



Колесниченко А.В.

К моделированию  
сжимаемой  
магнитогидродинамической  
турбулентности  
аккреционного  
протопланетного диска

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Колесниченко А.В. К моделированию сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности аккреционного протопланетного диска // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 66. 47 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-66>

**О р д е н а   Л е н и н а**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В. Келдыша**  
**Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к**

**А.В. Колесниченко**

**К моделированию сжимаемой  
магнитогидродинамической турбулентности  
аккреционного протопланетного диска**

**Москва — 2014**

## **Колесниченко А.В.**

К моделированию сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности аккреционного протопланетного диска.

В рамках основной проблемы космогонии, связанной с реконструированием протопланетного диска Солнца на самых ранних этапах его существования, сформулирована замкнутая система МГД-уравнений масштаба среднего движения, предназначенная для численного решения задачи по взаимосогласованному моделированию структуры и эволюции аккреционного протопланетного диска и связанной с ним короны. Обсуждается модель тонкого (но оптически толстого) диска, учитывающая диссипацию турбулентности за счет кинематической и магнитной вязкости, непрозрачность среды, наличие аккреции из окружающего пространства, воздействие турбулентного  $\alpha\omega$ -динамо на генерацию магнитного поля, магнитное силовое и энергетическое взаимодействие между диском и его короной и т.п. Предпринятое исследование является продолжением стохастико-термодинамического подхода к описанию турбулентности астрофизических систем, развиваемого автором в серии работ [1-10].

**Ключевые слова:** математическое моделирование, термодинамика необратимых процессов, усреднённые МГД-уравнения, развитая сжимаемая турбулентность, протопланетные диски.

## **Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko**

By modeling compressible magnetohydrodynamic turbulence of accretion protoplanetary disk.

As part of the main problems in cosmogony associated with the remodel of the protoplanetary disk of the sun at the earliest stages of its existence, formulated a closed system of MHD equations of mean motion, designed for the numerical solution of the problem on a mutually agreed modeling of the structure and evolution of the accretion disk and the associated corona. Consider a model of a thin (but optically thick) disk, which takes into account the dissipation of turbulence due to the kinematic and magnetic viscosity, opacity of the environment, availability of accretion from the environment, the impact of turbulent  $\alpha\omega$ -dinamo to generate a magnetic field, the magnetic force and energy interaction between the disk and its crown and etc. Of this study is a continuation of stohastiko-thermodynamic approach to the description of turbulent astrophysical systems developed by the author in a series of papers [1-10].

**Key words:** mathematical modelling, thermodynamics of the irreversible processes, averaged MHD equations, the advanced compressible turbulence, protoplanetary disks.

## 1. Введение

Значительная доля газа в околозвёздном аккреционном диске, находящемся на самом начальном этапе своей эволюции, представляет собой частично ионизованную плазму, степени ионизации которой вполне достаточно для развития в ней различного рода плазменных неустойчивостей [11,12], в частности, гидромагнитной сдвиговой неустойчивости, открытой Велиховым [13]. Эта неустойчивость, которая в приложении к астрофизическим дискам получила название магниторотационной неустойчивости Бальбюса–Хаули [14], возникает, когда существует компонента магнитного поля, перпендикулярная плоскости вращения диска, а угловая скорость вращения уменьшается с расстоянием. В результате появляется большое число неустойчивых мелкомасштабных (по сравнению с толщиной диска) мод, развитие которых эффективно генерирует турбулентность в дифференциально вращающемся диске [15-23].

Существование крупномасштабного магнитного поля (даже слабого,  $|\bar{\mathbf{B}}|^2 / 4\pi c^2 \leq c_s^2$ ) существенно усложняет гидродинамические течения в протопланетном диске звезды. Действующие на проводящие слои диска магнитные силы заметно влияют на динамику происходящих в них астрофизических процессов, таких как перенос углового момента на периферию диска, характер и темп аккреции из окружающего пространства (из космической диффузной среды), струйные истечения из короны диска (МГД–активного верхнего слоя) замагниченного вращающегося ветра и т.п. Вполне вероятно, что на раннем этапе образования протопланетного диска во внутренних его областях (т.е. при малых расстояниях  $\varpi$  от звезды) в верхних слоях (при больших  $Z$ ) присутствовали и хаотические магнитные поля, генерируемые механизмом турбулентного динамо или просто привнесённые в диск вместе с аккрецируемой межзвёздной плазмой. Эти поля, турбулентная энергия которых сопоставима с энергией гидродинамической турбулентности, перемешиваемые благодаря дифференциальному вращению вещества диска, вносят значительный вклад в турбулентную вязкость как во внутренней области диска, так и во внешних слоях его короны. Эффективность МГД турбулентности как механизма диссипации также существенно зависит от процесса магнитного перезамыкания силовых линий магнитного поля, возможного в том случае, когда силовые линии разной направленности тесно сближаются друг с другом. Перед началом этого процесса в плазме имеется определенный избыток магнитной энергии, затем в ней начинает развиваться так называемая разрывная (тиринг) неустойчивость, которая, в конечном счёте, приводит к перезамыканию силовых линий и переходу избыточной энергии магнитного поля в кинетическую или тепловую энергию плазмы [24].

В результате воздействия магнитного поля на движение космической плазмы в диске возникают не только эффективная турбулентная вязкость и турбулентная магнитная диффузия, но и все эффекты, связанные с электродинамикой средних полей [25]. В частности, поскольку во вращающейся прово-

дующей среде эффективную магнитную диффузию неизбежно сопровождает возникновение турбулентной электродвижущей силы  $\alpha\mathbf{V}$  (так называемый  $\alpha$ -эффект, связанный в конечном счёте с влиянием кинематической и магнитной спиральности на генерацию индуцированного магнитного поля [7,26,27]), то следует ожидать существенного воздействия механизма турбулентного динамо на структуру и эволюцию «молодого» протопланетного диска. Как известно [28], мелкомасштабная отражательно-неинвариантная (гиротропная) турбулентность во вращающемся диске создает «петли», когда любая силовая трубка магнитного поля под действием локального спирального движения приобретает форму скрученной буквы  $\Omega$ . Эта магнитная петля сопровождается током, имеющим антипараллельную (параллельную) относительно приложенного среднего магнитного поля компоненту для правовинтовых (левовинтовых) случайных спиральных движений. Энергия производимого подобными токами джоулева тепла является мощным источником нагрева, при котором создается, в частности, дисковая корона, толщина которой порядка толщины диска [29,30]. В действительности корона может быть и гораздо толще [17], поскольку в результате перезамыкания малых петель могут образовываться и крупные петли, которые всплывают в турбулентной среде под действием подъёмной силы. Одновременно короной поддерживается магнитная связь удалённых друг от друга областей диска посредством проходящих через нее крупномасштабных силовых линий, замыкающихся в диске. Подобного рода магнитная связь является также возможным дополнительным источником напряжений в короне и тем самым её нагрева.

Таким образом, из-за вязких напряжений, возникающих вследствие дифференциального вращения намагниченного аккреционного диска звезды и действия турбулентного динамо, его корона нагревается, подобно тому, как нагревается солнечная корона. Горячая корона способна породить струйное истечение вещества и поля. Фактически подобная струя является замагниченным вращающимся плазменным ветром, истекающим из аккрецирующего диска [31,32]. В свою очередь, вращающийся ветер переносит на бесконечность вместе с веществом и магнитным полем значительный момент количества движения диска, позволяя тем самым ему медленно сжиматься и обеспечивая, наряду с вязким переносом углового момента наружу, другую возможность удалить момент количества движения из диска [33]. Отметим, что магнитные напряжения в ветре могут также вызывать очень эффективную фокусировку движения вещества – джеты [34].

Применительно к проблеме реконструирования эволюции допланетного газопылевого аккреционного диска автором в цикле работ [1-5,8-10] разрабатывается подход к решению проблемы адекватного математического моделирования дисковой турбулизованной среды, учитывающей совместное влияние магнитогидродинамических эффектов и эффектов гидродинамической турбулентности на динамику и процессы тепло- и массопереноса в дифференциально вращающейся космической газопылевой плазме, инерционные свойства полидисперсной примеси твёрдых частиц, процессы коагуляции и излучения, а так-

же ряд дополнительных эффектов, возникающих при турбулентных движениях плазмы в магнитном поле. В частности, в работе [8] в рамках основной проблемы космогонии, связанной с реконструированием протопланетного аккреционного диска, окружавшего протозвезду на ранних этапах ее существования, была получена в приближении одножидкостной магнитной гидродинамики замкнутая система магнитогидродинамических уравнений масштаба среднего движения, предназначенная для ряда схематизированных постановок и численных решений специальных задач по взаимосогласованному моделированию структуры и эволюции турбулизованного вещества в магнитном диске и в связанной с ним короне в случае, когда происходит аккреция вещества из окружающего космического пространства.

В настоящей работе, продолжающей этот цикл, рассмотрены следующие четыре аспекта проблемы построения адекватной модели эволюции протопланетного диска звезды:

- формулирование базовой системы усреднённых МГД–уравнений для развитой турбулентности, предназначенной для постановки и численного решения задач по взаимосогласованному моделированию астрофизического диска и его короны на ранних этапах их существования;

- разработка нового подхода к моделированию коэффициентов турбулентного переноса в проводящем диске, позволяющего учитывать эффекты обратного влияния магнитного поля и процессов конвективного переноса тепла на развитие турбулентности в стратифицированном по плотности слое конечной толщины;

- анализ влияния на формирование структуры, движения и энергетики осесимметричного диска крупномасштабного магнитного поля, порождаемого механизмом турбулентного  $\alpha\omega$ –динамо;

- постановка задачи моделирования тонкого (но оптически толстого) проводящего диска, учитывающая магнитное силовое и энергетическое взаимодействие между диском и его короной, диссипацию турбулентности за счет кинематической и магнитной вязкости, непрозрачность среды, генерацию крупномасштабного магнитного поля механизмом турбулентного динамо, приток вещества, количества движения и энергии (кинетической и гравитационной) из внешней аккреционной оболочки.

## 2. Исходные уравнения задачи

Основываясь на результатах нашей работы [8], приведём вначале систему усреднённых МГД – уравнений для развитой турбулентности, на основе которых предполагается численное моделирование, позволяющее реконструировать ход эволюции и структуру протопланетного аккреционного диска, находящегося около молодого прото-Солнца. Ниже для обозначения усреднённых параметров задачи будем использовать два символа: черта сверху означает традиционное теоретико-вероятностное усреднение какой-либо величины  $\overline{A(\mathbf{r}, t)}$  по ансамблю возможных реализаций (времени и/или пространству), в

то время как угловые скобки означают весовое усреднение Фавра [35], задаваемое соотношением  $\langle \mathcal{A} \rangle \equiv \overline{\rho \mathcal{A}} / \bar{\rho}$  (где  $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} + \mathcal{A}' = \langle \mathcal{A} \rangle + \mathcal{A}''$ ;  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{A}''$  – соответствующие турбулентные пульсации,  $\overline{\mathcal{A}'} = 0$ ,  $\overline{\rho \mathcal{A}''} = 0$ ); используемые в статье свойства весового усреднения можно найти в монографии автора [36]. В инерциальной системе отсчёта усреднённые гидродинамические уравнения для развитого турбулентного течения и уравнение магнитной индукции для среднего магнитного поля  $\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$  в абсолютной гауссовской системе единиц принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) = 0, \quad (1)$$

$$\bar{\rho} \frac{d\langle \mathbf{u} \rangle}{dt} = -\nabla (\bar{p} + p_{\text{turb}}^M) + \nabla \cdot \mathbf{R}^K + \frac{1}{c} \bar{\mathbf{j}} \times \overline{\mathbf{B}} - \bar{\rho} \nabla \Psi_G, \quad (2)$$

$$\bar{\rho} \frac{d\langle \mathbf{E} \rangle}{dt} = -\nabla \cdot (\bar{\mathbf{q}}_{\text{rad}} + \mathbf{q}^{\text{turb}}) - (\bar{p} + p_{\text{turb}}^M) \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{R}^K : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{4\pi\mu_0} \mathbf{R}^M : \nabla \overline{\mathbf{B}} + \frac{1}{\sigma_e} |\bar{\mathbf{j}}|^2, \quad (3)$$

$$\bar{\rho} \frac{d}{dt} \left( \frac{\overline{\mathbf{B}}}{\bar{\rho}} \right) = (\overline{\mathbf{B}} \cdot \nabla) \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla \cdot \mathbf{R}^M + \nu_M \nabla^2 \overline{\mathbf{B}}, \quad (\nabla \cdot \overline{\mathbf{B}} = 0), \quad (4)$$

$$\bar{p} = \Re \bar{\rho} \langle T \rangle. \quad (5)$$

Здесь  $d/dt \equiv \partial/\partial t + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla$  – субстанциональная производная по времени для усреднённого континуума;  $\bar{\rho}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{r}, t) \equiv \overline{\rho \mathbf{u}} / \bar{\rho}$  – соответственно усреднённые плотность и гидродинамическая скорость космического вещества в диске ( $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ ;  $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}''$ ;  $\mathbf{u}''$  – турбулентная пульсация усреднённой по Фавру скорости);  $\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$  – усреднённый вектор напряжённости пульсирующего магнитного поля (среднее магнитное поле);

$$\mathbf{R}^M(\mathbf{r}, t) \equiv - \left( \overline{\mathbf{u}'' \mathbf{B}} - \overline{\mathbf{B} \mathbf{u}''} \right) \quad (6)$$

– так называемый, магнитный тензор Рейнольдса;  $\nu_M \equiv c^2 / 4\pi\mu_0\sigma_e$  – коэффициент молекулярной магнитной вязкости;  $c$  – скорость света;  $\mu_0$  – магнитная проницаемость,  $\sigma_e$  – удельный молекулярный коэффициент электропроводности (далее будем предполагать, что коэффициенты  $\mu_0$ ,  $\nu_M$  и  $\sigma_e$  – const);  $\bar{p}(\mathbf{r}, t)$ ,  $p_{\text{turb}}^M(\mathbf{r}, t) \equiv \overline{|\mathbf{B}'|^2} / 8\pi\mu_0$  – соответственно газодинамическое давление и

турбулентное магнитное давление;

$$\mathbf{R}^K(\mathbf{r}, t) \equiv \left\{ -\overline{\rho \mathbf{u}'' \mathbf{u}''} + \overline{\mathbf{B}' \mathbf{B}'} / 4\pi\mu_0 \right\} \equiv \mathbf{R}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{T}_{\text{turb}}^M(\mathbf{r}, t) \quad (7)$$

– кинетический тензор турбулентных напряжений Рейнольдса для турбулизованной среды в присутствии пульсирующего магнитного поля;  $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) \equiv -\overline{\rho \mathbf{u}'' \mathbf{u}''}$  – обычный тензор Рейнольдса для газа, имеющий смысл дополнительных (турбулентных) напряжений;  $\mathbf{T}_{\text{turb}}^M(\mathbf{r}, t) \equiv \overline{\mathbf{B}' \mathbf{B}'} / 4\pi\mu_0$  – тензор магнитных натяжений для пульсационной составляющей магнитного поля;  $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t)$  – плотность тока проводимости (тока, измеряемого наблюдателем, движущимся вместе с электропроводящим газом), фигурирующая в усреднённом законе Ампера

$$\bar{\mathbf{j}} = (c / 4\pi\mu_0) \nabla \times \bar{\mathbf{B}}; \quad (8)$$

$$\Psi_G(\mathbf{r}) \equiv -G M_\odot |\mathbf{r}|^{-1/2} \quad (9)$$

– потенциальная функция гравитационного поля,  $M_\odot$  – масса протозвезды,  $G$  – гравитационная постоянная (ниже мы будем пренебрегать самогравитацией диска, что возможно всегда, когда  $M_{\text{disk}} / M_\odot \leq h / R_\infty \ll 1$ , здесь  $h$  и  $R_\infty$  – толщина и внешний радиус диска соответственно);  $\langle E \rangle \equiv \overline{\rho E} / \bar{\rho}$  – усреднённое по Фавру удельное значение внутренней энергии  $E(\mathbf{r}, t)$  дисковой среды (далее внутреннюю энергию газа будем считать пропорциональной температуре

$$E(\mathbf{r}, t) = c_V T = \mathfrak{R} T (\gamma - 1)^{-1}, \quad (10)$$

где  $\mathfrak{R} = \mathcal{R} / \mu$ ;  $\mathcal{R}$  – газовая постоянная;  $\mu$  – средняя атомная масса (средняя масса на частицу в единицах  $m_p$ );  $\gamma = c_p / c_V$  – показатель адиабаты;  $c_p$ ,  $c_V = \mathfrak{R} / (\gamma - 1)$  – соответственно удельная теплоёмкость газа при постоянном давлении и теплоёмкость при постоянном объёме (далее эти величины будем считать постоянными);  $\bar{\mathbf{q}}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)$  – плотность потока энергии, переносимого излучением;  $\mathbf{q}_*^{\text{turb}}(\mathbf{r}, t) \cong c_p \overline{\rho T'' \mathbf{u}''}$ ,  $\mathbf{q}^{\text{turb}}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{q}_*^{\text{turb}} - \overline{\mathbf{p}' \mathbf{u}''}$  – соответственно турбулентный и приведённый поток тепла [36].

Относительно усреднённых МГД-уравнений (1)–(5) заметим следующее: при их выводе мы для простоты не учитывали давление и энергию излучения, хотя часто необходимо рассматривать дисковую среду как смесь идеального газа и излучения абсолютно чёрного тела. Обобщение на этот случай приведённых уравнений не представляет труда.

