ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 57 за 2014 г.

Сасоров П.В., Фомин И.В.

Интеграл столкновений в кинетическом уравнении для разреженного электронного газа с учетом его спин-поляризации

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сасоров П.В., Фомин И.В. Интеграл столкновений в кинетическом уравнении для разреженного электронного газа с учетом его спин-поляризации // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 57. 18 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-57

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

П.В. Сасоров, И.В. Фомин

Интеграл столкновений в кинетическом уравнении для разреженного электронного газа с учетом его спин-поляризации

Москва – 2014

П.В. Сасоров, И.В. Фомин.

Интеграл столкновений в кинетическом уравнении для разреженного электронного газа с учетом его спин-поляризации

В статье приведен вывод интеграла столкновений в кинетическом уравнении для разреженного спин-поляризованного газа фермионов (электронов). Учитываются столкновения между этими фермионами и столкновения с гораздо более тяжелыми частицами (ионами), образующими случайно расположенный неподвижный фон (газ). Важным новым обстоятельством является то, что амплитуда рассеяния частиц друг на друге не предполагается малой, которую можно было бы получить, например, в первом борновском приближении. Полученный нами интеграл столкновений можно использовать в кинетическом уравнении, в том числе и для относительно холодной разреженной спин–поляризованной плазмы с характерной энергией электронов, меньшей $\sim Z^2\alpha^2mc^2$.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, интеграл столкновений, разреженная холодная плазма, спин–поляризация.

P.V. Sasorov, I.V. Fomin.

The collision operator in kinetic equation for a spin-polarized low-density electron gas

We derive the collision operator in kinetic equation for a low-density spin-polarized gas of fermions (electrons). We take into account the collisions between the fermions and the collisions with much heavier particles (ions), forming a randomly located stationary background (gas). An important new fact is that the scattering amplitude of the particles on each other is not assumed to be small, which could be obtained, for example, by the first-order Born approximation. The obtained collision operator can be used in the kinetic equation, including the case of relatively cold, low-density spin-polarized plasma.

Key words: kinetic equation, collision operator, low-density cold plasma, spin-polarization.

Оглавление

Введение

Возможность спин-поляризации плазмы обычно не рассматривается при кинетическом и гидродинамическом описании ее динамики. В качестве типичного примера можно привести работы [1, 2]. Эта ситуация имеет место даже несмотря на то, что скорость релаксации макроскопической поляризации плазмы подавлена множителем порядка α^4 (где $\alpha = e^2/\hbar c$ – постоянная тонкой структуры) по сравнению с темпом установления максвелловской функции распределения в полностью ионизованной плазме. В случае, когда значительную роль играют нейтральные атомы (или ионы) и процессы рекомбинации-ионизации, отмеченное подавление имеет порядок α^3. Поэтому спин-поляризованное состояние плазмы должно быть более или менее типичным явлением при определенных способах ее создания. Причина отмеченного выше обычного пренебрежения эффектами спин-поляризации состоит в ее слабом влиянии на обычно рассматриваемые свойства плазмы.

Свойства поляризации газов и плазмы рассматривались в ряде работ. В работах [3, 4] было установлено воздействие оптической ориентации атомов на электропроводность плазмы и интенсивность ее излучения. Это явление было обнаружено в гелиевой плазме при оптической ориентации в ней метастабильных атомов гелия. Не исключено, что создание слабо ионизованной плазмы с сильной степенью спин-поляризации, а значит и с возможным избытком метастабильных по спину атомов и ионов, может иметь существенное практическое значение. Дело в том, что избыток метастабильных атомов и ионов может приводить к своеобразной консервации энергии возбужденных атомов и ионов. Это, в свою очередь, может приводить к нестандартным каналам химических реакций в такой слабоионизованной плазме. Свойства подобной плазмы практически не обсуждались в литературе, за исключением, может быть, работы [5]. Один из способов создания такой спин-поляризованной плазмы состоит, возможно, в использовании ферромагнитных катодов в тлеющем разряде [6, 7].

Следует упомянуть, что создание и исследование очень холодных газов из метастабильных атомов, обязанных своим длительным существованием сильной спиновой поляризации системы связанных электронов, является одним из важнейших направлений современных физических исследований. Смотрите, например, работы [8, 9, 10, 11]. Такие газы проявляют богатые физические свойства, и исследованиям релаксации в таких системах посвящены десятки теоретических работ, например [12].

Нам представляется, что исследования в области спин-поляризованной плазмы частично сдерживаются недостаточным теоретическим исследованием. Важным нерешенным вопросом является, например, скорость релаксации спин-поляризации плазмы. Мы задались вопросом получения надежной оценки скорости релаксации спин-поляризации в полностью ионизованной плазме, когда заряженные частицы взаимодействуют друг с другом в основном за счет кулоновского поля. Оказалось, что в литературе, насколько нам это удалось установить, есть очевидный пробел, не позволяющий решить этот вопрос путем простых компиляций результатов из известных работ.

Причина такого состояния теории состоит в следующем. Стандартный вывод интеграла столкновений для кинетического уравнения, опирающегося на квантово-механические амплитуды рассеяния с учетом спиновых переменных, выполнен, насколько нам это удалось установить, только для случая, когда эти амплитуды рассеяния могут быть получены в первом борновском приближении. В качестве примера мы ссылаемся на монографию [13]. Такая же ситуация складывается и для самой амплитуды рассеяния с учетом переворота спина. В классической серии работ [14, 15, 16, 17, 18, 19] для получения конкретных выражений для этих амплитуд рассеяния используется, в конце концов, первое борновское приближение. Оно не применимо для случая, когда характерная энергия электронов E_T заметно меньше $Z^2\alpha^2mc^2$. Из сказанного следует, что в области параметров плазмы с типичной энергией электронов E_T, лежащей в интервале $Z^2\alpha^2mc^2 \ll E_T \ll mc^2$, нет препятствий к написанию интеграла столкновений с учетом переворота спина для кинетического уравнения электронов.

Особняком от основной направленности данной работы стоит случай относительно холодной плотной квантовой жидкости [20], когда плотность возбужденных состояний невелика и когда имеются весьма эффективные методы теоретического исследования кинетики такой жидкости.

