[ИПМ им.М.В.Келдыша РАН](http://keldysh.ru) • [Электронная библиотека](http://library.keldysh.ru)

[Препринты ИПМ](http://library.keldysh.ru/preprints) • [Препринт № 70 за 2014 г.](http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-70)

Колесниченко А.В.

К теории инверсного каскада энергии в спиральной турбулентности астрофизического немагнитного диска

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

К теории инверсного каскада энергии в спиральной турбулентности астрофизического немагнитного диска

Москва — 2014

Колесниченко А.В.

К теории инверсного каскада энергии в спиральной турбулентности астрофизического немагнитного диска.

Обсуждается роль вихревой спиральности в появлении обратного энергетического каскада Ричардсона−Колмогорова в трёхмерной спиральной турбулентности вращающегося немагнитного астрофизического диска при больших числах Рейнольдса. Включение механизма вихревого динамо в эволюционную модель диска приводит к модификации определяющих соотношений для турбулентного потока тепла и тензора турбулентных напряжений, а также к необходимости привлечения к рассмотрению дополнительных уравнений переноса для осреднённой завихрённости и осреднённой вихревой спиральности. Сделан вывод, что по мере всё более надёжного подтверждения в численных экспериментах концепции инверсного каскада энергии в спиральной турбулентности учёт этого эффекта приобретает важную роль при моделировании процессов образования и эволюции энергоёмких разномасштабных когерентных вихревых структур в астрофизическом немагнитном диске.

Ключевые слова: математическое моделирование, спиральная турбулентность, обратный каскад энергии, отрицательная вязкость.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

On the theory of inverse cascade energy in helical turbulence of astrophysical non-magnetic disk.

The role of the vortex helicity in the appearance of the energy inverse cascade Richardson−Kolmogorov in three-dimensional spiral turbulence of a rotating astrophysical nonmagnetic disk at high Reynolds numbers is discussed. Insert of the mechanism of the vortex dynamo in evolutionary model of a disk leads modification of constitutive relations for the turbulent heat flux and the turbulent stress tensor, and also in necessity of attraction to of additional transport equations for the averaged vorticity and averaged vortex helicity. It is concluded that as more and more reliable in numerical experiments of the concept of the inverse energy cascade in a helical turbulence, the account of this effect gets an important role at modelling of processes of generation of energy-intensive multiscale coherent vortex structures in astrophysical non-magnetic disk.

Key words: mathematical modelling, helical turbulence, inverse cascade of energy, negative viscosity.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время весьма интенсивно исследуются разнообразные когерентные (диссипативные) структуры в турбулентной несжимаемой жидкости (см., например, [1-6]), которые оказывают сильное влияние на различные динамические характеристики течения. С фактической точки зрения наиболее богата подобными структурами развитая турбулентность в термодинамически открытой (в смысле Шрёдингера) системе, когда при очень больших числах Рейнольдса нарушаются различные симметрии (пространственные переносы, сдвиги по времени, вращения, галилеевы и масштабные преобразования и др.), допускаемые уравнениями Навье–Стокса и краевыми условиями [7,8]. В этом случае в турбулентном течении самоорганизовываются разнообразные пространственно-временные когерентные образования, такие как вихревые нити, спирали и клубки, турбулентные пятна, берстинги и т. п. Однако в тех случаях, когда поток свободен от внешнего принуждения (связанного, например, с крупномасштабным сдвигом скорости при вращении космического объекта), развитая турбулентность в пределе бесконечно больших чисел Рейнольдса имеет, как известно, тенденцию восстанавливать (в статистическом смысле) нарушенные симметрии вдали от границ течения (см. [9]). В этой связи уместно заметить, что знаменитая аналитическая теория локальной турбулентности Колмогорова [10-12] по существу базируется на гипотезе восстановления разномасштабных нарушений однородности, изотропности и зеркальной симметричности турбулентного течения на малых масштабах $l \ll l_0$ (здесь l_0 – характерный масштаб крупных энергосодержащих вихрей). В рамках этой теории взаимодействие возмущения поля скоростей больших вихрей с мелкомасштабной турбулентностью носит характер затухания этого возмущения из-за турбулентной вязкости и передачи его кинетической энергии по каскаду вихрей различных пространственно-временных масштабов в область мелкомасштабных пульсаций. Собственно, по этой причине существование долгоживущих вихревых структур с масштабом $l \gg l_0$ в «обычной» зеркально-симметричной турбулентности несжимаемой жидкости представляется маловероятным.

Вместе с тем существует турбулентность, которая и при очень больших числах Рейнольдса не восстанавливает нарушенную отражательную симметрию (закон чётности) поля пульсационных скоростей в случае преобразования $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ координат. Примером такой турбулентности является пульсирующее поле скоростей в конвективной зоне астрофизического аккреционного диска: средние свойства этого поля не остаются инвариантными при зеркальном отражении в его экваториальной плоскости. Подобная турбулентность, как известно, называется спиральной (или гиротропной) и возникает под влиянием массовых сил с псевдовекторными свойствами (например, силы Кориолиса, магнитного поля и т.п.). В частности, реальная турбулентность во вращающемся солнечном протопланетном диске имеет спиральный характер (см., например, [13-15]). Это связано с тем, что мелкомасштабное пульсационное поле скоростей $\mathbf{u}'$ при наличии вращения дискового вещества с постоянной угловой скоростью Ω_0 (аксиальный вектор) и анизотропии, вызванной, например, воздействием поля силы тяжести $\mathbf{g}$ (которое может быть полем интенсивности турбулентности или полем вертикального градиента температуры $\nabla\theta$ (полярные векторы)), не обладает отражательной симметрией относительно экваториальной плоскости диска, т.е. относительно преобразования $z \to -z$. По этой причине в диске генерируется так называемая плотность спиральности $\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}'$ (скалярное произведение полярного вектора скорости $\mathbf{u}'$ и аксиального вектора завихрённости $\boldsymbol{\omega}' = \nabla \times \mathbf{u}'$), которая, в конечном счёте, и приводит к возникновению гиротропной турбулентности. Последнее означает, что в подобном анизотропном мелкомасштабном пульсационном поле скоростей вихревые левовращательные движения в совокупности могут быть более вероятными, чем правовращательные, или наоборот.

Впервые на важность влияния спиральности локализованных вихревых возмущений на эволюцию гидродинамической турбулентности обратил внимание Моффат [16], который и нашёл связанный с ней интегральный инвариант $\mathrm{H} = \langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle$ [1)] (осреднённая вихревая спиральность), являющийся мерой зацеплённости силовых линий вихревого поля (см., например, [15,17-19]). Средняя вихревая спиральность − псевдоскаляр, который не является положительно определённой величиной и меняет знак при переходе от левой к правой системе координат (или наоборот). Здесь уместно напомнить, что только благодаря введению в рассмотрение вихревой спиральности и так называемой перекрёстной магнитной спиральности $\mathrm{H}^{\mathrm{M}} = \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{B}' \rangle$ для адекватного описания магнитогидродинамической турбулентности (не обладающей зеркальной симметрией) удалось объяснить важнейший механизм турбулентного динамо в астрофизике (так называемый α−эффект), отвечающий за генерацию и поддержание крупно-

[1)] В качестве операции осреднения далее используется статистико-математическое осреднение по ансамблю возможных реализаций случайных термо- и гидродинамических полей [9].

масштабных магнитных полей $\langle \mathbf{B} \rangle$ планет, звёзд и галактик (см., например, [14,15,20-22]).

Важно также отметить, что для однородного бездивергентного (соленоидального) поля пульсационных скоростей $\mathbf{u}'$ лишённая отражательной симметрии вихревая спиральность $H = \langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle$ сохраняется в инерционной области (в которой вязкие эффекты диссипации энергии несущественны) энергетического спектра, т.е. в этой области существует ещё один (при $\nu \to 0$), помимо турбулентной энергии $b \equiv \langle |\mathbf{u}'|^2 / 2 \rangle$, дополнительный невязкий инвариант [8]. Это обстоятельство приводит, вообще говоря, к полному изменению характера процесса передачи кинетической энергии по каскаду вихрей Ричардсона–Колмогорова в спиральной трёхмерной турбулентности, поскольку теперь уже две величины b и H одновременно могут переноситься по спектру турбулентных пульсаций от одних масштабов к другим. При этом каскадный процесс переноса энергии по иерархии турбулентных вихрей определяется уже двумя параметрами – скоростью диссипации турбулентной энергии ε и скоростью диссипации вихревой спиральности ε_H. Другими словами, если энергия и спиральность вносятся в поток на некоторых промежуточных масштабах волновых чисел k ($k_0 << k << k_\nu$), далеких от диссипативного масштаба k_ν и от масштаба энергоснабжения k_0, то обе величины ε и ε_H определяют процесс передачи энергии по спектру. По аналогии с двухмерной «обычной» зеркально-симметричной турбулентностью, когда при свободной эволюции потока возможен инверсный каскадный перенос энергии от мелкомасштабных к крупномасштабным вихрям (сопровождающийся одновременным переносом энстрофии $\Omega \equiv \langle |\boldsymbol{\omega}'|^2 / 2 \rangle$ в сторону малых вихрей [9]), для гиротропной трёхмерной турбулентности также допустим режим, при котором реализуется обратный каскад турбулентной энергии [23,24]. При его реализации инварианты b и H переносятся к противоположным концам инерционного спектра по волновым числам: спиральность – к мелким масштабам, а турбулентная энергия – к более крупным масштабам [25-29], что позволяет перекачать часть энергии мелкомасштабной турбулентности в энергию крупномасштабных вихревых структур. Таким образом, спиральная турбулентность имеет дополнительный канал сброса пульсационной энергии, которым и оказывается механизм генерации крупно- и мезомасштабных вихревых структур (обратный тому, что, как правило, имеет место в «обычной» турбулентности), приводящий к передаче части энергии мелкомасштабной турбулентности в область больших масштабов. По этой причине спиральная турбулентность может повышать устойчивость крупных энергетически ёмких турбулентных вихрей, увеличивая время их жизни (см., например, [30-36]). Этот механизм естественно трактовать как вихревое динамо.

Другим специфическим проявлением спиральной турбулентности в трёхмерной гидродинамике является наличие эффекта отрицательной турбулентной вязкости ν^{T}. В природе отрицательная вязкость обнаруживается в глобальных (крупномасштабных) циркуляциях вещества на Солнце, Юпитере, Сатурне, Венере (вероятно, также на Уране и Нептуне), в глобальных течениях в земной атмосфере и в океане [37-39]. Обычно для объяснения этого реально наблюдаемого эффекта, который, как известно, связан с инверсным энергетическим каскадом, принято привлекать теорию умозрительной[2)] двухмерной турбулентности, поскольку многие геофизические и астрофизические течения на сферических поверхностях космических тел могут быть исследованы в рамках квазидвухмерных гидродинамических уравнений, содержащих специальные дополнительные слагаемые, например, слагаемые с линейным трением в вязком погранслое [39-41]. По-видимому, подобный подход иногда допустим и при моделировании дисковой турбулентности, поскольку вращательным движениям космического вещества в тонких астрофизических дисках также присущи отдельные черты двухмерной геометрии (см., например, [42,43]). Однако при этом возникает чисто формальная проблема: следует ожидать чрезмерного накопления энергии в вихрях некоторых больших масштабов, лежащих между масштабом накачки и характерным размером системы. В двухмерной модели дисковой турбулентности (турбулентности без чётко выраженных твёрдых границ) избавиться от указанного затруднения нелегко, поскольку в этом случае необходимо вводить в рассмотрение некую виртуальную длинноволновую диссипацию (вступая при этом на путь чисто произвольных допущений), приводящую, в конечном счете, к отводу энергии из двухмерных вихрей на энергосодержащих масштабах. Таким образом, без учёта законов симметрии реального (трёхмерного) турбулентного поля бывает нелегко построить вполне адекватную математическую модель процессов эволюции космической газовой массы во вращающемся астрофизическом объекте.