В уравнении индукции (4) присутствует член

$$\nabla \cdot \mathbf{R}^M \equiv \overline{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}''} - \overline{(\mathbf{u}'' \cdot \nabla) \mathbf{B}} - \overline{\mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{u}''} = \nabla \times (\overline{\mathbf{u}'' \times \mathbf{B}}) \equiv c \nabla \times \mathcal{G}, \quad (11)$$

играющий роль дополнительного источника, генерирующего среднее магнитное поле  $\bar{\mathbf{B}}$ . Здесь

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, t) \equiv c^{-1} \overline{\mathbf{u}'' \times \mathbf{B}} = c^{-1} \overline{\rho \mathbf{u}'' \times (\mathbf{B}/\rho)}, \quad (12)$$

(или в тензорном виде  $\mathcal{G}_i \equiv -\varepsilon_{ijk} R_{jk}^M / 2c$ ) – порождаемая случайными флуктуациями скорости и магнитного поля дополнительная электродвижущая сила, появляющаяся и в усреднённом законе Ома

$$\bar{\mathbf{j}} = \sigma_e (\bar{\mathbf{E}}^* + \mathcal{G}), \quad \bar{\mathbf{E}}^* \equiv \bar{\mathbf{E}} + c^{-1} \langle \mathbf{u} \rangle \times \bar{\mathbf{B}}; \quad (13)$$

$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$  – вектор напряжённости электрического поля;  $\varepsilon_{ijk}$  – альтернирующий тензор Леви–Чивита. Отметим, что одной из основных целей полуэмпирической теории МГД–турбулентности как раз и является конструирование специального замыкающего соотношения для турбулентного потока  $\mathcal{G}$ , как функции средних полей  $\bar{\mathbf{B}}$  и  $\langle \mathbf{u} \rangle$ , с тем, чтобы при известном поле  $\langle \mathbf{u} \rangle$ , можно было найти  $\bar{\mathbf{B}}$  из уравнения индукции (4). С учетом (12), предпоследний член в уравнении притока тепла (3) для среднего движения может быть представлен в виде

$$(1/4\pi\mu_0) \mathbf{R}^M : \nabla \bar{\mathbf{B}} = -\mathcal{G} \cdot \bar{\mathbf{j}}. \quad (14)$$

Наконец, важно ясно себе представлять [8], что субстанциональное уравнение баланса внутренней энергии принимает форму (3) только в случае сильно развитой турбулентности, когда в структуре пульсирующих полей  $\mathbf{u}''$  и  $\mathbf{B}'$  устанавливается такое квазистационарное состояние, при котором полная турбулентная энергия плазмы

$$\langle \mathbf{b} \rangle_\Sigma \equiv \langle \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b} \rangle_M \equiv \overline{\rho |\mathbf{u}''|^2} / 2\bar{\rho} + \overline{|\mathbf{B}'|^2} / 8\pi\mu_0\bar{\rho}, \quad (15)$$

равная сумме пульсационной кинетической энергии газа  $\langle \mathbf{b} \rangle \equiv \overline{\rho |\mathbf{u}''|^2} / 2\bar{\rho}$  и турбулентной энергии магнитного поля  $\langle \mathbf{b} \rangle_M \equiv \overline{|\mathbf{B}'|^2} / 8\pi\mu_0\bar{\rho}$ , мало меняется как во времени, так и в пространстве,  $d\langle \mathbf{b} \rangle_\Sigma / dt \cong 0$ .

Система уравнений (1)–(5) должна быть дополнена замыкающими соотношениями для турбулентных потоков, а также выражениями для термодинамических и переносных характеристик. Граничные и начальные условия для структурных параметров не отличаются от соответствующих условий для неэлектропроводящих сред, но необходимо привлекать дополнительные условия для среднего магнитного поля.

### Закон сохранения полной энергии

Для целей моделирования нам понадобится также уравнение баланса усреднённой (по Фавру) полной энергии дисковой системы, равной сумме  $\langle \mathbf{U} \rangle_{\text{tot}} = \langle \mathbf{U} \rangle_{\text{tot}}^{\text{sub}} + \langle \mathbf{E} \rangle^{\text{M}}$  полной энергии проводящего газа

$$\langle \mathbf{U} \rangle_{\text{tot}}^{\text{sub}}(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathbf{E} \rangle + \Psi_{\text{G}} + |\langle \mathbf{u} \rangle|^2 / 2 + \langle \mathbf{b} \rangle \quad (16)$$

и усреднённой энергии электромагнитного поля

$$\langle \mathbf{E} \rangle_{\text{M}}(\mathbf{r}, t) \equiv \overline{\rho \mathbf{E}_{\text{M}}} / \bar{\rho} \equiv \overline{\rho (|\mathbf{B}|^2 / 8\pi\mu_0\rho)} / \bar{\rho} = \overline{|\mathbf{B}|^2} / 8\pi\mu_0\bar{\rho} + \langle \mathbf{b} \rangle_{\text{M}}. \quad (17)$$

Следуя работе [8], это уравнение для развитой турбулентности запишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \bar{\rho} \langle \mathbf{U} \rangle_{\text{tot}}^{\text{sub}} + \bar{\rho} \tilde{\mathbf{E}}^{\text{M}} \right) = \\ & -\nabla \cdot \left\{ \left( \bar{\rho} \langle \mathbf{U} \rangle_{\text{tot}}^{\text{sub}} \right) \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{q}^{\text{turb}} + \bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle - \left( \frac{|\overline{\mathbf{B}}|^2}{8\pi\mu_0} \right) \langle \mathbf{u} \rangle + \overline{\mathbf{q}_{\text{Poynt}}} - \mathbf{R} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \overline{\rho \mathbf{b}''\mathbf{u}''} \right\} + Q_{\text{rad}} \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\overline{\mathbf{q}_{\text{Poynt}}} \equiv (c / 4\pi) \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \quad (19)$$

– усреднённый вектор Пойнтинга, имеющий смысл плотности потока энергии электромагнитного поля;

$$Q_{\text{rad}} \equiv -\nabla \cdot \bar{\mathbf{q}}_{\text{rad}} = \mathcal{A} - \mathcal{R} = \int_0^{\infty} \int_{\Omega} \rho \kappa_{\nu a} I_{\nu} d\Omega d\nu - 4\pi \int_0^{\infty} \rho \kappa_{\nu a} B_{\nu} d\nu; \quad (20)$$

$\nu$ ,  $I_{\nu}(\mathbf{r}, \Omega, t)$  и  $B_{\nu}(\mathbf{r}, \Omega, t)$  – соответственно частота, спектральная интенсивность и функция внутренних источников излучения;  $\Omega$  – направление движения фотонов,  $\kappa_{\nu a}$  – истинный коэффициент поглощения излучения веществом диска (спектральная непрозрачность). Первый член ( $\mathcal{A}$ ) в выражении (20) соответствует поглощаемой, а второй ( $\mathcal{R}$ ) – спонтанно излучаемой радиационной энергии в единице объёма в единицу времени. Возможны несколько режимов переноса излучения, которые применимы в различных областях диска в зависимости от темпа аккреции, массы протозвезды и т.п. В частности, если полная оптическая толщина диска  $d\tau_{\nu} = \rho \kappa_{\nu a} ds$  вдоль направления распространения  $s$  превосходит единицу, фотоны переносятся к его поверхности путем диффузии [см. соотношение (26)]. В общем случае спектральная интенсивность  $I_{\nu}$ , вхо-

дящая в формулу (20), должна определяться в процессе решения уравнения переноса излучения.

В МГД-приближении вектор Пойнтинга  $\overline{\mathbf{q}}_{\text{Poynt}}$  может быть преобразован к виду [8]

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{q}}_{\text{Poynt}} = & \overline{\rho} \left( \frac{|\overline{\mathbf{B}}|^2}{8\pi\mu_0\overline{\rho}} + \mathbf{b}_M + \frac{p_{\text{turb}}^M}{\overline{\rho}} \right) \langle \mathbf{u} \rangle + \left( \frac{|\overline{\mathbf{B}}|^2}{8\pi\mu_0} \mathbf{I} - \frac{\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{B}}}{4\pi\mu_0} \right) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle - \mathbf{T}_{\text{turb}}^M \cdot \langle \mathbf{u} \rangle + \\ & + \frac{1}{4\pi\mu_0} \overline{(|\mathbf{B}|^2 \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}''} - \nu_M \nabla \cdot \left( \frac{|\overline{\mathbf{B}}|^2}{8\pi\mu_0} \mathbf{I} - \frac{\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{B}}}{4\pi\mu_0} \right) - \nu_M \nabla \cdot (p_{\text{turb}}^M \mathbf{I} - \mathbf{T}_{\text{turb}}^M), \end{aligned} \quad (19^*)$$

причём для сильно развитой турбулентности два малых члена, включающие коэффициент  $\nu_M$ , для большинства областей аккреционного диска и короны могут быть опущены [37]. Их следует принимать во внимание только в областях высоких градиентов магнитного поля, например, в области стохастического перезамыкания магнитных силовых линий.

Комбинируя (18) и (19\*), запишем закон сохранения полной энергии дисковой системы в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{d(\overline{\rho} \langle \mathbf{U} \rangle_{\text{tot}})}{dt} = & Q_{\text{rad}} - \\ & - \nabla \cdot \left\{ \mathbf{q}^{\text{turb}} + (\overline{\rho} + p_{\text{turb}}^M) \langle \mathbf{u} \rangle - \left( \mathbf{R}^K + \frac{\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{B}}}{4\pi\mu_0} \right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \overline{\rho b'' \mathbf{u}''} + \frac{1}{4\pi\mu_0} \overline{\rho \left( \frac{|\mathbf{B}|^2 \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B}}{\rho} \right)'' \mathbf{u}''} \right\}, \end{aligned} \quad (18^*)$$

причём два корреляционных члена в левой части этого уравнения также можно опустить в силу их малости в рассматриваемой здесь задаче [38].

### Определяющие соотношения

В работе [8] описание турбулентных движений электропроводящего газа проводилось в рамках двухжидкостного термодинамического континуума, состоящего из двух взаимно открытых подсистем, заполняющих одно и то же координатное пространство непрерывно – подсистемы усреднённого движения и подсистемы турбулентного хаоса, связанного с пульсационным движением вещества и поля. Предполагалось, что элементарный объём  $d\mathbf{r}$  подсистемы турбулентного хаоса может быть охарактеризован обобщёнными термодинамическими параметрами состояния, такими как энтропия  $S_{\text{turb}}$ , внутренняя энергия  $E_{\text{turb}}$ , давление  $p_{\text{turb}}$  и температура  $T_{\text{turb}}$  турбулизации (величина, характеризующая степень интенсивности турбулентных пульсаций [39]). Энтропия

$S_{\text{turb}}$  и внутренняя энергия  $E_{\text{turb}}$  турбулизации рассматривались в качестве первичных концепций и вводились в модель *a priori* для обеспечения связности термодинамической теории; при этом не подразумевалась их точная физическая интерпретация [40]. Особо был проанализирован квазиравновесный режим движения в подсистеме турбулентного хаоса, при котором суммарное возникновение  $\sigma_{(S_{\text{turb}})} \equiv \sigma_{(S_{\text{turb}})}^e + \sigma_{(S_{\text{turb}})}^i$  энтропии турбулизации  $S_{\text{turb}}$  почти отсутствует. Это условие означает, что производство  $\sigma_{(S_{\text{turb}})}^i$  энтропии  $S_{\text{turb}}$  (за счет необратимых процессов внутри подсистемы турбулентного хаоса) в такой степени компенсируется её оттоком  $\sigma_{(S_{\text{turb}})}^e$  к подсистеме усреднённого движения, что  $\sigma_{(S_{\text{turb}})} \cong 0$ . Поскольку всегда  $\sigma_{(S_{\text{turb}})}^i \geq 0$ , то справедливо выражение  $0 > \sigma_{(S_{\text{turb}})}^e \cong -\sigma_{(S_{\text{turb}})}^i$ . Отсюда следует, что для поддержания стационарно-неравновесного режима турбулентности необходим приток отрицательной энтропии (неэнтропии) от усреднённого движения к хаотической составляющей, причём  $\sigma_{(S_{\text{turb}})}^e = -T\sigma_{\langle S \rangle}^e / T_{\text{turb}} < 0$ . Только в этом случае балансовое уравнение для удельной энтропии системы  $\langle S \rangle = c_v \ln(\langle T \rangle / \bar{\rho}^{\gamma-1})$  принимает «стандартный» вид общего уравнения переноса тепла [10]

$$\bar{\rho} d\langle S \rangle / dt + \nabla \cdot (\mathbf{q}^{\text{turb}} / \langle T \rangle) = \sigma_{\langle S \rangle}, \quad (21)$$

где локальное возникновение  $\sigma_{\langle S \rangle}$  энтропии  $\langle S \rangle$  за счет диссипативных процессов в электропроводящей турбулизованной среде определяется выражением

$$0 \leq \langle T \rangle \sigma_{\langle S \rangle} \equiv -\mathbf{q}^{\text{turb}} \cdot \frac{\nabla \langle T \rangle}{\langle T \rangle} + \left( \mathbf{R}^K + \frac{2}{3} \bar{\rho} (\langle b \rangle - \langle b \rangle_M) \mathbf{I} \right) : \mathbf{D} + \frac{\mathbf{R}^M \cdot (\nabla \bar{\mathbf{B}})^a}{4\pi\mu_0} + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} + Q_{\text{rad}}. \quad (22)$$

Здесь  $\mathbf{D} \equiv (\nabla \langle \mathbf{u} \rangle)^s - \frac{1}{3} \mathbf{I} (\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle)$  – скорость сдвига для усреднённого движения;  $\left( (\nabla \langle \mathbf{u} \rangle)^s \right)_{jk} \equiv \frac{1}{2} (\partial \langle u \rangle_j / \partial x_k + \partial \langle u \rangle_k / \partial x_j)$ ,  $\left( (\nabla \bar{\mathbf{B}})^a \right)_{jk} \equiv \frac{1}{2} (\partial \bar{B}_j / \partial x_k - \partial \bar{B}_k / \partial x_j)$  – соответственно симметрическая и антисимметрическая части тензоров  $\nabla \langle \mathbf{u} \rangle$  и  $\nabla \bar{\mathbf{B}}$ ;  $\mathbf{I}$  – единичный тензор.

При использовании метода Онзагера неравновесной термодинамики билинейная форма (22) для  $\sigma_{\langle S \rangle}$  позволяет получить определяющие (замыкающие) соотношения для турбулентного потока тепла  $\mathbf{q}^{\text{turb}}$ , полного тензора турбулентных напряжений  $\mathbf{R}^K$  и магнитного тензора Рейнольдса  $\mathbf{R}^M$ , отвечающие режиму стационарно-неравновесного состояния турбулентного поля [8]. Для

изотропной турбулентности (здесь мы ограничимся именно этим случаем), при использовании принципа Кюри–Пригожина (согласно которому связь между тензорами различного ранга в изотропной среде невозможна), эти соотношения в случае пренебрежения малыми перекрестными эффектами принимают вид [8]

$$\mathbf{q}^{\text{turb}} = -\lambda^{\text{turb}} \left( \nabla \langle T \rangle - \frac{\nabla \bar{p}}{\bar{\rho} c_p} \right) = -\lambda^{\text{turb}} \frac{\langle T \rangle}{c_p} \nabla \langle S \rangle \cong -\lambda^{\text{turb}} \left( \nabla \langle T \rangle - \frac{\mathbf{g}}{c_p} \right), \quad (23)$$

$$\mathbf{R}^K = -\frac{2}{3} \bar{\rho} (\langle b \rangle - \langle b \rangle_M) \mathbf{I} + 2\bar{\rho} v_K^{\text{turb}} \left( (\nabla \langle \mathbf{u} \rangle)^s - \frac{1}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \right), \quad (24)$$

$$\mathbf{R}^M = 2v_M^{\text{turb}} (\nabla \bar{\mathbf{B}})^a, \quad (\text{или } \mathcal{E} = -v_M^{\text{turb}} \nabla \times \bar{\mathbf{B}}), \quad (25)$$

где  $\lambda^{\text{turb}}$ ,  $v_K^{\text{turb}}$ ,  $v_M^{\text{turb}}$  – соответственно коэффициенты турбулентной теплопроводности, турбулентной кинематической вязкости и турбулентной диффузии магнитного поля, зависящие в общем случае от параметров:  $\bar{\rho}$ ,  $\nabla \langle \mathbf{u} \rangle$ ,  $\bar{\mathbf{B}}/4\pi\mu_0$  и  $L$  (величина  $L(\mathbf{r})$  является некоторой геометрической характеристикой расположения точки  $\mathbf{r}$ , например, равной обычной «длине пути смешения» [41]).

Ниже определяющее соотношение для вектора радиации будем использовать в форме лучистого потока тепла:

$$\mathbf{q}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = -\chi_{\text{rad}} \nabla \langle T \rangle = -\frac{16\sigma_B \langle T \rangle^3}{3\kappa \bar{\rho}} \nabla \langle T \rangle = -\frac{4\sigma_B}{3\kappa \bar{\rho}} \nabla \langle T \rangle^4, \quad (26)$$

справедливой в случае диффузии равновесного излучения (например, при локальном термодинамическом равновесии излучения с веществом внутри оптически толстых дисков). Здесь  $\sigma_B$ ,  $\chi_{\text{rad}} = 16\sigma_B \langle T \rangle^3 / 3\kappa \bar{\rho}$  – соответственно постоянная Стефана–Больцмана и коэффициент лучистой (нелинейной) теплопроводности среды, весьма сильно зависящий от температуры и плотности вещества;  $\kappa(\rho, T)$  – полная непрозрачность среды, которая сложным образом зависит от  $\rho$  и  $T$ , а также от степени ионизации, химического состава [42] и т.п. В общем случае величина  $\kappa$  определяется как Росселандово среднее по обратным величинам  $1/\kappa_\nu$  спектральной непрозрачности [43]. Как известно, доминирующий вклад  $\kappa_{\text{ff}}$  в непрозрачность  $\kappa$  в аккреционном диске вносит нерелятивистское тепловое тормозное излучение, или «свободно-свободные переходы». Связанную с этими процессами среднюю по Росселанду непрозрачность  $\kappa$ , можно определять формулой Крамерса

$$\kappa_{\text{ff}}(\rho, T) = \mathcal{K} \rho T^{-7/2} \text{ см}^2 \text{ г}^{-1}, \quad (27)$$

где  $\mathcal{K} = 0.32 \times 10^{23}$  – константа. В оптически толстых дисках сравнимую (но все же меньшую) величину  $\kappa_{\text{es}} = 2 \times 10^{-2} (1 + X) \text{ см}^2 \text{ г}^{-1}$  вносят «связанно-связанные» переходы в линиях и «связанно-свободные» ионизационные переходы (здесь  $X$  – массовая доля водорода в среде).

