном состоянии) следующее фундаментальное уравнение Гиббса (в интегральном виде) для обобщенной энтропии:

$$S_{turb}(\mathbf{r},t) = S_{turb}\left(e_{turb}(\mathbf{r},t), \langle v\rangle(\mathbf{r},t)\right).$$

Это функциональное соотношение считается заданным *a priori*. Примем теперь, как это делается обычно при формализованном построении классической локально-равновесной термодинамики, следующие определения сопряжённых переменных $T_{turb}(\mathbf{r},t)$ и $p_{turb}(\mathbf{r},t)$ (считая, что все указанные производные положительны):

$$1/T_{turb} \equiv \left\{\partial S_{turb}/\partial e_{turb}\right\}_{\langle v\rangle}, \quad p_{turb}/T_{turb} \equiv \left\{\partial S_{turb}/\partial\langle v\rangle\right\}_{E_{turb}}. \qquad (11)$$

Тогда интенсивным переменным T_{turb} и p_{turb} можно приписать смысл соответственно обобщённой температуры и давления (турбулизации). Соответствующая дифференциальная форма фундаментального уравнения Гиббса, записанная вдоль траектории движения центра масс физически элементарного объёма, принимает тогда вид

$$T_{turb}\frac{dS_{turb}}{dt}=\frac{de_{turb}}{dt}+p_{turb}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\right). \qquad (12)$$

Очевидно, что различного рода функциональные связи между переменными e_{turb}, T_{turb}, p_{turb} и S_{turb}, которые могут быть получены обычным для термодинамики способом из (11), допустимо интерпретировать как «уравнения состояния» рассматриваемой подсистемы. Далее будем отождествлять величину e_{turb} с энергией турбулентности $e_{turb}\equiv\langle b\rangle+\mathrm{const}=\overline{\rho|\mathbf{u}''|^2}/2\bar{\rho}+\mathrm{const}$ и полагать, что подсистема турбулентного хаоса в термодинамическом смысле является совершенным классическим газом с тремя степенями свободы, по которым энергия распределена равномерно (основополагающие гипотезы модели). Тогда, в частности, имеем

$$\begin{cases}\langle b\rangle=c_V^{turb}T_{turb}=\tfrac{3}{2}\mathcal{R}^*T_{turb}=\tfrac{3}{2}p_{turb}/\bar{\rho}, \quad p_{turb}=\mathcal{R}^*T_{turb}\bar{\rho}, \\ S_{turb}=\tfrac{3}{2}\mathcal{R}^*\ln\left(p_{turb}/\bar{\rho}^{\frac{5}{3}}\right)+\mathrm{const}.\end{cases} \qquad (13)$$

Явную форму уравнения баланса для энтропии турбулизации S_{turb} получим из (12) уже реализованным выше способом с помощью уравнения (1) для удельного объёма $\langle v\rangle$ и балансового уравнения (6) для турбулентной энергии $\langle b\rangle$; в результате получим:

$$\bar{\rho}\frac{dS_{turb}}{dt}+\nabla\cdot\mathbf{J}_{(S_{turb})}=\sigma_{(S_{turb})}\equiv\sigma^{(i)}_{(S_{turb})}+\sigma^{(e)}_{(S_{turb})}, \qquad (14)$$

где

$$\mathbf{J}_{(S_{turb})}\equiv\frac{1}{T_{turb}}\left(\overline{\rho(|\mathbf{u}''|^2/2)\mathbf{u}''-\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{u}''}\right)=\frac{1}{T_{turb}}\mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle}, \qquad (15)$$

$$\begin{cases}0\le\sigma^{(i)}_{(S_{turb})}=\frac{1}{T_{turb}}\left(-\mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle}\cdot\nabla\ln T_{turb}+\mathbf{R}\cdot\cdot\nabla\langle\mathbf{u}\rangle+p_{turb}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle\right) \\ \sigma^{(e)}_{(S_{turb})}\equiv\frac{1}{T_{turb}}\left(-\overline{\mathbf{u}''\cdot\nabla p'}-\mathbf{J}^{turb}_{(1/\rho)}\cdot\nabla\bar{p}-\bar{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle\right)\equiv-\frac{\mathfrak{I}}{T_{turb}}\end{cases} \qquad (16)$$

Здесь $\mathbf{J}_{(S_{turb})}(\mathbf{r},t)$– субстанциональный поток энтропии S_{turb}; величины $\sigma^{(i)}_{(S_{turb})}$

и $\sigma^{(e)}_{(S_{turb})}$ имеют смысл, соответственно, скоростей локального производства и стока энтропии турбулентного хаоса S_{turb}.

Для дальнейшего анализа удобно симметричный тензор напряжений Рейнольдса $\mathbf{R}$ (учитывая уравнение состояния (13)) представить в виде

$$\overset{0}{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R} - \tfrac{1}{3}\left(\mathbf{R}\cdot\cdot\mathbf{U}\right)\mathbf{U} = \mathbf{R} + p_{turb}\mathbf{U} = \mathbf{R} + \tfrac{2}{3}\bar{\rho}\langle b\rangle\mathbf{U}, \qquad (17)$$

где $p_{turb} = -\tfrac{1}{3}(\mathbf{R}\cdot\cdot\mathbf{U})$ – давление турбулизации. Тогда скалярное произведение тензора Рейнольдса и градиента скорости может быть записано следующим образом: $\mathbf{R}\cdot\cdot\nabla\langle\mathbf{u}\rangle = \overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\cdot\overset{0}{\mathbf{D}} - p_{turb}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle$, а уравнение баланса (14) для энтропии турбулизации S_{turb} переписано в виде:

$$\bar{\rho}\frac{dS_{turb}}{dt} + \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle}}{T_{turb}}\right) = \frac{1}{T_{turb}}\left(-\mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle}\cdot\nabla\ln T_{turb} + \overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\cdot\overset{0}{\mathbf{D}} - \Im\right). \qquad (18)$$