Основная цель нашей работы состоит в исследовании относительно холодной и почти идеальной плазмы, когда $e^2n_e^{1/3} \ll E_T \ll Z^2\alpha^2mc^2$. Здесь n_e – объемная концентрация электронов плазмы. Из сказанного выше видно, что эту область параметров надо исследовать специально. Причина состоит в том, что парное квантово-механическое рассеяние заряженных частиц в этой области уже нельзя описать с помощью теории возмущений, основанной на плоских волнах. Кулоновское взаимодействие становится сильным при столкновениях, а в эффект переворота спина входит интерференция кулоновского и, относительно слабого, спин-орбитального взаимодействия. В результате возникают две отдельные задачи. Во-первых, надо вывести кинетическое уравнение для электронов, с учетом того, что взаимодействие с электронами и ионами и самими электронами нельзя считать слабым в процессе столкновения. Во-вторых, необходимо вычислить амплитуду рассеяния заряженных частиц с учетом спин–орбитального взаимодействия.

Данная работа будет посвящена первому вопросу – выводу кинетического уравнения для электронов. Поскольку мы будем действовать в области $e^2 n_e^{1/3} \ll E_T \ll Z^2\alpha^2 mc^2$, то электроны плазмы можно рассматривать как сильно разреженный невырожденный электронный газ, так как в области указанных энергий и плотностей числа заполнений электронных состояний малы. В этом случае мы можем пользоваться подходом одночастичной функции распределения (матрицы плотности). Сильное взаимодействие частиц происходит относительно редко, когда частицы сближаются, поэтому функция распределения медленно меняется со временем. Это, на первый взгляд, позволяет воспользоваться соотношением баланса «прибыли» и «убыли» частиц в фазовом пространстве, чем обычно пользуются при выводе кинетического уравнения Больцмана [1]. При таком подходе мы избегаем исходных фазовых зависимостей квантово-механических амплитуд рассеяния. Вместо них мы можем воспользоваться соответствующими вероятностям перехода – сечениями рассеяния. Причина такого упрощения лежит в квазиклассичности однородного газа, когда не учитываются квантово-механические внутренние степени свободы рассеивающихся частиц.

В этой работе мы хотим проследить за спиновыми переменными рассеивающихся частиц. Оказывается, что конечный вид кинетического уравнения не удается получить из подобных соображений о «балансе». По этой причине мы получаем интеграл столкновений для кинетического уравнения электронов, пользуясь двумя предположениями. Мы считаем медленным изменение одночастичной матрицы плотности при редких парных рассеяниях частиц и предполагаем известными кванто-механические амплитуды рассеяния с учетом спиновых переменных.

Рассеяние электронов на ионах и электронах будут рассмотрены отдельно друг от друга, так как в условиях разреженной плазмы, когда низка роль многократных столкновений, темпы отдельных неинтерферирующих друг с другом процессов можно просто складывать. Из-за малости отношения масс электронов и ионов мы будем считать ионы неподвижными и случайно расположенными. Учет следующих членов разложения по параметру $\sqrt{m_e/m_i}$ не представляет, как известно, принципиальных трудностей. При выводе интеграла столкновения мы считаем плазму однородной. Неоднородность плазмы и наличие средних полей можно учесть в конечном результате, путем дописывания поведения электрона в среднем поле. Как обычно, это накладывает ограничение на степень неоднородности плазмы. Характерный масштаб неоднородности плазмы должен быть больше дебаевского радиуса экранирования в плазме. Кроме того, мы будем считать средние поля в плазме достаточно слабыми, чтобы не учитывать их в акте рассеяния.

В результате получается, что кроме обычного кинетического уравнения Больцмана-Власова [21] для полной плотности электронов в фазовом пространстве $n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ (модифицированного влиянием зависимости сечения рассеяния от спиновых переменных), возникает второе кинетическое уравнение для описания эволюции вектора $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$. Этот вектор является плотностью в фазовом пространстве $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ вектора $\boldsymbol{s}$, определяющего поляризационную матрицу плотности [22]. Это дополнительное уравнение в некоторой степени аналогично уравнению Больцмана-Власова. Оно описывает перенос поляризации электронов в фазовом пространстве, в том числе, и за счет кулоновских столкновений. Кроме того, это уравнение описывает процессы переворота спина за счет спин-орбитального и спин-спинового взаимодействия.

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. Сперва нами получены интегралы столкновений в уравнениях для $n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ и для $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ за счет электрон-ионных столкновений. Ионы считаются очень массивными по отношению к электронам, а их гиромагнитные факторы считаются равными 0. Далее нами получены интегралы столкновений в уравнениях для $n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ и для $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ за счет электрон-электронных столкновений. В Заключении сформулированы основные результаты данной работы.

Всюду в статье используется атомная система единиц. $[|e| = \hbar = m_e = 1]$.

Интеграл столкновений электронов с ионами

Целью данного раздела является получение интеграла столкновений для электронного кинетического уравнения в разреженной плазме. Начнем с определения амплитуды рассеяния в стационарной нерелятивистской квантомеханической теории рассеяния частицы со спином $1/2$ на тяжелой неподвижной бесспиновой частице (ионе)[1]. Амплитуда определяется асимптотикой стационарной волновой функции рассеяния на больших расстояниях от рассеивающего центра (тяжелого иона), расположенного в точке $x = 0$:

$$e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} a^{\alpha} + \frac{f^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{p}')\ a^{\beta}\, e^{ip\,x}}{x} \,. \tag{1}$$

[1]Мы считаем, что можно пренебречь спином тяжелых частиц в плазме из-за соответствующей малости гиромагнитного отношения.

Здесь $\boldsymbol{p}$ – импульс падающей частицы, a^α – спинорная часть амплитуды падающей волны,

$$f = f^\alpha_\beta\,(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') \tag{2}$$

– амплитуда рассеяния. В выражении (1) $\boldsymbol{p}'(\boldsymbol{x})$ является функцией от $(\boldsymbol{x})$ и соответствует импульсу после столкновения:

$$\boldsymbol{p}' = p\,\frac{x}{|x|}\,.$$

Формально амплитуда рассеяния определена только для $|\boldsymbol{p}'| = |\boldsymbol{p}|$. Окончательное же выражение для интеграла столкновений удобно записать в виде, куда $\boldsymbol{p}'$ и $\boldsymbol{p}$ входят симметрично. Поэтому мы будем мысленно продолжать амплитуду рассеяния по непрерывности в небольшую окрестность сферы $|\boldsymbol{p}'| = |\boldsymbol{p}|$ в пространстве $\boldsymbol{p}'$.