Сделаем теперь важное замечание по поводу формулы (25) для ЭДС, связанной с вектором  $\mathcal{G}$ . Эта формула справедлива только для изотропной (в гидродинамическом смысле) турбулентности, когда поле пульсирующих скоростей  $\mathbf{u}''$  обладает зеркальной симметрией во всей системе. Однако в случае вращающегося аккреционного диска возможна ситуация, когда, например, в верхней части диска левовращательные турбулентные движения более вероятны, чем правовращательные, или наоборот. Физической причиной нарушения отражательной симметрии служит воздействие силы Кориолиса на вихри, всплывающие и опускающиеся в турбулентной среде диска. При этом отсутствует зеркальная симметрия поля  $\mathbf{u}''$  относительно центральной плоскости диска, и турбулентность может обладать так называемой гидродинамической спиральностью  $h_{\text{hel}} \equiv \overline{\mathbf{u}'' \cdot (\nabla \times \mathbf{u}'')}$ , которая характеризует избыток вихрей данного знака [7,26,27,44]. Обобщение формулы (25) на случай отражательно-несимметричной турбулентности принимает вид [45]

$$c\mathcal{G} = \alpha \bar{\mathbf{B}} - v_{\text{M}}^{\text{turb}} \nabla \times \bar{\mathbf{B}}, \quad (25^*)$$

где коэффициент спиральности  $\alpha$  является псевдоскаляром. Легко видеть, что с дополнительным слагаемым в соотношении (25\*) связан электрический ток  $\bar{\mathbf{j}} = \sigma_e \alpha \bar{\mathbf{B}} + \dots$ , направленный вдоль магнитного поля. Простые рассуждения показывают, что для случая изотропного и зеркально-симметричного поля скоростей  $\mathbf{u}''$ , коэффициент спиральности  $\alpha$  равен нулю. Действительно, для изотропной среды одинакова вероятность как некоторой данной реализации ансамбля этого поля, так и реализации, полученной из неё зеркальным отражением. Тогда, с одной стороны, величина  $\alpha$  не должна изменяться, если выполнить это отражение, так как ансамбль не изменился, но, с другой стороны, коэффициент  $\alpha$  должен изменить свой знак, так как он является псевдоскаляром; поэтому  $\alpha = 0$ .

Подстановка (25\*) в уравнение индукции (4) для средних полей дает

$$\bar{\rho} \frac{d}{dt} \left( \frac{\bar{\mathbf{B}}}{\bar{\rho}} \right) = (\bar{\mathbf{B}} \cdot \nabla) \langle \mathbf{u} \rangle + (v_{\text{M}} + v_{\text{M}}^{\text{turb}}) \nabla^2 \bar{\mathbf{B}} - \nabla \times \left\{ v_{\text{M}}^{\text{turb}} (\nabla \times \bar{\mathbf{B}}) \right\} + \nabla \times (\alpha \bar{\mathbf{B}}). \quad (28)$$

Для хорошо перемешанной турбулентности (создаваемой полем  $\mathbf{u}''$ ), когда магнитное поле становится запутанным и мелкомасштабным, процесс диффу-

зии усиливается,  $v_M^{\text{turb}} \gg v_M > 0$  (условие сильно развитой турбулентности).  
Ниже мы будем для простоты предполагать, что в уравнении (28)  $v_M^{\text{turb}} = \text{const}$ ;  
 $\alpha = \text{const}$ ; тогда

$$\bar{\rho} \frac{d}{dt} \left( \frac{\bar{\mathbf{B}}}{\bar{\rho}} \right) = \left( \bar{\mathbf{B}} \cdot \nabla \right) \langle \mathbf{u} \rangle + v_M^{\text{turb}} \nabla^2 \bar{\mathbf{B}} + \alpha \nabla \times \bar{\mathbf{B}}. \quad (28^*)$$

Отсюда видно, что отражательно-симметричная изотропная турбулентность, в отличие от гиротропной, вызывает только турбулентную диффузию магнитного поля.

Важно иметь в виду, что в силу своей псевдоскалярной природы альфа-эффект антисимметричен относительно центральной плоскости диска. Свойства симметрии уравнений Максвелла допускают при этом два вида симметрии для собственных решений (мод) уравнения динамо среднего поля (28\*): магнитные поля могут быть антисимметричными относительно экватора (дипольная симметрия) и симметричны относительно экватора (квадрупольная симметрия). В частности, механизм солнечного динамо возбуждает, как правило, преимущественно дипольную осциллирующую моду (правило Хейла).

Если теперь подставить в закон Ома (13) для средних полей выражения (25\*) и (8), то для усреднённого тока будем иметь

$$\bar{\mathbf{j}} = \sigma_e^{\text{turb}} \bar{\mathbf{E}}^* + \frac{c\alpha}{4\pi\mu_0 v_M^{\text{turb}}} \bar{\mathbf{B}} \cong \sigma_e^{\text{turb}} \left( \bar{\mathbf{E}}^* + c^{-1} \alpha \bar{\mathbf{B}} \right). \quad (29)$$

Здесь турбулентная проводимость  $\sigma_e^{\text{turb}}$  определяется формулой

$$\sigma_e^{\text{turb}} = \frac{\sigma_e}{1 + 4\pi\mu_0 v_M^{\text{turb}} \sigma_e / c^2} = \frac{\sigma_e v_M}{v_M + v_M^{\text{turb}}} \cong \frac{\sigma_e v_M}{v_M^{\text{turb}}} = \frac{c^2}{4\pi\mu_0 v_M^{\text{turb}}}, \quad (30)$$

из которой видно, что турбулентная проводимость  $\sigma_e^{\text{turb}}$  в случае развитой турбулентности меньше молекулярной проводимости  $\sigma_e$ .

Общее уравнение переноса тепла (21), с учётом определяющих соотношений (23)-(25), принимает вид

$$\begin{aligned} & \bar{T} \bar{\rho} \frac{d\tilde{S}}{dt} - \nabla \cdot \left\{ \lambda^{\text{turb}} \left( \nabla \langle T \rangle - \frac{\nabla \bar{p}}{\bar{\rho} c_p} \right) \right\} = \\ & = 2\bar{\rho} v_K^{\text{turb}} \left( \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} \end{smallmatrix} \right) + \frac{v_M^{\text{turb}}}{2\pi\mu_0} \left( (\nabla \bar{\mathbf{B}})^a : (\nabla \bar{\mathbf{B}})^a \right) + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} + Q_{\text{rad}}. \end{aligned} \quad (22^*)$$

Поскольку, в силу (30), имеем

$$\frac{v_M^{\text{turb}}}{2\pi\mu_0} \left( (\nabla\bar{\mathbf{B}})^a : (\nabla\bar{\mathbf{B}})^a \right) + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} = \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e^{\text{turb}}} + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} \cong \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e^{\text{turb}}},$$

то уравнение (22\*) может быть переписано в следующей окончательной форме

$$\langle T \rangle \bar{\rho} \frac{d\langle S \rangle}{dt} \cong \nabla \cdot \left( \frac{\lambda^{\text{turb}} \langle T \rangle}{c_p} \nabla \langle S \rangle \right) + 2\bar{\rho} v_K^{\text{turb}} \left( \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} \end{smallmatrix} \right) + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e^{\text{turb}}} + Q_{\text{rad}}, \quad (22^{**})$$

где величина  $\langle T \rangle \bar{\rho} d\langle S \rangle / dt$  представляет собой количество тепла (отнесённое к единице объёма среды), получаемого системой в единицу времени, первый член справа есть тепло, приносимое в рассматриваемый объём посредством турбулентной теплопроводности, второй член представляет собой энергию, диссипируемую в виде тепла благодаря турбулентной вязкости, третий член, соответствующий джоулевому нагреву, учитывает вклад среднего магнитного поля в производство энтропии системы и, наконец, последний член  $Q_{\text{rad}} \equiv -\nabla \cdot \mathbf{q}_{\text{rad}}$  связан с процессом лучистого теплоотвода из системы.

### Коэффициенты турбулентного переноса

Известно, что при изотропной турбулентности коэффициенты турбулентной кинематической вязкости  $v_K^{\text{turb}}$  и турбулентной диффузии магнитного поля  $v_M^{\text{turb}}$  близки к произведению  $w_{\text{turb}} l_{\text{cor}}$  скорости турбулентных вихрей  $w_{\text{turb}} \cong \sqrt{|\mathbf{u}''|^2}$  и их корреляционной длины  $l_{\text{cor}}$ , а коэффициент спиральности  $\alpha$  по порядку величины  $\alpha \cong -\frac{1}{3} h_{\text{hel}} \tau_{\text{cor}}$ , где  $h_{\text{hel}} \equiv \overline{\mathbf{u}'' \cdot (\nabla \times \mathbf{u}'')}$  – плотность гидродинамической спиральности (псевдоскаляр),  $\tau_{\text{cor}}$  – масштаб, характеризующий изменения поля турбулентных скоростей  $\mathbf{u}''$  во времени [44]. В частности, если согласно стандартной гипотезе Шакуры и Сюняева [46] принять, что  $l_{\text{cor}}$  – эффективная полутолщина аккреционного диска, а  $w_{\text{turb}}$  выражается через термическую скорость звука  $c_s$ , то турбулентная диффузия приводит к характерному времени затухания магнитного поля (вернее, тех его компонентов, которые заметно меняются на масштабе толщины диска) порядка периода кеплеровского вращения. При этом магнитное число Рейнольдса  $\mathbf{Re}_M \propto 1$  и важен турбулентный перенос.

С другой стороны, обобщая известную формулу Колмогорова для непротяженной жидкости на случай МГД-турбулентности, можно предположить, что кинетический коэффициент турбулентной вязкости  $v_K^{\text{turb}}$  вычисляется по формуле

$$v_K^{\text{turb}} = L \sqrt{b_\Sigma}, \quad (31)$$

где  $\mathbf{L}$  – путь перемешивания по Прандтлю (числовой множитель может быть включён в величину  $\mathbf{L}$ ). Это предположение также часто вполне приемлемо для практических приложений. Вместе с тем, в соотношении (31) явно не учитывается возможное влияние магнитного поля на характер перемешивания, что для развитой МГД-турбулентности не вполне корректно (например, для возмущений больших масштабов). По этой причине в формулу (31) необходимо, в общем случае, вводить поправку, учитывающую обратный эффект диффузии магнитного поля и переноса тепла на развитие турбулентности в электропроводящей дисковой среде.

Для нахождения такого поправочного множителя к величине  $\mathbf{L}$  мы воспользуемся уравнением баланса энтропии турбулизации  $\mathbf{S}_{\text{turb}}$ , которое в случае стационарно-неравновесного режима развитой турбулентности принимает вид

$$\begin{aligned} 0 &\cong \bar{\rho} \frac{d\mathbf{S}_{\text{turb}}}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{S}_{\text{turb}}} = \\ &= 2\bar{\rho} v_{\mathbf{K}}^{\text{turb}} \left( \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} \end{smallmatrix} \right) + \frac{v_{\mathbf{M}}^{\text{turb}} (\nabla \times \bar{\mathbf{B}})^2}{4\pi\mu} + \frac{\lambda^{\text{turb}} \mathbf{g}}{c_p \langle T \rangle} \cdot \left( \nabla \langle T \rangle - \frac{\mathbf{g}}{c_p} \right) - \bar{\rho} \varepsilon_{\Sigma}. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь  $\mathbf{g} = -\nabla \Psi_{\mathbf{G}} = \mathbf{G} M_{\odot} \mathbf{r} / |\mathbf{r}|^3$ ;  $\Phi_v \equiv 2\bar{\rho} v_{\mathbf{K}}^{\text{turb}} \left( \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} \end{smallmatrix} \right)$  – диссипативная функция;  $\mathbf{P}$  – тензор вязких напряжений, связанный с процессами молекулярного переноса количества движения дискового вещества;  $\varepsilon_{\Sigma} \equiv \langle \varepsilon_{\mathbf{M}} \rangle + \langle \varepsilon_{\mathbf{b}} \rangle = -\left\{ \overline{\rho(\mathbf{P}/\rho)'' : \nabla \mathbf{u}''} + (v_{\mathbf{M}} / 4\pi\mu_0) \overline{|\nabla \times \mathbf{B}'|^2} \right\}$  – полная удельная скорость диссипации турбулентной кинетической и турбулентной магнитной энергии в тепло (под действием молекулярной кинематической вязкости и вязкости магнитного поля).

Используя обозначение  $w_{\text{turb}}$  для характерной пульсационной скорости проводящей среды, и  $\mathbf{L}$  для пути перемешивания по Прандтлю (в случае отсутствия магнитного поля), напомним

$$v_{\mathbf{K}}^{\text{turb}} = \mathbf{L} w_{\text{turb}}, \quad v_{\mathbf{M}}^{\text{turb}} = \frac{\mathbf{L} w_{\text{turb}}}{\mathbf{Pr}_{\mathbf{M}}^{\text{turb}}}, \quad \frac{\lambda^{\text{turb}}}{\bar{\rho} \langle c_p \rangle} = \frac{\mathbf{L} w_{\text{turb}}}{\mathbf{Pr}_{\mathbf{K}}^{\text{turb}}}, \quad \varepsilon_{\Sigma} = \frac{1}{\alpha_{\text{ss}}^2} \frac{w_{\text{turb}}^3}{\mathbf{L}}. \quad (33)$$

При этом эмпирическую константу  $\alpha_{\text{ss}}$ , а также турбулентные числа Прандтля–Шмидта (кинетическое и магнитное)

$$\mathbf{Pr}_{\mathbf{K}}^{\text{turb}} = \bar{\rho} c_p v_{\mathbf{K}}^{\text{turb}} / \lambda^{\text{turb}}, \quad \mathbf{Pr}_{\mathbf{M}}^{\text{turb}} = v_{\mathbf{K}}^{\text{turb}} / v_{\mathbf{M}}^{\text{turb}} \quad (34)$$

будем в первом приближении считать постоянными. Подставляя эти выражения в (32), получим для стационарного режима:

$$w_{\text{turb}} \left\{ 2L \left( \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} \end{smallmatrix} \right) + \frac{L}{\text{Pr}_M^{\text{turb}}} \frac{(\nabla \times \bar{\mathbf{B}})^2}{4\pi\mu_0\bar{\rho}} + \frac{L}{\text{Pr}_K^{\text{turb}}} \frac{\mathbf{g}}{\langle T \rangle} \cdot \left( \nabla \langle T \rangle - \frac{\mathbf{g}}{c_p} \right) - \frac{1}{\alpha_{\text{ss}}^2} \frac{w_{\text{turb}}^2}{L} \right\} \cong 0 \quad (35)$$

Уравнение (35) распадается на два уравнения: уравнение  $w_{\text{turb}} = 0$ , соответствующее ламинарному режиму течения, и уравнение

$$w_{\text{turb}}^2 = \alpha_{\text{ss}}^2 L^2 \left\{ 2 \left( \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} \end{smallmatrix} \right) + \frac{1}{\text{Pr}_M^{\text{turb}}} \frac{(\nabla \times \bar{\mathbf{B}})^2}{4\pi\mu_0\bar{\rho}} + \frac{1}{\text{Pr}_K^{\text{turb}}} \frac{\mathbf{g}}{\langle T \rangle} \cdot \left( \nabla \langle T \rangle - \frac{\mathbf{g}}{c_p} \right) \right\}, \quad (36)$$

описывающее установившийся турбулентный режим. Уравнение (36) имеет вещественное решение только в том случае, когда

$$2 \left( \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} \end{smallmatrix} \right) + \frac{1}{\text{Pr}_K^{\text{turb}}} \left\{ \frac{(\nabla \times \bar{\mathbf{B}})^2}{4\pi\mu_0\bar{\rho}} + \frac{\mathbf{g}}{\tilde{T}} \cdot \left( \nabla \langle T \rangle - \frac{\mathbf{g}}{c_p} \right) \right\} \geq 0;$$

отсюда получаем

$$\mathbf{Ri}_\Sigma \equiv \mathbf{Ri}_K - \mathbf{Ri}_M \leq (\mathbf{Ri}_\Sigma)_{\text{cr}} = \text{Pr}_K^{\text{turb}},$$

где введены обозначения

$$\mathbf{Ri}_K \equiv - \frac{\mathbf{g} \cdot (\nabla \langle T \rangle - \mathbf{g}/c_p) / \langle T \rangle}{2 \left( \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} \end{smallmatrix} \right)}, \quad \mathbf{Ri}_M \equiv \frac{1}{4\pi\mu_0\bar{\rho}} \frac{(\nabla \times \bar{\mathbf{B}})^2}{2 \left( \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} \end{smallmatrix} \right)}. \quad (37)$$

Здесь  $\mathbf{Ri}_K$  и  $\mathbf{Ri}_M$  – соответственно градиентное гидродинамическое число Ричардсона – безразмерная величина, определяющая относительный вклад термической конвекции вещества в порождение турбулентной энергии (по сравнению с передачей энергии от усреднённого движения) и градиентное магнитогидродинамическое число Ричардсона (пропорциональное отношению магнитной энергии к кинетической энергии плазмы), учитывающее влияние магнитного поля на возникновение турбулентности в потоке.

Если  $\mathbf{Ri}_\Sigma = \text{Pr}_K^{\text{turb}}$ , то имеется единственное вещественное решение  $w_{\text{turb}} = 0$ , соответствующее ламинарному режиму. В случае, когда имеет место турбулентный режим и, следовательно,  $\mathbf{Ri}_\Sigma < (\mathbf{Ri}_\Sigma)_{\text{cr}}$ , для турбулентного коэффициента вязкости электропроводной жидкости получим

$$v_K^{\text{turb}} = \alpha_{\text{ss}} L^{*2} \sqrt{2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} \end{pmatrix}}, \quad L^* \equiv L(1 - \mathbf{Ri}_\Sigma / \mathbf{Pr}_K^{\text{turb}})^{0.25}, \quad (38)$$

где  $L^* = L\mathcal{Q}$ ; безразмерная функция  $\mathcal{Q} \equiv (1 - \mathbf{Ri}_\Sigma / \mathbf{Pr}_K^{\text{turb}})^{0.25}$  учитывает влияние магнитного поля и обратный эффект переноса тепла на развитие турбулентности через посредство пути смешения. Одновременно получилась и приближенная оценка для критического числа Ричардсона  $(\mathbf{Ri}_\Sigma)_{\text{cr}} = \mathbf{Pr}_K^{\text{turb}} = \bar{\rho} c_p v_K^{\text{turb}} / \lambda^{\text{turb}}$ .

Для вычисления пути перемешивания по Прандтлю (в случае отсутствия магнитного поля) можно воспользоваться известной формулой Прандтля–Никурадзе, которая применительно к моделированию дисковой структуры может быть записана в виде

$$L/h_{\text{eff}} = 0,14 - 0,08(1 - z/h_{\text{eff}})^2 - 0,06(1 - z/h_{\text{eff}})^4. \quad (39)$$

Приведённая в этом разделе замкнутая система усреднённых МГД–уравнений является основной при моделировании структуры и эволюции аккреционного протопланетного диска; при моделировании тонких турбулизованных дисков она может быть существенно упрощена [47].