2.5. Балансовое уравнение для суммарной энтропии

Введение двух энтропий $\langle S\rangle$ и S_{turb} конкретизирует наше представление об исходном турбулизованном континууме как о термодинамическом комплексе, состоящем из двух взаимно открытых подсистем – подсистемы осреднённого движения и подсистемы турбулентного хаоса. Из (8) и (18) следует уравнение баланса для суммарной энтропии $S_{\Sigma} = (<S> + S_{turb})$ турбулизованной среды

$$\bar{\rho}\frac{dS_{\Sigma}}{dt} + \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle}}{T_{turb}} + \frac{\mathbf{q}^{\Sigma}}{\langle T\rangle}\right) = \sigma_{\Sigma} = \sigma^{(i)}_{\langle S\rangle} + \sigma^{(i)}_{S_{turb}} + \sigma_{\langle S\rangle,S_{turb}}, \qquad (19)$$

где

$$0 \le \sigma_{\Sigma} \equiv \frac{1}{\langle T\rangle}\left(-\mathbf{q}^{\Sigma}\cdot\nabla\ln\langle T\rangle + \bar{\pi}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle + \overset{0}{\bar{\mathbf{\Pi}}}\cdot\cdot\overset{0}{\mathbf{D}}\right) +$$

$$+\frac{1}{T_{turb}}\left(-\mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle}\cdot\nabla\ln T_{turb} + \overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\cdot\overset{0}{\mathbf{D}}\right) + \Im\left(\frac{T_{turb} - \langle T\rangle}{T_{turb}\langle T\rangle}\right). \qquad (20)$$

Из выражения (20) видно, что локальное производство суммарной энтропии σ_Σ, связанное с необратимыми процессами внутри суммарного континуума, определяется следующим набором термодинамических потоков $\mathbf{q}^\Sigma$, $\mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle}$, $\bar{\pi}$, $\overset{0}{\bar{\mathbf{\Pi}}}$, $\overset{0}{\mathbf{R}}$, $\Im$ и сопряжённых им термодинамических сил:

$$\mathbf{Y}^\Sigma_q \equiv -\langle T\rangle^{-2}\nabla\langle T\rangle, \qquad \mathbf{Y}_{\langle b\rangle} \equiv -T^{-2}_{turb}\nabla T_{turb}, \quad Y_\pi \equiv \langle T\rangle^{-1}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle,$$

$$\mathbf{Y}_D \equiv \langle T\rangle^{-1}\overset{0}{\mathbf{D}}, \qquad \mathbf{Y}_R \equiv T^{-1}_{turb}\overset{0}{\mathbf{D}}, \qquad Y \equiv \left(\frac{T_{turb} - \langle T\rangle}{T_{turb}\langle T\rangle}\right). \tag{21}$$

При их использовании величина σ_Σ может быть переписана в следующей билинейной форме

$$0 \le \sigma_\Sigma = \overbrace{\mathbf{q}^\Sigma\cdot\mathbf{Y}^\Sigma_q + \bar{\pi}\,Y_\pi + \overset{0}{\bar{\mathbf{\Pi}}}\cdot\cdot\mathbf{Y}_D}^{\sigma^{(i)}_{\langle S\rangle}} + \overbrace{\mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle}\cdot\mathbf{Y}_{\langle b\rangle} + \overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\cdot\mathbf{Y}_R}^{\sigma^{(i)}_{S_{turb}}} + \overbrace{\Im Y}^{\sigma_{\langle S\rangle,S_{turb}}}, \tag{22}$$

отвечающей трём независимым источникам неравновесных процессов в турбулизованной среде, которые имеют существенно различную физическую природу. Согласно основному постулату КНТ, в том случае, когда термодинамическая система находится вблизи локального равновесия (в частности, при малых температурных неравновесностях) термодинамические потоки могут быть представлены в виде линейных конститутивных соотношений от сопряжённых им макроскопических сил:

$$J_{\gamma i} = \sum_\delta l^{ij}_{\gamma\delta} X_{\delta j} \quad (\gamma, \delta = 1, 2, \ldots f), \tag{23}$$

где $l^{ij}_{\gamma\delta}$ – матрица феноменологических коэффициентов проводимости. Важно отметить, что выражение (22) позволяет получить определяющие соотношения для трёх основных режимов турбулизованного течения – для ламинарного режима, для режима развитой турбулентности, когда турбулентные потоки переноса значительно эффективнее соответствующих осреднённых молекулярных потоков и, наконец, для переходного случая, когда процессы осреднённого молекулярного и турбулентного переноса сравнимы по результативности.

Из выражения (22) следует, что спектр возможных перекрёстных эффектов для турбулизованной среды существенно расширяется по сравнению с её регулярным аналогом. Так, например, суммарный поток тепла $\mathbf{q}^{\Sigma}$ может возникать не только под влиянием сопряжённой с ним термодинамической силы $\mathbf{Y}_{q}^{\Sigma}$, но и благодаря воздействию силы $\mathbf{Y}_{\langle b\rangle}$, сопряжённой с потоком $\mathbf{J}_{\langle b\rangle}^{turb}$, описывающим «диффузионный» перенос турбулентной энергии. К сожалению, в настоящее время отсутствуют надёжные экспериментальные данные, количественно описывающие перекрёстные эффекты подобного рода. Кроме этого, обычно вклад любых перекрёстных эффектов в общую скорость процесса переноса на порядок меньше вклада от прямых эффектов переноса (см. де Гроот, Мазур, 1964). Это позволяет нам руководствоваться далее требованием положительной определённости отдельных слагаемых $\sigma_{\langle S\rangle}^{(i)}$, $\sigma_{S_{turb}}^{(i)}$ и $\sigma_{\langle S\rangle,S_{turb}}$ в сумме $\sigma_{\Sigma}\geq 0$, считая при этом, что, например, на линейные связи, относящиеся к подсистеме осреднённого движения (в частности, между величинами $\overset{0}{\bar{\mathbf{\Pi}}}$ и $\mathbf{Y}_{D}$), подсистема турбулентного хаоса не оказывает влияния (например, через силу $\mathbf{Y}_{R}$). Будем также без специальных оговорок опускать ряд перекрёстных эффектов в линейных конститутивных соотношениях.

В заключение этого раздела сделаем следующее замечание: поскольку величина $\sigma_{\langle S\rangle,S_{turb}}$, описывающая производство энтропии внутри суммарного континуума за счёт необратимого обмена энтропией между подсистемами турбулентного хаоса и осреднённого движения в силу второго закона термодинамики всегда положительна, то «направление» термодинамического потока $\mathfrak{I}$ определяется знаком функции состояния $Y\equiv(1/\langle T\rangle-1/T_{turb})$, которую следует рассматривать как сопряжённую термодинамическую силу (макроскопическую причину), вызывающую этот поток энтропии. Известно, что подобный обмен энтропией между двумя взаимно открытыми подсистемами является непременным условием структурированного коллективного поведения частиц среды, т.е. может быть источником самоорганизации в одной из них (см, например, Эбелинг, 2004).