Имеются сильные ограничения на вид амплитуды рассеяния в центральном поле с учетом спин-орбитального взаимодействия [22]. В данной работе мы не накладываем эти ограничения, сохраняя более общий вид получаемых результатов. Мы будем учитывать только унитарность рассеяния и закон сохранения энергии рассеиваемой частицы. Последнее уже использовано в записи (1)-(2). Далее мы не будем никак конкретизировать вид амплитуды рассеяния f. Поэтому все ниже следующее будет справедливо для комбинации любого фермиона со спином 1/2 (далее просто «электрон») и любой гораздо более тяжелой частицы (далее просто «ион»). При этом роль процессов с переворотом спина может находиться в любой пропорции с процессами без переворота спина.

Рассмотрим теперь, как эволюционирует волновая функция электрона, имеющая в начальный момент времени $t = 0$ вид

$$e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}\,a^\alpha\,,$$

если фермион со спином 1/2 (электрон) рассеивается на системе неподвижных ионов, расположенных в точках $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_j$ $(j = 1, 2, \dots)$. В дальнейшем мы будем предполагать, что ионы расположены случайно и некоррелированно с постоянной средней плотностью n_i, подразумевая необходимое усреднение по статистическому ансамблю расположения ионов. В соответствии с исходной постановкой задачи будем считать концентрацию ионов n_i достаточно малой, так что $p \gg |f|^2 n_i$. В этом случае на большом интервале времени Δt, таком, что

$$p^{-2} \ll \Delta t \ll \nu_{ei}^{-1}, \tag{3}$$

где частоту столкновений ν_{ei} можно оценить как $p|f|^2 n_i$, эволюцию волновой функции электрона можно описать так:

$$\psi^\alpha_{\boldsymbol p}(\boldsymbol x,t)=e^{-\frac{ip^2t}{2}}\left[e^{i\boldsymbol p\boldsymbol x}a^\alpha(\boldsymbol p)+\sum_{\boldsymbol r_j}\frac{f^\alpha_\beta\left(\boldsymbol p,\boldsymbol p'_j\right)a^\beta(\boldsymbol p)e^{i(\boldsymbol p\boldsymbol r_j+p|\boldsymbol x-\boldsymbol r_j|)}}{|\boldsymbol x-\boldsymbol r_j|}\Theta\left(pt-|\boldsymbol x-\boldsymbol r_j|\right)\right], \tag{4}$$

где

$$\boldsymbol p'_j=p\,\frac{\boldsymbol x-\boldsymbol r_j}{|\boldsymbol x-\boldsymbol r_j|}\,,$$

а $\Theta(w)$ – ступенчатая функция Хэвисайда, равная 0 при $w<0$ и 1 при $w\geq 0$. Считается что все ионы одинаковы, поэтому амплитуды $f^\alpha_\beta\left(\boldsymbol p,\boldsymbol p'\right)$ так же одинаковы. Выражение (4) является промежуточной асимптотикой, справедливость которой определяется сильным неравенством (3). Его левая часть обеспечивает применимость асимптотики (1) для индивидуальных рассеивающих центров и возможность замены плавной переходной функции на ступенчатую Θ-функцию. Правая часть неравенства (3) позволяет учитывать только однократные рассеяния на рассеивающих центрах. Вероятность многократного рассеяния заметно меньше на этих временах вероятности однократного рассеяния, которое полностью учтено в (4)[2].

Рассмотрим теперь смешанное начальное состояние, являющееся ансамблем состояний следующего вида:

$$\psi^\alpha=\int\psi^\alpha_{\boldsymbol p}\left(\boldsymbol x,t=0\right)\,d^3p=\int e^{i\boldsymbol p\boldsymbol x}a^\alpha(\boldsymbol p)\,d^3p\,. \tag{5}$$

Ансамбль таких состояний определяется тем, что a^α является гауссовым случайным процессом в импульсном пространстве, таким, что

$$\langle a^\alpha\rangle=0\,;\quad\left\langle a^\alpha(\boldsymbol p_1)a^\beta(\boldsymbol p_2)\right\rangle=0\,;\quad\left\langle a^\alpha(\boldsymbol p_1)\left(a^\beta\left(\boldsymbol p_2\right)\right)^*\right\rangle=n(\boldsymbol p_1)\rho^\alpha_\beta(\boldsymbol p_1)\delta(\boldsymbol p_1-\boldsymbol p_2). \tag{6}$$

Здесь мы рассматриваем пространственно однородный ансамбль состояний электрона. Такой подход при вычислении интеграла столкновений в полном кинетическом уравнении оправдан, если характерный размер неоднородностей распределения превышает дебаевский радиус.

Введенный этими свойствами статистический ансамбль начальных состояний системы определяется полностью. Локальная в импульсном пространстве спинорная матрица плотности ρ^α_β нормируется так, что

$$\rho^\alpha_\beta(\boldsymbol p_1)=1/2\delta^\alpha_\beta+\boldsymbol\sigma^{\ \alpha}_\beta\boldsymbol s(\boldsymbol p)\,, \tag{7}$$

где $\boldsymbol\sigma=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ – вектор, составленный из матриц Паули, а $\boldsymbol s$ – обычный трехмерный вектор, по модулю не превышающий $1/2$, однозначно описываю-

[2]Приведенная выше оценка частоты столкновений $\nu_{ei}\sim p|f|^2n_i$ справедлива, вообще говоря, только для короткодействующего потенциала взаимодействия. Для заряженных частиц в плазме, когда f достаточно быстро расходится при $\boldsymbol q=\boldsymbol p'-\boldsymbol p\to 0$, необходима, как хорошо известно, более аккуратная оценка, не меняющая, однако, того обстоятельства, что $\nu_{ie}\to 0$ при $n_i\to 0$.

щий спиновую матрицу плотности. Важно отметить, что введенная таким образом $n\,(\boldsymbol{p})$ является плотностью частиц в фазовом пространстве $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$, просуммированной по состояниям спина[3]. Она, согласно нашему предположению о пространственной однородности, не зависит от $\boldsymbol{x}$. Таким образом, начальное состояние нашего ансамбля однозначно определяется матрицей плотности:

$$R^\alpha_\beta(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,t=0)=\left\langle \psi^\alpha\left(\boldsymbol{x}_1,t=0\right)\left(\psi^\beta\left(\boldsymbol{x}_2,t=0\right)\right)^*\right\rangle=$$

$$=\left\langle \int e^{i(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2)}a^\alpha(\boldsymbol{p}_1)a_\beta(\boldsymbol{p}_2)\,d^3p_1\,d^3p_2\right\rangle\,. \tag{8}$$

Подставляя в это уравнение выражения (6), получим

$$R^\alpha_\beta\left(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,t=0\right)=\int e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}\,\rho^\alpha_\beta\left(\boldsymbol{p}\right)n\left(\boldsymbol{p}\right)\,d^3p\,. \tag{9}$$

Что означает, что пространственная зависимость такой матрицы плотности, как и должно быть, зависит только от разности $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$ и является фактически Фурье образом $\rho^\alpha_\beta\left(\boldsymbol{p}\right)n\left(\boldsymbol{p}\right)$.

