ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 53 за 2014 г.


Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н.,
Емельянов Н.В.

# Разложение вековой части возмущающей функции взаимного притяжения небесных тел для равномерно близких орбит

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки:*** Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. Разложение вековой части возмущающей функции взаимного притяжения небесных тел для равномерно близких орбит // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 53. 21 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-53**

**О р д е н а Л е н и н а**
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**
**имени М.В. Келдыша**
**Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к**

**М.А. Вашковьяк, С.Н. Вашковьяк, Н.В. Емельянов**

# РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКОВОЙ ЧАСТИ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ВЗАИМНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ ДЛЯ РАВНОМЕРНО БЛИЗКИХ ОРБИТ

Москва - 2014

**М.А. Вашковьяк[1], С.Н. Вашковьяк[2], Н.В. Емельянов[2,3]**

[1] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,* vashkov@keldysh.ru. [2] *Московский Государственный университет им. М.В. Ломоносова, Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга,* vashkov@sai.msu.ru, emelia@sai.msu.ru. [3] *Парижская обсерватория, Институт небесной механики и вычисления эфемерид.*

## РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКОВОЙ ЧАСТИ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ВЗАИМНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ ДЛЯ РАВНОМЕРНО БЛИЗКИХ ОРБИТ

В работе предложено новое разложение вековой части возмущающей функции взаимного притяжения планет (спутников). В отличие от известных представлений, использована асимптотика гипергеометрических функций Гаусса для аргументов, близких к единице. Кроме того, предложенное разложение имеет единую аналитическую форму для внешнего и внутреннего вариантов задачи. Полученное выражение представляет собой частичную сумму степенного ряда по эксцентриситетам и синусам углов наклона орбит с точностью до четвертых степеней этих малых параметров.

***Ключевые слова:*** взаимное притяжение планет (спутников), вековые возмущения, осредненная возмущающая функция, близкие орбиты.

**Mikhail Alexandrovich Vashkov'yak[1], Sophia Nikolaevna Vashkov'yak[2], Nikolai Vladimirovich Emelyanov[2,3]**

[1] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS* , vashkov@keldysh.ru.
[2] *Lomonosov Moscow State University, Sternberg State Astronomical Institute,* vashkov@sai.msu.ru, emelia@sai.msu.ru. [3] L'observatoire de Paris, Institut de Mecanique Celeste et de Calcul des Ephemerides.

## THE DEVELOPMENT OF SECULAR PART OF PETURBING FUNCTION OF MUTUAL ATTRACTION OF CELESTIAL BODIES FOR UNIFORM CLOSE ORBITS

The new development representation for secular part of perturbing function of mutual planet (satellite) attraction is proposed. Unlike from known representations the asymptotic of Gauss hypergeometric functions for arguments close to unit is used. Moreover the development proposed has united analytical form for external and internal variants of problem. The formula received is a partial sum of power row relative of eccentricities and sin of orbital inclinations with accuracy to forth power of these small parameters.

***Key words:*** mutual planet (satellite) attraction, secular perturbations, averaged perturbing function, close orbits.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 12-02-00294-а.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа служит естественным продолжением и развитием исследований, выполненных ранее (Вашковьяк и др., 2013 а, б). Они посвящены построению нового разложения вековой части возмущающей функции взаимного притяжения небесных тел для случая, когда отношение больших полуосей их орбит $\alpha$ близко к единице. Построенные нами ряды расположены по степеням «единого» параметра

$$\eta_{ij} = \left( \frac{a_i^2 - a_j^2}{a_i^2 + a_j^2} \right)^2 < 1. \qquad (1)$$

В этой формуле $a_i$ и $a_j$ – не равные друг другу большие полуоси орбит возмущаемого и возмущающего тел, соответственно ($j$ = 1, 2, 3, …., $J$; $i \neq j$). Эффективным преодолением вычислительных трудностей, возникающих при близких значениях $a_i$ и $a_j$, является использование гипергеометрических функций Гаусса с особенностями, обусловленными возможностью относительной близости орбит двух притягивающих тел. Её математическим отражением (при $\eta_{ij} \to 0$) является наличие в коэффициентах степенных рядов функции $\ln \eta_{ij}$.