[2)] Напомним, что истинно двухмерная турбулентность не реализуется в реальных течениях жидкости, поскольку механизм интенсификации вихревого поля за счёт растяжения вихревых трубок, лежащий в основе процесса переноса энергии к малым масштабам (с одновременным ростом завихрённости), имеет принципиально трёхмерную природу.

Остановимся ещё на одной особенности спиральной турбулентности в астрофизическом немагнитном диске. Как уже отмечалось, спиральная турбулентность в электропроводящей космической жидкости благодаря α−эффекту генерирует и поддерживает крупномасштабные магнитные поля звёзд и планет. В работе [34] было показано, что, несмотря на формальную аналогию линейного уравнения индукции для магнитного поля $\mathbf{B}$ и нелинейного уравнения для завихрённости $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ в вязкой непроводящей жидкости, для однородной изотропной турбулентности при наличии только одной спиральности аналог подобного эффекта для завихрённости отсутствует. Тем не менее, спиральная турбулентность в астрофизических объектах, в которых существуют и другие факторы нарушения симметрии движения космического вещества (связанные, например, с силой Кориолиса или с наличием градиента температуры), часто способна действовать как генератор крупно- и мезомасштабного вихревого поля, усиливая и укрупняя вихри и тем самым порождая разнообразные когерентные вихревые образования.

В связи с этим следует отметить, что теория возникновения крупномасштабных вихревых структур за счёт механизма вихревого динамо развивалась в работах [32-34,44-46] в основном применительно к турбулентной атмосфере и океану. Особое внимание в этих работах было уделено спиральности, образующейся под воздействием силы Кориолиса. Авторами была изучена задача о конвекции подогреваемой снизу жидкости, находящейся в плоскопараллельном слое. Ими было показано, что закручивание возникающих над перегретой поверхностью океана конвективных ячеек и рост их размеров из-за эффекта вихревого динамо приводит к формированию в спиральной атмосфере одного крупного вихря, который может быть интерпретирован как тропический циклон, возникающий над перегретой поверхностью океана.

К сожалению, вопрос о возможном влиянии эффекта вихревого динамо на синергетическое структурирование вещества в астрофизических объектах обсуждается в литературе крайне редко[3)] (см., в частности, [13,42,47]). В данной работе предполагается рассмотреть эту проблему с учётом результатов численных экспериментов, доказывающих реальное существование обратного энергетического каскада в трёхмерной спиральной турбулентности (см. [26-29,48]). При этом наша основная идея сводится к следующему: поскольку в последнее время эффект инверсного каскада энергии в спиральной турбулентности всё более надёжно подтверждается в численных экспериментах, то включение в

[3)] Заметим, что за последние десять лет выполнено огромное число работ, посвящённых моделированию эволюции гиротропной МГД−турбулентности в астрофизических дисках.

математическую модель эволюции астрофизического немагнитного диска механизма вихревого динамо, способствующего структурированию в нём космических газовых масс, приобретает всё более веское основание. Исходя из этих соображений, содержание представленной работы можно рассматривать как теоретическую основу для численного моделирования широкого класса гидродинамических процессов в протопланетном немагнитном диске (окружавшем, в частности, наше Солнце на ранней стадии его существования), для которых специфика механики спиральной турбулентности играет существенную роль.

1.ОСРЕДНЁННЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим астрофизическую турбулентность при наличии стратификации жидкости и вращения изучаемого космического объекта. Далее для простоты будем считать, что жидкость несжимаема (это означает, что мы исключаем из рассмотрения некоторые явления, связанные с понятием скорости звука), а допустимые небольшие вариации плотности обусловлены исключительно изменчивостью температуры. Тогда, в соответствии с приближением Буссинеска, непостоянство плотности проявляется только в виде архимедовой силы, входящей в уравнение движения. При описании реального течения в виде суммы средней $\langle f \rangle$ и пульсационной f' составляющих гидродинамических полей $f(\mathbf{x},t)$, осреднённые гидродинамические уравнения для турбулизованной жидкости, записанные в системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω_0, имеют вид [4)]:

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0, \tag{1}$$

$$\frac{D\langle \mathbf{u} \rangle}{Dt} = -\nabla \langle P \rangle - 2\Omega_0 \times \langle \mathbf{u} \rangle + \nu \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla \cdot \mathbf{R} - \alpha_\theta (\langle \theta \rangle - \theta_0)\mathbf{g}, \tag{2}$$

$$\frac{D\langle \theta \rangle}{Dt} \cong -\nabla \cdot \mathbf{q}_\theta^T + \kappa_\theta \nabla^2 \langle \theta \rangle + \Phi_D. \tag{3}$$

Здесь $D/Dt = \partial/\partial t + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla$ – индивидуальная производная по времени для осреднённого континуума; $\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x},t)$, $\langle p \rangle(\mathbf{x},t)$, $\langle \theta \rangle(\mathbf{x},t)$ – соответственно осред-

---

[4)] Следует отметить, что уравнение притока тепла (3) записано здесь для случая развитой турбулентности, когда в структуре пульсационного поля гидродинамических параметров устанавливается такое квазистационарное состояние, при котором турбулентная энергия приблизительно сохраняется как во времени, так и в пространстве [49].

нённые поля скорости, давления и температуры; $\mathbf{g}$ – сила тяжести на единицу массы жидкости (далее будем считать, что вектор $\mathbf{g}$ направлен вниз, а ось z – вверх, так что $\mathbf{g} = -\mathbf{i}_z g$; $\mathbf{i}_z$ – вертикальный орт); $\rho_0(z)$, $\theta_0(z)$ – значения плотности и температуры в покоящейся стратифицированной по направлению силы тяжести среды, удовлетворяющие уравнению гидростатики $\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}$ и уравнению состояния $p_0 = p_0(\rho_0, \theta_0)$; ν, $\kappa_\theta = \lambda_\theta / \langle\rho\rangle c_p$ – соответственно молекулярные коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности; α_θ – коэффициент термического расширения (для идеального газа $\alpha_\theta = 1/\theta$); $\mathbf{R}(\mathbf{x},t) \equiv -\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$, $\mathbf{q}_\theta^T(\mathbf{x},t) \equiv \langle \theta' \mathbf{u}' \rangle$ – одноточечные корреляционные моменты второго порядка, имеющие соответственно смысл сдвиговых турбулентных напряжений (тензор Рейнольдса) и турбулентного потока тепла; $\Phi_D = c_p^{-1} \mathbf{R} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle$ – так называемая «диссипативная» функция.

Определяющие соотношения для локально изотропной турбулентности

Статистические характеристики и трансформационные свойства пульсирующих мелкомасштабных полей $\mathbf{u}'$ и θ' играют, как известно, ключевую роль в проблеме замыкания цепи моментных уравнений в турбулентности (в частности, уравнений для средних моментов низкого порядка), поскольку именно они обусловливают характер определяющих соотношений, связывающих турбулентные потоки количества движения $\mathbf{R}$ и температуры $\mathbf{q}_\theta^T$ с крупномасштабными полями $\langle \mathbf{u} \rangle$ и $\langle \theta \rangle$, определяя к тому же и саму структуру турбулентных коэффициентов переноса. Напомним, что мелкомасштабное турбулентное поле является изотропным, когда любая характеризующая его статистическая величина инвариантна относительно поворотов системы отсчета. Если, кроме этого, все осреднённые характеристики инвариантны при отражении $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ в произвольной плоскости, то турбулентное поле является зеркально-симметричным. Далее мы будем различать эти два вида симметрии.

Часто для реальной, достаточно развитой астрофизической турбулентности, подверженной слабому воздействию массовых сил с псевдовекторными свойствами, вполне допустимым приближением является классическая модель локально изотропной (однородной, изотропной и зеркально-симметричной) турбулентности, позволяющая в ряде случаев правдоподобно описывать и крупномасштабную (например, спиральную) структуру турбулентного течения в каком-либо космическом объекте, например, в Галактике [50]. Согласно концепции Колмогорова [10,11] в пределе больших чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} >> 1$ (здесь $\mathrm{Re} \equiv u_0 l_0 / \nu$, $u_0 = \sqrt{\langle |\mathbf{u}'|^2 \rangle}$ – характеристическая скорость пульсационного поля скорости) мелкомасштабное турбулентное поле гидродинамических параметров является локально изотропным, т.е. инвариантным относительно любых параллельных переносов, вращений и зеркальных отражений. В этом традиционном случае часто можно ограничиться следующими градиентными соотношениями для симметричного тензора Рейнольдса $\mathbf{R}(\mathbf{x},t)$ и вектора турбулентного переноса тепла $\mathbf{q}_\theta^T(\mathbf{x},t)$:

$$\mathbf{R} \equiv -\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle = -\tfrac{2}{3} b\,\mathbf{I} + 2\nu^T \mathbf{S}, \qquad (\nu^T = C_b b^2/\varepsilon, \quad C_b = 0.09), \tag{4}$$

$$\mathbf{q}_\theta^T \equiv \langle \theta' \mathbf{u}' \rangle = -\kappa_\theta^T \left(\nabla \langle \theta \rangle - \nabla \langle \theta \rangle_{ad} \right), \quad (\kappa_\theta^T = \nu^T / \sigma_\theta, \quad \sigma_\theta = 0.7 - 1). \tag{5}$$

Здесь $b \equiv \langle |\mathbf{u}'|^2 / 2 \rangle$ – турбулентная энергия; $\varepsilon \equiv (\nu/2) \langle (\partial u'_k / \partial x_j + \partial u'_j / \partial x_k)^2 \rangle$ – диссипация турбулентной энергии (величина, характеризующая скорость превращения турбулентной энергии b в тепловую энергию по мере того, как мелкие вихри $\boldsymbol{\omega}' = \nabla \times \mathbf{u}'$ деформируются под действием вязких напряжений); $(\mathbf{S})_{jk} = \tfrac{1}{2} \left(\partial \langle u_k \rangle / \partial x_j + \partial \langle u_j \rangle / \partial x_k \right)$ – симметричный тензор деформации среднего поля скорости; $\nabla \langle \theta \rangle_{ad}$ – адиабатический градиент средней температуры (для идеального газа $\nabla \langle \theta \rangle_{ad} = \mathbf{g} / c_p = -\mathbf{i}_z g / c_p$); ν^T, $\kappa_\theta^T = \lambda_\theta^T / \langle \rho \rangle c_p$ – соответственно турбулентные коэффициенты вязкости и температуропроводности; $\mathbf{I}$ – единичный тензор Кронекера, $(\mathbf{I})_{jk} = \delta_{jk}$. Для расширения области применения определяющих соотношений (4)-(5) на более реалистичный случай отсутствия внутреннего равновесия между полем мелкомасштабной турбулентности и полем осреднённых параметров течения в астрофизической литературе нередко используется один из вариантов полуэмпирической модели Прандтля–Колмогорова, например, «$b - \varepsilon$» модель.