### 3. МГД–уравнения для турбулентного аккреционного диска

Рассмотрим теперь медленно эволюционирующий аккреционный турбулентный диск, который в момент времени  $t$  вращается с угловой скоростью  $\Omega(\varpi, z)$  вокруг оси  $z$ . Будем полагать, что диск является электропроводящим и имеется начальное крупномасштабное и медленно меняющееся осесимметричное магнитное поле  $\mathbf{B}_\odot$  протозвезды, дипольный момент которого совпадает с осью вращения диска. Далее мы будем использовать цилиндрическую систему координат  $(\varpi, \phi, z)$  и предполагать, что центральная плоскость аккреционного диска совпадает с экваториальной плоскостью звезды, определяемой условием  $z = 0$ . Ограничимся здесь моделью тонкого осесимметричного ( $\partial(\dots)/\partial\phi = 0$ ) аккреционного диска, когда пространственный масштаб изменения структурных параметров в слое перпендикулярном к экваториальной плоскости велик по сравнению с полутолщиной диска, т.е. величина  $h(\varpi)$  мала по сравнению с  $\varpi$  для всех  $\varpi$ ,  $\partial h/\partial\varpi \approx h/\varpi \ll 1$ . Можно показать, что толщина аккреционного диска зависит от баланса нагрева и охлаждения [56]. Эффективное охлаждение приводит к геометрически тонкому диску. Для такого диска характер течения проводящего дискового вещества может быть проанализирован с использованием двумерных МГД–уравнений.

### Коэффициент турбулентной вязкости

Проанализируем вначале выражение (38) для коэффициента вязкости в тонком аккреционном диске, движение вещества в котором можно представить как суперпозицию общего дифференциального вращения и случайного турбулентного движения. Для простоты будем предполагать, что вращение диска настолько медленное, что меридиональной циркуляцией можно пренебречь [48], т.е. усреднённое движение космического вещества реализуется лишь в азимутальном направлении, а истинная скорость течения беспорядочно пульсирует около этого среднего значения, крайне нерегулярно изменяясь в меридиональном и азимутальном направлениях; тогда  $\langle \mathbf{u} \rangle_{\varpi} = 0$ ,  $\langle \mathbf{u} \rangle_{\phi} = \varpi \Omega(\varpi, z)$ ,  $\langle \mathbf{u} \rangle_z = 0$ .

В принятых предположениях  $\varpi\phi$ -компонента кинетического тензора Рейнольдса (24) и диссипативная функция  $\Phi_v$  принимают соответственно вид

$$\mathbf{R}_{\varpi\phi}^K = \bar{\rho} v_K^{\text{turb}} \varpi \frac{\partial \Omega(\varpi, z)}{\partial \varpi},$$

$$\Phi_v \equiv v_K^{\text{turb}} 2 \left( \mathbf{D} : \mathbf{D} \right) = v_K^{\text{turb}} \varpi^2 \left\{ \left( \frac{\partial \Omega(\varpi, z)}{\partial \varpi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Omega(\varpi, z)}{\partial z} \right)^2 \right\}. \quad (40)$$

Тогда для большей части диска (за исключением областей, близких к звезде) справедливо следующее приближённое выражение для коэффициента турбулентной вязкости

$$v_K^{\text{turb}} = \alpha_{\text{ss}} L^{*2} \varpi \left| \frac{\partial \Omega(\varpi, z)}{\partial \varpi} \right|, \quad L^*(z) \equiv L(z) \left\{ 1 - \frac{\mathbf{Ri}_K - \mathbf{Ri}_M}{\mathbf{Pr}_K^{\text{turb}}} \right\}^{0.25}, \quad (41)$$

где

$$\mathbf{Ri}_K \cong \frac{\Omega_{K,\text{mid}}^2 z}{\varpi^2} \frac{1}{\langle T \rangle} \frac{\partial \langle T \rangle / \partial z + G_a}{(\partial \Omega / \partial z)^2}, \quad \mathbf{Ri}_M \cong \frac{1}{4\pi\mu_0\bar{\rho}} \frac{(\partial \bar{B}_\phi / \partial z)^2}{\varpi^2 (\partial \Omega / \partial z)^2}, \quad (42)$$

$$G_a \equiv \frac{g_z}{c_p} = -\frac{1}{c_p} \frac{GM_\odot z}{\varpi^3} \left( 1 + \frac{z^2}{\varpi^2} \right)^{-3/2} \cong \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{1}{\mathfrak{R}} \Omega_{K,\text{mid}}^2 z \quad (43)$$

– адиабатический градиент температуры в протопланетном аккреционном диске. В выражениях (42) и (43) использована эффективная сила тяжести  $\mathbf{g} = \{0, 0, -g_z\}$ , где

$$g_z = \frac{GM_\odot z}{\varpi^3} \left( 1 + \frac{z^2}{\varpi^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cong \Omega_{K,\text{mid}}^2(\varpi) z; \quad \Omega_K(\varpi, z) \equiv \sqrt{\frac{GM_\odot}{(\varpi^2 + z^2)^{3/2}}} \quad (44)$$

– кеплеровская угловая скорость;  $\Omega_{\text{K,mid}}(\varpi) \equiv \Omega_{\text{K}}(\varpi, 0) = \sqrt{GM_{\odot} / \varpi^3}$  – кеплеровская угловая скорость вращения в центральной плоскости диска.

Из формулы (42) видно, что в случае адиабатического распределения температуры с высотой, когда  $-\partial\langle T \rangle / \partial z = -(\partial\langle T \rangle / \partial z)_{\text{ad}} = z\Omega_{\text{K,mid}}^2(\varpi) / c_p$ , число Ричардсона  $\mathbf{Ri}_{\text{K}} = 0$ , т.е. температурный градиент в диске не оказывает влияния на коэффициенты турбулентного переноса. Однако, в случае неустойчивой термической стратификации аккреционного диска, когда имеют место сверхадиабатические градиенты температуры, энергия турбулентности возрастает за счёт энергии неустойчивости в направлении, перпендикулярном к экваториальной плоскости диска (конвективный источник турбулентности); при этом одновременно увеличивается коэффициент турбулентной вязкости. В то же время пространственная неоднородность (по высоте) усреднённого магнитного поля приводит к увеличению турбулентной энергии, поскольку магнитное число Ричардсона  $\mathbf{Ri}_{\text{M}} > 0$ . Заметим, что обратное турбулентное число Прандтля–Шмидта  $1 / \mathbf{Pr}_{\text{K}}^{\text{turb}}$  в формуле (41) можно принять равным единице, когда основным механизмом турбулентности являются сдвиговые напряжения при дифференциальном вращении диска; однако оно может быть в 2-3 раза больше, когда причиной турбулентности, является тепловая конвекция в вертикальном направлении.

Для того чтобы получить совпадение выражения (41) с широко используемой в астрофизической литературе формулой Шакуры–Сюняева [49], предназначенной для моделирования лежащего в центральной плоскости кеплеровского диска тонкого слоя, нужно положить в выражении (41) параметры  $\mathbf{Ri} = 0$  и  $\mathbf{Ri}_{\text{M}} = 0$  и подставить в него угловую скорость кеплеровского вращения  $\Omega_{\text{K,mid}}(\varpi)$ . Если использовать теперь в качестве масштаба турбулентности эффективную полутолщину диска  $h_{\text{eff}} \cong c_s|_{z=0} / \Omega_{\text{K,mid}}$  (которую можно оценить, используя баланс сил в  $z$ -направлении [см. ниже]), то в результате получим

$$v_{\text{K}}^{\text{turb}} = \frac{3}{2} \alpha_{\text{ss}} h_{\text{eff}}^2 \Omega_{\text{K,mid}} = \frac{3}{2} \alpha_{\text{ss}} h_{\text{eff}} c_s|_{z=0} = \frac{3}{2} \alpha_{\text{ss}} \gamma (\bar{p} / \bar{\rho})|_{z=0} / \Omega_{\text{K,mid}}. \quad (45)$$

В этом случае между  $\varpi, \phi$ -компонентой тензора Рейнольдса  $\mathbf{R}_{r\phi}$  и давлением  $\bar{p}$  газа имеет место следующая «каноническая» зависимость

$$\mathbf{R}_{\varpi\phi} = \bar{\rho} v_{\text{K}}^{\text{turb}} \varpi (\partial \Omega_{\text{K,mid}} / \partial \varpi) = -\alpha_s \bar{p}|_{z=0}. \quad (46)$$

Здесь  $c_s|_{z=0} \cong \sqrt{\gamma \bar{p} / \bar{\rho}}|_{z=0}$  – термическая скорость звука;  $\alpha_s = 9/4 \alpha_{ss}$  – не поддающийся сколько-нибудь точному определению свободный параметр, удовлетворяющий ограничению  $\alpha_s \leq 1$  [49].

Астрофизические модели, построенные с применением соотношения (46), относятся к так называемым вязким  $\alpha$ -дискам. В моделях подобного рода параметр Шакуры–Сюнчева  $\alpha_s$  остается обычно свободным параметром в уравнениях строения диска. Значение  $\alpha_s$  может быть прокалибровано эмпирически, в частности, при помощи зависящих от времени спектров, получаемых при наблюдении вспышек в двойных звездных системах с переносом массы, содержащих карликовые новые. Для этого случая в работах [50,51] были найдены значения  $\alpha_{ss}$  в интервале  $0.1 \leq \alpha_s \leq 1$ . Эти значения частично совпадают с оценками  $0.01 \leq \alpha_s \leq 1$  из работ [15,42,52-54], где рассматривалась вязкость, возникающая вследствие сдвига скорости, и перезамыкание силовых линий хаотического магнитного поля. В аналитических работах [18,19] была получена связь между вязкостью в диске и процессом перезамыкания магнитных полей внутри диска. Известно, что скорость перезамыкания может быть охарактеризована числом Маха  $M_A = u/c_A$ , где  $u$  – скорость вещества перед разрывом, а  $c_A = |\mathbf{B}| / \sqrt{4\pi\mu\rho}$  – альфвеновская скорость перед разрывом [55]. Обе эти модели используют сдвиговое течение внутри диска для усиления магнитного поля и используют МГД-турбулентность как механизм радиального переноса вещества. Вязкий параметр Шакуры–Сюнчева, полученный в работе Коронити [18], выражается через параметр перезамыкания следующим образом:  $\alpha_{ss} \approx M_A^{2/3}$ . Модель Тоута и Прингла [19] даёт следующее выражение для параметра Шакуры–Сюнчева:  $\alpha_{ss} \approx 0.6 M_A$ . Для того чтобы вызвать аккрецию, согласующуюся с наблюдениями различных астрофизических явлений, число Маха  $M_A$  должно быть порядка 0.1, что предполагает очень большие скорости перезамыкания в режиме турбулентной МГД, чему нет, вообще говоря, никаких оснований. Чтобы получить реальную картину связи между аккрецией и перезамыканием, необходимо, по-видимому, численное моделирование, которое рассматривает турбулентное динамо и процесс перезамыкания самосогласованно.

Отметим еще раз, что в подходе Шакуры и Сюнчева, разработанном специально для тонких аккреционных дисков, не принималось во внимание обратное влияние конвективного переноса тепла, а также влияние градиента крупномасштабного магнитного поля на развитие дисковой турбулентности. В связи с адекватным моделированием структуры и эволюции солнечного протопланетного диска и его короны мы сочли целесообразным отойти от «классического»  $\alpha$ -формализма и получить обобщение формулы (46) на случай расслоенного по плотности вещества в диске конечной толщины.

### Усреднённое уравнение неразрывности

Запишем теперь усреднённые МГД–уравнения для турбулизованной среды в цилиндрической системе координат. Уравнение сохранения массы для усреднённого движения (2) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi \bar{\rho} \langle u \rangle_{\varpi}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \langle u \rangle_z) = 0. \quad (47)$$

Из этого уравнения следует, что

$$|\langle u \rangle_z / \langle u \rangle_{\varpi}| \leq h / \varpi \ll 1. \quad (48)$$

Далее для компонент скорости в дифференциально вращающемся диске будем употреблять новые обозначения: радиальную скорость, которая по предположению не зависит от  $z$ -координаты, будем обозначать  $\langle u \rangle_{\varpi}(\varpi, z) \cong \langle u \rangle_{\varpi}(\varpi, z=0) \equiv V_{\varpi}(\varpi) > 0$ ; орбитальную скорость определим соотношением  $\langle u \rangle_{\phi}(\varpi, z) \equiv V_{\phi}(\varpi, z) = \varpi \Omega(\varpi, z)$ , где  $\Omega(\varpi, z)$  – угловая скорость вращения дискового вещества, а усреднённую вертикальную скорость обозначим так:  $\langle u \rangle_z(\varpi, z) \equiv V_z(\varpi, z)$ .

### Усреднённое уравнение движения

При использовании справедливых для тонких дисков оценочных неравенств [56]

$$V_{\phi} \gg V_{\varpi} \gg V_z, \quad c_s / V_{\phi} \propto h / \varpi \ll 1, \quad v_K^{\text{turb}} \propto \varepsilon c_s h \quad (\varepsilon \ll 1) \quad (49)$$

(здесь  $c_s \equiv \sqrt{\gamma \bar{p} / \bar{\rho}}$  – изотермическая скорость звука), а также справедливых в цилиндрической системе координат выражений

$$\bar{\mathbf{j}} = \frac{c}{4\pi\mu_0} \nabla \times \bar{\mathbf{B}} = \frac{c}{4\pi\mu_0} \left\{ \mathbf{e}_{\varpi} \left( -\frac{\partial B_{\phi}}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_{\phi} \left( \frac{\partial B_{\varpi}}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \varpi} \right) + \mathbf{e}_z \frac{1}{\varpi} \frac{\partial(\varpi B_{\phi})}{\partial \varpi} \right\}, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \bar{\mathbf{j}} \times \bar{\mathbf{B}} = & \frac{1}{4\pi\mu_0} \left\{ \mathbf{e}_{\varpi} \left( -\frac{1}{2\varpi^2} \frac{\partial(\varpi^2 \bar{B}_{\phi}^2)}{\partial r} + \frac{4\pi\mu_0}{c} \bar{B}_z \bar{j}_{\phi} \right) + \right. \\ & \left. + \mathbf{e}_{\phi} \left( \frac{\bar{B}_{\varpi}}{\varpi} \frac{\partial(\varpi \bar{B}_{\phi})}{\partial \varpi} + \bar{B}_z \frac{\partial \bar{B}_{\phi}}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_z \left( -\frac{\partial(\bar{B}_{\phi}^2 / 2)}{\partial z} - \frac{4\pi\mu_0}{c} \bar{B}_{\varpi} \bar{j}_{\phi} \right) \right\}, \quad (51) \end{aligned}$$

радиальную, азимутальную и вертикальную компоненты уравнения движения (3) запишем в следующем виде:

$$\bar{\rho} \left( \frac{dV_{\varpi}}{dt} - \varpi \Omega^2 \right) = -\bar{\rho} \frac{GM_{\odot}}{\varpi^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \bar{p} + p_{\text{turb}} + \frac{1}{3} p_{\text{turb}}^M \right) - \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \frac{\varpi^2 \bar{B}_{\phi}^2}{8\pi\mu_0} \right) + \frac{1}{c} \bar{B}_z \bar{j}_{\phi}, \quad (52)$$

$$\bar{\rho} \left( \frac{d(\varpi\Omega)}{dt} + V_{\varpi}\Omega \right) = \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \bar{\rho} v_K^{\text{turb}} \varpi^3 \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi} + \varpi^2 \frac{\bar{B}_{\phi} \bar{B}_{\varpi}}{4\pi\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\bar{B}_{\phi} \bar{B}_z}{4\pi\mu_0} \right), \quad (53)$$

$$\bar{\rho} \frac{dV_z}{dt} = -\bar{\rho} \frac{GM_{\odot} z}{\varpi^3} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{p} + p_{\text{turb}} + \frac{1}{3} p_{\text{turb}}^M + \frac{\bar{B}_{\phi}^2}{8\pi\mu_0} \right) - \frac{1}{c} \bar{B}_{\varpi} \bar{j}_{\phi}, \quad (54)$$

где

$$\bar{\rho} \frac{d\mathcal{A}}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \mathcal{A}) + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi \bar{\rho} \mathcal{A} V_{\varpi}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \mathcal{A} V_z). \quad (55)$$

– субстанциональная производная параметра  $\mathcal{A}$  в цилиндрической системе координат. Оператор (55) позволяет переписать уравнения (52)-(54) в более удобном дивергентном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} V_{\varpi}) + \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \varpi \bar{\rho} V_{\varpi}^2 + P + \frac{\bar{B}_z^2}{8\pi\mu_0} \right) - \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left\{ \varpi^2 \frac{(\bar{B}_{\varpi}^2 - \bar{B}_{\phi}^2)}{8\pi\mu_0} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{\rho} V_{\varpi} V_z - \frac{\bar{B}_{\varpi} \bar{B}_z}{4\pi\mu_0} \right) - \bar{\rho} \varpi \Omega^2 + \bar{\rho} \frac{GM_{\odot}}{\varpi^2} = 0, \end{aligned} \quad (52^*)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} J) + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \varpi \bar{\rho} J V_{\varpi} - \varpi^3 \bar{\rho} v_K^{\text{turb}} \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi} - \varpi^2 \frac{\bar{B}_{\phi} \bar{B}_r}{4\pi\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{\rho} J V_z - \varpi \frac{\bar{B}_{\phi} \bar{B}_z}{4\pi\mu_0} \right) = 0, \quad (53^*)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} V_z) + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left\{ \varpi \left( \bar{\rho} V_z V_{\varpi} - \frac{\bar{B}_z \bar{B}_{\varpi}}{4\pi\mu_0} \right) \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{\rho} V_z^2 + P + \frac{\bar{B}_{\varpi}^2 + \bar{B}_{\phi}^2 - \bar{B}_z^2}{8\pi\mu_0} \right) + \bar{\rho} \frac{GM_{\odot} z}{\varpi^3} = 0. \end{aligned} \quad (54^*)$$

Здесь  $P \equiv \left( \bar{p} + p_{\text{turb}} + \frac{1}{3} p_{\text{turb}}^M \right)$  – полное давление в турбулизованной электропроводящей среде;  $\bar{p} = \mathcal{R} \bar{\rho} \langle T \rangle$  – давление турбулизованного газа;  $p_{\text{turb}}(\varpi, z) = \frac{2}{3} \bar{\rho} \langle b \rangle$  – так называемое давление турбулизации [8];  $p_{\text{turb}}^M(\varpi, z) = \bar{\rho} \langle b \rangle_M$  – турбулентное магнитное давление;  $J(\varpi, z) \equiv \varpi^2 \Omega(\varpi, z)$  – удельный угловой момент импульса дискового вещества, находящегося на расстоянии  $\varpi$  от центра

вращения. Заметим, что азимутальная компонента уравнения движения (53\*) описывает эволюцию момента количества движения  $\mathbf{J}$  за счёт вязкого трения и влияния магнитного поля.