2.6. Градиентные соотношения

Для вывода замыкающих градиентных соотношений для турбулентных потоков можно воспользоваться формализмом Онзагера–Казимира КНТ (см., например, де Гроот, Мазур, 1964). Рассматривая здесь (в качестве примера) только переходный режим, когда процессы осреднённого молекулярного и турбулентного переноса сопоставимы по значимости, ограничимся случаем мелкомасштабной турбулентности, для которой наблюдается тенденция к установлению локальной статистической изотропности её характеристик. Как известно из общей теории тензорных функций (см. Седов, 1984), свойства симметрии изотропных сред вполне характеризуются метрическим тензором g^{ij}: все тензоры будут тензорными функциями только метрического тензора, в частности, $l^{ij}_{\gamma\delta} = l_{\gamma\delta} g^{ij} \quad (\gamma, \delta = 1, 2, \ldots f)$, где $l_{\gamma\delta}$ – скалярные коэффициенты проводимости. Кроме этого, для изотропных сред из тензорной алгебры следует, что потоки и термодинамические силы различной тензорной размерности не могут быть связаны друг с другом. Тогда, принимая дополнительную гипотезу о марковости системы (когда потоки в данный момент времени зависят от обобщённых сил, взятых в тот же самый момент времени), из (22) получим следующие градиентные соотношения для турбулентных потоков (Колесниченко, 1998):

$$\mathbf{q}^{\Sigma} = -\hat{\lambda}^{\Sigma} \nabla\langle T\rangle, \quad \mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle} = -\frac{\mu^{turb}}{\sigma_b} \nabla\langle b\rangle, \quad \Im = l_{E,b}\left(\frac{T_{turb} - \langle T\rangle}{\langle T\rangle^2}\right),$$

$$\left(\bar{\mathbf{\Pi}}\right)_{jk} = \bar{\mu}\left\{\left(\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_k}\right) - \tfrac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle\right\} + \bar{\mu}_{\vartheta}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle,$$

$$\left(\mathbf{R}\right)_{jk} = -\tfrac{2}{3}\bar{\rho}\langle b\rangle\delta_{jk} + \mu^{turb}\left\{\left(\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_k}\right) - \tfrac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle\right\}. \quad (24)$$

Здесь использована прямоугольная система координат ($g^{ij} \equiv \delta_{ij}$) и введены следующие феноменологические коэффициенты: молекулярные коэффициенты вязкости $\bar{\mu}(\mathbf{r},t)$ и второй вязкости $\bar{\mu}_{\vartheta}(r,t)$ для осреднённого течения, коэффициент турбулентной вязкости $\mu^{turb}(\mathbf{r},t)$, коэффициент турбулентной теплопроводности $\hat{\lambda}^{turb}$, $\hat{\lambda}^{\Sigma} \equiv \bar{\lambda} + \hat{\lambda}^{turb}$, коэффициент σ_b –«число Прандтля» для турбулентной энергии (значение которого обычно предполагается постоянным). Следует иметь в виду, что в отличие от коэффициентов молекулярной вязкости и теплопроводности $\bar{\mu}$, $\bar{\mu}_{\vartheta}$ и $\bar{\lambda}$, коэффициенты турбулентной вязкости и теплопроводности μ^{turb} и $\hat{\lambda}^{turb}$ характеризует не физические свойства турбулизованной жидкости, а статистические свойства её пульсационного движения. Отметим ещё раз, что термодинамический подход даёт возможность получить выражение для осреднённого тензора вязких напряжений непосредственно (и в стандартном виде (24)), т.е. без привлечения соответствующего регулярного аналога для ламинарного режима течения и его последующего осреднения.

3. Эволюционные модели замыкания второго порядка, полученные на основе РНТ

Перейдём теперь к выводу эволюционных уравнений для турбулентных потоков, используя формализм РНТ. Неравновесная термодинамика (вне локального равновесия) не даёт никакого общего критерия для их нахождения, за исключением лишь тех ограничений, которые накладывает на эти уравнения второй закон термодинамики. Следовательно, уравнения эволюции не могут принимать произвольный вид, поскольку они должны удовлетворять второму закону. Естественным путём получения дифференциальных уравнений для турбулентных потоков, описывающих неравновесные устойчивые состояния турбулизованной среды, является модификация приведённого выше «классического» термодинамического подхода к выводу замыкающих градиентных соотношений.

3.1.Обобщённое тождество Гиббса для неравновесной подсистемы турбулентного хаоса

Так же, как и в КНТ, энтропия и тождество Гиббса играют в расширенной необратимой термодинамике центральную роль. В контексте формализма РНТ будем постулировать, что существует обобщённая энтропия S_{turb}(непрерывная функция от всех переменных) подсистемы турбулентного хаоса, зависящая, как от турбулентной энергии $\langle b\rangle$ и удельного объёма $\langle v\rangle$, так и от диссипативных потоков $\mathbf{q}^{turb}$ и $\overset{0}{\mathbf{R}}$. Тогда обобщённое тождество Гиббса для подсистемы турбулентного хаоса принимает следующий вид

$$dS_{turb}=\left(\frac{\partial S_{turb}}{\partial\langle b\rangle}\right)_{\langle v\rangle,\mathbf{q}^{turb},\overset{0}{\mathbf{R}}}d\langle b\rangle+\left(\frac{\partial S_{turb}}{\partial\langle v\rangle}\right)_{\langle b\rangle,\mathbf{q}^{turb},\overset{0}{\mathbf{R}}}d\langle v\rangle+$$

$$+\left(\frac{\partial S_{turb}}{\partial\mathbf{q}^{turb}}\right)_{\langle b\rangle,\langle v\rangle,\overset{0}{\mathbf{R}}}\cdot d\mathbf{q}^{turb}+\left(\frac{\partial S_{turb}}{\partial\overset{0}{\mathbf{R}}}\right)_{\langle b\rangle,\langle v\rangle,\mathbf{q}^{turb}}\cdot\cdot d\overset{0}{\mathbf{R}}. \qquad (25)$$