Для жидкости со свойствами Буссинеска уравнение переноса для кинетической энергии турбулентных пульсаций b принимает вид

$$\frac{Db}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_b^T = \mathbf{R} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle - \alpha_\theta \mathbf{q}_\theta^T \cdot \mathbf{g} - \varepsilon, \tag{6}$$

где

$$\mathbf{J}_b^T \equiv \left\langle \left(|\mathbf{u}'|^2/2 + p'\right)\mathbf{u}' - \nu\nabla|\mathbf{u}'|^2/2 \right\rangle = -\left(\nu + \frac{\nu^T}{\sigma_b}\right)\nabla b, \quad (\sigma_b = 0.6) \qquad (7)$$

– диффузионный поток энергии b, связанный с различными механизмами её турбулентного переноса в координатном пространстве; величина $-\alpha_T \mathbf{q}_\theta^T \cdot \mathbf{g}$, определяемая в рассматриваемом случае формулой

$$-\alpha_\theta \mathbf{q}_\theta^T \cdot \mathbf{g} = \frac{\nu^T}{\sigma_\theta}\frac{\mathbf{g}}{\langle\theta\rangle}\cdot\left(\nabla\langle\theta\rangle - \frac{\mathbf{g}}{c_p}\right) \cong -\frac{\nu^T}{\sigma_\theta}\frac{g}{\langle\theta\rangle}\left(\frac{\partial\langle\theta\rangle}{\partial z} + \frac{g}{c_p}\right),$$

описывает генерацию энергии b, обусловленную неоднородным распределением температуры в стратифицированной в поле силы тяжести космической газовой среде. Заметим, что для самоподдерживающегося турбулентного поля скорость диссипации ε должна иметь тот же порядок величины, что и скорость генерации турбулентности сдвиговым потоком $\mathbf{R} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle = \nu^T \nabla\langle\mathbf{u}\rangle : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle$. Уравнение (6) удобно представить в виде

$$\frac{Db}{Dt} - \nabla\cdot\left(\frac{\nu^T}{\sigma_b}\nabla b\right) = \nu^T\left(\nabla\langle\mathbf{u}\rangle : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle\right)\left(1 - \frac{1}{\sigma_\theta}\mathrm{Ri}\right) - \varepsilon, \quad (\nu^T = C_b b^2/\varepsilon), \qquad (6^*)$$

где

$$\mathrm{Ri} \equiv \frac{\mathbf{g}}{\langle\theta\rangle}\cdot\left(\nabla\langle\theta\rangle - \frac{\mathbf{g}}{c_p}\right) / \left(\nabla\langle\mathbf{u}\rangle : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle\right) \qquad (8)$$

– градиентное число Ричардсона, учитывающее влияние термической стратификации среды на эволюцию турбулентности. Из (6^*) следует, что если число Ричардсона меньше его критического значения, $\mathrm{Ri} < \mathrm{Ri}_{cr} = \sigma_\theta$, то турбулентная энергия генерируется сдвигом скорости; когда $\mathrm{Ri} \to \sigma_\theta$, то соответствующая сумма членов в уравнении баланса турбулентной энергии обращается в нуль, а это означает, что турбулентное движение не поддерживается. Если $\mathrm{Ri} > 0$ (архимедова сила является возвращающей, стратификация гидростатически устойчива), то турбулентность тратит энергию на работу против архимедовой силы и потому развивается относительно слабо. При $\mathrm{Ri} < 0$ сила Архимеда, которая в этом случае является ускоряющей (стратификация неустойчива), всегда служит дополнительным источником энергии турбулентной конвекции.

Второе необходимое для замыкания системы (1)-(5) уравнение, а именно – уравнение для скорости диссипации турбулентной энергии

$$\varepsilon \equiv \nu\langle(\partial_j u'_k)^2\rangle = \nu\langle\,|\boldsymbol{\omega}'|^2\,\rangle = 2\nu\Omega,$$

в приближении Буссинеска принимает вид

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} \equiv \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \nabla(\langle\mathbf{u}\rangle\varepsilon) = -\nabla\cdot\mathbf{J}^{T}_{\varepsilon} + C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{b}\left(\mathbf{R}:\nabla\langle\mathbf{u}\rangle - \alpha_\theta \mathbf{q}^{T}_{\theta}\cdot\mathbf{g}\right) - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{b}\ , \qquad (9)$$

где

$$\mathbf{J}^{T}_{\varepsilon} \equiv \left\langle \nu(\nabla\mathbf{u}':\nabla\mathbf{u}')\mathbf{u}' + 2\nu\nabla\mathbf{u}'\cdot\nabla p' - \nu\nabla|\boldsymbol{\omega}'|^2 \right\rangle = -\left(\nu + \frac{\nu^{T}}{\sigma_\varepsilon}\right)\nabla\varepsilon \qquad (10)$$

– диффузионный турбулентный поток скорости диссипации ε, связанный с различными механизмами её турбулентного переноса в координатном пространстве $\mathbf{x}$; $C_{\varepsilon 1} = 1.43$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$, $\sigma_b = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1.13$ – универсальные константы.

Решение системы уравнений (1)-(3), (6) и (9) зависит от начальных и граничных условий, налагаемых на величины $\langle\mathbf{u}\rangle(\mathbf{x},t)$, $\langle\theta\rangle(\mathbf{x},t)$, $b(\mathbf{x},t)$ и $\varepsilon(\mathbf{x},t)$. Необходимость в формулировании этих условий возникает в связи с постановкой конкретных модельных задач, касающихся, например, проблемы воссоздания эволюции немагнитного астрофизического диска. Простейшими граничными условиями для системы (1)-(3) в этом случае оказываются так называемые свободные граничные условия

$$\langle u_z\rangle(\mathbf{x},t)\big|_{\pm h} = 0,\ \ \frac{\partial}{\partial z}\langle u_x\rangle(\mathbf{x},t)\bigg|_{\pm h} = \frac{\partial}{\partial z}\langle u_y\rangle(\mathbf{x},t)\bigg|_{\pm h} = 0,\ \ \langle\theta\rangle(\mathbf{x},t)\big|_{\pm h} = 0, \qquad (11)$$

где $\pm h$ − верхняя и нижняя граница диска.

Из приведённых замыкающих соотношений видно, что коэффициенты $\kappa^{T}_{\theta} = \lambda^{T}_{\theta}/\langle\rho\rangle c_p$ и ν^{T}, являясь функциями осреднённых параметров состояния среды, зависят также от статистических характеристик мелкомасштабного поля пульсационных скоростей $\mathbf{u}'$, таких, как b и ε. Коэффициенты турбулентной вязкости ν^{T} и теплопроводности λ^{T}_{θ} обычно считаются положительными величинами. Однако, как уже упоминалось выше, для двухмерного течения было показано, что турбулентная вязкость может быть отрицательной величиной [39, 41]. В этой связи важно иметь в виду, что, в отличие от молекулярных коэффициентов вязкости ν и теплопроводности λ_θ (характеризующих физические свойства жидкости), положительность которых имеет глубокое обоснование, например, в термодинамике необратимых процессов [51], положительность турбулентных коэффициентов переноса (характеризующих статистические свойства турбулентного движения) не имеет термодинамического доказательства.

В работе автора [52], посвящённой термодинамическому моделированию процессов переноса в турбулизованной жидкости, было показано, что в подсистеме вихревого хаоса, отвечающей мелкомасштабным пульсациям структурных параметров (стохастический компонент турбулентного течения), по мере развития турбулентности устанавливается квазистационарный режим между отбором энергии у "внешней среды" (связанной с осреднённым турбулентным движением) и потерей энергии из-за диссипативных процессов в самом вихревом континууме, при котором производство энтропии хаоса компенсируется её оттоком в подсистему осреднённого движения. Другими словами, для поддержания такого квазистационарного состояния внутри открытой подсистемы турбулентного хаоса необходим приток отрицательной энтропии (негэнтропии) от "внешней среды". Именно эта поступающая в подсистему мелкомасштабных вихрей негэнтропия расходуется на возникновение и последующую эволюцию в ней мезомасштабных пространственно-временных вихревых структур. Подобное явление относится к всё ещё недостаточно изученной тенденции турбулентного течения самоорганизовываться при больших числах Рейнольдса в крупно-и мезомасштабные когерентные вихревые образования [53].

Своеобразие термодинамического подхода к выводу определяющих соотношений в турбулизованной жидкости состоит в том, что исключение одной термодинамической силы X_k (или части сил) может менять всю матрицу онзагеровских феноменологических коэффициентов L_{kj}. Если это обстоятельство имеет место, то становится необязательным обычное требование положительной определённости каждого отдельного слагаемого в выражении для полного производства энтропии $\sigma_S = \sum_{k,j} L_{kj} X_k X_j > 0$ в системе. Вследствие этого суперпозиция различных термодинамических потоков J_k в системе может приводить, вообще говоря, к отрицательным значениям некоторых диагональных элементов матрицы феноменологических коэффициентов L_{kj} и, тем самым, к отрицательным значениям отдельных коэффициентов турбулентного обмена. В работе автора [49] в рамках термодинамического подхода была показана возможность отрицательных значений коэффициента турбулентной вязкости ($\nu^{T} < 0$) для некоторых видов трёхмерных течений, которая для развитой гиротропной турбулентности может быть реализована благодаря воздействию вихревого динамо, в котором мелкомасштабная турбулентность усиливает и укрупняет вихри, порождая крупные вихревые образования.

В заключение заметим, что функции Φ_{D}, с учетом соотношения Прандтля (4), можно придать следующий вид:

$$\Phi_{D} = \frac{1}{c_{p}} \mathbf{R} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle = 2 \frac{\nu^{T}}{c_{p}} \mathbf{S} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle = \frac{\nu^{T}}{2c_{p}} \left(\frac{\partial \langle u_{k} \rangle}{\partial x_{j}} + \frac{\partial \langle u_{j} \rangle}{\partial x_{k}} \right)^{2} .$$

Из этого соотношения следует, что если $\nu^{T} < 0$, то функция Φ_{D} также будет отрицательной, т.е. в этом случае турбулентная энергия мелкомасштабных пульсаций (см. уравнение (6)) уже «не диссипирует», а наоборот, расходуется на генерирование крупно- и мезомасштабных когерентных вихревых структур. Следовательно, при наличии отрицательной турбулентной вязкости осреднённое течение (включая крупномасштабные вихревые образования) получает кинетическую энергию от мелкомасштабных вихревых движений

$$D(|\langle \mathbf{u} \rangle|^{2} / 2) / Dt = -\mathbf{R} : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \ldots \;\; ;$$

при этом сами хаотические вихревые движения либо постепенно ослабевают (см. (6)), либо поддерживаются за счёт локального притока тепла в систему, связанного с некоторыми внутренними процессами [37], например, в случае химически активной среды с регулярным преобразованием «химического» тепла в кинетическую энергию мелкомасштабных возмущений. В частности, для влажной гиротропной атмосферы Земли мелкомасштабная турбулентность может поддерживаться за счёт скрытых потоков тепла при конденсации водяного пара [54].