### Усреднённое энергетическое уравнение

Уравнение переноса тепла (22\*\*) для тонкого аккреционного диска, при учёте (40), принимает вид

$$\begin{aligned} \langle T \rangle \bar{\rho} \frac{d\langle S \rangle}{dt} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\lambda^{\text{turb}}}{c_p} \frac{\partial \langle S \rangle}{\partial z} \right) = \\ = \bar{\rho} v_K^{\text{turb}} \varpi^2 \left( \frac{\partial \Omega(\varpi, z)}{\partial \varpi} \right)^2 + \frac{v_M^{\text{turb}}}{4\pi\mu_0} \left\{ \left( \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial B_\varpi}{\partial z} \right)^2 \right\} + Q_{\text{rad}}. \end{aligned} \quad (56)$$

Это уравнение может быть использовано, в частности, для определения вертикального распределения температуры в тонком диске с учётом конвекции, лучистой теплопроводности, вязкой и магнитной диссипации.

Вместе с тем, уравнение (18\*) для полной энергии дисковой системы удобно использовать в стационарных моделях тонкого диска; в цилиндрической системе координат оно принимает вид

$$\bar{\rho} \frac{d}{dt} (\langle U \rangle_{\text{tot}}) + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi \mathbf{J}_{U_{\text{tot}}, \varpi}^{\text{sub}}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{J}_{U_{\text{tot}}, z}^{\text{sub}}) = Q_{\text{rad}}, \quad (57)$$

где

$$\mathbf{J}_{U_{\text{tot}}}^{\text{sub}} = \mathbf{J}_{U_{\text{tot}}} - \bar{\rho} \langle U \rangle_{\text{tot}} \langle \mathbf{u} \rangle \cong \mathbf{q}^{\text{turb}} + \mathbf{P} \langle \mathbf{u} \rangle - 2\bar{\rho} v_K^{\text{turb}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{D} : \mathbf{D} \end{pmatrix} + \frac{\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{B}}}{4\pi\mu_0} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \quad (58)$$

– субстанциональный поток полной энергии  $\langle U \rangle_{\text{tot}}$  через единичную площадку за единицу времени; его составляющие в радиальном и вертикальном направлении определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{U_{\text{tot}}, \varpi}^{\text{sub}} &= -\lambda^{\text{turb}} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \varpi} - \bar{\rho} \varpi^2 v_K^{\text{turb}} \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi} - \varpi \Omega \frac{\bar{B}_\varpi \bar{B}_\phi}{4\pi\mu_0}, \\ \mathbf{J}_{U_{\text{tot}}, z}^{\text{sub}} &= -\lambda^{\text{turb}} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} - \frac{4\sigma_B}{3\kappa \bar{\rho}} \frac{\partial \langle T \rangle^4}{\partial z} - \bar{\rho} \varpi^2 v_K^{\text{turb}} \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial z} - \frac{\bar{B}_z \bar{B}_\phi}{4\pi\mu_0} \varpi \Omega. \end{aligned}$$

### Усреднённое уравнение магнитной индукции

Поскольку влияние гидродинамической спиральности [7] на генерацию среднего магнитного поля неизбежно сопровождается эффективную магнитную диффузию, то в общем случае для описания структуры и механизма генерации

крупномасштабного магнитного поля  $\bar{\mathbf{B}}$  в диске необходимо привлекать к рассмотрению уравнение индукции (28\*). При этом действие  $\alpha$ -эффекта и дифференциального вращения в осесимметричном диске удобно проанализировать с помощью разложения магнитного поля  $\bar{\mathbf{B}}$  на тороидальную  $\bar{\mathbf{B}}_\phi \mathbf{e}_\phi$  и полоидальную  $\bar{\mathbf{B}}_p$  составляющие [44]. Тогда уравнение (28\*) заменяется двумя скалярными уравнениями. Действительно, разложив усреднённую скорость течения  $\langle \mathbf{u} \rangle \equiv \mathbf{V} = V_\varpi \mathbf{e}_\varpi + V_z \mathbf{e}_z + V_\phi \mathbf{e}_\phi$  дискового вещества и среднее магнитное поле  $\bar{\mathbf{B}}$  на полоидальную и тороидальную компоненты:  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_p + \varpi \Omega(\varpi, z) \mathbf{e}_\phi$ ,  $\mathbf{V}_p = V_\varpi \mathbf{e}_\varpi + V_z \mathbf{e}_z$ ,  $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{B}}_p + \bar{\mathbf{B}}_\phi \mathbf{e}_\phi$ , и полагая  $\bar{\mathbf{B}}_p(\varpi, z) \equiv \bar{B}_\varpi \mathbf{e}_\varpi + \bar{B}_z \mathbf{e}_z = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \mathbf{e}_\varpi + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial(\varpi \mathbf{A})}{\partial \varpi} \mathbf{e}_z$ , где  $\mathbf{A} = A_\phi(\varpi, z) \mathbf{e}_\phi \equiv A(\varpi, z) \mathbf{e}_\phi$  – магнитный векторный потенциал, получим

$$\frac{\partial \bar{B}_\phi}{\partial t} + \varpi \nabla \cdot \left( \frac{\bar{\mathbf{B}}_\phi \mathbf{V}_p}{\varpi} \right) = \varpi (\bar{\mathbf{B}}_p \cdot \nabla) \Omega + v_M^{\text{turb}} \left( \nabla^2 \bar{B}_\phi - \frac{\bar{B}_\phi}{\varpi^2} \right) - \alpha \left( \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}}{\varpi^2} \right), \quad (59)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{\varpi} (\mathbf{V}_p \cdot \nabla) (\varpi \mathbf{A}) = v_M^{\text{turb}} \left( \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}}{\varpi^2} \right) + \alpha \bar{\mathbf{B}}_\phi. \quad (60)$$

Уравнениям (59) и (60) легко придать более наглядный вид:

$$\frac{\partial \bar{B}_\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varpi} (\bar{B}_\phi V_\varpi) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{B}_\phi V_z) = \varpi \left( B_\varpi \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi} + B_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) + v_M^{\text{turb}} \frac{\partial^2 \bar{B}_\phi}{\partial z^2} + \alpha \frac{4\pi\mu_0}{c} \bar{j}_\phi, \quad (59^*)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + V_\varpi \bar{B}_z - V_z \bar{B}_\varpi = -\frac{4\pi\mu_0}{c} v_M^{\text{turb}} \bar{j}_\phi + \alpha \bar{\mathbf{B}}_\phi. \quad (60^*)$$

При моделировании структуры магнитного поля в тонком аккреционном диске эти уравнения решаются в некоторой конечной области, ограниченной плоскостями  $z = \pm h$ , при этом  $\alpha$ -эффект сконцентрирован в окрестности плоскостей  $z = \pm \xi h(\varpi)$  ( $\xi < 1$ ). В астрофизических приложениях обычно ограничиваются рассмотрением случая, когда коэффициент спиральности  $\alpha(z)$  является заданной нечётной функцией  $z$ ,  $\alpha(z) = -\alpha(-z)$  [26], например, ступенчатой функцией

$$\alpha(z) = \begin{cases} \alpha_0, & 0 < z < h; \\ 0, & z = 0; \\ -\alpha_0, & -h < z < 0. \end{cases} \quad (61)$$

Относительно уравнений (59) и (60) заметим следующее. Поскольку

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mathbf{A}/\varpi^2 = -4\pi\mu_0 c^{-1} \bar{\mathbf{j}}_\phi = -(\nabla \times \bar{\mathbf{B}}_p) \cdot \mathbf{e}_\phi, \quad \text{то в правой части уравнения (59)}$$

имеются два члена, содержащие  $\bar{\mathbf{B}}_p$ , и в зависимости от того, какой из них преобладает, получаются два типа турбулентного динамо, генерирующего дополнительную электродвижущую силу в законе Ома для средних полей. Если относительную величину  $\alpha$ -эффекта охарактеризовать безразмерным числом  $R_\alpha = \alpha_0 l / v_M^{\text{turb}}$ , а относительную роль дифференциального вращения – безразмерным числом  $R_\omega = |\nabla \Omega|_0 l^3 / v_M^{\text{turb}}$  (здесь нижний индекс «0» обозначает характерные значения соответствующих параметров, а величина  $l$  означает масштаб, характеризующий пространственные изменения турбулизованного поля), то по порядку величины отношение этих двух членов равно

$$|\varpi(\bar{\mathbf{B}}_p \cdot \nabla)\Omega| / |\alpha \nabla \times \bar{\mathbf{B}}_p| \propto R_\omega / R_\alpha = l^2 |\nabla \Omega|_0 / \alpha_0. \quad (62)$$

Таким образом, различные режимы генерации магнитного поля определяются соотношением этих безразмерных чисел. Если  $R_\alpha \gg R_\omega$ , то в (59) можно пренебречь членом с дифференциальным вращением. В этом случае  $\alpha$ -эффект действует в качестве источника как полоидального поля  $\bar{\mathbf{B}}_p$ , так и, благодаря члену  $\alpha \bar{\mathbf{B}}_\phi$  в уравнении (60), источником тороидального поля  $\bar{\mathbf{B}}_\phi$ . Подобного рода динамо, отличительной особенностью которого является двукратное действие  $\alpha$ -эффекта, обычно называют « $\alpha^2$ -динамо». В этом случае магнитные петли растягиваются и складываются в восьмёрку спиральными турбулентными потоками.

С другой стороны, если  $R_\alpha \ll R_\omega$ , то более эффективно становится растягивание магнитных петель дифференциальным вращением, а их складывание происходит за счёт  $\alpha$ -эффекта (« $\alpha \omega$ -динамо»). В уравнении (59) доминирует тогда член с дифференциальным вращением, и в результате мы имеем

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_\phi}{\partial t} + \varpi \nabla \cdot \left( \frac{\bar{\mathbf{B}}_\phi \mathbf{V}_p}{\varpi} \right) = \varpi (\bar{\mathbf{B}}_p \cdot \nabla) \Omega + v_M^{\text{turb}} \left( \nabla^2 \bar{\mathbf{B}}_\phi - \frac{\bar{\mathbf{B}}_\phi}{\varpi^2} \right). \quad (59^{**})$$

В этом случае тороидальное поле генерируется дифференциальным вращением, а полоидальное поле определяется  $\alpha$ -эффектом. В дифференциально вращающихся аккреционных дисках действует, как правило,  $\alpha \omega$ -динамо [25]. Для  $\alpha \omega$ -динамо простое перемасштабирование переменных позволяет связать два безразмерных числа  $R_\alpha$  и  $R_\omega$  в одно безразмерное динамо-число  $D = R_\alpha R_\omega$ , с помощью которого возможна приблизительная оценка вероятности самовозбуждения крупномасштабного магнитного поля в данном течении; при этом вероятность самовозбуждения сводится к требованию, чтобы динамо-число  $D$  превышало некоторое критическое значение  $D_{\text{cr}}$ , которое

можно вычислить, находя нетривиальные стационарные решения уравнения динамо. При малых динамо-числах магнитное поле затухает, а по достижению критического значения  $D = D_{cr}$  наступает самовозбуждение.

Сделаем теперь некоторые оценки. Из максвелловского уравнения  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0$  следует, что  $|\bar{\mathbf{B}}_{\varpi}|/|\bar{\mathbf{B}}_z| \propto \varpi/h \gg 1$ , откуда  $|\bar{\mathbf{B}}_{\varpi}| \gg |\bar{\mathbf{B}}_z|$ . Из (59\*) вытекает, что  $|\bar{\mathbf{B}}_p| \propto (\alpha_0 l/v_M^{\text{turb}})|\bar{\mathbf{B}}_{\phi}|$ , в то время как из (60) следует, что  $|\bar{\mathbf{B}}_{\phi}| \propto (|\nabla\Omega|_0 l^3/v_M^{\text{turb}})|\bar{\mathbf{B}}_p|$ ; следовательно, для  $\alpha\omega$ -динамо справедлива оценка  $|\bar{\mathbf{B}}_{\phi}|/|\bar{\mathbf{B}}_p| \propto \sqrt{|\nabla\Omega|_0 l^2/\alpha_0} \gg 1$ , откуда  $|\bar{\mathbf{B}}_{\phi}| \gg |\bar{\mathbf{B}}_p| \propto |\bar{\mathbf{B}}_{\varpi}| \gg |\bar{\mathbf{B}}_z|$ . Можно показать, что для реалистических коэффициентов магнитной диффузии в диске магнитные силы в уравнении (53) не могут значительно превышать вязкие силы [57]. Это условие совместно с оценкой (48) приводит к тому, что для тонких дисков в уравнении (59) адвективные члены и радиальные производные становятся малыми, и уравнения (59\*\*) и (60\*) для тороидальной и полоидальной компонент магнитного поля в медленно вращающихся аккреционных дисках принимают вид

$$\varpi \bar{\mathbf{B}}_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} + v_M^{\text{turb}} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{B}}_{\phi}}{\partial z^2} = 0, \quad (63)$$

$$-\alpha \bar{\mathbf{B}}_{\phi} + \frac{4\pi\mu_0}{c} v_M^{\text{turb}} \bar{j}_{\phi} = 0, \quad \text{где} \quad \frac{4\pi\mu_0}{c} \bar{j}_{\phi} = \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_{\varpi}}{\partial z}. \quad (64)$$

В заключение этого раздела отметим, что по сравнительно давней оценке Пудрица [57], а с тех пор, по нашему мнению, теория астрофизического динамо не получила существенного развития, критическое значение динамо-числа  $D_{cr}$  меньше 10, в то время как реальное значение  $D$  приближается к  $(6/5\pi)M_A^{-2}$ , где  $M_A$  – число Маха турбулентных движений. Поэтому  $\alpha\omega$ -динамо действует лишь в том случае, когда турбулентность в диске «достаточно дозвуковая». Поскольку достоверно не известно, насколько турбулентная скорость меньше скорости звука в реальных условиях эволюции протопланетного диска, количественные результаты, полученные с учётом « $\alpha\omega$ -динамо», могут носить лишь приблизительный характер.

#### 4. Модель тонкого протопланетного диска

Рассмотрим теперь тонкий (но оптически толстый) протопланетный диск, для которого в слое перпендикулярном к экваториальной плоскости пространственный масштаб изменения структурных параметров велик по сравнению с полутолщиной диска, т.е. величина  $h(\varpi)$  мала по сравнению с  $\varpi$  для всех  $\varpi$ ,  $\partial h/\partial \varpi \approx h/\varpi \ll 1$ . В этом случае характер течения проводящего дискового

вещества (особенно в его верхнем МГД–активном слое) может быть проанализирован с использованием одномерных уравнений магнитной гидродинамики. Возможность понижения размерности задачи связана с дополнительными предположениями о симметрии определяющих параметров задачи и о медленном характере течения в плоскости слоя по сравнению со временем установления равновесия в вертикальном  $z$ –направлении. Далее мы будем предполагать, что плотность и давление, имея максимальное значение на центральной плоскости  $z = 0$ , убывают с высотой так, что на верхней и нижней поверхностях диска  $\rho(\varpi, \pm h) = p(\varpi, \pm h) = 0$ ; при  $z = 0$  вертикальная скорость дискового вещества  $V_z(\varpi, z = 0) = 0$ . Кроме этого, будем считать, что плотность, давление и компоненты скорости имеют следующую отражательную симметрию относительно экваториальной плоскости диска

$$\rho(\varpi, z) = \rho(\varpi, -z), \quad P(\varpi, z) = P(\varpi, -z),$$

$$V_\varpi(\varpi, z) = V_\varpi(\varpi, -z), \quad V_\phi(\varpi, z) = V_\phi(\varpi, -z), \quad V_z(\varpi, z) = -V_z(\varpi, -z). \quad (65)$$

Существующая магнитная связь между короной и характером формирования аккреционного диска сильно зависит от конфигурации магнитного поля  $\mathbf{B}$  в диске. В отсутствие сформировавшегося диска силовые линии внешнего магнитного поля (поля протозвезды) не имеют, как правило,  $\phi$ -компоненты (т.е. лежат в меридиональных плоскостях), а вблизи экваториальной плоскости преобладает компонента  $\bar{B}_z$ . Однако, по мере формирования ионизованного диска, силовые линии, первоначально «вмороженные» во вращающуюся плазму, начинают испытывать сдвиг в азимутальном направлении  $\phi$ , который приводит к появлению отличной от нуля компоненты  $\bar{B}_\phi$ . В предположении непрерывности силовых линий дипольного поля  $\mathbf{B}$  при пересечении поверхности диска, можно сделать вывод, что радиальная и азимутальная компоненты магнитного поля должны быть одинаковыми по величине, но противоположными по направлению сверху и снизу от центральной плоскости диска. Таким образом, будем считать, что компоненты  $\bar{B}_\varpi$  и  $\bar{B}_\phi$  нечётны по  $z$ , а компонента  $\bar{B}_z$  чётна; тогда:

$$\bar{B}_\varpi(\varpi, z) = -\bar{B}_\varpi(\varpi, -z), \quad \bar{B}_\phi(\varpi, z) = -\bar{B}_\phi(\varpi, -z), \quad \bar{B}_z(\varpi, z) = \bar{B}_z(\varpi, -z). \quad (66)$$

Прежде чем выполнить  $z$ –усреднение МГД–уравнений (47), (51), (52), (53) и (56) для турбулизованного дискового вещества, выполним его для балансового уравнения общего вида (записанного в цилиндрической системе координат)

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial (\varpi J_{A\varpi})}{\partial \varpi} + \frac{\partial (J_{Az})}{\partial z} = \mathcal{S}_A. \quad (67)$$

Здесь  $\mathbf{J}_{\mathcal{A}}(t, \varpi, z)$ ,  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t, \varpi, z)$  – соответственно поток и возникновение величины  $\mathcal{A}(t, r, z)$ . Вводя обозначение

$$\langle \mathcal{A}(\varpi, t) \rangle = \int_{-h(\varpi)}^{+h(\varpi)} dz \mathcal{A}(t, \varpi, z), \quad (68)$$

для усреднённого по вертикали параметра  $\mathcal{A}$  и интегрируя (67) по вертикальной компоненте  $z$  от  $-h(\varpi)$  до  $h(\varpi)$ , в результате получим

$$\frac{\partial \langle \mathcal{A} \rangle}{\partial t} + \frac{1}{\varpi} \int_{-h(\varpi)}^{+h(\varpi)} dz \frac{\partial (\varpi \mathbf{J}_{\mathcal{A}\varpi})}{\partial r} + (\mathbf{J}_{\mathcal{A}z}^+ - \mathbf{J}_{\mathcal{A}z}^-) = \langle \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \rangle,$$

или

$$\frac{\partial \langle \mathcal{A} \rangle}{\partial t} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi \langle \mathbf{J}_{\mathcal{A}\varpi} \rangle) - (\mathbf{J}_{\mathcal{A}\varpi}^+ - \mathbf{J}_{\mathcal{A}\varpi}^-) \frac{\partial h(\varpi)}{\partial \varpi} + (\mathbf{J}_{\mathcal{A}z}^+ - \mathbf{J}_{\mathcal{A}z}^-) = \langle \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \rangle. \quad (69)$$

Здесь  $\mathbf{J}_{\mathcal{A}\varpi}^+$ ,  $\mathbf{J}_{\mathcal{A}z}^+$  ( $\mathbf{J}_{\mathcal{A}\varpi}^-$ ,  $\mathbf{J}_{\mathcal{A}z}^-$ ) – значения потоковых членов  $\mathbf{J}_{\mathcal{A}\varpi}$ ,  $\mathbf{J}_{\mathcal{A}z}$  на верхней,  $+h(\varpi)$  (нижней,  $-h(\varpi)$ ) границе диска. Поскольку для тонких дисков  $\mathbf{J}_{\mathcal{A}\varpi} \gg \mathbf{J}_{\mathcal{A}z}$  и  $\partial h(\varpi) / \partial \varpi = \mathcal{O}(h(\varpi) / \varpi)$ , то первым поверхностным членом в выражении (69) можно пренебречь по сравнению со вторым. Таким образом, результат интегрирования общего балансового уравнения по  $z$ -координате приводит к выражению

$$\frac{\partial \langle \mathcal{A} \rangle}{\partial t} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi \langle \mathbf{J}_{\mathcal{A}\varpi} \rangle) + (\mathbf{J}_{\mathcal{A}z}^+ - \mathbf{J}_{\mathcal{A}z}^-) = \langle \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \rangle, \quad (70)$$

которым мы далее воспользуемся при усреднении по вертикали исходных МГД-уравнений для турбулентного движения, заменяя при этом интегралы от произведений зависящих от  $z$  величин произведением усреднённых величин.