По аналогии с рассмотренной выше локально-равновесной термодинамикой подсистемы турбулентного хаоса в рамках КНТ, определим неравновесную температуру турбулизации $\theta_{turb}(\mathbf{r},t)$ и неравновесное термодинамическое давление турбулизации $\pi_{turb}(\mathbf{r},t)$ следующими равенствами:

$$\theta_{turb}^{-1}\left(\langle b\rangle,\langle v\rangle,\mathbf{q}^{turb},\overset{0}{\mathbf{R}}\right)=\left\{\frac{\partial S_{turb}}{\partial\langle b\rangle}\right\}_{\langle v\rangle,\mathbf{q}^{turb},\overset{0}{\mathbf{R}}}, \tag{26}$$

$$\theta_{turb}^{-1}\pi_{turb}\left(\langle b\rangle,\langle v\rangle,\mathbf{q}^{turb},\overset{0}{\mathbf{R}}\right)=\left\{\frac{\partial S_{turb}}{\partial\langle v\rangle}\right\}_{\langle b\rangle,\mathbf{q}^{turb},\overset{0}{\mathbf{R}}}. \tag{27}$$

Оставшиеся частные производные в (25) по предположению будем считать линейными по потокам:

$$\left\{\partial S_{turb}/\partial\mathbf{q}^{turb}\right\}_{\langle b\rangle,\langle v\rangle,\overset{0}{\mathbf{R}}}=-T_{turb}^{-1}\langle v\rangle\alpha_1\mathbf{q}^{turb}, \tag{28}$$

$$\left\{\partial S_{turb}/\partial\overset{0}{\mathbf{R}}\right\}_{\langle b\rangle,\langle v\rangle,\mathbf{q}^{turb}}=-T_{turb}^{-1}\langle v\rangle\alpha_2\overset{0}{\mathbf{R}}. \tag{29}$$

Здесь коэффициенты α_1 и α_2 представляют собой неизвестные скалярные функции от параметров $\langle b\rangle$ и $\langle v\rangle$. Подстановка (26)-(29) в (25), приводит к следующему обобщённому соотношению Гиббса для неравновесного турбулентного хаоса [сравни с уравнением (12)]

$$dS_{turb}=\theta_{turb}^{-1}d\langle b\rangle+\theta_{turb}^{-1}\pi_{turb}d\langle v\rangle-T_{turb}^{-1}\langle v\rangle\alpha_1\mathbf{q}^{turb}\cdot d\mathbf{q}^{turb}-T_{turb}^{-1}\langle v\rangle\alpha_2\overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\cdot d\overset{0}{\mathbf{R}}. \tag{30}$$

Из условия интегрируемости этого уравнения (равенство перекрёстных производных второго порядка) следует, что

$$\frac{\partial\theta_{turb}^{-1}}{\partial\mathbf{q}^{turb}}=-\mathbf{q}^{turb}\frac{\partial}{\partial\langle b\rangle}\left(\frac{\langle v\rangle\alpha_1}{T_{turb}}\right),\qquad \frac{\partial\theta_{turb}^{-1}}{\partial\overset{0}{\mathbf{R}}}=-\overset{0}{\mathbf{R}}\frac{\partial}{\partial\langle b\rangle}\left(\frac{\langle v\rangle\alpha_2}{T_{turb}}\right), \tag{31a}$$

$$\frac{\partial(\theta_{turb}^{-1}\pi_{turb})}{\partial\mathbf{q}^{turb}}=-\mathbf{q}^{turb}\frac{\partial}{\partial\langle v\rangle}\left(\frac{\langle v\rangle\alpha_1}{T_{turb}}\right),\quad \frac{\partial(\theta_{turb}^{-1}\pi_{turb})}{\partial\overset{0}{\mathbf{R}}}=-\overset{0}{\mathbf{R}}\frac{\partial}{\partial\langle v\rangle}\left(\frac{\langle v\rangle\alpha_2}{T_{turb}}\right). \tag{31b}$$

Из этих соотношений и при учёте того обстоятельства, что обращение потоков в нуль соответствует локально-равновесным значениям температуры T_{turb} и давления p_{turb} турбулизации, вытекают уравнения:

$$\theta_{turb}^{-1} = T_{turb}^{-1} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\langle b\rangle}\left(\frac{\langle v\rangle\alpha_1}{T_{turb}}\right)\mathbf{q}^{turb}\cdot\mathbf{q}^{turb} + \frac{\partial}{\partial\langle b\rangle}\left(\frac{\langle v\rangle\alpha_2}{T_{turb}}\right)\overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\cdot\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{R}}\right],$$

$$\theta_{turb}^{-1}\pi_{turb} = T_{turb}^{-1}p_{turb} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\langle v\rangle}\left(\frac{\langle v\rangle\alpha_1}{T_{turb}}\right)\mathbf{q}^{turb}\cdot\mathbf{q}^{turb} + \frac{\partial}{\partial\langle v\rangle}\left(\frac{\langle v\rangle\alpha_2}{T_{turb}}\right)\overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\cdot\overset{0}{\mathbf{R}}\right], \tag{32}$$

которые могут быть интерпретированы как неравновесные уравнения состояния для неравновесных температуры θ_{turb} и давления π_{turb} турбулентного хаоса. Из (32), в частности, следует, что в случае, когда вклад квадратичных членов по диссипативным потокам ничтожно мал, параметры θ_{turb} и π_{turb} в тождестве Гиббса (30) могут быть заменены соответственно на T_{turb} и p_{turb} (см. Jou и др., 2001).

После интегрирования обобщённого уравнения Гиббса (30) и разложения энтропии в окрестности её значения, соответствующего локальному состоянию равновесия, с сохранением членов второго порядка в выражении для потоков, можно получить явную форму вкладов в выражении для неравновесной энтропии турбулентного хаоса от турбулентных потоков

$$S_{turb}(\langle b\rangle,\langle v\rangle,\mathbf{q}^{turb},\overset{0}{\mathbf{R}}) = S_{turb}^{eq}(\langle b\rangle,\langle v\rangle - \frac{\langle v\rangle\alpha_1}{2T_{turb}}\mathbf{q}^{turb}\cdot\mathbf{q}^{turb} - \frac{\langle v\rangle\alpha_2}{2T_{turb}}\overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\cdot\overset{0}{\mathbf{R}}. \tag{33}$$

Именно эта интегральная форма неравновесной энтропии (30) совместима (в рассматриваемом подходе) с теми классами уравнений эволюции для турбулентных потоков $\mathbf{q}^{turb}$ и $\overset{0}{\mathbf{R}}$, для которых скорость производства энтропии неотрицательна. Следует, однако, иметь в виду, что при более адекватном подходе к моделированию развитой турбулентности может потребоваться введение в число базисных переменных потоков более высокого порядка.