Вопрос теперь состоит в следующем: как эволюционирует статистический ансамбль, начальное состояние которого описано выше?

Мы покажем, что с малыми (пренебрежимыми) поправками статистический ансамбль состояний при $n_i(pt)^3\gg 1$, определяемый начальными условиями (5), обладает статистически такими же свойствами, как ансамбль начальных состояний, но уже с другими, зависящими от времени $n\left(\boldsymbol{p},t\right)$ и $\rho^\alpha_\beta\left(\boldsymbol{p},t\right)$. При этом статистический ансамбль дополняется условием случайного, статистически однородного распределения рассеивающих центров. Под усреднением $\langle ...\rangle$ далее подразумевается не только усреднение по ансамблю начальных условий, но и усреднение по ансамблю различных расположений ионов. Если это так, то закон эволюции, определенный на интервале времен

$$n_i^{-1/3}p^{-1}\ll t\ll \nu_{ei}^{-1}, \tag{10}$$

можно продолжить и далее на неопределенно большие t. Заметим, что левая часть последнего сильного неравенства сильнее, чем левая часть сильного неравенства (3) в условиях задачи, поставленной в Введении.

Для доказательства утверждения, сделанного в предыдущем абзаце, обратим внимание, что на отмеченном интервале времени решение уравнения Шредингера для волновой функции можно записать так:

$$\psi^\alpha\left(\boldsymbol{x},t\right)=\int \psi^\alpha_{\boldsymbol{p}}\left(\boldsymbol{x},t\right)\,d^3p\,, \tag{11}$$

[3]Заметим, что населенность квантово-механических уровней с заданным импульсом $\boldsymbol{p}$ и проекцией спина α равна при таком определении $(2\pi)^3\,n\left(\boldsymbol{p}\right)\rho^\alpha_\alpha\left(\boldsymbol{p}\right)$ (без суммирования!). Малость эффектов вырождения электронного газа означает, что $n\ll(2\pi)^{-3}\sim 1$. Это условие у нас выполнено автоматически, если иметь в виду ту конкретную задачу, о которой говорится во Введении.

где нужно подставить $\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r},t)$ из (4), а амплитуды a^α удовлетворяют обсужденным выше соотношениям (6). Обратим внимание, что при выполнении левой части сильного неравенства (10) в сумму, стоящую в правой части (11), вносит вклад огромное число слагаемых, определяемых индивидуальными некоррелированными друг с другом рассеивающими центрами $\boldsymbol{r}_j$. По этой причине лидирующий член разложения матрицы плотности, определяемой только усреднением по начальному состояния электрона, при $n_i(pt)^3 \to \infty$ будет определяться просто плотностью рассеивающих центров n_i с соответствующей заменой суммы на интеграл, а остаточный член будет определяться относительно слабыми флуктуациями средней плотности ионов на больших пространственных масштабах $\sim pt$. Таким образом, случайное гауссово поле $\psi^\alpha(\boldsymbol{x},t)$ в лидирующем члене соответствующего разложения будет статистически независимо от конкретной реализации расположения ионов и полностью характеризоваться своей матрицей плотности:

$$R^\alpha_\beta(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,t) = \left\langle \psi^\alpha(\boldsymbol{x}_1,t)\left(\psi^\beta(\boldsymbol{x}_2,t)\right)^*\right\rangle\,, \tag{12}$$

где усреднение проводится и по ансамблю реализаций расположения ионов.

Производя теперь подстановки (4)→(11)→(12) и выполняя соответствующие интегрирования и усреднения, получаем: [4]

$$R^\alpha_\beta(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,t) = \int e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)} n(\boldsymbol{p})\rho^\alpha_\beta(\boldsymbol{p})d^3p +$$

$$+2\pi i\, t\, n_i \int n(\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}\left[\rho^\gamma_\beta(\boldsymbol{p})f^\alpha_\gamma(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}) - \rho^\alpha_\gamma(\boldsymbol{p})f^{*\,\gamma}_\beta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})\right]\,d^3p +$$

$$+t\, n_i \int n(\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{p}'(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}\rho^\gamma_\mu(\boldsymbol{p})f^\alpha_\gamma(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')\,f^{*\,\mu}_\beta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')\;\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p'\,d^3p\,. \tag{13}$$

Таким образом, оказывается, что при выполнении сильного неравенства (10) мы имеем:

$$\frac{d}{dt}\,R^\alpha_\beta(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,t)\Big|_{t=0} =$$

$$= 2\pi i\, n_i \int n(\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}\left[\rho^\gamma_\beta(\boldsymbol{p})f^\alpha_\gamma(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}) - \rho^\alpha_\gamma(\boldsymbol{p})f^{*\,\gamma}_\beta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})\right]\,d^3p +$$

$$+n_i \int n(\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{p}'\rho^\gamma_\mu(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}f^\alpha_\gamma(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')\,f^{*\,\mu}_\beta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')\;\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p'\,d^3p\,. \tag{14}$$

Это уравнение означает, в частности, что если в момент времени $t=t_0$ состояние электрона в поле случайно расположенных ионов описывается матрицей плотности (9) с заменой $t=0$ на $t=t_0$, то в моменты времени $t_0+\Delta t$, где Δt

[4]Далее обозначаем $\left(f^\alpha_\beta\right)^* = f^{*\,\beta}_\alpha$.