В дальнейшем используется предположение о малости взаимных наклонов $I_i$ , $I_j$ и эксцентриситетов $e_i$ , $e_j$ орбит всех тел, т.е. полагать выполненными неравенства

$$s_i = \sin I_i << 1 , \ s_j = \sin I_j <<1, \quad e_i << 1 , \quad e_j <<1.$$

В вышеуказанных работах получены слагаемые до четвертой степени включительно относительно параметров орбиты возмущаемого тела $e_i$, $s_i$, нулевой и первой степени относительно параметров орбиты возмущающего тела $e_j$,, $s_j$.

Целью и результатом данной работы является уточнение построенных разложений путем их дополнения слагаемыми второй и третьей степеней относительно $e_j$, $s_j$ при сохранении слагаемых до четвертой степени включительно относительно $e_i$, $s_i$. Вместе с получением аналитических формул мы разработали программы для практического вычисления вековой части возмущающей функции.

В связи с данной работой, укажем, что в статье (Лидов, Зиглин, 1974), по-видимому, впервые выполнен анализ эволюции близких (в том числе, пересекающихся и «зацепленных») орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел. В этом аналитическом исследовании учтено лишь главное (логарифмическое) слагаемое вековой части возмущающей функции.

## 2 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКОВОЙ ЧАСТИ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ С ТОЧНОСТЬЮ ДО ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ ОТНОСИТЕЛЬНО ($e_j$,$s_j$) И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ ОТНОСИТЕЛЬНО ($e_i$, $s_i$, $e_j$, $s_j$) ВКЛЮЧИТЕЛЬНО

Процедура получения вековой части возмущающей функции является обычной и стандартной, но достаточно громоздкой. Мы приводим здесь лишь окончательный результат. Предлагаемое нами аналитическое представление дается формулой

$$W_i = \sum_{\nu=0}^{3} W_{\nu i} = \sum_{\nu=0}^{3} \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{J} \frac{\mu_j}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2}} \sum_{l=1}^{L_\nu} P_{\nu,l}^{(ij)}\left(a_i, a_j\right) Q_{\nu,l}^{(ij)}\left(e_i, e_j, \pi_i, \pi_j, s_i, s_j, \Omega_i, \Omega_j\right). \quad (2)$$

В этом выражении $\mu_j$ – произведение гравитационной постоянной на массу $j$-го притягивающего тела, $\pi_i$, $\pi_j$ – долготы перицентров, $\Omega_i$, $\Omega_j$ – долготы восходящих узлов орбит возмущаемого и возмущающего тел, соответственно. В сумме по $l$ разделены сомножители, зависящие лишь от больших полуосей спутниковых орбит ($P$), и лишь от их кеплеровских элементов ($Q$). Число $L_\nu$, являющееся верхним пределом суммирования по $l$, зависит от степени элементов ($e_j$, $s_j$) и для $0 \le \nu \le 3$ не превышает 15. В функциях $Q$, вообще говоря, являющихся бесконечными рядами относительно элементов $e_i$, $s_i$, $e_j$, $s_j$ , так же, как это сделано в работе (Мюррей и Дермотт, 1999), сохранены лишь слагаемые до четвертой степени, включительно. Слагаемые, соответствующие $\nu$ = 0, содержат члены второй и четвертой степени относительно $e_i$, $s_i$ и не зависят от $e_j$, $s_j$. Для $\nu$ = 1 они содержат члены первой и третьей степени относительно $e_i$, $s_i$ и первой степени относительно $e_j$, $s_j$, для $\nu$ =2 – члены второй степени относительно $e_i$, $s_i$ и второй степени относительно $e_j$, $s_j$, а для $\nu$ = 3 - члены первой степени относительно $e_i$, $s_i$ и третьей степени относительно $e_j$, $s_j$. Отметим, что не учитываемые здесь слагаемые четвертой степени ($\nu$ = 4) содержат лишь элементы $e_j$, $s_j$ и не зависят от $e_i$, $s_i$. Поэтому при дифференцировании функции $W_i$ по элементам орбиты возмущаемого тела они не вносят никакого вклада в правые части вековых уравнений, описывающих эволюцию элементов его орбиты.

В силу достаточной громоздкости выполняемых выкладок, на различных этапах работы мы прибегали к использованию специализированной системы аналитических вычислений MAPLE.