Из условия выпуклости энтропии (33) в окрестности локально- равновесного значения следует, что

$$\frac{\langle v\rangle\alpha_1}{T_{turb}}>0,\qquad \frac{\langle v\rangle\alpha_2}{T_{turb}}>0. \tag{34}$$

Поскольку локально-равновесная температура T_{turb} турбулентного хаоса положительна, то из (34) следует, что коэффициенты α_1 и α_2 должны быть положительными, иначе будет нарушена причинно-следственная связь. Заметим также, что для нахождения условий устойчивости Гиббса (в виде ограничений на потоки $\mathbf{q}^{turb}$ и $\overset{0}{\mathbf{R}}$ подсистемы турбулентного хаоса, находящейся в неравновесном состоянии вдали от равновесия) необходимо, как известно, исследовать знак второго дифференциала $\delta^2 S_{turb}$ обобщённой энтропии (33) (см. Пригожин, Кондепуди, 2002). Анализ, проведённый в работе (Jou и др. 2001) показывает, что выражение для второго дифференциала $\delta^2 S$ обобщённой энтропии какой-либо неравновесной системы будет отрицательно определено (условие выпуклости энтропии), когда величина диссипативного потока тепла меньше некоторого критического значения. Вместе с тем, условия на вязкие потоки носят не ограничительный характер, поскольку для сдвигового вязкого трения обобщённая энтропия остается выпуклой функцией для интервалов длин и времён, по крайней мере, порядка средней длины свободного пробега и среднего времени между столкновениями соответственно, т.е. фактически при фундаментальных предположениях лежащих в основании теории РНТ.

3.2. Поток и производство энтропии для неравновесного турбулентного хаоса

Эволюция неравновесной энтропии подсистемы турбулентного хаоса определяется законом баланса (14), и наша цель состоит в том, чтобы найти соответствующие выражения для потока энтропии $\mathbf{J}_{(S_{turb})}$ и производства энтропии $\sigma_{(S_{turb})}$ в общем неравновесном случае. Для этого подставим в (30) выражения $d\langle v\rangle/dt$ и $d\langle b\rangle/dt$ из уравнений (1) и (5); в результате будем иметь

$$\bar{\rho}\frac{dS_{turb}}{dt}=\frac{1}{T_{turb}}\left(-\nabla\cdot\mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle}+\sigma_{\langle b\rangle}\right)+\frac{p_{turb}}{T_{turb}}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle-$$

$$-\frac{\alpha_1}{T_{turb}}\mathbf{q}^{turb}\cdot\frac{d\mathbf{q}^{turb}}{dt}-\frac{\alpha_2}{T_{turb}}\overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\cdot\frac{d\overset{0}{\mathbf{R}}}{dt}, \tag{33}$$

или, с учётом выражения $\sigma_{\langle b\rangle} \equiv \overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\cdot\overset{0}{\mathbf{D}} - p_{turb}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle - \Im$,

$$\bar{\rho}\frac{dS_{turb}}{dt} = \frac{1}{T_{turb}}\left\{-\nabla\cdot\mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle} + \overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\cdot\overset{0}{\mathbf{D}} - \Im\right\} - \frac{\alpha_1}{T_{turb}}\mathbf{q}^{turb}\cdot\frac{d\mathbf{q}^{turb}}{dt} - \frac{\alpha_2}{T_{turb}}\overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\cdot\frac{d\overset{0}{\mathbf{R}}}{dt}. \tag{33*}$$

Прежде чем перейти к нахождению обобщённого выражения для производства неравновесной энтропии турбулентного хаоса $\sigma_{(S_{turb})}$, определяемого равенством $\sigma_{(S_{turb})} = \bar{\rho}dS_{turb}/dt + \nabla\cdot\mathbf{J}_{(S_{turb})}$, необходимо установить вид потока $\mathbf{J}_{(S_{turb})}$ обобщённой энтропии турбулизации, который в рамках РНТ задаётся из некоторых эвристических соображений. Для изотропных систем наиболее общим представлением для потока $\mathbf{J}_{(S_{turb})}$ в терминах переменных $\langle b\rangle, \langle v\rangle, \mathbf{q}^{turb}$ и $\overset{0}{\mathbf{R}}$ является следующее равенство:

$$\mathbf{J}_{(S_{turb})} = \mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle}/T_{turb} + \beta''\overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{q}^{turb}, \tag{34}$$

где коэффициент β'' является неизвестной скалярной функцией от $\langle b\rangle$ и $\langle v\rangle$. Это выражение для потока энтропии турбулизации S_{turb} является естественным обобщением соотношения (15) на случай турбулентного хаоса вдали от равновесия. Тогда уравнение баланса величины S_{turb} (33) принимает вид [сравни с (18)]

$$\bar{\rho}\frac{dS_{turb}}{dt} + \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle}}{T_{turb}} + \beta''\overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{q}^{turb}\right) = \sigma_{(S_{turb})}, \tag{35}$$

где производство энтропии S_{turb} определяется соотношением

$$\sigma_{(S_{turb})} \equiv -\mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle}\cdot\frac{\nabla T_{turb}}{T^2_{turb}} + \overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\cdot\left(\frac{1}{T_{turb}}\overset{0}{\mathbf{D}} - \frac{\alpha_2}{T_{turb}}\frac{d\overset{0}{\mathbf{R}}}{dt} + \nabla(\beta''\overset{0}{\mathbf{q}}{}^{turb})^s\right) +$$

$$+\mathbf{q}^{turb}\cdot\left\{-\alpha_1 T^{-1}_{turb}\frac{d\mathbf{q}^{turb}}{dt} + \beta''\left(\nabla\cdot\overset{0}{\mathbf{R}}\right)\right\} - T^{-1}_{turb}\Im. \tag{36}$$