удовлетворяет сильному неравенству (10), состояние электрона будет оставаться такого же вида, но уже с другими $n(\boldsymbol{p},t)$ и $\rho^\alpha_\beta(\boldsymbol{p},t)$. Продолжая итерационно это рассуждение дальше по времени, получаем из уравнения (14) следующее уравнение, описывающее эволюцию $n(\boldsymbol{p},t)$ и $\rho^\alpha_\beta(\boldsymbol{p},t)$.

$$\frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta\left(\frac{dn(\boldsymbol{p})}{dt}\right)^{(ei)}_{st}+\boldsymbol{\sigma}^\alpha_\beta\left(\frac{d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p})}{dt}\right)^{(ei)}_{st}=$$
$$=2\pi i\,n_i\,n\left(\boldsymbol{p}\right)\,\left[\rho^\gamma_\beta(\boldsymbol{p})f^\alpha_\gamma\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\right)-\rho^\alpha_\gamma(\boldsymbol{p})f^{*\,\gamma}_\beta\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\right)\right]+$$
$$+n_i\int n\left(\boldsymbol{p}'\right)\rho^\gamma_\mu\left(\boldsymbol{p}'\right)f^\alpha_\gamma\left(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}\right)f^{*\,\mu}_\beta\left(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}\right)\,\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p'\,, \qquad (15)$$

где $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p})=n(\boldsymbol{p})\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p})$ – плотность спиновой поляризации электронов. При переходе от (14) к (15) использовалось преобразование Фурье.

Унитарность рассеяния означает, в частности, что

$$4\pi\,\mathrm{Im}\,f^\alpha_\beta\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\right)=\int f^\gamma_\beta\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'\right)f^{*\,\alpha}_\gamma\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'\right)\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p'\,. \qquad (16)$$

Вычисляя след уравнения (15), и используя (16), получаем интеграл столкновений в уравнении для dn/dt:

$$\left(\frac{dn(\boldsymbol{p})}{dt}\right)^{(ei)}_{st}=n_i\times\int\left[n\left(\boldsymbol{p}'\right)\rho^\gamma_\mu\left(\boldsymbol{p}'\right)f^\beta_\gamma\left(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}\right)f^{*\,\mu}_\beta\left(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}\right)-\right.$$
$$\left.-n\left(\boldsymbol{p}\right)\rho^\gamma_\mu\left(\boldsymbol{p}\right)f^\beta_\gamma\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'\right)f^{*\,\mu}_\beta\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'\right)\right]\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p'. \qquad (17)$$

Возможна дальнейшая конкретизация этого уравнения путем подстановки $n\left(\boldsymbol{p}\right)\rho^\alpha_\beta\left(\boldsymbol{p}\right)=n\left(\boldsymbol{p}\right)\delta^\alpha_\beta/2+\boldsymbol{\sigma}^\alpha_\beta\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{p}\right)$:

$$\left(\frac{dn(\boldsymbol{p})}{dt}\right)^{(ei)}_{st}=\frac{n_i}{2}\int\left[n\left(\boldsymbol{p}'\right)f^\beta_\gamma\left(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}\right)f^{*\,\gamma}_\beta\left(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}\right)-\right.$$
$$\left.-n\left(\boldsymbol{p}\right)f^\beta_\gamma\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'\right)f^{*\,\gamma}_\beta\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'\right)\right]\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p'+$$
$$+n_i\int\left[\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{p}'\right)\boldsymbol{\sigma}^\gamma_\mu f^\beta_\gamma\left(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}\right)f^{*\,\mu}_\beta\left(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}\right)-\right.$$
$$\left.-\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{p}\right)\boldsymbol{\sigma}^\gamma_\mu f^{*\,\beta}_\gamma\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'\right)f^\mu_\beta\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'\right)\right]\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p'\,. \qquad (18)$$

Умножая матрично уравнение (15) на $\boldsymbol{\sigma}^\beta_\lambda$ и производя свертку по спинорным индексам, получаем

$$\left(\frac{d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p})}{dt}\right)^{(ei)}_{st}=\pi i\,n_i\,n\left(\boldsymbol{p}\right)\,\boldsymbol{\sigma}^\beta_\alpha\left[\rho^\gamma_\beta(\boldsymbol{p})f^\alpha_\gamma\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\right)-\rho^\alpha_\gamma(\boldsymbol{p})f^{*\,\gamma}_\beta\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\right)\right]+$$

$$+\frac{n_i}{2}\int n\left(\boldsymbol{p}'\right)\rho^{\gamma}_{\mu}\left(\boldsymbol{p}'\right)\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha}\,f^{\alpha}_{\gamma}\left(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}\right)\,f^{*\,\mu}_{\beta}\left(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}\right)\,\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p'\,. \qquad (19)$$

Подставляя сюда выражение $n\left(\boldsymbol{p}\right)\rho^{\alpha}_{\beta}\left(\boldsymbol{p}\right) = n\left(\boldsymbol{p}\right)\delta^{\alpha}_{\beta}/2 + \boldsymbol{\sigma}^{\alpha}_{\beta}\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{p}\right)$ и учитывая соотношение

$$\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha}\,\left(\boldsymbol{\sigma}^{\gamma}_{\beta}\cdot\boldsymbol{S}\right) = \boldsymbol{S}\,\delta^{\gamma}_{\alpha} + i\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{\sigma}^{\gamma}_{\alpha}\,,$$

получаем окончательный вид интеграла столкновений в кинетическом уравнении для эволюции распределения плотности вектора поляризации электронов в фазовом пространстве с учетом столкновений электронов с ионами.

$$\begin{gathered}\left(\frac{d\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{p}\right)}{dt}\right)^{(ei)}_{st} = -2\pi\,\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{p}\right)\times\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha}\,\mathrm{Re}\,f^{\alpha}_{\beta}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\right) + \\ +\frac{n_i}{2}\int\Big[\left(\boldsymbol{\sigma}^{\gamma}_{\mu}\cdot\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{p}'\right)\right)\,f^{\alpha}_{\gamma}\left(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}\right)\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha}f^{*\,\mu}_{\beta}\left(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}\right) - \\ -\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{p}\right)f^{\alpha}_{\beta}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'\right)f^{*\,\beta}_{\alpha}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'\right)\Big]\,\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p' + \\ +\frac{n_i}{4}\int\Big[n\left(\boldsymbol{p}'\right)f^{\alpha}_{\mu}\left(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}\right)\,\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha}\,f^{*\,\mu}_{\beta}\left(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}\right) - \\ -n\left(\boldsymbol{p}\right)f^{*\,\alpha}_{\mu}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'\right)\,\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha}\,f^{\mu}_{\beta}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'\right)\Big]\,\delta\left(\frac{p^2}{2}-\frac{p'^2}{2}\right)\,d^3p'\,. \qquad (20)\end{gathered}$$

Обратим внимание, что последние, «перекрестные» слагаемые в уравнениях (18) и (20) обладают определенной симметрией. Это необходимо для выполнимости теоремы Онзагера для систем, близких к термодинамическому равновесию. Заметим попутно, что мы не учитывали вращательную симметрию и симметрию по отношению к обращению времени в амплитудах рассеяния. Поэтому полученный вид интегралов столкновений несколько более общий, чем при произвольной амплитуде рассеяния электронов на бесспиновых частицах. Например, в указанных довольно общих физических случаях первое слагаемое в уравнении (20), описывающее когерентное вращение вектора $\boldsymbol{S}$, тождественно обращается в 0.