### Уравнение неразрывности для тонкого диска

Усреднение по  $z$  уравнения (47) с учётом свойств отражательной симметрии (65) приводит к следующему «одномерному» уравнению сохранения массы тонкого диска

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi \Sigma V_{\varpi}) = -2\bar{\rho}^+ \tilde{u}_z^+ \equiv S^+, \quad (71)$$

где

$$\Sigma(\varpi, t) \equiv \langle \bar{\rho} \rangle = \int_{-h(\varpi)}^{+h(\varpi)} dz \bar{\rho}(t, \varpi, z) \quad (72)$$

– поверхностная плотность диска на расстоянии  $\varpi$  от центра протозвезды (масса, содержащаяся в столбе единичного сечения, ориентированном перпендикулярно экваториальной плоскости диска);  $\bar{\rho}^+(\varpi) \equiv \bar{\rho}(\varpi, z = +h(\varpi))$ ;  $V_z^+(\varpi) \equiv V_z(\varpi, z = +h(\varpi))$ ;  $S^+(\varpi)$  – увеличение в единицу времени поверхностной плотности за счёт выпадения вещества на диск из аккреционной оболочки. Заметим, что для получения полной картины эволюции протопланетного диска необходимо принимать во внимание внешние источники аккреции и оттоки вещества с его поверхности.

### Радиальная компонента уравнения движения для тонкого диска

При усреднении по вертикали остальных гидродинамических уравнений мы воспользуемся следующим операторным соотношением

$$\Sigma \frac{D\langle \mathcal{A} \rangle}{Dt} + S^+ \langle \mathcal{A} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} (\langle \mathcal{A} \rangle \Sigma) + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi \Sigma V_\varpi \langle \mathcal{A} \rangle), \quad (73)$$

которое можно получить, комбинируя (55) и (71). Здесь и далее использовано следующее обозначение

$$\frac{D\langle \mathcal{A} \rangle}{Dt} \equiv \frac{\partial \langle \mathcal{A} \rangle}{\partial t} + V_\varpi \frac{\partial \langle \mathcal{A} \rangle}{\partial \varpi} \quad (74)$$

для субстанциональной производной усреднённого по вертикали движения.

Усреднённая по  $z$  радиальная компонента (52\*) уравнения движения, с учётом (73), а также свойств (66) отражательной симметрии магнитного поля, принимает вид

$$\Sigma \left( \frac{D\langle V_\varpi \rangle}{Dt} - \varpi \langle \Omega \rangle^2 \right) + S^+ (\langle V_\varpi \rangle - V_\varpi^+) = -\Sigma \frac{GM_\odot}{\varpi^2} - \frac{\partial}{\partial \varpi} \left\langle P + \frac{\bar{B}_z^2}{8\pi\mu_0} \right\rangle - \frac{1}{8\pi\mu_0} \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left\{ \varpi^2 \langle \bar{B}_\phi^2 - \bar{B}_\varpi^2 \rangle \right\} + \frac{\bar{B}_\varpi^+ \bar{B}_z}{2\pi\mu_0}, \quad (75)$$

где

$$\langle V_\varpi \rangle = \frac{1}{\Sigma} \int_{-h}^{+h} \bar{\rho} V_\varpi dz = V_\varpi(\varpi); \quad \langle \bar{B}_\phi^2 - \bar{B}_\varpi^2 \rangle \cong 2h(\varpi) (\bar{B}_\phi^2 - \bar{B}_\varpi^2) \Big|_{z=0};$$

$$\left\langle P + \frac{\bar{B}_z^2}{8\pi\mu_0} \right\rangle \cong 2h(\varpi) \left( P + \frac{\bar{B}_z^2}{8\pi\mu_0} \right) \Big|_{z=0}.$$

Для очень тонких дисков, когда  $h(\varpi) \rightarrow 0$ , уравнение (75) сводится к виду

$$\langle \Omega \rangle^2 \cong \Omega_{K, \text{mid}}^2 - \frac{1}{\varpi \Sigma} \frac{\bar{B}_\varpi^+ \bar{B}_z}{2\pi\mu_0}. \quad (76)$$

Здесь  $\langle \Omega \rangle = \Sigma^{-1} \int_{-h}^{+h} \bar{\rho} \Omega(\varpi, z) dz$  – усреднённая по толщине диска угловая скорость вращения дискового вещества;  $\Omega_{\text{К, mid}}(\varpi) \equiv \sqrt{GM_{\odot} / \varpi^3}$  – кеплеровская угловая скорость вращения в центральной плоскости диска.

Таким образом, в ионизованном диске гравитационная сила уравновешивается не только центробежной силой, но также и силой тензора магнитных натяжений  $\mathbf{T}_{\text{ав}}^{\text{M}} \equiv \bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{V}} / 4\pi\mu_0$  для усреднённой составляющей магнитного поля. В пределе нулевой толщины диска величины  $\bar{\mathbf{V}}_{\varpi}$  и  $\bar{\mathbf{V}}_{\phi}$  имеют разрыв при пересечении диска, в результате чего возникает конечная сила магнитных натяжений (подобная силе, поддерживающей в равновесии солнечные протуберанцы), которая является новой особенностью взаимодействия диска и короны. Важно также отметить, что в рассматриваемом случае, появляющаяся в уравнении (76)  $(r, z)$ -компонента этой силы ( $\bar{\mathbf{V}}_{\varpi}^+ \bar{\mathbf{V}}_z / 2\pi\mu_0$ ), приводит к отклонению скорости вращения дискового вещества от кеплеровского закона вращения. В пределе нулевого магнитного поля соотношение (76) даёт для угловой скорости вращения  $\langle \Omega \rangle$  кеплеровский закон.

#### Азимутальная компонента уравнения движения для тонкого диска

Усреднение по толщине диска уравнения (53\*) с учетом формулы (73) приводит к следующему закону сохранения углового момента импульса дискового вещества

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\langle \mathbf{J} \rangle \Sigma)}{\partial t} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \varpi \Sigma V_{\varpi} \langle \mathbf{J} \rangle - \varpi^3 \Sigma \langle v_{\text{К}}^{\text{turb}} \rangle \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} \right) - \\ - \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \varpi^2 \frac{\langle \bar{\mathbf{V}}_{\phi} \bar{\mathbf{V}}_{\varpi} \rangle}{4\pi\mu_0} \right) = \varpi \frac{\bar{\mathbf{V}}_{\phi}^+ \bar{\mathbf{V}}_z}{2\pi\mu_0} + \mathbf{S}^+ \mathbf{J}^+. \end{aligned} \quad (77)$$

Здесь  $\langle \bar{\mathbf{V}}_{\phi} \bar{\mathbf{V}}_{\varpi} \rangle = 2 \int_0^h \bar{\mathbf{V}}_{\phi} \bar{\mathbf{V}}_{\varpi} dz$ ;  $\varpi^3 \Sigma \langle v_{\text{К}}^{\text{turb}} \rangle \partial \langle \Omega \rangle / \partial \varpi$  – усреднённый момент вязкой силы на радиусе  $\varpi$ ;  $\langle \mathbf{J} \rangle = \varpi^2 \langle \Omega \rangle$  – усреднённый удельный угловой момент импульса вещества, находящегося на расстоянии  $\varpi$ ;  $\mathbf{J}^+$  – удельный угловой момент импульса вещества, подающего на верхнюю границу диска;  $\mathbf{S}^+ = -2\bar{\rho}^+ \mathbf{V}_z^+$ ;  $\mathbf{S}^+ \mathbf{J}^+$  – скорость изменения на расстоянии  $\varpi$  количества движения дискового вещества, связанного с притоком из аккреционной оболочки. Усреднённый по  $z$  коэффициент турбулентной вязкости определяется формулой [см. (41)]

$$\langle v_{\text{К}}^{\text{turb}} \rangle = \frac{4}{9} \alpha_s L_*^2 \varpi \left| \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} \right|,$$

$$L^*(\varpi) \equiv h_{\text{eff}}(\varpi) \left\{ 1 - (\mathbf{Ri}_K - \mathbf{Ri}_M) / \mathbf{Pr}_K^{\text{turb}} \right\}^{0.25}, \quad (0 < \alpha_s < 1). \quad (78)$$

Заметим, что в задачах, не рассматривающих взаимодействия диска и короны, в уравнении (77) можно опустить предпоследний член, полагая, что на границе диска  $\bar{\mathbf{B}}_\phi^+ = \bar{\mathbf{B}}_\phi(\varpi, z = \pm h) = 0$ . В случае квазикеплеровского вращения диска, когда  $\langle \Omega \rangle \cong \Omega_K$  и  $\partial \langle \Omega \rangle / \partial t = 0$ , из балансового уравнения для момента количества движения (77) следует выражение для потока массы

$$\varpi \Sigma V_\varpi = -3\sqrt{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \sqrt{\varpi} \Sigma \langle v_K^{\text{turb}} \rangle - \frac{\sqrt{\varpi}}{\Omega_K} \frac{\langle \bar{\mathbf{B}}_\phi \bar{\mathbf{B}}_\varpi \rangle}{6\pi\mu_0} \right) + \frac{\varpi \bar{\mathbf{B}}_\phi^+ \bar{\mathbf{B}}_z}{\pi\mu_0 \Omega_K} - 2S^+ \varpi^2 \left( 1 - \frac{J^+}{\varpi^2 \Omega_K} \right), \quad (79)$$

справедливое для проводящего аккреционного диска. Это выражение в пределе нулевого магнитного поля и в пренебрежении потоком вещества на диск ( $S^+ = 0$ ) сводится к классическому результату для радиальной скорости  $V_\varpi$  кеплеровского диска

$$V_\varpi = -\frac{3}{\Sigma \sqrt{\varpi}} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \sqrt{\varpi} \langle v_K^{\text{turb}} \rangle \Sigma \right). \quad (79^*)$$

Подстановка (79) в (71) приводит к уравнению

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left\{ \sqrt{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \sqrt{\varpi} \Sigma \langle v_K^{\text{turb}} \rangle - \frac{\sqrt{\varpi}}{\Omega_K} \frac{\langle \bar{\mathbf{B}}_\phi \bar{\mathbf{B}}_\varpi \rangle}{6\pi\mu_0} \right) \right\} - \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \frac{\varpi}{\Omega_K} \frac{\bar{\mathbf{B}}_\phi^+ \bar{\mathbf{B}}_z}{\pi\mu_0} \right) \quad (80)$$

для определения поверхностной плотности  $\Sigma(\varpi)$  в случае проводящего диска. Уравнение (80) в пределе нулевого магнитного поля сводится к классическому диффузионному уравнению

$$\frac{\partial \Sigma(\varpi)}{\partial t} - \frac{3}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left[ \sqrt{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \sqrt{\varpi} \langle v_K^{\text{turb}} \rangle \Sigma(\varpi) \right) \right] = 0,$$

показывающему, что поверхностная плотность диска может изменяться по радиусу  $\varpi$  только в вязкостной шкале времени  $t_v \propto \varpi^2 / \langle v_K^{\text{turb}} \rangle$ .

### Вертикальная компонента уравнения движения для тонкого диска

Для получения усреднённого по  $Z$  уравнения движения перепишем (54\*), с учетом оценки (63), в виде

$$\bar{\rho} \frac{dV_z}{dt} = -\bar{\rho} z \Omega_{K,\text{mid}}^2 - \frac{\partial}{\partial z} \left( P + \frac{\bar{B}_\varpi^2 + \bar{B}_\phi^2}{8\pi\mu_0} \right).$$

Для эффективной полутолщины диска и усреднённой по  $z$  вертикальной скорости газа используем следующие определения:

$$h_{\text{eff}} \equiv \frac{2}{\Sigma} \int_0^{+h} \bar{\rho} z dz \quad \text{и} \quad V_{z,\text{av}} \equiv \frac{2}{\Sigma} \int_0^{+h} \bar{\rho} V_z dz. \quad (81)$$

Принимая теперь во внимание, что на границе поверхности диска  $P|_{z=\pm h} = 0$ , а на центральной плоскости диска  $V_z|_{z=0} = 0$ ,  $\bar{B}_\varpi|_{z=0} = 0$ ,  $\bar{B}_\phi|_{z=0} = 0$ , в результате усреднения (80) (при учете (73)) получим

$$\Sigma \frac{D}{Dt} \left( \frac{V_{z,\text{av}}}{2} \right) + \frac{S^+}{2} (V_{z,\text{av}} - V_z^+) = -\Sigma \frac{GM_\odot h_{\text{eff}}}{2\varpi^3} + P|_{z=0} - \frac{(\bar{B}_\varpi^+)^2 + (\bar{B}_\phi^+)^2}{8\pi\mu_0}. \quad (82)$$

Отсюда для медленного (по сравнению со временем установления равновесия в вертикальном направлении) течения газа в плоскости диска, когда справедливо неравенство  $V_{z,\text{av}}/V_z^+ \ll 1$ , следует

$$\bar{\rho}^+ (V_z^+)^2 = P|_{z=0} - \Sigma \frac{GM_\odot h_{\text{eff}}}{2\varpi^3} - \frac{(\bar{B}_\varpi^+)^2 + (\bar{B}_\phi^+)^2}{8\pi\mu_0}. \quad (83)$$

В предельном случае  $h_{\text{eff}} \rightarrow 0$  это соотношение сводится к следующему:

$$P|_{z=0} = \bar{\rho}^+ (V_z^+)^2 + \frac{(\bar{B}_\varpi^+)^2 + (\bar{B}_\phi^+)^2}{8\pi\mu_0}. \quad (83^*)$$

Если теперь учесть, что в приближении тонкого диска справедлива оценка,  $\Sigma(\varpi) \cong 2h_{\text{eff}}(\varpi)\bar{\rho}_0(\varpi)$ , где  $\bar{\rho}_0(\varpi) \equiv \bar{\rho}(\varpi, z=0)$ , то из (81) при  $V_z^+ = 0$  следует соотношение для определения  $h_{\text{eff}}$  в случае проводящего диска

$$\frac{h_{\text{eff}}^2 GM_\odot}{\varpi^3} = \left( \frac{p^{\text{tot}}}{\bar{\rho}} \right) \Big|_{z=0} - \frac{(\bar{B}_\varpi^+)^2 + (\bar{B}_\phi^+)^2}{8\pi\mu_0 \bar{\rho}_0},$$

или

$$h_{\text{eff}}^2 = \frac{c_{s0}^2}{\gamma \Omega_{K,\text{mid}}^2} \left( 1 - \frac{(\bar{B}_\varpi^+)^2 + (\bar{B}_\phi^+)^2}{8\pi\mu_0 \bar{\rho}_0 c_s^2} \right). \quad (84)$$

Здесь  $c_{s0} \equiv \sqrt{\gamma(P/\bar{\rho})|_{z=0}}$  – скорость звука, соответствующая полному давлению в центральной плоскости диска. Заметим, что в случае, когда  $(\bar{B}_\varpi^{+2} + \bar{B}_\phi^{+2})/8\pi\mu_0\bar{\rho}_0 \ll c_s^2$ , эффективная полутолщина проводящего диска определяется точно такой же формулой, как и для неэлектропроводящего диска, т.е.

$$h_{\text{eff}}(\varpi) = \frac{c_{s0}(\varpi)}{\sqrt{\gamma}\Omega_{\text{K,mid}}(\varpi)} \cong \left( \frac{R\Gamma\varpi^3}{GM_\odot\mu} \right)^{1/2}. \quad (84^*)$$