3.3.Уравнение для суммарной энтропии системы

Из уравнений (8) и (35) следует уравнение баланса для суммарной энтропии $S_\Sigma = (< S > + S_{turb})$ турбулизованной жидкостной системы в неравновесном случае, которое при предполагаемых далее малых температурных неравновесностях принимает вид:

$$\bar{\rho}\frac{dS_\Sigma}{dt} + \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{q}^\Sigma}{\langle T\rangle} + \frac{\mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle}}{T_{turb}} + \beta''\overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{q}^{turb}\right) = \sigma_\Sigma = \sigma^{(i)}_{\langle S\rangle} + \sigma^{(i)}_{S_{turb}} + \sigma_{\langle S\rangle, S_{turb}} \geq 0, \quad (37)$$

где

$$0 \leq \langle T\rangle\sigma_\Sigma \equiv -\bar{\mathbf{q}}\cdot\nabla\ln\langle T\rangle + \bar{\pi}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle + \overset{0}{\bar{\mathbf{\Pi}}}\cdot\cdot\overset{0}{\mathbf{D}} +$$

$$+\mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle}\cdot\overbrace{\left(-\nabla\ln T_{turb}\right)}^{\mathbf{Y}_{\langle b\rangle}} + \overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\cdot\overbrace{\left(\overset{0}{\mathbf{D}} - \alpha_2\frac{d\overset{0}{\mathbf{R}}}{dt} + T_{turb}\nabla\left(\beta''\overset{0}{\mathbf{q}}{}^{turb}\right)^s\right)}^{\overset{0}{\mathbf{Y}}_{\mathbf{R}}} +$$

$$+\mathbf{q}^{turb}\cdot\overbrace{\left(-\nabla\ln\langle T\rangle - \alpha_1\frac{d\mathbf{q}^{turb}}{dt} + T_{turb}\beta''\left(\nabla\cdot\overset{0}{\mathbf{R}}\right)\right)}^{\mathbf{Y}_q} + \Im\left(\frac{T_{turb} - \langle T\rangle}{\langle T\rangle}\right). \quad (38)$$

Выражения (37) и (38) сходны с аналогичными выражениями (19) и (20), получаемыми при использовании формализма КНТ, с учётом наличия дополнительных членов, зависящих от времени и от пространственных производных для потоков.

3.4. Линеаризованные уравнения эволюции турбулентных потоков

Далее будем использовать альтернативную форму $X_{\gamma i} = \sum_\delta r^{ij}_{\gamma\delta} J_{\delta j}$ конститутивных выражений (23), когда силы записываются в виде функций от потоков (см., например, Дьярмати, 1974). Здесь вместо матрицы коэффициентов проводимости $l_{\gamma\delta}$ фигурирует матрица коэффициентов сопротивления $r_{\gamma\delta}$, обратная матрице $l_{\gamma\delta}$. Эти соотношения являются далее исходными при получении уравнений эволюции диссипативных потоков, совместимых с требованием положительности возникновения энтропии σ_Σ. Ограничиваясь только членами не выше второго порядка и опуская ряд перекрёстных эффектов в линейных конститутивных соотношениях, можно записать следующие выражения для термодинамических сил (см. (38)):

$$\mathbf{Y}_{\langle b\rangle} = r_0 \mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle}, \tag{39}$$

$$\mathbf{Y}_q = r_1 \mathbf{q}^{turb} + r_{12}\overset{0}{\mathbf{R}}\cdot \mathbf{q}^{turb}, \tag{40}$$

$$\overset{0}{\mathbf{Y}}_{\mathbf{R}} = r_2 \overset{0}{\mathbf{R}} + r_{22}\overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\overset{0}{\mathbf{R}} + r_{21}\,(\overset{0}{\mathbf{q}^{turb}\mathbf{q}^{turb}}), \tag{41}$$

или

$$-\nabla \ln\langle T\rangle - \alpha_1 \frac{d\mathbf{q}^{turb}}{dt} + T_{turb}\beta''\left(\nabla\cdot\overset{0}{\mathbf{R}}\right) = r_1\mathbf{q}^{turb} + r_{12}\overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{q}^{turb}, \tag{40*}$$

$$\overset{0}{\mathbf{D}} - \alpha_2 \frac{d\overset{0}{\mathbf{R}}}{dt} + T_{turb}\,\nabla(\beta''\overset{0}{\mathbf{q}^{turb}})^s = r_2\overset{0}{\mathbf{R}} + r_{22}\overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\overset{0}{\mathbf{R}} + r_{21}\,(\overset{0}{\mathbf{q}^{turb}\mathbf{q}^{turb}}). \tag{41*}$$

В линейном случае, которым мы для простоты ограничимся в данной работе, выражения для потоков $\mathbf{Y}_q = r_1\mathbf{q}^{turb}$ и $\overset{0}{\mathbf{Y}}_{\mathbf{R}} = r_2\overset{0}{\mathbf{R}}$ обеспечивают положительность производства энтропии

$$0 \le \sigma^{(i)}_{S_{turb}} = r_0 \mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle}\cdot\mathbf{J}^{turb}_{\langle b\rangle} + r_1\mathbf{q}^{turb}\cdot\mathbf{q}^{turb} + r_2\overset{0}{\mathbf{R}}\cdot\cdot\overset{0}{\mathbf{R}}, \tag{42}$$

если потребовать положительности коэффициентов сопротивления

$$r_0 \ge 0, \quad r_1 \ge 0, \quad r_2 \ge 0. \tag{43}$$

Линеаризованные уравнения эволюции для потоков $\mathbf{q}^{turb}$ и $\overset{0}{\mathbf{R}}$ имеют следующий вид

$$\alpha_1 \frac{d\mathbf{q}^{turb}}{dt} = -\nabla\ln\langle T\rangle - r_1 q^{turb} + T_{turb}\beta''\left(\nabla\cdot\overset{0}{\mathbf{R}}\right), \tag{44}$$

$$\alpha_2 \frac{d\overset{0}{\mathbf{R}}}{dt} = \overset{0}{\mathbf{D}} - r_2\overset{0}{R} + T_{turb}\,\nabla(\beta''\overset{0}{\mathbf{q}^{turb}})^s. \tag{45}$$

Физическое истолкование коэффициентов r_1 и r_2 может быть получено из физических соображений, например, путём сравнения частного случая соотношений (44) и (45) (когда потоки стационарны и однородны и, следовательно, их производные по времени и по пространственным переменным равны нулю) и законов (24) .Это сопоставление позволяет идентифицировать искомые коэффициенты

$$r_1 = (\langle T\rangle\hat{\lambda}^{turb})^{-1}, \quad r_2 = (2\mu^{turb})^{-1} \tag{46}$$