Итак, в случае зеркально-симметричной турбулентности определяющие соотношения (4) и (5), совместно с уравнениями (6) и (9) полностью замыкают гидродинамические уравнения (1)-(3) для осреднённых полей скорости $\langle \mathbf{u} \rangle$ и температуры $\langle \theta \rangle$. Однако практика моделирования показала, что подобный подход, не учитывающий возможности образования разномасштабных когерентных вихревых структур, оказывающих сильное влияние на динамику течения космического вещества, имеет узкую область применения при анализе процессов турбулентного переноса в немагнитном астрофизическом диске.

2. СПИРАЛЬНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Перейдем теперь к рассмотрению зеркально-несимметричной турбулентности в диске. Отметим, прежде всего, что при существовании зеркальной симметрии мелкомасштабного поля пульсационных скоростей $\mathbf{u}'$ вихревая спиральность H (в случае преобразования $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ координат) должна оставаться, с одной стороны, неизменной, поскольку все статистические свойства этого поля не меняются при зеркальном отражении, но с другой стороны она должна изменить знак, поскольку H–псевдоскаляр. Поэтому для зеркально-симметричной турбулентности $\mathrm{H} = 0$. Таким образом, величина $\mathrm{H} \neq 0$, связанная с топологической структурой сложного поля завихрённости, является фундаментальной мерой «отсутствия отражательной симметрии» в турбулентности. При этом следует иметь в виду, что поле $\mathbf{u}'$ с отличной от нуля средней спиральностью, представляющее из себя анизотропный континуум, образованный совокупностью произвольно ориентированных мелкомасштабных вихрей (в котором, однако, правовращательные вихревые структуры более вероятны, чем левовращательные, или наоборот), может не проявлять зеркальную симметрию только лишь по отношению к одной плоскости.

Примером такого поля является турбулентное поле пульсационных скоростей во вращающейся конвективной зоне солнечного протопланетного диска, когда возможно генерирование спиральности под воздействием кориолисовой силы $2\Omega_0 \times \langle \mathbf{u} \rangle$ и стратификации массовой плотности в поле силы тяжести $\mathbf{g}$. Средние свойства такого поля не остаются инвариантными при отражениях относительно центральной плоскости диска, $\mathrm{z} \to -\mathrm{z}$. Важно иметь в виду, что для спиральной турбулентности определяющие соотношения (4) и (5) уже не вполне пригодны и нуждаются в определённой модификации, учитывающей анизотропию поля мелкомасштабной турбулентности (см., например, [14,49,57-60]). Более того, в случае спиральной турбулентности закон парности (симметричности) тензора Рейнольдса $\mathbf{R}$ может нарушаться на макроуровне[5)],

---

[5)] При пространственном осреднении гидродинамических уравнений для мгновенного движения, исключающем традиционный рейнольдсовский постулат о коммутативности операций осреднения и дифференцирования, получается осреднённое уравнение движения с несимметричным тензором Рейнольдса $\mathrm{R}_{ij} \equiv \mathrm{Q}_{ij}(\mathbf{x}, 0, t, 0)$, где $\mathrm{Q}_{ij}(\mathbf{x}, \xi, t, \tau) = \langle \mathrm{u}'_i(\mathbf{x}, t) \mathrm{u}'_j(\mathbf{x} + \xi, t + \tau) \rangle$ – несимметричный корреляционный тензор второго порядка [55].

$R_{ij} \neq R_{ji}$ [6,55,60-63]. Прежде чем привести возможный вариант такого рода обобщённых реологических соотношений для турбулентных потоков $\mathbf{R}$ и $\mathbf{q}_\theta^T$, рассмотрим ключевое при моделировании процессов переноса в гиротропной турбулентности эволюционное уравнение для осреднённой вихревой спиральности H.

Уравнение переноса для вихревой спиральности

Вывод уравнения для вихревой спиральности $H \equiv \langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle$ приведён в работе автора [64]. В предположении, что система координат вращается вокруг фиксированной в пространстве оси 0z с постоянной угловой скоростью Ω_0, это уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{DH}{Dt} \equiv \frac{\partial H}{\partial t} + (\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla) H = -\nabla \cdot \left\{ \mathbf{J}_H^T - \nu \nabla H \right\} +$$

$$+\mathbf{R} : \nabla \langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle - (\mathbf{G}^\omega - \nabla b) \cdot \langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle - \alpha_\theta \mathbf{g} \cdot \langle \theta' \boldsymbol{\omega}' \rangle - \varepsilon_H, \qquad (12)$$

где $\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega} + 2\Omega_0$ – так называемый абсолютный вихрь;

$$\mathbf{J}_H^T \equiv \left\langle \left(\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \right) \mathbf{u}' - \left(\tfrac{1}{2} |\mathbf{u}'|^2 - p'/\rho_0 \right) \boldsymbol{\omega}' \right\rangle = -C_{H1} \frac{b^2}{\varepsilon} \nabla H, \quad (C_{H1} \cong 0.16) \qquad (13)$$

– диффузионный поток спиральности H, связанный с различными механизмами её турбулентного переноса в координатном пространстве;

$$\varepsilon_H \equiv 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega'_k}{\partial x_j} \right\rangle = C_{H2} \frac{\varepsilon}{b} H, \qquad (C_{H2} \cong 1) \qquad (14)$$

– скорость диссипации спиральности в турбулентном потоке;

$$\mathbf{G}^\omega(x,t) \equiv \langle \mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}' \rangle \qquad (15)$$

– турбулентная сила вихревого динамо (аналог турбулентной электродвижущей силы $\mathbf{G} \equiv c^{-1} \overline{\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'}$ в законе Ома для средних электромагнитных полей

Заметим также, что ещё Рейнольдс в своей оригинальной публикации [56], усредняя поля скоростей по объёму и отнеся различные средние значения к центру масс этого объёма, полагал компоненты турбулентных напряжений R_{ij} и R_{ji} различными.

[6,14,15]), которая при учёте тождества $\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{a})=\frac{1}{2}\nabla|\mathbf{a}|^2-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a}$ может быть преобразована к виду

$$\mathbf{G}^{\omega}\equiv\left\langle\mathbf{u}'\times(\nabla\times\mathbf{u}')\right\rangle=\nabla\langle\tfrac{1}{2}|\mathbf{u}'|^2\rangle-\nabla\cdot\langle\mathbf{u}'\mathbf{u}'\rangle=\nabla\mathrm{b}+\nabla\cdot\mathbf{R}. \qquad (16)$$

С учётом этого соотношения уравнению (12) можно придать следующий вид

$$\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{Dt}}=-\nabla\cdot\left\{\mathbf{J}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}}-\nu\nabla\mathrm{H}\right\}+\mathbf{R}:\nabla\langle\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}\rangle-\nabla\mathbf{R}\cdot\langle\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}\rangle-\alpha_{\theta}\mathbf{g}\cdot\left\langle\theta'\boldsymbol{\omega}'\right\rangle-\varepsilon_{\mathrm{H}}, \qquad (17)$$

из которого, в частности, следует, что спиральность H генерируется в отражательно-несимметричной турбулентности благодаря вращению, неоднородности температуры и интенсивности турбулентных пульсаций.

Для развитой турбулентности, когда в потоке устанавливается локально-стационарное состояние поля спиральности, из уравнения (17), в предположении пространственной однородности крупномасштабного осреднённого течения $\langle\mathbf{u}\rangle$, можно найти явную алгебраическую связь спиральности H с угловой скоростью вращения астрофизического диска, неоднородностью его температуры (плотности) и интенсивностью турбулентных пульсаций. Действительно, в этом случае, при использовании тождественного преобразования

$$\mathbf{R}:\nabla\langle\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}\rangle-(\nabla\cdot\mathbf{R})\cdot\langle\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}\rangle=\nabla\cdot\left\{\mathbf{R}\cdot\langle\boldsymbol{\omega}\rangle\right\}-2(\nabla\cdot\mathbf{R})\cdot(\langle\boldsymbol{\omega}\rangle+\boldsymbol{\Omega}_0),$$

уравнение (17) можно преобразовать к виду

$$0=-2(\nabla\cdot\mathbf{R})\cdot(\langle\boldsymbol{\omega}\rangle+\boldsymbol{\Omega}_0)-\alpha_{\theta}\mathbf{g}\cdot\left\langle\theta'\boldsymbol{\omega}'\right\rangle-\varepsilon_{\mathrm{H}}. \qquad (18)$$

Отсюда, с учётом определяющего уравнения (4) для тензора Рейнольдса (в предположении пространственной однородности осреднённого течения $\langle\mathbf{u}\rangle$) и справедливости приближённого соотношения

$$\left\langle\theta'\boldsymbol{\omega}'\right\rangle\cong\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{b}}\mathbf{q}_{\theta}^{\mathrm{T}}, \qquad (19)$$

получим искомое выражение:

$$\mathrm{H}\equiv\langle\mathbf{u}'\cdot\boldsymbol{\omega}'\rangle=-\frac{\frac{2}{3}\boldsymbol{\Omega}_0\cdot\nabla\mathrm{b}^2}{\alpha_{\theta}\mathbf{g}\cdot\mathbf{q}_{\theta}^{\mathrm{T}}+C_{\mathrm{H}2}\varepsilon}\cong\frac{\frac{2}{3}\boldsymbol{\Omega}_0\cdot\nabla\mathrm{b}^2}{\dfrac{\nu^{\mathrm{T}}}{\sigma_{\theta}}\dfrac{\mathbf{g}}{\langle\theta\rangle}\cdot\left(\nabla\langle\theta\rangle-\dfrac{\mathbf{g}}{c_p}\right)-C_{\mathrm{H}2}\varepsilon}. \qquad (20)$$

Таким образом, тепловая турбулентная конвекция в вертикальном направлении аккреционного диска на некоторых расстояниях от протозвезды в областях между его экваториальной плоскостью и «верхней» поверхностью с большей вероятностью приводит к левовинтовым спиральным движениям, поскольку поднимающееся вещество будет расширяться и вращаться под действием сил Кориолиса, приводя, таким образом, к левовинтовому спиральному движению. При этом опускающееся вещество будет сжиматься и вращаться в противоположном направлении, опять таки совершая левовинтовое движение. Напротив, в «нижней» части диска будут преобладать правовинтовые спиральные движения. Баланс левовинтовых и правовинтовых движений возможен только в окрестности экваториальной плоскости диска при отсутствии градиента ∇b интенсивности турбулентности, т.е. уже на самых поздних этапах эволюции аккреционного диска.