### Уравнение баланса полной энергии для тонкого диска

Для тонкого аккреционного диска в выражении для полной энергии системы  $\langle U \rangle_{\text{tot}}(\mathbf{r}, t) \equiv \langle E \rangle + |\bar{\mathbf{B}}|^2 / 8\pi\mu_0\bar{\rho} + \langle \mathbf{u} \rangle^2 / 2 + \Psi_G + \langle \mathbf{b} \rangle_\Sigma$  можно оставить в рассмотрении только слагаемые, связанные с гравитационной  $\Psi_G = -GM_\odot/\varpi$  и центробежной  $\varpi^2\Omega^2/2$  энергиями; можно также пренебречь потоком энтальпии [58]. Тогда усреднённое по вертикали  $z$  энергетическое уравнение (57), при использовании соотношения (73), принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Sigma \left( \frac{\varpi^2 \langle \Omega \rangle^2}{2} - \frac{GM_\odot}{\varpi} \right) \right\} &= -\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left\{ \varpi \Sigma V_\varpi \left( \frac{\varpi^2 \langle \Omega \rangle^2}{2} - \frac{GM_\odot}{\varpi} \right) \right\} + \frac{\bar{B}_z \bar{B}_\phi^+}{2\pi\mu_0} \varpi \langle \Omega \rangle \\ &+ \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left\{ \varpi^2 \langle \Omega \rangle \left( \Sigma \langle v_K^{\text{turb}} \rangle \varpi \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} + \frac{\langle \bar{B}_\varpi \bar{B}_\phi \rangle}{4\pi\mu_0} \right) \right\} + S^+ \left( \frac{\varpi^2 \langle \Omega \rangle^2}{2} - \frac{GM_\odot}{\varpi} \right) + \langle Q_{\text{rad}} \rangle. \end{aligned} \quad (85)$$

В правой части этого уравнения находятся члены, равные дивергенции потока кинетической и гравитационной энергии (первый член), вязкому потоку энергии, возникающей за счёт диссипации турбулентности (второй член), потоку вектора Пойнтинга [см. (19\*)], описывающего обмен электромеханической энергией с короной (третий член), притоку этих энергий в диск из аккреционной оболочки (предпоследний член). Величина

$$\langle Q_{\text{rad}} \rangle = \int_{-h(\varpi)}^{+h(\varpi)} Q_{\text{rad}} dz = -2q_{\text{rad},z}^+(\varpi), \quad q_{\text{rad},z}^+(\varpi) \equiv q_{\text{rad},z} \Big|_{z=h} \quad (86)$$

связана с теплом, которое излучается наружу (посредством излучения) с верхней и нижней поверхностями диска при радиусе  $\varpi$ . Здесь (см. (18\*))

$$Q_{\text{rad}}(\varpi, z) = -\frac{\partial q_{\text{rad},z}}{\partial z}, \quad q_{\text{rad},z}(\varpi, z) = -\frac{4\sigma_B}{3\kappa(\varpi, z)\bar{\rho}} \frac{\partial \langle T \rangle^4}{\partial z}. \quad (87)$$

Заметим, что поскольку диск тонкий, то излучение направлено в основном в вертикальном, а не в радиальном направлении. Так как на поверхности диска  $\bar{p}|_{z=\pm h} = \langle T \rangle|_{z=\pm h} = 0$ , то из второй формулы (87) следует, что

$$\int_0^{+h(\varpi)} \kappa(\varpi, z) \bar{\rho}(\varpi, z) q_{\text{rad},z}(\varpi, z) dz = \frac{4\sigma_B}{3} \langle T \rangle_0^4(\varpi), \quad (88)$$

где принято обозначение  $\langle T \rangle_0(\varpi) \equiv \langle T \rangle(\varpi, 0)$ . Аппроксимируем теперь интеграл в выражении (88) следующим образом

$$\int_0^{+h(\varpi)} \kappa(\varpi, z) \bar{\rho}(\varpi, z) q_{\text{rad},z}(\varpi, z) dz \cong q_{\text{rad},z}^+(\varpi) \tau(\varpi), \quad (89)$$

где

$$\tau(\varpi) = \int_0^{+h(\varpi)} \kappa(\varpi, z) \bar{\rho}(\varpi, z) dz = \Sigma \langle \kappa \rangle / 2, \quad \langle \kappa \rangle = \frac{\mathcal{K} \Sigma}{2h_{\text{eff}} \langle T \rangle_0^{7/2}} \quad (90)$$

– соответственно оптическая толщина, вычисленная на основе полной усреднённой по Росселанду непрозрачности  $\kappa$  и формула Крамерса для усреднённого по вертикали коэффициента непрозрачности  $\langle \kappa \rangle$ ; тогда (88) можно переписать так

$$q_{\text{rad},z}^+(\varpi) = \frac{4\sigma_B}{3\tau(\varpi)} \langle T \rangle_0^4(\varpi) = \sigma_B T_{\text{eff}}^4(\varpi), \quad (91)$$

откуда следует важное для тонких излучающих радиацию дисков соотношение

$$\langle Q_{\text{rad}} \rangle = -2q_{\text{rad},z}^+(\varpi) = -2\sigma_B T_{\text{eff}}^4(\varpi), \quad (92)$$

где  $T_{\text{eff}}(\varpi)$  – некоторая эффективная температура верхней (нижней) границы диска.

Итак, приведенных гидродинамических уравнений вполне достаточно для полного решения эволюционной задачи для диска [11,12] в том случае, когда задано магнитное поле как функция расстояния от центра  $\varpi$ . Действительно, после решения уравнений (76) и (77) относительно переменных  $\Sigma(\varpi)$  и  $\langle \Omega \rangle(\varpi)$ , закон сохранения массы (71) позволяет найти в этом случае радиальную скорость  $V_{\varpi}(\varpi)$ , а уравнение энергии (85) позволяет определить потерю диска на излучение.

В общем же случае необходимо знание пространственного распределения среднего магнитного поля в диске, которое складывается из затравочного начального поля протозвезды  $\mathbf{B}_{\odot}$  и существенной части, сгенерированной в дифференциально вращающемся диске механизмом  $\alpha\omega$ -динамо. Магнитное поле может быть рассчитано путём самосогласованного решения приведенных выше гидродинамических уравнений и задачи динамо (уравнения (63 и (64)).

Решения такого рода задач приведены в работах Пудрица [57,59], в которых, в частности, доказано, что действие динамо в аккреционных дисках вполне вероятно. В частности, им найдено распределение поля  $\bar{\mathbf{B}}$  в собственных функциях задачи динамо, когда его компоненты выражаются через функции Бесселя с радиальным масштабom, заключенным между толщиной диска и некоторыми большими значениями, особенно вблизи порога генерации.

Вместе с тем, как уже отмечалось выше, в реальных условиях эволюции протопланетного диска, количественные результаты, полученные с учётом механизма « $\alpha\omega$ -динамо» (эффективно действующего лишь в том случае, когда турбулентность в диске достаточно дозвуковая), могут носить лишь приближённый характер, поскольку в настоящее время в астрофизической литературе отсутствуют надежные оценки турбулентной скорости в протопланетном диске на самых ранних этапах его существования.

В связи с этим нам представляется целесообразным анализ относительно простых моделей распределения усреднённого магнитного поля  $\bar{\mathbf{B}}$  в диске, когда его полоидальная компонента  $\bar{\mathbf{B}}_p$  в точности совпадает с внешним магнитным полем прото-Солнца. Для моделирования  $\bar{\mathbf{B}}_p$  используем дипольное поле [60]. Тогда

$$A = \frac{\Psi(\varpi, z)}{\varpi}, \quad \Psi(\varpi, z) = \frac{B_{\odot} R_{\odot}^3}{2} \frac{\varpi^2}{(\varpi^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (93)$$

где  $\Psi$  – полоидальный магнитный поток, постоянный в осесимметричном случае на магнитной поверхности;  $R_{\odot}$  – солнечный радиус,  $B_{\odot}$  – средняя напряжённость магнитного поля на поверхности прото-Солнца, и полоидальный вектор  $\bar{\mathbf{B}}_p$  принимает вид

$$\bar{\mathbf{B}}_p(\varpi, z) = \nabla \times (A(\varpi, z) \mathbf{e}_{\phi}) \cong \frac{3B_{\odot} R_{\odot}^3}{2} \frac{z\varpi}{(\varpi^2 + z^2)^{5/2}} \mathbf{e}_{\varpi} - \frac{B_{\odot} R_{\odot}^3}{2} \frac{\varpi^2 - 2z^2}{(\varpi^2 + z^2)^{5/2}} \mathbf{e}_z. \quad (94)$$

В этом случае для определения тороидальной и полоидальной компонент магнитного поля в диске (когда  $|z|/\varpi \ll 1$ ) могут быть использованы следующие уравнения:

$$\bar{B}_z = -\frac{B_{\odot}}{2} \left( \frac{R_{\odot}}{\varpi} \right)^3, \quad \bar{B}_{\varpi} = \frac{3B_{\odot}}{2} \left( \frac{R_{\odot}}{\varpi} \right)^3 \frac{z}{\varpi}, \quad (\bar{B}_z \gg \bar{B}_{\varpi}), \quad (95)$$

$$v_M^{\text{turb}} \frac{\partial^2 \bar{B}_{\phi}}{\partial z^2} = -\varpi \bar{B}_z \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \quad v_M^{\text{turb}} = \frac{v_K^{\text{turb}}}{\text{Pr}_M^{\text{turb}}}. \quad (96)$$

Заметим, что если дважды проинтегрировать уравнение индукции (96) по вертикали от  $Z$  до  $\infty$  и учесть, что

$$\Omega = \begin{cases} \Omega, & |z| < h, \\ \Omega_{\odot}, & |z| > h, \end{cases} \quad \bar{B}_{\phi}(\varpi, 0) = 0 \text{ и } \partial \bar{B}_{\phi} / \partial z = 0, \text{ когда } \varpi \gg |z| > h \quad (97)$$

– условие, определяющее дисковую поверхность, то в результате получим алгебраическое соотношение для определения тороидальной компоненты магнитного поля

$$\bar{B}_{\phi}(\varpi, z) = \frac{\varpi \bar{B}_z}{v_M^{\text{turb}}} (\Omega_{\odot} - \Omega) z, \quad |z| < h, \quad (98)$$

где  $\Omega_{\odot}$  – угловая скорость Солнца. Результат усреднения (98) по вертикали, с использованием (81), даёт

$$\langle \bar{B}_{\phi} \rangle = \frac{\varpi \bar{B}_z}{\langle v_M^{\text{turb}} \rangle} (\Omega_{\odot} - \langle \Omega \rangle) h_{\text{eff}}, \quad \langle v_M^{\text{turb}} \rangle = \frac{\langle v_K^{\text{turb}} \rangle}{Pr_M^{\text{turb}}}. \quad (99)$$

## 5. Стационарное состояние проводящего диска

Известно, что в протопланетном диске, особенно для внутренней его части ( $\varpi \leq 10 \text{ а.е.}$ ), довольно быстро, по сравнению со временем его динамической эволюции, устанавливается квазистационарный режим, с не зависящим от переменной  $\varpi$  и направленным внутрь полным потоком массы [50]. Получим здесь основные МГД-уравнения, описывающие структуру протопланетного аккреционного проводящего диска в стационарном состоянии.

Стационарное уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi \Sigma V_{\varpi}) = S^+ = -2\bar{\rho}^+ \langle u \rangle_z^+. \quad (100)$$

Если ввести обозначение

$$\dot{M}_A(\varpi) \equiv 2\pi\varpi\Sigma(-V_{\varpi}) \quad (101)$$

(здесь множитель  $2\pi$  появляется за счет усреднения по азимуту,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ) для скорости аккреции вещества на диск (полный поток массы из аккреционной оболочки), то уравнение (100) запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \dot{M}_A(\varpi) \right) = -2\pi\varpi S^+ = 4\pi\varpi \bar{\rho}^+ \langle u \rangle_z^+ = -\frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \dot{M}_W(\varpi) \right), \quad (102)$$

где

$$\dot{M}_W(\varpi) \equiv 2\pi\varpi \int_{\varpi}^{\infty} S^+ d\varpi = -4\pi\varpi \int_{\varpi}^{\infty} (\bar{\rho}^+ \langle u \rangle_z^+) d\varpi \quad (103)$$

– скорость утечки вещества из диска в аккреционную оболочку. Из (102) следует, что  $\dot{M}_A(\varpi) + \dot{M}_W(\varpi) = \text{const} = \dot{M}$ , где  $\dot{M} = \dot{M}_A(\infty)$  – так называемый, темп аккреции. Тогда

$$2\pi\varpi\Sigma(-V_\varpi) \equiv \dot{M}_A = \dot{M} - \dot{M}_W \equiv \dot{M} - 4\pi\varpi \int_\varpi^\infty (\bar{\rho}^+ \langle u \rangle_z^+) d\varpi. \quad (104)$$

Заметим, что в астрофизической литературе существует немалое количество феноменологических моделей, связывающих между собой величины  $\dot{M}_A(\varpi)$  и  $\dot{M}$  (см., например, [62]).

Из выражения (76) для радиальной компоненты уравнения движения проводящего диска следует, что скорость его углового вращения отличается от кеплеровской

$$\langle \Omega \rangle^2 = \Omega_{K,\text{mid}}^2 - \frac{1}{\varpi\Sigma} \frac{\bar{B}_\varpi^+ \bar{B}_z}{2\pi\mu_0}, \quad \text{где } \bar{B}_\varpi^+ \equiv \bar{B}_\varpi(\varpi, h). \quad (105)$$

Усреднённое по вертикали азимутальное уравнение движения (77\*) в стационарном случае при использовании выражения (74) принимает вид

$$\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \varpi\Sigma V_\varpi \langle J \rangle - \varpi^3 \Sigma \langle v_K^{\text{turb}} \rangle \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} - \varpi^2 \frac{\langle \bar{B}_\phi \bar{B}_\varpi \rangle}{4\pi\mu_0} \right) = \varpi \frac{\bar{B}_\phi^+ \bar{B}_z}{2\pi\mu_0} + S^+ J^+, \quad (106)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \varpi} \left\{ \dot{M}_A \varpi^2 \langle \Omega \rangle + 2\pi\varpi^2 \left( \varpi\Sigma \langle v_K^{\text{turb}} \rangle \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} + \frac{\langle \bar{B}_\phi \bar{B}_\varpi \rangle}{4\pi\mu_0} \right) \right\} = -\varpi^2 \frac{\bar{B}_\phi^+ \bar{B}_z}{\mu_0} + J^+ \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \dot{M}_A \right),$$

где  $J^+ = \varpi^2 \Omega^+ = \varpi^2 \Omega(\varpi, h)$ ,  $S^+ \equiv -2\bar{\rho}^+ \langle u \rangle_z^+ = -2\bar{\rho}(\varpi, h) \langle u \rangle_z(\varpi, h)$ . При интегрировании (106) по  $\varpi$  от внутреннего радиуса диска  $\varpi_1$  до  $\varpi$ , получим уравнение

$$\begin{aligned} & \dot{M}_A \varpi^2 \langle \Omega \rangle + 2\pi\varpi^2 \left( \varpi\Sigma \langle v_K^{\text{turb}} \rangle \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} + \frac{\langle \bar{B}_\phi \bar{B}_\varpi \rangle}{4\pi\mu_0} \right) + \\ & + \frac{1}{\mu_0} \int_{\varpi_1}^{\varpi} \varpi^2 \bar{B}_\phi^+ \bar{B}_z d\varpi - \int_{\varpi_1}^{\varpi} \varpi^2 \Omega^+ \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \dot{M}_A \right) d\varpi = \text{const}, \quad (107) \end{aligned}$$

которое служит для определения скорости углового вращения  $\langle \Omega \rangle$  в общем случае МГД-активного аккреционного диска. В пределе нулевого магнитного поля, когда соотношение (105) дает кеплеровский закон вращения, из уравне-

ния (107), в пренебрежении потоком аккрецирующего вещества на диск,  $S^+ = 0$ , следует

$$\dot{M} \varpi^2 \Omega_{K,\text{mid}} + 2\pi \varpi^3 \Sigma \langle v_K^{\text{turb}} \rangle \frac{\partial \Omega_{K,\text{mid}}}{\partial \varpi} = \text{const} = J, \quad (108)$$

где  $J$  – полный радиальный поток углового момента, связанный с вкладами от аккрецирующего на диск вещества и вязкого перераспределения. Поскольку диск граничит почти с поверхностью звезды, то можно огрублённо принять

$\varpi_i \cong R_\odot$ ; тогда константа  $J$  определяется формулой  $J = \dot{M} R_\odot^2 \Omega_K(R_\odot)$  [56].

Уравнение (108) в этом случае сводится к хорошо известному результату для вязких дисков

$$\Sigma \langle v_K^{\text{turb}} \rangle = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[ 1 - \left( \frac{R_\odot}{\varpi} \right)^{1/2} \right]. \quad (109)$$

Из (109), при учёте «новой» формулы (78) для коэффициента  $\langle v_K^{\text{turb}} \rangle$ , можно определить радиальную скорость вещества в диске

$$V_\varpi = -\frac{3\langle v_K^{\text{turb}} \rangle}{2\varpi} \left[ 1 - \left( \frac{R_\odot}{\varpi} \right)^{1/2} \right]^{-1} = -\alpha_s h_{\text{eff}}^2 \left( \frac{1 - \text{Ri}_K}{\text{Pr}_K^{\text{turb}}} \right)^{1/2} \frac{\Omega_{K,\text{mid}}}{\varpi} \left[ 1 - \left( \frac{R_\odot}{\varpi} \right)^{1/2} \right]^{-1}. \quad (110)$$

Усреднённая по  $z$  вертикальная компонента уравнения движения (83), позволяет найти определяемую формулой (81) эффективную толщину  $h_{\text{eff}}$  диска

$$h_{\text{eff}}(\varpi) = \frac{2}{\Sigma \Omega_{K,\text{mid}}^2} \left( P_0 - \bar{\rho}^+ (V_z^+)^2 - \frac{(\bar{B}_\phi^+)^2}{8\pi\mu_0} \right), \quad (111)$$

где  $P_0 = P_0(\varpi) \equiv P(\varpi, z=0)$ . Это выражение отличается от стандартной формулы для непроводящего диска наличием двух дополнительных членов (второе и третье слагаемое), способствующих истончению проводящего диска за счет аккреции и присутствия магнитного поля.