В качестве вспомогательных функций больших полуосей $a_i$ , $a_j$ мы вводим функции

$$C_{ij}^{(p)} = \delta_{p0} B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^p B_n \eta_{ij}^n, \quad D_{ij}^{(p)} = \delta_{p0} G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^p G_n \eta_{ij}^n, \qquad (3)$$

где $\delta_{p0}$ – дельта-символ Кронекера, $n$, $p$ – целые числа, а числовые коэффициенты степенных рядов $B_n$ и $G_n$ были определены в наших работах

(Вашковьяк и др., 2013 а, б). В качестве пояснения укажем, что введенные функции (3) играют роль коэффициентов Лапласа в классических разложениях. Для того, чтобы не загромождать основной текст, весь табличный материал и многие формулы вынесены в приложения 1 - 4. Входящие в формулу (2) коэффициенты $P_{\nu,l}^{(ij)}\left(a_i\,,a_j\right)$ определяются выражением

$$P_{\nu,l}^{(ij)}\left(a_i\,,a_j\right)=\frac{F_l(\alpha_{ij})}{\pi\sqrt{2}\eta_{ij}^2}\left[\sum_{m=0}^{M_l}d_{m,l}\,p_{m,l}(\alpha_{ij})\left(D_{ij}^{(m)}-C_{ij}^{(m)}\ln\eta_{ij}\right)+\sum_{m=0}^{M_l-1}g_{m,l}q_{m,l}(\alpha_{ij})C_{ij}^{(m)}\right]. \quad (4)$$

Эта формула, имеющая при $\eta_{ij}\to 0$ особенности типа $1/\eta_{ij}^2$ и $\ln\eta_{ij}$ , применима для любого положительного значения $\eta_{ij}$ < 1. Величины $M_l$, $S_l$, $p_{m,l}^{(s)}$ являются целыми числами, а $d_{m,l}$, $g_{m,l}$ могут быть и дробными. Функции $p_{m,l}$ и $q_{m,l}$ представляют собой полиномы степени $S_l$

$$p_{m,l}(\alpha_{ij})=\sum_{s=0}^{S_l}p_{m,l}^{(s)}\alpha_{ij}^s;\; q_m(\alpha_{ij})=-\sum_{s=0}^{S_l}p_{m+1,l}^{(s)}\alpha_{ij}^s$$

относительно безразмерной величины (функции больших полуосей $a_i$ и $a_j$)

$$\alpha_{ij}=\frac{a_i^2}{a_j^2+a_i^2}\,,$$

причем коэффициенты $g_{m,l}$ определяются формулой

$$g_{m,l}=(m+1)d_{m+1,l}\,.$$

Вообще говоря, каждому значению степени $\nu$ соответствует свой набор, состоящий из функции $F_l(\alpha_{ij})$ и числовых коэффициентов $M_l$, $S_l$, $d_{m,l}$, $p_{m,l}^{(s)}$. Однако, в приложениях 1, 2, 3, 4 вместе с функциями $Q_{\nu,l}^{(ij)}$ приводятся необходимые таблицы для вычисления $P_{\nu,l}^{(ij)}$ соответственно для значений $\nu$ = 0, 1, 2, 3 без усложняющего введения дополнительного индекса “$\nu$”. Отметим, что в несколько другом виде формулы только для «лагранжевых» слагаемых $\left(\sim e_i^2, s_i^2, e_ie_j, s_is_j\right)$ приведены в нашей работе (Вашковьяк М.А. и др., 2013 а). К сожалению, в этой статье в первых слагаемых каждой из формул (11) отсутствует множитель $\delta_{p0}$. Выражение (2) качественно похоже на полученное в статье (Ласкар и Робутель, 1995) с использованием коэффициентов Лапласа и канонических элементов Пуанкаре. Однако, мы используем альтернативный путь, и его корректность подтверждена (см. соответствующий раздел).

Разложение (2) дает возможность эффективного вычисления вековой части возмущающей функции для любых значений

$$\alpha = a_i / a_j ,$$

в частности, когда $\alpha$ стремится к единице, оставаясь как меньше, так и больше единицы, т.е. как для $a_i < a_j$ , так и для $a_i > a_j$ , поскольку параметр $\eta_{ij} < 1$. Это может оказаться особенно полезным для исследования орбитальной эволюции таких экстрасолнечных планет, как Kepler-36, а также взаимных возмущений главных спутников Урана для развития нелинейной теории их движения.