Интеграл столкновений электронов с электронами

В этой части мы рассмотрим рассеяние электронов на электронах и вклад этих процессов в интегралы столкновений, входящие в уравнения для dn/dt и в $d\boldsymbol{S}/dt$. Основная аргументация и вычисления будут в значительной мере повторять то, что сказано в предыдущем разделе. Поэтому мы позволим себе сильно сократить изложение. Отметим только то, что ключевое, но типичное упрощение, которое используется для получения интеграла столкновения, состоит в том, что при выполнении условия $\nu_{ee} \ll n_e^{1/3}p$ многоэлектронная матрица плотности при усреднении по характерным временам $\Delta t \gg n_e^{-1/3}p^{-1}$

приближенно факторизуется как произведение одночастичных матриц плотности. Мы не будем рассматривать здесь это общее свойство разреженных систем статистической физики, ссылаясь, например, на [24]. Отметим, что оно позволяет нам рассмотреть только одну пару электронов в заданном объеме V, при усреднении по состояниям одного электрона из этой пары.

Единственная используемая нами информация о квантово-механическом рассеянии электронов друг на друге - это асимптотическое выражение для парной волновой функции стационарной теории рассеяния (нетождественных) частиц:

$$\bar{\psi}^{\alpha\beta}_{\boldsymbol{p}_1\,\delta;\boldsymbol{p}_2\,\gamma}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) =$$
$$= e^{i\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{X}_{12}}\left[e^{i\boldsymbol{p}_{12}\boldsymbol{x}_{12}}\delta^\alpha_\delta\delta^\beta_\gamma + \frac{e^{ip_{12}x_{12}}}{x_{12}}\,f^{\alpha\beta}_{\delta\gamma}\left(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2\right)\right]\,, \tag{21}$$

где

$$\boldsymbol{P}_{12} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2\,,\quad \boldsymbol{p}_{12} = \frac{(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)}{2}\,,\quad \boldsymbol{X}_{12} = \frac{(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)}{2}\,,\quad \boldsymbol{x}_{12} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\,, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{p}'_{12} = p\,\frac{\boldsymbol{x}_{12}}{x_{12}}\,,\quad \boldsymbol{p}'_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{P}_{12} + \boldsymbol{p}'_{12}\,,\quad \boldsymbol{p}'_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{P}_{12} - \boldsymbol{p}'_{12}\,, \tag{23}$$

$\boldsymbol{x}_1$, α, $\boldsymbol{x}_2$, β – пространственные и спинорные координаты электронов, а $\boldsymbol{p}_{1,2}$, δ и γ – квантовые числа состояния, описываемого данной волновой функцией. Соотношения (22) и (23) вводят удобные обозначения, связанные с системой центра инерции, как то: полный и приведенный импульсы, координату центра инерции и приведенную координату, импульсы после рассеяния, определенные направлением рассеяния в системе центра инерции и т.п.

Тогда общая нестационарная волновая функция пары электронов из рассматриваемого ансамбля (с учетом тождественности электронов) приобретает вид:

$$\psi^{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int e^{i\left[\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{X}_{12} - t\,\left(p_1^2+p_2^2\right)/2\right]}\left[e^{i\boldsymbol{p}_{12}\boldsymbol{x}_{12}}\delta^\alpha_m\delta^\beta_n - e^{-i\boldsymbol{p}_{12}\boldsymbol{x}_{12}}\delta^\beta_m\delta^\alpha_n + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{ip_{12}x_{12}}}{x_{12}}\,F^{\alpha\beta}_{mn}\left(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}'_1,\boldsymbol{p}'_2\right)\,\Theta(2pt - x_{12})\right]a^m(\boldsymbol{p}_1)b^n(\boldsymbol{p}_2)\,d^3p_1d^3p_2, \tag{24}$$

где случайные, некоррелированные друг с другом амплитуды $a^\alpha\left(\boldsymbol{p}\right)$ и $b^\alpha\left(\boldsymbol{p}\right)$ определяются соотношениями, аналогичными уравнениям (5). При этом

$$F^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}'_1,\,\boldsymbol{p}'_2) = f^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}'_1,\,\boldsymbol{p}'_2) - f^{\beta\alpha}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}'_2,\,\boldsymbol{p}'_1)\,.$$

Общий численный множитель в выражении (24) определяется нормировкой на 1 этой волновой функции в объеме V при том, что

$$V\int n\left(\boldsymbol{p}\right)\,d^3p = 2\,.$$

Начальная одночастичная матрица плотности, соответствующая выражению (24), равна[5]:

$$R^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{x}_1,\, \boldsymbol{x}_2,\, t=0) =$$

$$= \sum_{\mu} \int \left\langle \psi^{\alpha\mu}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3, t) \left[\psi^{\beta\mu}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, t)\right]^* \right\rangle_{t=0} d^3x_3 = \frac{1}{2} \int n(\boldsymbol{p}) \rho^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{p}) e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)} d^3p\,. \tag{25}$$

Зависимости $n(\boldsymbol{p}, t)$ и $\rho^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{p}, t) = \delta^{\alpha}_{\beta}/2 + \boldsymbol{\sigma}^{\alpha}_{\beta} \boldsymbol{s}(\boldsymbol{p}, t)$ $(s \leq 1/2)$ от времени t определяются временной эволюцией волновой функции (24) и следующим выражением, обобщающим уравнение (25) на $t > 0$:

$$R^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{x}_1,\, \boldsymbol{x}_2,\, t) = \sum_{\mu} \int \left\langle \psi^{\alpha\mu}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3, t) \left[\psi^{\beta\mu}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, t)\right]^* \right\rangle d^3x_3 =$$

$$= \frac{1}{2} \int n(\boldsymbol{p}, t) \rho^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{p}, t) e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)} d^3p\,. \tag{26}$$