Наконец, уравнение баланса полной энергии (85) с учётом соотношения (73) в стационарном случае может быть переписано в виде

$$\varpi \Sigma V_\varpi \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \frac{1}{2} \varpi^2 \langle \Omega \rangle^2 - \frac{GM_\odot}{\varpi} \right) = \frac{\partial}{\partial \varpi} \left\{ \varpi^2 \langle \Omega \rangle \left( \Sigma \langle v_K^{\text{turb}} \rangle \varpi \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} + \frac{\langle \bar{B}_\varpi \bar{B}_\phi \rangle}{4\pi\mu_0} \right) \right\} +$$

$$+2\varpi^2 \frac{\bar{B}_z \bar{B}_\phi^+}{4\pi\mu_0} \langle \Omega \rangle + \frac{1}{2} S^+ \varpi \left\{ \varpi^2 (\Omega^2)^+ - \varpi^2 \langle \Omega \rangle^2 \right\} + \varpi \langle Q_{\text{rad}} \rangle,$$

где  $\langle Q_{\text{rad}} \rangle = -2q_{\text{rad},z}^+(\varpi)$ . Комбинация этого уравнения и, умноженного на  $\langle \Omega \rangle$  стационарного уравнения (77) приводит к

$$\begin{aligned} & -\Sigma V_\varpi \left( \frac{1}{2} \frac{\partial (\varpi^2 \langle \Omega \rangle^2)}{\partial \varpi} - \langle \Omega \rangle \varpi^2 \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} + \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \frac{GM_\odot}{\varpi} \right) \right) = \\ & = \varpi^2 \Sigma \langle v_K^{\text{turb}} \rangle \left( \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} \right)^2 + \varpi \frac{\langle \bar{B}_\varpi \bar{B}_\phi \rangle}{4\pi\mu_0} \frac{\partial \langle \Omega \rangle}{\partial \varpi} + 2 \frac{\bar{B}_z \bar{B}_\phi^+}{4\pi\mu_0} \varpi \langle \Omega \rangle + \\ & + S^+ \left\{ \left( \frac{1}{2} \varpi^2 \Omega^2 \right)^+ + \left( \frac{1}{2} \varpi^2 \langle \Omega \rangle^2 \right) - \langle \Omega \rangle J^+ \right\} + \langle Q_{\text{rad}} \rangle. \end{aligned} \quad (112)$$

В случае квазикеплеровского диска левая часть этого уравнения обращается в нуль; тогда из (112) следует соотношение, связывающее коэффициент турбулентной вязкости  $\langle v_K^{\text{turb}} \rangle$  с эффективной температурой  $T_{\text{eff}}$  излучающего диска

$$\begin{aligned} \sigma_B T_{\text{eff}}^4(\varpi) &= \frac{9}{8} \Sigma \langle v_K^{\text{turb}} \rangle \Omega_K^2 - \\ & - \frac{3}{2} \Omega_K \int_0^h \frac{\bar{B}_\phi \bar{B}_\varpi}{4\pi\mu_0} dz + \varpi \Omega_K \frac{\bar{B}_z \bar{B}_\phi^+}{4\pi\mu_0} + \frac{1}{2} S^+ \varpi^2 \Omega_K^2 \left( 1 - \frac{J^+}{\varpi^2 \Omega_K} \right). \end{aligned} \quad (113)$$

Первое слагаемое в правой части этого уравнения соответствует нагреву дифференциально вращающегося диска механизмом вязкой диссипации энергии турбулентности, второй член связан с диссипацией среднего движения под влиянием тензора натяжений усреднённой составляющей магнитного поля, третий член описывает энергетическое взаимодействие с короной, последний член соответствует нагреву диска веществом, падающим на него из аккреционной оболочки. Формула (113) обобщает на рассматриваемый здесь случай проводящего и аккрецирующего диска известное соотношение, полученное для вязких дисков

$$\frac{4\sigma_{\text{В}}}{3\tau(\varpi)} \langle T \rangle_0^4(\varpi) = \frac{9}{8} \frac{G M_{\odot}}{\varpi^3} \Sigma \langle v_{\text{К}}^{\text{turb}} \rangle = \frac{3G M_{\odot} \dot{M}}{8\pi\varpi^3} \left[ 1 - \left( \frac{R_{\odot}}{\varpi} \right)^{1/2} \right]. \quad (114)$$

Заметим, что в некоторых частных случаях стационарная задача моделирования структуры проводящего аккреционного диска может быть решена аналитически [32].

Итак, представленная в этом разделе система магнитогидродинамических уравнений позволяет самосогласованно моделировать структуру и эволюцию турбулизованной космической плазмы в тонком протопланетном диске и в связанной с ним замагниченной короне на ранней стадии их образования. К ключевым задачам, реконструирующим до известной степени процесс эволюции проводящего диска, можно отнести: эволюционную модель переноса углового момента в диске, самосогласованную модель структуры турбулизованного диска и его корональных областей с учётом нагревания короны и различных темпов аккреции; модель струйного истечения плазмы (уносящей угловой момент) из диска с учётом магнитного силового взаимодействия между диском и его короной, эволюционную модель дифференциально вращающегося протопланетного диска, с учётом генерации крупномасштабного магнитного поля механизмом турбулентного  $\alpha\omega$ -динамо, и, наконец, исследование плазменных неустойчивостей в слабо ионизованном диске с омической диссипацией, в частности, магниторотационной неустойчивости в центральной плоскости дифференциально вращающегося диска.

## 6. Заключение

Изучение проблемы происхождения и эволюции Солнечной системы, возникновения разнообразных природных условий на Земле и других планетах представляет одно из важнейших направлений современного естествознания. Её решение связано с проведением комплекса исследований по самым актуальным вопросам астрофизики, геофизики и космохимии, на основе развития теории, обобщения и анализа экспериментальных данных и разработки математических моделей. За последние годы, благодаря впечатляющим успехам астрофизики, открытиям протопланетных дисков и внесолнечных планетных систем, бурному развитию вычислительной математики, расширились возможности комплексных исследований физической структуры и эволюции протопланетного газопылевого диска вокруг молодых звезд солнечного типа, из которых, по современным представлениям, формируются планеты. Математическое моделирование является, по существу, единственным методом, позволяющим реконструировать соответствующие процессы с учётом ограничений, накладываемых доступными наблюдательными данными эволюции околозвездных дисков на разных стадиях. Сценарий такой эволюции в общем случае включает в себя аккрецию на диск протозвездного вещества и его температурное фракциониро-

вание, последовательное образование фаз в гетерогенной системе солнечного состава при её охлаждении, сжатие и уплотнение диска вплоть до возникновения гравитационной неустойчивости пылевого субдиска, образующегося в экваториальной плоскости, образование первичных пылевых кластеров, служащих основой зародышей планет. Очевидно, столь сложный характер процессов требует, прежде всего, разработки адекватной теоретической основы, на базе которой строятся упомянутые модели.

Автором в серии статей был разработан оригинальный подход к моделированию астрофизических протопланетных дисков с использованием методов стохастической термодинамики, многокомпонентной гидродинамики и механики гетерогенных сред, позволяющий учесть динамические процессы взаимодействия турбулизованного газа и пыли, процессы коагуляции частиц, возникновение когерентных упорядоченностей на фоне хаотических движений в крупномасштабных турбулентных струях, а также влияния гидродинамической спиральности на эволюцию турбулентности в дисковой космической среде. Этот подход даёт возможность проследить несколько важных этапов образования в общем случае газопылевого диска вокруг молодого Солнца, проходящего стадию Т–Тельца, его дальнейшую динамическую, термическую и космохимическую эволюцию, включающую этапы конденсации и уплотнения вещества, вплоть до образования пылевых кластеров, служащих зародышами при формировании планетезималей, и в дальнейшем планетных тел. К сожалению, современная вычислительная математика всё ещё не позволяет провести в полном объёме комплексный анализ крупномасштабных процессов в протопланетном диске, отвечающий этим теоретическим разработкам, поэтому численные модели нескольких последовательных этапов эволюции протопланетного диска строятся с использованием целого ряда упрощений [61]. Настоящее исследование является необходимым звеном для адекватного моделирования эволюции проводящего турбулизованного диска, когда для получения достоверных результатов особенно необходимы рациональные схематизации, приводящие к обозримым и решаемым численно уравнениям.

### Список литературы

- [1] Колесниченко А.В. Моделирование коэффициентов турбулентного переноса в газопылевом аккреционном диске // *Астрон. Вестник*. 2000. Т. 34. С. 516-528.
- [2] Колесниченко А.В. Гидродинамические аспекты моделирования процессов массопереноса и коагуляции в турбулентном аккреционном диске // *Астрон. Вестник*, 2001. Т. 35. С. 139-155.
- [3] Колесниченко А.В. Синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности астрофизических систем // В сб. “Современные проблемы механики и физики космоса”. М.: Физматлит. 2003. С. 123-162.

- [4] Колесниченко А.В. Термодинамическое моделирование развитой структурной турбулентности при учете флуктуаций диссипации энергии // *Астрон. Вестник*. 2004. Т. 38. С. 144-170.
- [5] Колесниченко А.В. О возможности синергетического рождения мезомасштабных когерентных структур в макроскопической теории развитой турбулентности // *Математ. мод.* 2005. Т. 17. № 10. С. 47-79.
- [6] Колесниченко А.В., Маров М.Я. Основы механики гетерогенных сред в околосолнечном допланетном облаке: влияние твердых частиц на турбулентность в диске // *Астрон. Вестник*. 2006. Т. 40. С. 1-62.
- [7] Колесниченко А.В., Маров М.Я. О влиянии спиральности на эволюцию турбулентности в солнечном протопланетном облаке // *Астрон. Вестник*. 2007. Т. 41. С. 3-23.
- [8] Колесниченко А.В. Термодинамическая модель сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности космической плазмы // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2014. № 61. 48 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-61>
- [9] Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. *Mechanics of turbulence of multicomponent gases* // Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Boston, London. 2002. 373 p.
- [10] Marov M.Ya. and Kolesnichenko A.V. Chaotic and ordered structures in the developed turbulence // In: "Astrophysical disks: Collective and stochastic phenomena" (eds.: A.M. Fridman and M.Ya. Marov), Springer, 2006. P. 23-54.
- [11] Sano T., Miyama S.M. Magnetorotational instability in Protoplanetary disks. I. On the global stability of weakly ionized disks with ohmic dissipation // *Astrophys. J.* 1999. V. 515. P. 776-786.
- [12] Sano T., Miyama S.M., Umebayashi T., Nakano T. Magnetorotational instability in Proto planetary disks. II. Ionization state and unstable regions // *Astrophys. J.* 2000. V. 543. P. 486-501.
- [13] Velikhov E.P. Stability of an ideally conducting liquid flowing between cylinders rotating in a magnetic fluid // *Sov. Phys. JETP*. 1959. V. 9. P. 995-998.
- [14] Hawley J.F., Balbus S.A. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. II. Nonlinear evolution // *Astrophys. J.* 1991. V. 376. P. 223-233.
- [15] Eardley D.M., Lightman A.P. Magnetic viscosity in relativistic accretion disks // *Astrophys. J.* 1975. V. 200. P. 187-203.
- [16] Альвен Х., Аррениус Г. *Эволюция солнечной системы*. М.: Мир. 1979.

- [17] Galeev A.A., Rosner R., Viana G.S. Structured coronae of accretion disks // *Astrophys. J.* 1979. V. 229. P. 318-326.
- [18] Coroniti F.V. On the magnetic viscosity in Keplerian accretion disks // *Astrophys. J.* 1981. V. 244. P. 587-599.
- [19] Tout C., Pringle J.E. Accretion disk viscosity- a simple model for a magnetic dynamo // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1992. V. 259. P. 604-612.
- [20] Brandenburg A., Nordlund A., Stein R.F., Torkelsson U. The disk accretion rate for dynamo-generated turbulence // *Astrophys. J.* 1996. V. 458. P. 145-148.
- [21] Lesch H. Magnetic reconnection in accretion disc coronae// *Solar and Astrophysical Magnetohydrodynamic Flows*/Ed. By K.C. Tsinganos, Dordrecht Kluwer. 1996. P. 673-682.
- [22] Bisnovaty-Kogan G.S., Lovelace R.V.E. Advective accretion disks and related problems including magnetic fields // *New astron. Rev.* 2001. V. 45.P. 663-742.
- [23] Armitage P.J., Livio M., Pringle J.E. Episodic accretion in magnetically layered protoplanetary disks // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 2001. V. 324. P. 705-711.
- [24] Кадомцев Б.Б. Перезамыкание магнитных силовых линий // *УФН.* 1987. Т.151. С. 3-29.
- [25] Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магнитные поля в астрофизике // Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2006.
- [26] Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде // М.: Мир. 1980.
- [27] Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А. Турбулентное динамо в астрофизике // М.: Наука. 1980.
- [28] Parker E.N. Hydromagnetic dynamo model// *Astrophys. J.* 1955. V.122. P. 293-314.
- [29] Heyvaerts J., Priest E.R. A self-consistent turbulent model for solar coronal heating // *Astrophys. J.* 1992. V. 390. P. 297-308.
- [30] Inverauity G.W., Priest E.R., Heyvaerts J. Turbulent coronal heating. I. Sheared arcade // *Astron. Astrophys.* 1995. V. 293. P. 913-926.
- [31] Pudritz R.E., Norman C. A. Bipolar hydromagnetic winds from disks around protostellar objects // *Astrophys. J.* 1986. V. 301. P. 571-586.
- [32] Campbell C.G. Disc –wind field matching in accretion discs with magnetically influenced wind // *Mon .Not. R. Astron. Soc.* 2005. V. 361. P. 396-404.

- [33] Konigl A., Pudritz R.E. Disk winds and the accretion –outflow connection// Protostars and Planets IV/Eds V. Mannings, A.P. Boss and S.S. Russell, Tucson: Univ. Arizona Press. 2000. P.759-788.
- [34] Wang J.C.L., Sulkanen M.E., Lovelace R.V.E. Self-collimated electromagnetic jets from magnetized accretion disks:The even-symmetry case // Astrophys. J. 1990. V.355. P. 38-43.
- [35] Favre A. Statistical Equations of Turbulent Gases // In: Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics. SIAM. Philadelphia. 1969. P. 231–267.
- [36] Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред. М.: “БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009.
- [37] Lazarian A., Vishniac E.T. Reconnection in a Weakly Stochastic Field // The Astrophysical Journal. 1999. V. 517. P. 700-718.
- [38] Pudritz R.E. Dynamo action in turbulent accretion discs around black holes-I. The fluctuations // Mon. Not. R. Astr. Soc.1981. V. 195. P. 881-896.
- [39] Blackadar A.K. Extension of the laws of thermodynamics to turbulent system// J. Meteorology. 1955. V. 12.
- [40] Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика // Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2006.
- [41] Иевлев В.М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред // М.: Наука. 1975.
- [42] Фридман А.М., Бисикало Д.В. Природа аккреционных дисков тесных двойных звезд: неустойчивость сверхотражения и развитая турбулентность // УФН. 2010. Т. 178. С. 577-604.
- [43] Франк-Каменецкий Д.А. Физические процессы внутри звезд // М.: Физматлит. 1959.
- [44] Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо // М.: Мир. 1984.
- [45] Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H. Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke  $\overline{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}$  für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis- Kräfte beeinflusster Bewegung // Z. Naturforsch. 1966. 21a. 369-376.
- [46] Shakura N.I., Sunyaev R.A. Black holes in binary systems. Observational appearance // Astron. Astrophys. 1973. V. 24. P. 337-355.
- [47] Pringle J.E., King A.R. Astrophysical flow // Cambridge. 2007.

- [48] Тассуль Ж.-Л. Теория вращающихся звезд // М.: Мир. 1982.
- [49] Шакура Н.И. Дискковая модель аккреции газа релятивистской звездой в тесной двойной системе // Астрон. журн. 1972. Т.49. С. 921-929.
- [50] Lynden-Bell D., Pringle J.E. The Evolution of Viscous Discs and the Origin of the Nebular Variables // Mon. Not. Roy. Astron. Soc.1974. V. 168. P. 603.
- [51] Bath G.T., Pringle J.E. The Evolution of Viscous Discs,-I. Mass Transfer Variations // Mon. Not. Roy. Astron. Soc.1981. V. 194. P. 967.
- [53] Eardley D.M., Lightman A.P., Payne D.G., Shapiro S.L. Accretion discs around massive Black Holes; Persistent Emission Spectra // Astrophys. J. 1978. V. 234. P. 53.
- [54] Heyvaerts J., Priest E.R., Bardou A. Magnetic field diffusion in self-consistently turbulent accretion disks // Astrophys. J.1996. V. 473. P. 403-421.
- [55] Прист Э., Форбс Т. Магнитное пересоединение. Магнитогидродинамическая теория и приложения // М.: Физматлит. 2005.
- [56] Шапиро С., Тьюколски С. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Ч. II. // М.: Мир. 1985.
- [57] Pudritz R.E. Dynamo action in turbulent accretion discs around black holes-II. The mean magnetic field // Mon. Not. R. Astr. Soc. 1981. V. 195. P. 897-914.
- [58] Lovelace R.V.E., Wang J.C.L., Sulkanen M.E. Self-collimated electromagnetic jets from magnetized accretion disks // Astr. J. 1987/. V. 515. P. 504-535.
- [59] Pudritz R.E., Fahlman G.G. The structure and variability of dynamo driven accretion discs // Mon. Not. R. Astr. Soc.1982. V. 198. P. 689-706.
- [60] Campbell C.G., Caunt S.E. An analytic model for magneto-viscous accretion discs // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1999. V. 306. P. 122-136.
- [61] Маров М.Я., Колесниченко А.В., Макалкин А.Б., Дорофеева В.А., Зиглина И.Н., Чернов А.В. От протосолнечного облака к планетной системе: Модель эволюции газопылевого диска // В сб. «Проблемы зарождения и эволюции биосферы / Под ред. Э.М. Галимова, М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2008.
- [62] Casse F, Ferreira J. Magnetized Accretion-Ejection Structures. IV. Magnetically-Driven Jets from Resistive, Viscous, Keplerian Discs//Astron. Astrophys. 2000. V. 353. P. 1115-1128.

## Оглавление

1. Введение .....	3
2. Исходные уравнения задачи.....	5
Закон сохранения полной энергии .....	9
Определяющие соотношения.....	10
Коэффициенты турбулентного переноса.....	15
3. МГД – уравнения для турбулентного аккреционного диска.....	18
Коэффициент турбулентной вязкости .....	19
Усреднённое уравнение неразрывности .....	22
Усреднённое уравнение движения .....	22
Усреднённое энергетическое уравнение .....	24
Усреднённое уравнение магнитной индукции.....	24
4. Модель тонкого протопланетного диска .....	27
Уравнение неразрывности для тонкого диска.....	29
Радиальная компонента уравнения движения для тонкого диска .....	30
Азимутальная компонента уравнения движения для тонкого диска.....	31
Вертикальная компонента уравнения движения для тонкого диска .....	32
Уравнение баланса полной энергии для тонкого диска.....	34
5. Стационарное состояние проводящего диска .....	37
6. Заключение .....	41
Список литературы.....	42