Определяющие соотношения для дисковой зеркально-несимметричной турбулентности

Проблема замыкания для зеркально-несимметричной турбулентности оказывается более сложной, чем в традиционном изотропном случае [14], поскольку в модифицированных уравнениях (4)-(5) для тензора Рейнольдса $\mathbf{R} \equiv -\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ и вектора турбулентного переноса тепла $\mathbf{q}_\theta^{\mathrm{T}} \equiv \langle \theta' \mathbf{u}' \rangle$ появляется целый ряд дополнительных членов, обусловленных теми векторными полями, благодаря которым возникает анизотропия мелкомасштабного турбулентного поля. В частности, при моделировании дисковой спиральной турбулентности в структуре феноменологических коэффициентов следует учитывать возможную анизотропию поля мелкомасштабной турбулентности, обусловленную действием кориолисовой и гравитационной сил.

Чтобы не осложнять изложение, рассмотрим здесь относительно простую модификацию определяющих соотношений (4)-(5), отвечающую пространственной изотропии коэффициентов турбулентного переноса. Более общие определяющие соотношения для спиральных турбулентных течений, в частности, с тензорными феноменологическими коэффициентами, можно найти, например, в работах [57,58, 65]. Ограничимся также случаем простых алгебраических моделей замыкания, когда в определяющих соотношениях достаточно учитывать пространственные производные только первого порядка. Тогда в линейном приближении относительно направления анизотропии (неоднородности) мелкомасштабного турбулентного поля, характеризуемого вектором $\mathbf{g}$ или

∇H, возможна следующая модификация градиентных соотношений (4)-(5) (см., например, [45, 57,58,63-65]):

$$R_{ij} = -\tfrac{2}{3} b\, \delta_{ij} + 2\nu^T S_{ij} - \nu_H^T \left\{ \langle \omega_{ai} \rangle \frac{\partial H}{\partial x_j} + \langle \omega_{aj} \rangle \frac{\partial H}{\partial x_i} - \tfrac{2}{3} \left(\langle \boldsymbol{\omega}_a \rangle \cdot \nabla H \right) \delta_{ij} \right\} -$$
$$-C_s \nu_H^T \left\{ \varepsilon_{ilm} S_{jm} + \varepsilon_{jlm} S_{im} \right\} \frac{\partial H}{\partial x_l} - \nu_\theta^T \left(q_{\theta i}^T g_j + q_{\theta j}^T g_i - \tfrac{2}{3} (\mathbf{q}_\theta^T \cdot \mathbf{g}) \delta_{ij} \right), \quad (21)$$

$$q_{\theta i}^T = -\kappa_\theta^T \left(\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_i} - \frac{g_i}{c_p} \right) + \kappa_{\theta 1}^T S_{ij} \left(\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_j} - \frac{g_j}{c_p} \right) + \kappa_{\theta 2}^T \varepsilon_{ijk} \langle \omega_{aj} \rangle \left(\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_k} - \frac{g_k}{c_p} \right). \quad (22)$$

Здесь ε_{ijk} – единичный антисимметричный тензор Леви−Чивита;

$$\nu^T = C_b \frac{b^2}{\varepsilon}, \;\; \nu_H^T = C_{\nu 1} \frac{b^4}{\varepsilon^3}, \;\; \nu_\theta^T = C_{\nu 2} \alpha_\theta \frac{b^3}{\varepsilon^2}, \quad C_b = 0.09, \;\; C_{\nu 1} \approx 0.5, \quad (23)$$

$$\kappa_\theta^T = \frac{\nu^T}{\sigma_\theta}, \;\; \kappa_{\theta s}^T = C_{\theta s} \frac{b^3}{\varepsilon^2} \quad (s = 1,2), \quad \sigma_\theta = 0.7 - 1, \;\; C_{\theta s} - \mathrm{const}, \; C_s = 1 \quad (24)$$

– скалярные феноменологические коэффициенты. Третий и четвёртый члены в соотношении (21) описывают влияние интегральной спиральности на симметричную часть тензора напряжений, т.е. влияние двух возможных направлений винтовых движений.

Вращательная вязкость

Заметим, что в последнее время вновь возродился интерес к асимметричной турбулентности[6)], обусловленный существенными достижениями в области проблемы пространственного осреднения различных уравнений движения в механике сплошных сред, включая, например, течения жидкости в пористых средах, течение взвесенесущих потоков и т.п. Так, в ряде работ (см., например, [55,66-68]) было показано, что при более аккуратном пространственном осреднении гидродинамических уравнений (исключающем традиционный рейнольдсовский постулат о коммутативности операций осреднения и дифференцирования) с целью описания движений малых элементов жидкости в макромасштабе,

---

[6)] Асимметричная гидромеханика братьев Ф. и Е. Коссера давно получила широкое признание, например, в теории жидких кристаллов и теории жидкого гелия.

получаются уравнения движения с несимметричным тензором Рейнольдса $R_{ik} \neq R_{ki}$. Эти уравнения содержат, в частности, составляющие с вращательной вязкостью, связанные с антисимметричной частью $R^a_{ij} \equiv \frac{1}{2}(R_{ij} - R_{ji})$ турбулентного тензора напряжений R_{ik}. В работе автора [69] было показано, что, в отличие от ламинарного течения, в спиральной турбулентности, когда течение утрачивает симметрию при отражении, закон парности $R_{ij} = R_{ji}$ турбулентных напряжений, соответствующих такому течению, может нарушаться[7)]. При этом роль статистической характеристики мелкомасштабного поля скорости $\mathbf{u}'$, способной обеспечить появление этого эффекта, может выполнять лишённая отражательной симметрии вихревая спиральность.

С учётом асимметричности тензора турбулентных напряжений Рейнольдса для R_{ik} было получено представление

$$R_{ik} \equiv -\langle u'_i u'_j \rangle = R^s_{ik} + R^a_{ik}, \tag{25}$$

где симметричная часть $R^s_{ik} = \frac{1}{2}(R_{ik} + R_{ki})$ задается формулой (21), а для антисимметричной части справедливо соотношение

$$R^a_{ij} = \tfrac{1}{2}(R_{ij} - R_{ji}) = -\nu^T_{rot}\, \varepsilon_{ijk} \left[\langle \omega_k \rangle - m_k / J\right], \tag{26}$$

отвечающее в немагнитной спиральной турбулентности новому диссипативному процессу. Здесь m_k, $J \cong (l_0)^2$ − соответственно эффективные собственный момент импульса и момент инерции турбулентных вихрей; ν^T_{rot} − вращательная турбулентная вязкость, которая, являясь функцией осреднённых параметров состояния среды, зависит также от статистических характеристик мелкомасштабного поля пульсационных скоростей $\mathbf{u}'$, в частности, от завихренности $\nabla \times \mathbf{u}'$, характеризующей вихревую “анизотропию” турбулентного течения на микроуровне; при этом коэффициент ν^T_{rot} является псевдоскаляром, поскольку тензор $\varepsilon_{ijk}\langle \omega_{ak} \rangle$ − псевдотензор второго порядка. По этой причине вращательная вязкость ν^T_{rot}, может быть отличной от нуля только тогда, когда само поле пульсационных скоростей не является статистически инвариантным относительно преобразования чётности, в частности, когда спиральность $H \neq 0$. Действи-

---

[7)] Это мнение противоречит концепции Моффата [20], который сохранил симметрию тензора турбулентных напряжений.

тельно, в случае турбулентности с зеркальной симметрией, коэффициент ν^{T}_{rot} не изменяется при выполнении преобразования отражения, но, с другой стороны, коэффициент ν^{T}_{rot} должен изменить свой знак, поскольку он является псевдоскаляром. Отсюда следует, что для изотропной и зеркально-симметричной турбулентности коэффициент $\nu^{T}_{rot}=0$. Для замыкания соотношения (26) необходимо в асимметричной механике Коссера дополнительно привлекать к рассмотрению закон сохранения собственного момента импульса турбулентных вихрей m_k, который добавляет в полную систему осреднённых гидродинамических уравнений собственный спин турбулентного вихря (см. [55]).

Соотношение (26), содержащее члены с вращательной турбулентной вязкостью ν^{T}_{rot}, является одним из вариантов так называемого Λ–эффекта [70] в спиральной турбулентности немагнитной жидкости, поскольку именно спиральность является той специфической характеристикой анизотропного турбулентного поля, на которой базируются физические модели Λ–эффекта. Этот эффект, представляющий собой аналог α–эффекта в МГД–турбулентности, описывает, в конечном счете, механизм генерации мезомасштабных вихрей полем гиротропной турбулентности, в более общем случае асимметричной турбулентности − механизм генерации крупномасштабных вихрей полем завихрённости среднего движения при взаимодействии его с собственными моментами импульса турбулентных молей − сопряжёнными переменными завихренности [55, 71].

3. УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ ОСРЕДНЁННОГО ВИХРЯ

Введём теперь в рассмотрение одно из основных для адекватного описания спиральной турбулентности уравнение, а именно – эволюционное уравнение распределения осреднённого вихря $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle$ при произвольном непрерывном движении жидкости. Это уравнение в рассматриваемом здесь приближении Буссинеска может быть получено путём применения операции ротора к уравнению движения (2) для средней скорости; в результате будем иметь [64]

$$\frac{D}{Dt}\langle\boldsymbol{\omega}_a\rangle=(\langle\boldsymbol{\omega}_a\rangle\cdot\nabla)\langle\mathbf{u}\rangle-\mathbf{g}\times\nabla\left(\frac{\langle\rho\rangle}{\rho_0}\right)+\nu\nabla^2\langle\boldsymbol{\omega}\rangle+\nabla\times\mathbf{G}^{\omega}. \qquad (27)$$

Уравнение (27) совместно с уравнением Пуассона для давления

$$\nabla^2\left(\langle \mathrm{P}\rangle+\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\right)=\langle\mathbf{u}\rangle\cdot\nabla^2\langle\mathbf{u}\rangle+\langle\boldsymbol{\omega}\rangle\cdot\langle\boldsymbol{\omega}_a\rangle+\mathbf{g}\cdot\nabla\left(\frac{\langle\rho\rangle}{\rho_0}\right) \qquad (28)$$

(результат взятия дивергенции от (2)), составляют систему двух уравнений, полностью эквивалентную уравнению движения (2). Поскольку распределение завихрённости $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle$ в потоке часто является локальным (даже в тех случаях, когда поля $\langle\mathbf{u}\rangle$ и $\nabla \mathrm{P}$ распространяются на всё пространство), то моделирование осреднённого движения турбулизованной жидкости при помощи поля завихрённости $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle$ во многих случаях может оказаться более экономным, чем при помощи осреднённого поля скорости $\langle\mathbf{u}\rangle$.