с введёнными ранее коэффициентами турбулентного переноса. В случае, когда потоки не стационарны, но однородны, уравнения (44)-(45) приобретают вид

$$\tau_1 \frac{\partial \mathbf{q}^{turb}}{\partial t} + \mathbf{q}^{turb} = -\hat{\lambda}^{turb}\nabla\langle T\rangle, \tag{47}$$

$$\tau_2 \frac{\partial \overset{0}{\mathbf{R}}}{\partial t} + \overset{0}{\mathbf{R}} = \mu^{turb}\left\{\left[\nabla\langle\mathbf{u}\rangle + (\nabla\langle\mathbf{u}\rangle)^T\right] - \tfrac{2}{3}(\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle)\mathbf{U}\right\}, \tag{48}$$

где τ – время релаксации соответствующих потоков. Если эти соотношения отождествить с законами Максвелла-Каттанео (см. Cattaneo, 1948; Lebon и др., 2008), то величины τ можно связать с коэффициентами α соотношениями

$$\alpha_1 = \tau_1\left(\langle T\rangle\hat{\lambda}^{turb}\right)^{-1}, \quad \alpha_2 = \tau_2\left(2\mu^{turb}\right)^{-1}. \tag{49}$$

В случае, когда времена релаксации пренебрежимо малы или когда изменение потоков происходит достаточно медленно, эти уравнения сводятся к градиентным соотношениям (24). Из уравнений (47) и (48) видно, что полученные ранее градиентные соотношения (24) не описывают реальной физики процессов турбулентного переноса, поскольку они не учитывают их инерции: в соответствии с градиентными соотношениями, если внезапное возмущение турбулентного поля произойдёт в какой-либо точке течения, то это должно мгновенно привести к соответствующим изменениям во всех других удаленных точках турбулизованного потока, что, по-видимому, не так.

В терминах коэффициентов $\hat{\lambda}^{turb}$, μ^{turb} и времен релаксации τ линеаризованные уравнения эволюции (40^*) и (41^*) для турбулентных потоков принимают следующий вид:

$$\tau_1\left(\frac{\partial \mathbf{q}^{turb}}{\partial t} + \langle\mathbf{u}\rangle\cdot\nabla\mathbf{q}^{turb}\right) + \mathbf{q}^{turb} = -\hat{\lambda}^{turb}\nabla\langle T\rangle + \beta''\langle T\rangle^2\hat{\lambda}^{turb}\left(\nabla\cdot\overset{0}{\mathbf{R}}\right), \tag{50}$$

$$\tau_2\left(\frac{\partial\overset{0}{\mathbf{R}}}{\partial t}+\langle\mathbf{u}\rangle\cdot\nabla\overset{0}{\mathbf{R}}\right)+\overset{0}{\mathbf{R}}=\mu^{turb}\left\{\left[\nabla\langle\mathbf{u}\rangle+(\nabla\langle\mathbf{u}\rangle)^{T}\right]-\tfrac{2}{3}(\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle)\mathbf{U}\right\}+ \tag{51}$$

$$+2\beta''\mu^{turb}\langle T\rangle\nabla(\overset{0}{\mathbf{q}}{}^{turb})^{s}.$$

Поскольку эти уравнения содержат большее количество переменных, чем их «классические» аналоги, то при моделировании реальных турбулентных процессов требуется поставить дополнительные граничные условия. Таким образом, требование положительности $\sigma^{(i)}_{S_{turb}}$ позволяет определить окончательный вид конститутивных соотношений (50) и (51) для турбулентного потока тепла и тензора рейнольдсовых напряжений, сочетаемых со вторым началом термодинамики. Заметим, что, введение в рассмотрение нелинейных членов привело бы к возникновению проблем, касающихся интерпретации второго закона. В частности, при рассмотрении аппроксимаций второго порядка в соотношениях (40) и (41) невозможно с уверенностью определить знаки коэффициентов r_{ij}.

4. Заключение

В статье на основе формализма РНТ рассмотрен новый подход к выводу эволюционных уравнений для турбулентных потоков (одноточечных моментов второго порядка), который был продемонстрирован на простейшем примере турбулизованной однокомпонентной жидкости. Он представляется более адекватным существу проблемы феноменологического моделирования турбулентности по сравнению с ранее развитым термодинамическим подходом (в рамках КНТ) к выводу градиентных замыкающих соотношений (Kolesnichenko, Marov, 1985), поскольку не требует априорного предположения о локальном равновесии, или некоторого «внутреннего равновесия» в структуре турбулентности и даёт средства для получения замыкающих дифференциальных уравнений для потоков, согласующихся со вторым законом термодинамики. В отличие от градиентных соотношений для турбулентных потоков, подобного рода дифференциальные уравнения пригодны для исследования как эредитарных явлений (явлений с предысторией, с памятью), так и нелокальных и нелинейных эффектов. Таким образом, модели турбулентности второго порядка, лежащие в основе так называемого инвариантного метода моделирования развитой турбулентности, получают в рамках РНТ термодинамическое обоснование. К сожалению, поскольку формализм РНТ, обеспечивающий наиболее глубокую связь между неравновесной термодинамикой и гидродинамикой, был развит относительно недавно, то большинство разработанных чисто динамических моделей замыкания в турбулентности не нашло адекватного термодинамического обоснования. Проблемы, связанные с термодинамикой, при конструировании этих моделей просто игнорировались и проводились в основном исследования только динамических аспектов поведения турбулизованной среды. По этой причине, по мнению автора, большинство существующих полуэмпирических дифференциальных моделей турбулентности разнообразных сред (например, полуэмпирические модели турбулентного горения) нуждаются в проверке на соответствие второму закону термодинамики.