Нам нужно провести все интегрирования во втором выражении уравнения (26) при подстановке туда (24). Эта процедура довольно громоздка, но не встречает никаких принципиальных трудностей при выполнении условия, аналогичного (10). Детали этих вычислений мы опускаем. В результате получается[6]:

$$R^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, t) = R^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, 0) +$$

$$+ i\, t\, \frac{\pi}{2} \int n(\boldsymbol{p}_1) n(\boldsymbol{p}_2) \Big\{ e^{i\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{x}_{12}} \rho^{\gamma}_{\beta}(\boldsymbol{p}_1) \rho^{\delta}_{\mu}(\boldsymbol{p}_2) \left[F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) - F^{\alpha\mu}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) \right] -$$

$$- e^{i\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{x}_{12}} \rho^{\alpha}_{\epsilon}(\boldsymbol{p}_1) \rho^{\mu}_{\xi}(\boldsymbol{p}_2) \left[F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) - F^{*\,\xi\epsilon}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) \right] \Big\} d^3p_1 d^3p_2 +$$

$$+ \frac{t}{2} \int n(\boldsymbol{p}_1) n(\boldsymbol{p}_2) e^{i\boldsymbol{p}_1' \boldsymbol{x}_{12}} \rho^{\gamma}_{\epsilon}(\boldsymbol{p}_1) \rho^{\delta}_{\xi}(\boldsymbol{p}_2) F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_2') F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_2') \times$$

$$\times \delta\left(\frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} - \frac{{p_1'}^2}{2} - \frac{{p_2'}^2}{2} \right) \delta\left(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1' - \boldsymbol{p}_2' \right)\, d^3p_1' d^3p_2'\; d^3p_1 d^3p_2. \tag{27}$$

Приравнивая это выражение последнему выражению в уравнении (26), получаем (после применения преобразования Фурье) следующее уравнение, определяющее эволюцию $n\,(\boldsymbol{p}, t)$ и $\boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{p}, t)$:

$$\frac{1}{2} \delta^{\alpha}_{\beta} \left(\frac{dn(\boldsymbol{p}_1)}{dt} \right)^{(ee)}_{st} + \sigma^{\alpha}_{\beta} \left(\frac{d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}_1)}{dt} \right)^{(ee)}_{st} =$$

$$= i\pi \int n(\boldsymbol{p}_1) n(\boldsymbol{p}_2) \Big\{ \rho^{\gamma}_{\beta}(\boldsymbol{p}_1) \rho^{\delta}_{\mu}(\boldsymbol{p}_2) \left[F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) - F^{\alpha\mu}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) \right] -$$

---

[5] При этом вычислении, как и всюду ниже, мы последовательно используем приближение: $n(\boldsymbol{p}) \ll 1$. Напомним, что только в этом случае кинетическое уравнение для электронов имеет смысл, когда $fp \sim 1$.

[6] Здесь и далее, мы используем следующее сокращенное обозначение: $\left(F^{\delta\gamma}_{\alpha\beta}\right)^* = F^{*\,\alpha\beta}_{\delta\gamma}$, а по повторяющимся спинорным индексам предполагается суммирование.

$$-\rho^{\alpha}_{\epsilon}(\boldsymbol{p}_1)\rho^{\mu}_{\xi}(\boldsymbol{p}_2)\left[F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)-F^{*\,\xi\epsilon}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\right]\Bigg\}\,d^3p_2+$$

$$+\int n(\boldsymbol{p}_1')n(\boldsymbol{p}_2')\rho^{\gamma}_{\epsilon}(\boldsymbol{p}_1')\rho^{\delta}_{\xi}(\boldsymbol{p}_2')F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\times$$

$$\times\delta\left(\frac{p_1'^2}{2}+\frac{p_2'^2}{2}-\frac{p_1^2}{2}-\frac{p_2^2}{2}\right)\delta\left(\boldsymbol{p}_1'+\boldsymbol{p}_2'-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\right)\,d^3p_2'\,d^3p_1'\,d^3p_2. \tag{28}$$

Расщепляя, как и ранее для $e-i$ столкновений, последнее выражение на уравнения для dn/dt и для $d\boldsymbol{S}/dt$, получаем следующие выражения для интегралов $e-e$ столкновений:

$$\left(\frac{dn(\boldsymbol{p}_1)}{dt}\right)^{(ee)}_{st}=\int\Big[n(\boldsymbol{p}_1')n(\boldsymbol{p}_2')\rho^{\gamma}_{\epsilon}(\boldsymbol{p}_1')\rho^{\delta}_{\xi}(\boldsymbol{p}_2')F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)F^{*\,\epsilon\xi}_{\alpha\mu}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)-$$

$$-n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)\rho^{\gamma}_{\epsilon}(\boldsymbol{p}_1)\rho^{\delta}_{\xi}(\boldsymbol{p}_2)F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')F^{*\,\epsilon\xi}_{\alpha\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2')\Big]\times$$

$$\times\delta\left(\frac{p_1'^2}{2}+\frac{p_2'^2}{2}-\frac{p_1^2}{2}-\frac{p_2^2}{2}\right)\delta\left(\boldsymbol{p}_1'+\boldsymbol{p}_2'-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\right)\,d^3p_2'\,d^3p_1'\,d^3p_2\,, \tag{29}$$

и

$$\left(\frac{d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}_1)}{dt}\right)^{(ee)}_{st}=i\frac{\pi}{2}\int n(\boldsymbol{p}_1)n(\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha}\times$$

$$\times\Big\{\rho^{\gamma}_{\beta}(\boldsymbol{p}_1)\rho^{\delta}_{\mu}(\boldsymbol{p}_2)\left[F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)-F^{\alpha\mu}_{\delta\gamma}(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\right]-$$

$$-\rho^{\alpha}_{\epsilon}(\boldsymbol{p}_1)\rho^{\mu}_{\xi}(\boldsymbol{p}_2)\left[F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)-F^{*\,\xi\epsilon}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\right]\Big\}\,d^3p_2+$$

$$+\frac{1}{2}\int n(\boldsymbol{p}_1')n(\boldsymbol{p}_2')\boldsymbol{\sigma}^{\beta}_{\alpha}\rho^{\gamma}_{\epsilon}(\boldsymbol{p}_1')\rho^{\delta}_{\xi}(\boldsymbol{p}_2')F^{\alpha\mu}_{\gamma\delta}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)F^{*\,\epsilon\xi}_{\beta\mu}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)\times$$

$$\times\delta\left(\frac{p_1'^2}{2}+\frac{p_2'^2}{2}-\frac{p_1^2}{2}-\frac{p_2^2}{2}\right)\delta\left(\boldsymbol{p}_1'+\boldsymbol{p}_2'-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\right)\,d^3p_2'\,d^3p_1'\,d^3p_2. \tag{30}$$

В первом из этих уравнений было использовано, дополнительно для упрощения записи, условие унитарности. Отметим, что в (29) и (30) возможно дальнейшее уточнение с помощью подстановки $n(\boldsymbol{p})\rho^{\alpha}_{\beta}(\boldsymbol{p})=\frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta}n(\boldsymbol{p})+\boldsymbol{\sigma}^{\alpha}_{\beta}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p})$. В отличие от случая с ионами, (18) и (20), эта подстановка не приводит к упрощению формулы, а лишь загромождает ее.