Из тождества $\mathbf{G}^{\omega}\equiv\nabla b+\nabla\cdot\mathbf{R}$ следует, что вихревое динамо $\nabla\times\mathbf{G}^{\omega}$ отлично от нуля лишь в том случае, когда статистические свойства поля скорости $\mathbf{u}'$ зависят от координат (иными словами, поле $\mathbf{u}'$ является пространственно неоднородным). Такая неоднородность может быть вызвана, в частности, неоднородностью деформирующего действия крупномасштабного поля скоростей $\langle\mathbf{u}\rangle$. Если использовать для тензора $\mathbf{R}$ традиционное градиентное представление (4), то $\nabla\times\mathbf{G}^{\omega}=\nu^{\mathrm{T}}\nabla^2\langle\boldsymbol{\omega}\rangle$. Таким образом, в этом случае изотропная отражательно-симметричная (в статистическом смысле) турбулентность может вызывать только турбулентную диффузию осреднённой завихрённости $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle$, которая, как правило, много эффективней молекулярной. Вместе с тем возникающая в сильно вращающихся астрофизических объектах спиральная турбулентность способна действовать и как генератор крупномасштабного вихревого поля $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle$(в случае когда $\nabla\times\mathbf{G}^{\omega}=\nabla\times(\nabla\cdot\mathbf{R})\neq\nu^{\mathrm{T}}\nabla^2\langle\boldsymbol{\omega}\rangle$ или когда $\nu^{\mathrm{T}}<0$) обеспечивая при надлежащем определении тензора сдвиговых турбулентных напряжений (см. (21) и (26)) его экспоненциальный рост. Другими словами, спиральная турбулентность через механизм вихревого динамо

$$\left(\nabla\times\mathbf{G}^{\omega}\right)_p=\left(\nabla\times(\nabla\cdot\mathbf{R})\right)_p=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\varepsilon_{pki}\mathrm{R}_{ij}=\nu^{\mathrm{T}}\nabla^2\langle\boldsymbol{\omega}\rangle_p-$$

$$-\frac{1}{2}\nu_{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\varepsilon_{pki}\left\{\langle\omega_{ai}\rangle\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_j}+\langle\omega_{aj}\rangle\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i}-\tfrac{2}{3}\left(\langle\boldsymbol{\omega}_a\rangle\cdot\nabla \mathrm{H}\right)\delta_{ij}\right\}-\ldots \qquad (29)$$

может усиливать и укрупнять вихри, порождая когерентные вихревые структуры во вращающемся газе [32-34, 44-46]. Более того, механизмом вихревого динамо в спиральной турбулентности, когда в результате реализации обратного энергетического каскада генерируются и поддерживаются крупно- и мезомасштабные вихревые образования, осуществляется и их энергетическая подпитка. Таким образом, вследствие перераспределения турбулентной энергии вихревое динамо в дисковой турбулентности может породить иерархическую систему плотно упакованных пакетов энергетически ёмких вихрей (определенного размера и, в общем случае, с фрактальным распределением массовой плотности). Наличие такой системы приводит, в конечном счете, к интенсификации механических и физико-химических взаимодействий между частицами космического вещества (в общем случае гетерогенного), в результате чего возможно самопроизвольное образование и рост газопылевых кластеров, стимуляция процессов конденсации и фазовых переходов, процессов массо- и теплообмена между различными областями диска, существенная модификация спектра колебаний и т.п. Естественно, на заключительной стадии процесса образования крупномасштабных газопылевых сгущений в области внутренних планет решающая роль должна принадлежать силе самогравитации [72].

4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ В СПИРАЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Предположим, что некоторый источник пульсационной кинетической энергии на масштабе возбуждения турбулентности $k_0 = 1/l_0$ (вдали от диссипативного масштаба) в результате взаимодействия архимедовых и кориолисовых сил в сильно вращающемся дисковом веществе сгенерировал также отличную от нуля вихревую спиральность H. Тогда в частном случае пространственно однородной турбулентности свободное вырождение турбулентного движения жидкости, согласно уравнениям (6) и (12), происходит по законам

$$\partial b/\partial t = -\varepsilon \equiv -\nu\langle(\partial_j u'_k)^2\rangle = \nu\langle\,|\boldsymbol{\omega}'|^2\,\rangle, \tag{30}$$

$$\partial H/\partial t = -\varepsilon_H = -2\nu\langle\partial_j u'_k \partial_j \omega'_k\rangle. \tag{31}$$

Отсюда видно, что в невязком пределе $\nu \to 0$, в отсутствии диссипации и накачки движения (во всей инерционной области $k_0 \ll k \ll k_\nu = 1/l_\nu$, разделяющей зоны генерации и диссипации турбулентной энергии в пространстве волновых чисел k; здесь $l_\nu = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$– колмогоровский диссипативный масштаб) спиральность H пульсационного поля скоростей, подобно турбулентной энергии b, является сохраняющейся величиной[8]. Заметим, что сохранение спиральности в каскадном процессе означает также сохранение структуры «узловатости» вихревого поля[9] (т.е. общего числа зацеплений вихревых трубок друг с другом при гладкой деформации течения и при условии сохранения циркуляции скорости), которая остаётся неизменной в каскадном процессе в инерционной области, но уничтожается вязкостью на масштабах l_ν.

Свободная эволюция трёхмерной изотропной турбулентности несжимаемой жидкости сопровождается, как известно, каскадным переносом турбулентной энергии $b \equiv \langle|\mathbf{u}'|^2/2\rangle = \int b(k)dk$ к малым масштабам. Скорость диссипации ε турбулентной энергии, считавшаяся в первоначальной теории Колмогорова [11] универсальной константой, характеризует в этом случае также и поток кинетической энергии b, который переносится каскадным образом без потерь вдоль последовательно возрастающих волновых чисел $k_n >> k_{n-1}$ (уменьшающихся масштабов длины, $l_n = 1/k_n$) внутри инерционного интервала до тех пор, пока не достигает диссипативного масштаба l_ν. Так как в инерционном интервале изотропная спектральная плотность энергии $b(k)$ статистически не связана с источником энергии, ограниченным волновым числом k_0, то она в пространстве волновых чисел описывается классической формулой Колмогорова

$$b(k) = K_b\,\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}, \qquad (k_0 << k << (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}), \tag{32}$$

которая может быть получена из соображений размерности. Здесь $K_b = 1.44 \pm 0.06$ – безразмерная постоянная константа Колмогорова.

---

[8] Важно отметить, что диссипативный масштаб для спиральности l_H не совпадает, вообще говоря, с колмогоровским масштабом l_ν, но отношение этих двух масштабов $l_\nu/l_H \approx \nu^{9/28}$ стремится при больших числах Рейнольдса (малая вязкость) к нулю. Это означает, что в мелкомасштабную часть спектра спиральность не доходит [73].

[9] Напомним, что когда отдельная вихревая нить C_j, прежде чем замкнуться, обвивается вокруг себя, то на ней появляется узел. Вихревая спиральность как раз и определяет число заузленных и зацепленных вихревых трубок в объёме, занятом жидкостью: $H = \sum_{ij} 2\alpha_{ij}\Gamma_i\Gamma_j$; здесь α_{ij} – коэффициенты зацепления вихревых нитей – положительные или отрицательные целые числа, связанные с числом витков одной нити C_i вокруг другой нити C_j; Γ_j – циркуляция отдельной вихревой нити [18,19]. Таким образом, при генерировании вихревой спиральности появляются крупномасштабные зацепления вихревых линий рассматриваемого турбулентного течения.

По аналогии с энергетическим спектром $b(k)$ можно ввести в рассмотрение спектральную плотность спиральности $H(k)$ таким образом, что

$$H \equiv \langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle = \int H(k)\, dk .$$

Если в двухмерном случае спектральные плотности энергии $b(k)$ и энстрофии $\Omega(k)$ связаны соотношением $\Omega(k) \propto k^2\, b(k)$, то для спектральной плотности спиральности существует только ограничение сверху [24]

$$\left|H(k)\right| \le 2k\, b(k) . \tag{33}$$

Известные аргументы (см., например, [9]), приводящие к выводу о существовании двух инерционных интервалов, как в двухмерной турбулентности, в этом случае не работают. Неравенство (33) позволяет, однако, реализоваться двум сценариям поведения спиральности в трёхмерном гиротропном турбулентном потоке [23]. Во-первых, возможен режим, при котором имеет место одновременный прямой каскад обеих сохраняемых величин b и H к малым масштабам. Во-вторых, в отдельных случаях, по аналогии с двухмерной турбулентностью, реализуется каскад этих величин к противоположным концам инерционного интервала, причем прямой каскад спиральности H к мелким масштабам сопровождается синхронным обратным каскадом энергии b к крупным масштабам, т.е. противоположно тому, что происходит в «обычном» турбулентном потоке. Какой сценарий осуществляется для данного турбулентного течения, зависит от интегральных свойств системы, а также от граничных и начальных условий.

Каскад энергии при отсутствии вращения

Рассмотрим вначале классическую феноменологию Колмогорова [10,11], распространённую на спирально-энергетический каскад в отсутствии вращения. Первый сценарий предполагает пассивное поведение спиральности в турбулентном потоке [73]. Это означат, что реализуется обычный колмогоровский каскад энергии $b(k)$ к малым масштабам с законом (32). Пусть скорость генерирования спиральности на волновых числах $\sim k_0$ равна ε_H. Поскольку спиральность порождается одновременно с энергией, то, очевидно, она ограничена неравенством вида $\left|\varepsilon_H\right| \le k_0\, \varepsilon$ [23]. Если спиральность инжектируется с максимальной скоростью, то $\left|\varepsilon_H\right| \sim k_0\, \varepsilon \sim u_0^3 / l_0^2$. Так как спектр $H(k)$ должен быть пропорционален ε_H (в силу псевдоскалярного характера обеих величин), и единственными дополнительными параметрами, определяющими $H(k)$ в инерционной области $k_0 << k << k_\nu$, могут быть ε и k, то из соображений размерности следует оценка

$$H(k) \cong C_H \varepsilon_H \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3} \quad , \quad b(k) = K_b\, \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \tag{34}$$

т.е. спектральные функции $b(k)$ и $H(k)$ зависят от k одинаковым образом [20]. Здесь C_H– универсальная постоянная, аналогичная колмогоровской постоянной C_b. Итак, в рассматриваемом сценарии спиральность переносится по всему инерционному масштабу как пассивная примесь, а диссипация энергии и спиральности происходит на одних и тех же масштабах [74].

При этом следует иметь в виду, что если в рассматриваемом потоке жидкости реализуется режим генерирования почти максимальной спиральности для каждого значения волнового числа, то суммарный перенос кинетической энергии к более высоким волновым числам будет значительно ослаблен, а потому процесс затухания турбулентности будет существенно растянут во времени (см. [30, 75]). Для рассматриваемого здесь случая дисковой турбулентности отсюда можно сделать следующий важный вывод: относительно длительное существование турбулентности во вращающемся астрофизическом диске (в частности, в солнечном аккреционном диске) с полным основанием может быть приписано её гиротропному характеру.

Во втором возможном сценарии обычно используется гипотеза о том, что энергетический спектр $b(k)$ может зависеть только от волнового числа k и постоянного во всем инерционном интервале спектрального потока энергии ε (вносимой в поток на макромасштабе $l_0 = 1/k_0$). Спектральная функция спиральности $H(k)$ определяется при этом процессом переноса спиральности от источника, действующего на волновых числах k_0, к вязкому стоку на волновых числах k_ν и далее. Соображения размерности приводят в этом случае к следующим спектральным законам для энергии и спиральности

$$b(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \qquad H(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-2/3}. \tag{35}$$

Фактически, возможность такого двойного каскада энергии и спиральности в развитой гиротропной турбулентности была предсказана еще в работе [23]. Используя феноменологические соображения, эти авторы (см. также [76]), по аналогии с двухмерной турбулентностью, полагали, что возможен чистый каскад спиральности к большим волновым числам (с нулевым энергетическим потоком), наряду с обратным энергетическим каскадом к низким волновым числам (без потока спиральности).