Вместе с тем, совершенно ясно, что изложенный в статье подход, основанный на выборе только лишь потоков первого порядка $\mathbf{q}^{turb}$ и $\overset{0}{\mathbf{R}}$ в качестве переменных состояния, также является ограниченным, поскольку не может быть использован для описания полного высокочастотного спектра турбулентности. Выбор потоков $\mathbf{q}^{turb}$ и $\overset{0}{\mathbf{R}}$ полезен лишь в тех случаях, когда уравнения эволюции для этих величин имеют вид (50) и (51) и анализ процесса турбулентности может быть ограничен рассмотрением экспоненциальной релаксации динамики турбулентных потоков. В случае, когда частота турбулентных пульсаций становится слишком большой по сравнению с обратной величиной времени релаксации потоков первого порядка, потоки (моменты) высоких порядков ведут себя как независимые переменные и должны быть учтены при моделировании. Другими словами, при наиболее полном описании быстрых высокочастотных явлений в качестве дополнительных переменных необходимо, вообще говоря, изначально включать в рассмотрение всё множество потоков высоких порядков (потоки потоков) с последующим их исключением путём нахождения эффективных времён релаксации (позволяющих огрублённо учесть вклад этих исключаемых переменных в описание явления турбулентного переноса). Отметим попутно, что введение потоков высоких порядков открывает возможность для исследования более сложной эредитарной термодинамики, т.е. термодинамики турбулизованных сред с памятью, когда для описания процессов переноса необходимо использовать функционалы памяти, представляемые интегральными операторами (см., например, Учайкин, 2008). Таким образом, введение в рассмотрение потоков высокого порядка открывает возможность для моделирования более сложной динамики турбулентности и, тем самым, служит стимулом для дальнейших исследований турбулентности методами РНТ.

Список литературы

Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 544 с.

Ван Мигем Ж . Энергетика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат. 1977. 326 с.

Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир. 1964. 456 с.

Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. М.: Мир. 1974. 304 с.

Жоу Д., Касас-Бскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. 528 с.

Иевлев В.М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука. 1975. 256 с.

Иевлев В.М. Численное моделирование турбулентных течений. М.: Наука. 1990. 215 с.

Кайзер Дж. Статистическая термодинамика неравновесных процессов. М.: Мир. 1990. 607 с.

Колесниченко А.В. Методы неравновесной термодинамики для описания турбулентных многокомпонентных гидротермодинамических систем с химическими реакциями // Препринт ИПМ АН СССР. М.: 1980. № 66. 22 с.

Колесниченко А.В. Соотношения Стефана-Максвелла и поток тепла для турбулентных многокомпонентных сплошных сред // Проблемы современной механики. К юбилею Л.И. Седова. М.: Изд-во МГУ. 1998. с. 52-76.

Колесниченко А.В. Синергетический подход к описанию развитой турбулентности// Астрон. Вестник. 2002. Т.36. № 2. с. 121-139.

Колесниченко А.В. Синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности астрофизических систем // В сб. «Современные проблемы механики и физики космоса. К юбилею М.Я. Марова». М.: Физматлит, 2003. С. 123-162.

Колесниченко А.В. Термодинамическое моделирование развитой структурной турбулентности при учете флуктуаций диссипации энергии // Астрон. Вестник. 2004. Т.38. № 2. С. 144-170.

Колесниченко А.В. Термодинамическая модель сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности космической плазмы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 61. 48 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-66

Колесниченко А.В. К моделированию сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности аккреционного протопланетного диска // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 66. 47 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-66

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность многокомпонентных сред. М.: МАИК “Наука”. 1999. 336 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009. 632 с.

Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидродинамика. Т. 1. С.–П.: Гидрометеоиздат. 1992. 694 с.

Мюнстер А. Химическая термодинамика. М.: Едиториал УРСС, 2002. 295 с.

Невзглядов В.Г. К феноменологической теории турбулентности // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. № 3. С. 169-173.

Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. М.: Мир. 2002. 461 с.

Проблемы турбулентности. Сборник работ. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2006. 404 с.

Седов Л.И. Мысли об ученых и науке прошлого и настоящего. М.: Наука. 1973. 116 с.

Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука. 1984. 568 с.

Турбулентность: Принципы и применения/ Под ред. У. Фроста и Т. Моулдена. М.: Мир. 1980. 535 с.

Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск. Издательство «Артишок».2008. 512 с.

Хинце И.О. Турбулентность. М.: Физ.-мат. лит. 1963. 680 с.

Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах: Введение в теорию диссипативных структур. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследовыаний. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2004. 255 с.

Blackadar A.K. Extension of the laws of thermodynamics to turbulent system//J. Meteorology. 1955. V. 12. № 9. P. 165-175.

Casas-Vazquez J., Jou D. Temperature in non-equilibrium states: a review of open problems and current proposals // Rep. Prog. Phys. 2003. V. 66. P. 1937-2023.

Cattaneo C. Sulla conduzione del calore // Atti Seminario Mat. Fis. University Modena. 1948. № 3. P. 83-101.

Favre A. Statistical Equations of Turbulents Gases // In: Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics, SIAM, Philadelphia. 1969. P. 231-267.

Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon G, Extended Irreversible Thermodynamics, 3rd ed., Springer. Berlin Heidelberg New York. 2001

Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon G. and Grmela M. A phenomenological scaling approach for heat transport in nano-systems// Appl. Math. Lett. 2005. V. 18. P. 963-967.

Keizer J. On the relationship between fluctuating irreversible thermodynamics and‘extended’ irreversible thermodynamics// J. Stat. Phys. 1983. V. 31. P. 485-497.

Keller L.V., Friedman A.A. Differentialgleichungen fur die turbulente Bewegung einer kompressiblen Flussigkeit.–In: Proc. I Intern. Congress Appl. Mech., Delft. 1924. S. 395-405.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Methods of nonequilibrium thermodynamics for description of multicomponent turbulens gas mixture //Arch.Mech. 1985. V. 37. № 1-2. P. 3-19.

Lebon G., Casas-Vazquez J. and Jou D. Questions and answers about a thermodynamic theory of the third type // Contemp. Phys. 1992. V.33. P. 41-51.

Lebon G., Torrissi M. and Valenti A. A nonlocal thermodynamic analysis of second sound propagation in crystalline dielectrics // J. Phys. 1995. C **7**. P. 1461-1474.

Lebon G., Jou D., Casas-Vazquez J. Understanding Non-equilibrium Thermodynamics: Foundations, Applications, Frontiers // Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008. 325 p.

Müller I., Ruggeri T. Rational Extended Thermodynamics, 2nd ed. Springer. Berlin. Heidelberg. New York. 1998.

Nettleton R.E., Sobolev S.L. Applications of extended thermodynamics to chemical, rheological and transport processes: a special survey // J. Non-Equilib.Thermodyn. 1995. V. 20. P. 200-229, 297-331.

Truesdell C . Rational Thermodynamics, McGrow-Hill, New York, 1969; 2nd enlarget edition, Springer, New York, 1984.

Оглавление