Заключение

В работе получены интегралы столкновений (18), (20), (29) и (30), входящие в кинетические уравнения для полной плотности электронов в фазовом пространстве $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ и для плотности параметра $\boldsymbol{s}$ в том же пространстве, определяещего спиновую часть одночастичной матрицы плотности. Первые два интеграла столкновений: (18) и (20) – относятся к столкновениям электронов с ионами, а вторые два: (29) и (30) – к столкновениям электронов с электронами. Вывод этих интегралов столкновений не использовал малости амплитуды рассеяния: $pf \sim 1$, а вместо этого использовалось условие достаточной разреженности плазмы

$$n_e \ll f^{-3}. \tag{31}$$

Последнее означает, в частности, что электронная система далека от вырождения. Полученные выражения справедливы и при малых средних энергиях электронов $E_T < Z^2\alpha^2 mc^2$, что типично для не очень горячей плазмы. Отметим, что в статье были использованы не все свойства амплитуды рассеяния фермиона в центральном поле, а лишь свойство унитарности рассеяния и закон сохранения энергии. Таким образом, полученный нами интеграл столкновений описывает произвольные фермионы с определенными ограничениями (31). Наиболее распространенной и интересной областью применения этих интегралов является плазма. Для этого требуется вычислить амплитуды рассеяния электронов на электронах и ионах с учетом спин-орбитального взаимодействия. Это и дальнейшее вычисление ядер в интегральных операторах столкновений будет проделано в следующих работах.

Авторы благодарны В.В. Янькову за обращение внимания на потенциальную важность данного круга вопросов в процессе работы по государственному контракту 02.740.11.5071 в 2008-2010 гг.

Литература

[1] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

[3] Севастьянов В.Н.,Житников Р.А. Влияние оптической ориентации атомов He^4 в состоянии $2\ ^3S_1$ на электронную плотность и излучение гелия в плазме. ЖЭТФ, 1969. **56**. с. 1508.

[4] Севастьянов В.Н.,Житников Р.А. Исследования по оптической ориентации атомов и ее использование для создания приборов квантовой электроники. УФН, 1971. **104**. с. 168.

[5] Yankov V.V. Creation of spin-magnetized gas by plasma discharge. Physica Scripta, 1998. **57**. c. 460. -URL:http://iopscience.iop.org/1402-4896/57/3/021

[6] Ваганов А.Б. Поляризованные электроны из ферромагнетиков. УФН, 1976. **119**. с. 257. -URL: http://ufn.ru/ru/articles/1976/6/c/

[7] Sinclair C.K., Adderley P.A., Dunham B.M., et al. Development of a high average current polarized electron source with long cathode operational lifetime. Phys. Rev. ST. Accel. Beams, 2007. **10**. 023501. -URL: http://journals.aps.org/prstab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.10.023501

[8] Abo-Shaeer J.R., Raman C., Vogels J. M., et al. Observation of vortex lattices in Bose-Einstein condensates. Science, 2001. **292**. c. 476. -URL: http://www.sciencemag.org/content/292/5516/476.abstract

[9] Naik D.S., Raman C. Optically plugged quadrupole trap for Bose-Einstein condensates. Phys. Rev. A, 2005. **71**. 033617. -URL: http://journals.aps.org/pra/abstract/10.1103/PhysRevA.71.033617

[10] Streed E. W., Chikkatur A. P., Gustavson T. L., et al. Large atom number Bose-Einstein condensate machines. Rev. Sci. Instrum, 2006. **77**. 023106.

[11] Comparat D., Fioretti A., Stern G.,et al. Optimized production of large Bose-Einstein condensates. Phys. Rev. A, 2006. **73** 043410. -URL: http://journals.aps.org/pra/abstract/10.1103/PhysRevA.73.043410

[12] Fedichev P. O., Reynolds M. W., Rahmanov U. M., et al. Inelastic decay processes in a gas of spin-polarized triplet helium. Phys. Rev. A, 1996. 53. 1447. -URL: http://journals.aps.org/pra/abstract/10.1103/PhysRevA.53.1447

[13] Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. изд. ФИАН. М., 1998.

[14] Mott N.F. The scattering of fast atomoic electrons by nuclei. Proc. Roy. Soc. (London), 1929. **A124**, c. 425; The polarisation of electrons by double scattering. Proc. Roy. Soc. (London), 1932. **A135**, c. 429.

[15] Möller C. Zur Theorie des durchgangs schneller elektronen durch materie. Ann. Phys., 1932. (**406**, c. 531. doi: 10.1002/andp.19324060506).

[16] Мотт Н., Месси Г. Теория атомных столкновений. Издательство иностранной литературы. М., 1951.

[17] McMaster W.H. Matrix representation of polarization. Am. J. Phys., 1954. **22**, c. 351. -URL: http://scitation.aip.org/content/aapt/journal/ajp/22/6/10.1119/1.1933744

[18] Ford G., Mullen C. Scattering of polarazed Dirac particles on electrons. Phys. Rev., 1957. **108**, c. 447.

[19] Stehle P. Calculation of electron-electron scattering. Phys. Rev., 1958. **110**, c. 1458. -URL: http://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.110.1458

[20] Абрикосов А.А., Халатников И.М. Теория ферми-жидкости. УФН, 1958. **66**, c. 177. -URL: http://ufn.ru/ru/articles/1958/10/c/

[21] Власов А.А. О вибрационных свойствах электронного газа. УФН, 1967. **93**, c. 444. -URL: http://ufn.ru/ru/articles/1967/11/f/

[22] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Физматлит, 2004.

[23] Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М.: Физматлит, 2002.

[24] Климонтович Ю.Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М.: Наука, 1975.