Следует, однако, отметить, что выполненные почти незамедлительно численные эксперименты не убедили в правдоподобности подобной идеи обратного каскада [30,77]. Вместе с тем в более поздних работах (см., например, [78]) существование двойного каскада кинетической энергии и спиральности в трёхмерной турбулентности было надежно подтверждено при прямом численном моделировании спиральной турбулентности, в частности, в рамках LES–теории (large-eddy simulation) [24].

Наряду с этим, в работах [79, 80] была высказана продуктивная гипотеза о спиральной природе трёхмерных когерентных вихревых образований, возникающих в некоторых случаях в турбулентном потоке при больших числах Рейнольдса. Согласно ей, в турбулентном потоке возможно существование некоторых локальных областей с ненулевой спиральностью ($\mathrm{H} \neq 0$), в которых, из-за возможного в диссипативном интервале волновых чисел подавления спиральностью процесса рассеяния мелкомасштабной кинетической энергии (см. выше), диссипация турбулентной энергии будет происходить менее активно, чем в неспиральных областях. В результате, в трёхмерном потоке возможно возникновение совокупности когерентных спиральных структур, разделённых неспиральными («обычными») диссипативными вихревыми образованиями (возможно, с фрактальной размерностью), которые могут взаимодействовать друг с другом, видоизменяясь и объединяясь. Данная гипотеза нашла непосредственное подтверждение в численном эксперименте при компьютерном моделировании эволюции потока вихрей Тейлора−Грина (см., например, [81])[10)]. В конечном счёте, это пример того, как мелкомасштабные турбулентные движения в спиральной турбулентности на основе обратного спирального каскада могут приводить к появлению мезомасштабных вихревых структур, в частности, смерчей, тайфунов, тропических циклонов и других мощных спиральных вихрей в атмосфере [82].

[10)] Заметим, что существуют, однако, и другие численные расчёты турбулентного течения изотропной неоднородной жидкости, в которых не наблюдается такого рода корреляции между локальной спиральностью и рассеянием мелкомасштабной кинетической энергии [83,84].

Каскад энергии при учёте вращения

Поскольку спиральность во вращающихся астрофизических дисках обязана своим появлением кориолисовой силе, то источники гиротропности имеются во всех масштабах, в том числе и в инерционном масштабе, что, естественно, должно оказывать влияние на механизм энергетического каскада. Поэтому важно рассмотреть специфику прямого и обратного каскада при наличии вращения [26,27,48].

Можно предположить, что спектры турбулентной энергии и спиральности имеют следующий общий вид

$$b(k) \cong C_b \varepsilon^a \varepsilon_H^b |\Omega|^f k^{-e}, \quad H(k) \cong C_H \varepsilon^c \varepsilon_H^d |\Omega|^g k^{-h}. \qquad (36)$$

Такой вид этих функций, принимающий во внимание энергию, спиральность и вращение, охватывает все исследованные в литературе случаи; фигурирующие в (34) восемь спектральных индексов могут быть определены из анализа размерностей и феноменологии явления. Результаты подобного анализа суммированы в табличном виде в работе [25]. В частном случае, когда $e = h = 5/3$, $a = 2/3$, $b = 0$, $c = -1/3$, $d = 1$, $f = g = 0$, из (36) следует классическая феноменология Колмогорова (32), (34), распространённая на объединённый каскад с энергетической спиральностью.

В отличие от стандартной трёхмерной турбулентности без вращения, когда энергия передается по каскаду к мелким масштабам, или двухмерного случая с инверсным каскадом, в присутствии спиральности наблюдается как прямой, так и обратный каскад. В частности, в работах [27-29,47,48, 85,86] исследована турбулентность, которая наблюдалась в лаборатории, в атмосферных потоках и исследовалась при прямом численном моделировании. Рассмотренный в них феноменологический подход, основанный на каскаде спиральности к мелким масштабам, приводит к различным спектральным индексам. Например, в работах [47,85] был изучен связанный с инерционными волнами энергетический каскад. В этом случае спектры турбулентной энергии и спиральности имеют вид

$$b(k) = C_b \varepsilon^{1/2} |\mathbf{\Omega}|^{1/2} k^{-2}, \quad H(k) = C_H \varepsilon_H \varepsilon^{-1/2} |\mathbf{\Omega}|^{1/2} k^{-2}. \qquad (37)$$

В работах [27-29] исследовано влияние спиральности на каскад энергии с помощью прямого численного моделирования вращающейся турбулентности при числе Россби, равном 0.02. Полученные при этом результаты свидетельствуют о том, что присутствие спиральности играет важную роль в динамике турбулентного течения. Так было показано, что в атмосфере Земли, когда существует взаимодействие турбулентных вихрей с инерционными волнами, при небольших значениях числа Россби осуществляется каскад энергии к большим масштабам; спиральность при этом передаётся по каскаду к малым масштабам. В связи со сказанным отметим еще раз, что в рамках спиральной турбулентности, допускающей возможность реализации обратного энергетического каскада Ричардсона−Колмогорова, возможно не только прогнозировать зарождение относительно устойчивых и энергетически ёмких крупно- и мезомасштабных когерентных вихревых структур, но и объяснить эффект отрицательной вязкости в трёхмерной турбулентности.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью предпринятого исследования является разработка феноменологической модели трёхмерного турбулентного движения вращающейся жидкости, максимально приближенной к реальности и отвечающей различным динамическим условиям в космических и природных средах, в частности в астрофизических немагнитных дисках. По мере все более надёжного подтверждения в численных экспериментах концепции обратного каскада энергии в спиральной турбулентности, включение в математическую модель эволюции аккреционного диска этого эффекта, существенно влияющего на его структуру и динамику, приобретает всё более веское основание. В работе показано, что ключевой статистической характеристикой трёхмерной зеркально-неинвариантной дисковой турбулентности, которая способна обеспечить в нём появление инверсного каскада энергии, может служить вихревая спиральность, возникающая благодаря быстрому вращению неустойчиво стратифицированной космической среды и воздействию ряда других факторов нарушения симметрии течения космического вещества, таких, например, как архимедова сила, сила гравитации и т.п. Показано, что известный эффект отрицательной вязкости в трёхмерной спиральной турбулентности диска также обязан своему возникновению инверсному каскаду переноса мелкомасштабной кинетической энергии от малых вихрей к более крупным. Обсуждается концепция возможной энергетической подпитки мезомасштабных когерентных вихревых структур в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса механизмом вихревого динамо, когда спиральная турбулентность в результате реализации обратного энергетического каскада генерирует и поддерживает крупномасштабные вихревые поля. Вследствие такого перераспределения турбулентной энергии инверсный каскад может породить иерархическую компактную систему уплотнённых энергетически ёмких вихрей (определённого размера и с фрактальным распределением массовой плотности), приводящую, в конечном счёте, к интенсификации механических и физико-химических взаимодействий между частицами космического вещества (в общем случае гетерогенного) в аккреционном диске. В результате этого возможно самопроизвольное образование и рост газопылевых кластеров, стимуляция процессов конденсации и фазовых переходов, процессов массо- и теплообмена между различными областями диска, существенная модификация спектра колебаний и т.п. Естественно, на заключительной стадии процесса образования крупномасштабных газопылевых сгущений в области внутренних планет решающая роль должна принадлежать силе самогравитации [72]. Исходя из приведённых соображений, предлагаемую работу можно рассматривать как теоретическую основу для численного моделирования широкого класса явлений в астрофизических немагнитных дисках, в которых механика спиральной турбулентности играет определяющую роль.

В заключение процитируем слова выдающегося отечественного механика академика Л.И. Седова: «Существенный прогресс в науке как правило связан с всё более полным и детальным проникновением в сущность макроскопических эффектов, проявляющихся на грани существующих методов наблюдений и измерений…Нередко учёт малых эффектов, едва уловимых на первоначальной стадии исследования, впоследствии, при более глубоком проникновении в сущность природы явлений и при расширении поля приложений, становится основой возникновения прогресса» [87].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brown G. L., Roshko A.* On density effects and large structures in turbulent mixing layers// J. Fluid Mech. 1974. V. 64. P. 775-816.

2. *Crow S.C., Champagne F.H.* Orderly structures in jet turbulence // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. P. 547-591.

3. *Рабинович М.И. Сущик М.М.* Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // УФН.1990. Т. 160. Вып. 1. С. 1-64.

4. *Климонтович Ю.Л.* Введение в физику открытых систем. М.: ТОО «Янус-К». 2002. 284 с.

5. *Хлопков Ю.И., Жаров В.А., Горелов С.Л.* Когерентные структуры в турбулентном пограничном слое. М.: МФТИ. 2002. 267 с.

6. *Колесниченко А.В. Маров М.Я.* Термодинамическая модель МГД− турбулентности и некоторые ее приложения к аккреционным дискам // Астрон. вестник. 2008. Т.42. № 3. С. 1-50.

7. *Ван Дайк М.* Альбом движений жидкости и газа. М.: Мир. 1986.

8. *Фриш У.* Турбулентность. Наследие Колмогорова. М.: Фазис,1998. 343 с.

9. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидродинамика. СПб: Гидрометеоиздат. Т.2. 1996. 742 с.

10. *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Доклады АН СССР. 1941. Т. 30. С. 299-303.

11. *Колмогоров А.Н.* Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса // Mecanique de la turbulence: Colloq. Intern. CNRS, Marseille, aout - sept. 1961 / На рус. и фр. яз. Paris. 1962. P. 447-458.

12. *Обухов А.М.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока// Изв. АН СССР. Сер. географии и геофизики. 1941. Т.5. № 4. С. 453-466.

13. *Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А.* Турбулентное динамо в астрофизике. М.: Наука. 1980. 352 с.

14. *Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.* Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М.: Мир. 1984. 315 с.

15. *Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Магнитные поля в астрофизике. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Институт компьютерных исследований. 2006. 386 с.

16. *Moffatt H.K.* The degree of knottedness of tangled vortex lines // J. Fluid Mech. 1969. V.35. P.117-129.

17. *Steenbeck M., Krause F., Radler K.-H.* A calculation of the mean electromotive force in an electrically conducting fluid in turbulent motion, under the influence of Coriolis forces// Z. Naturforsch. 1966. V. 21a. P. 369-376.

18. *Сэффмэн Ф. Дж.* Динамика вихрей. М.: Научный Мир. 2000. 375 с.

19. *Арнольд В.И., Хесин Б.А.*Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО. 2007. 392 с.

20. *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир. 1980. 339 с.

21. *Паркер Е.* Космические магнитные поля: их образование и проявления. Ч.2. М.: Мир. 1982. 479 с.

22. *Brandenburg A., Dobler W., Subramanian K.* Magnetic helicity in stellar dynamos: new numerical experiments //Astronomische Nachrichten. 2002. V. 323. P. 99-122.

23. *Brissaund A., Frisch U., Leorat J., Lessieur M., Mazure A.* Helicity cascade in fully developed turbulence// Phys. Fluids. 1973. V.16. P. 1366-1367.

24. *Lesieur M.* Turbulence in Fluids (4th edition). Springer. 2008. 558 p.

25. *Pouquet A., Mininni P. D.* The interplay between helicity and rotation in turbulence: implications for scaling laws and small-scale dynamics. 2009. 18 p. // submitted to Phys. Fluids, see also http:// arXiv org/ads/0910.4522 vl.[physics.flu-dyn]. 2009.

26. *Mininni P. D., Alexakis A., Pouquet A* .Scale interactions and scaling laws in rotating flows at moderate Rossby numbers and large Reynolds numbers // Phys.Fluids. 2009. V. 21. P. 015108.

27. *Mininni P. D., Pouquet A.* Helicity cascades in rotating turbulence // Phys. Rev. 2009a. E 79. P. 026304.

28. *Mininni P.D., Pouquet A.* Rotating helical turbulence. Part I. Global evolution and spectral behavior // Submitted to Phys. Rev. E. 2009b, see also arXiv: 0909.1272. 2009. P. 1-9.

29. *Mininni P.D., Pouquet A* Helical rotating turbulence. Part II. Intermittency, scale invariance and structures// Submitted to Phys. Rev. E. 2009c, see also arXiv: 0909. 1275. 2009. P. 1-11.

30. *Kraichnan R.H.* Helical turbulence and absolute equilibrium // J. Fluid Mech. 1973. V. 59. P. 745-752.

31. *Kraichnan R.H.* Diffusion of passive-scalar and magnetic fields by helical turbulence// J. Fluid. Mech. 1976a. V.77. P. 753-774.

32. *Моисеев С.С., Сагдеев Р.З., Тур А.В., Хоменко Г.А., Яновский В.В.* Теория возникновения крупномасштабных структур в гидродинамической турбулентности//ЖЭТФ. 1983b Т.85. вып. 6(12). С. 1979-1987.

33. *Моисеев С.С., Руткевич П.Б., Тур А.В., Яновский В.В.* Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью // ЖЭТФ. 1988. Т.94. вып. 2. С. 144-153.

34. *Моисеев С.С., Сагдеев Р.З., Тур А.В., Хоменко Г.А., Шукуров А.М.* Физический механизм усиления вихревых возмущений в атмосфере // Доклады АН СССР. 1983a. Т. 273. № 3. С. 549-552.

35. *Moiseev S.S., Chkhetiani O.G.* The helical scaling of turbulence// JETP, 1996. V.110. № 7. P. 357-371.

36. *Branover H., Moiseev S.S., Golbraikh E., Eidelman A.* Turbulence and Structures: Chaos, Fluctuations, and Helical Self-Organization in Nature and Laboratory// San Diego: Academic Press. 1999. 270 p.

37. *Старр В.* Физика явлений с отрицательной вязкостью. М.: Мир. 1971. 259 с.

38. *Монин А.С., Полубаринова-Кочина П.Я., Хлебников В.И.* Космология, гидродинамика, турбулентность: А.А. Фридман и развитие его научного наследия. М.: Наука. 1989. 326 с.

39. *Vergassola M., Gama S., Frisch U.* Proving the existence of negative isotropic eddy viscosity. P. 321-327/ In.: NATO-ASI: Solar and Planetary Dynamos. Eds. M.R.E. Proctor, P.C. Mathews, A.M. Rucklidge. Cambridge University Press. Cambridge. 1993.

40. *Sivashinsky G.I., Frenkel A.L.*On negative eddy viscosity under conditions of isotropy// Phys. Fluids. 1992. V. A4. P. 1608-1610.

41. *Gama S., Vergassola M., Frisch U.* Negative eddy viscosity in isotropically forced two-dimensional flow: linear and nonlinear dynamics// J. Fluid. Mech. 1994. V. 260. P. 95-126.

42. *Bodenheimer P.* Angular momentum evolution of young stars and disks // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1995. V. 33. P. 199-238.

43. *Klahr H.H., Bodenheimer P.* Turbulence in accretion disks: vorticity generation and angular momentum transport via the global baroclinic instability // Astrophys. J. 2003. V. 582. P. 869-892.

44. *Березин Ю.А., Жуков В.П.* Конвективная неустойчивость в среде со спиральной турбулентностью// Изв. РАН. МЖГ. 1990. № 6. С. 61-66.

45. *Березин Ю.А., Трофимов В.М.* Генерация крупномасштабных вихрей под действием неравновесной турбулентности // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 1. С. 47-55.

46. *Левина Г.В.* Параметризация спиральной турбулентности в численных моделях интенсивных атмосферных вихрей // Докл. РАН. 2006. Т. 411. № 3. С. 400-404.

47. *Dubrulle B., Valdettaro L.* Consequences of rotation in energetics of accretion disks // Astron. Astrophys. 1992. V. 263. P. 387-400.

48. *Smith L. M., Chasnov J., Waleffe F.* Crossover from two- to three-dimensional turbulence// Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 2467-2470.

49. *Колесниченко А.В., Маров М.Я.* Турбулентность и самоорганизация: Проблемы моделирования космических и природных сред. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009. 632 с.

50. *Lin C.C., Shu F.H.-S.* Density wave theory of spiral structure // Astrophysics and General Relativity. 1968. V.2. P. 236-329.

51. *де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.

52. *Колесниченко А.В*. Синергетический подход к описанию развитой турбулентности//Астрон. вестник. 2002. Т.36. № 2. С.121-139.

53. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. М.: Прогресс, 1986. 310 с.

54. *Хапаев А.А*. Генерация вихревых структур в атмосфере под действием спиральной турбулентности конвективного происхождения// Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. Т. 38. № 3. С. 331-336.

55. *Николаевский В.Н.* Пространственное осреднение и теория турбулентности // Вихри и волны. М.: Мир. 1884. С. 266-335.

56. *Reynolds O.* On the dynamical theory of turbulent incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // Phil. Trans. Royal Soc. London A . 1894. V. 186. P. 123-161.

57. *Rüdiger G.* Reynolds stresses and differential rotation. I - On recent calculations of zonal fluxes in slowly rotating stars // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, 1980a. V. 16. P. 239-261.

58. *Rüdiger G.* On negative eddy viscosity in MHD turbulence // Magneic Hydrodynamics (Riga) 1980b. N. 1. P. 3-14.

59. *Rüdiger G.* On turbulent heat transport in rotating convective zones//Astron. Nachr. 1982. V. 303. P. 293-303.

60. *Berezin Yu., Trofimov V.M.* A model of non-equilibrium turbulence with an asymmetric stress. Application to the problems of thermal convection // Continuum Mech. Thermodynamics. 1995. V. 7. P. 415-437.

61. *Krause F, Rüdiger G.* On the Reynolds stresses in mean-field hydrodynamics. I. Incompressible homogeneous isotropic turbulence // Astron Nachr. 1974a. V. 295. H.2. P. 93-99.

62. *Krause F, Rüdiger G.* On the Reynolds stresses in mean-field hydrodynamics. II. Two- dimensional turbulence and the problem of negative viscosity // Astron Nachr. 1974b. V. 295. H.4. P. 185-193.

63. *Rüdiger G.* On the Reynolds stresses in mean-field hydrodynamics. III. Two- dimensional turbulence and the problem of differential rotation// Astron Nachr. 1974. V. 295. H.5. P. 229-235.

64. *Колесниченко А.В*. К моделированию спиральной турбулентности в астрофизическом немагнитном диске//Астрон. вестник. 2011. Т.45. № 3. С.253-272.

65. *Yoshizava A.* Self-consistent turbulent dynamo modeling of reversed field pinches and planetary magnetic fields//Phys. Fluids. 1990. V. B2 (7). P.1589-1600.

66. *Ferrari C.* On the differential equations of turbulent flow // В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука. 1972. 336 с.

67. *Николаевский В.Н.* Тензор напряжений и метод осреднения в механике сплошных сред//ПММ. 1975. Т.39. вып. 1. С. 374-379.

68. *Nikolaevskiy V.N.* Angular Momentum in Geophysical Turbulence. Published by Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands. 2003. 243 p.

69. *Колесниченко А.В., Маров М.Я.* Роль гидродинамической спиральности в эволюции протопланетного турбулентного диска // Математическое моделирование. 2007. Т. 20. № 10. С. 99-125.

70. *Kichatinov L.L., Rüdiger G.* Λ-effect and differential rotation in stellar convection zones//Astron. Astrophys. 1993. V. 276. P. 96-102.

71. *Heinloo J.* Setup of turbulence mechanics accounting for a preferred orientation of eddy rotation // Concepts of Physics. 2008. V.5. № 2. P. 205-218.

72. *Маров М.Я., Колесниченко А.В., Макалкин А.Б., Дорофеева В.А., Зиглина И.Н.* От протосолнечного облака к планетной системе: Модель ранней эволюции газопылевого диска. С. 223-275 // Коллективная монография «Проблемы зарождения и эволюции БИОСФЕРЫ» / Под. Ред. Э.М. Галимова. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2008. 552 с.

73. *Ditlevsen P., Giuliani P*. Dissipation in helical turbulence// Phys. Fluids. 2001. V.13. P. 3508-3509.

74. *Chen Q., Chen S., Eyink G.* The joint cascade of energy and helicity in three-dimensional turbulence//Physics of Fluids. 2003. V.15. № 2. P. 361-374.

75. *Andre J.D., Lesieur M.* Evolution of high Reynolds number isotropic three-dimensional turbulence; influence of helicity // J. Fluid Mech. 1977a. V. 81. P. 187-208.

76. *Moffatt H.K., Tsinober A.* Helicity in laminar and turbulent flow // Ann. Rev. of Fluid Mech. 1992. V. 24. P. 281-312.

77. *Andre J.C., Lesieur M*. Influence of helicity on high Reynolds number isotropic turbulence // J. Fluid Mech. 1977b. V. 81. P. 187-207.

78. *Borue J., Orszag S.A.* Spectra in helical three-dimensional isotropic turbulence// Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 7005-7009.

79. *Tsinober A., Levitch E.* On the helical nature of three-dimensional coherent structures in turbulent flows // Phys. Letters. 1983. V. 99 A. P. 321-324.

80. *Moffatt H.K.* Geophysical and astrophysical turbulence/ In Advances in turbulence. G. Comte-Bellot and J. Mathieu eds. Springer-Verlag. 1986. P. 228-244.

81. *Shtilman L., Levich E., Orszag S.A., Pelz R.B., Tsinober A.* On the role of helicity in complex fluid flows // Phys. Let. 1985. V. 113 A**.** P. 32-37.

82. *Kerr B. W., Darkow G. L.* Storm-relative winds and helicity in the tornadic thunderstorm environment // Weath. and Forecast. 1996. V. 11. P. 489-496.

83. *Rogers M.M., Moin P.* The structure of the vorticity field in homogeneous turbulent flows// J. Fluid Mech. 1987a. V. 176 . P. 33-66.

84. *Rogers M.M., Moin P.* Helicity fluctuations in incompressible turbulent flows// Phys. Fluids. 1987b. V. 30. P. 2662-2671.

85. *Zhou Y.* A phenomenological treatment of rotating turbulence // Phys. Fluids. 1995. V. 7. P. 2092-2099.

86. *Smith L. M., Waleffe F.* Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating three-dimensional turbulence // Phys. Fluids. 1999. V.11. P. 1608-1622.

87. *Седов Л.И.* Мысли об ученых и науке прошлого и настоящего. М.: Наука. 1973. 118 с.

Оглавление