Отметим ещё, что если формулы, приведенные в работе (Вашковьяк М.А. и др., 2013 б), содержат особенности типа $1/\eta_{ij}^2$ и $\ln\eta_{ij}$ аддитивным образом, то формулы (4) имеют особенности типа $1/\eta_{ij}^2$ и $(1/\eta_{ij}^2)\ln\eta_{ij}$. Это привело к большей компактности окончательных результатов.

## 3 СВЯЗЬ ПОЛУЧЕННЫХ ФОРМУЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ МЮРРЕЯ И ДЕРМОТТА

В работе (Вашковьяк М.А. и др., 2013б) мы уже приводили некоторые соотношения, позволяющие связать наши результаты с результатами, изложенными в книге (Мюррей и Дермотт., 1999). В этой книге приводится разложение возмущающей функции, обусловленной взаимным притяжением спутников планеты, по степеням синусов наклонов, эксцентриситетов и отношений больших полуосей орбит возмущаемого и возмущающего спутников

$$W_i = \sum_{\nu=0}^{4} W_{\nu i} = \sum_{\nu=0}^{4} \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{J} \frac{\mu_j}{a_j} \sum_{l=1}^{8} K_{\nu,l}^{(ij)}\left(a_i, a_j\right)\ E_{\nu,l}^{(ij)}\left(h_i, k_i, h_j, k_j, q_i, p_i, q_j, p_j\right).$$

Здесь

$$h_i = e_i \sin\pi_i, k_i = e_i \cos\pi_i, p_i = \sin\left(I_i/2\right)\cos\Omega_i, q_i = \sin\left(I_i/2\right)\sin\Omega_i,$$
$$h_j = e_j \sin\pi_j, k_j = e_j \cos\pi_j, p_j = \sin\left(I_j/2\right)\cos\Omega_j, q_j = \sin\left(I_j/2\right)\sin\Omega_j.$$

Суммарная степень эксцентриситетов и синусов наклонов в разложениях не превышает 4. Разложения по степеням отношения больших полуосей выражены через коэффициенты Лапласа и фактически могут быть вычислены с точностью до любой заданной степени.

Заметим, что по сравнению с нашими результатами, формулы работы (Мюррей и Дермотт., 1999) менее предпочтительны по той причине, что они различны для случаев, когда возмущающий спутник оказывается внутренним или внешним.

В разложении вековой части возмущающей функции (2) мы опустили слагаемое, не зависящее от $h_i, k_i, p_i, q_i, h_j, k_j, p_j, q_j$, с коэффициентом

$$P_{0,0}^{(ij)} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\left(D_{ij}^{(0)} - C_{ij}^{(0)} \ln \eta_{ij}\right).$$

Для нахождения искомой связи результатов необходимо ввести еще коэффициент

$$M_{ij} = \frac{a_j}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2}} = \frac{\sqrt{\alpha_{ij}}}{\alpha}.$$

В итоге мы получили следующие соотношения для коэффициентов нашей работы и найденных Мюрреем и Дермоттом:

$$K_{0,0}^{(ij)} = M_{ij} P_{0,0}^{(ij)} = f_1, , \qquad K_{0,1}^{(ij)} = M_{ij} P_{0,1}^{(ij)} = f_2,$$

$$K_{0,2}^{(ij)} = M_{ij} P_{0,2}^{(ij)} = f_4, \qquad K_{0,3}^{(ij)} = 16 M_{ij} P_{0,3}^{(ij)} + 4 M_{ij} P_{0,1}^{(ij)} = f_8,$$

$$K_{0,4}^{(ij)} = 4 M_{ij} P_{0,4}^{(ij)} = f_7, \qquad K_{0,5}^{(ij)} = 4 M_{ij} P_{0,5}^{(ij)} = f_{18},$$

$$K_{1,1}^{(ij)} = M_{ij} P_{1,1}^{(ij)} = f_{10}, \qquad K_{1,2}^{(ij)} = 4 M_{ij} P_{1,2}^{(ij)} = f_{14},$$

$$K_{1,3}^{(ij)} = 16 M_{ij} P_{1,3}^{(ij)} - 2 M_{ij} P_{1,2}^{(ij)} = f_{16}, \qquad K_{1,4}^{(ij)} = 4 M_{ij} P_{1,4}^{(ij)} = f_{15},$$

$$K_{1,5}^{(ij)} = 4 M_{ij} P_{1,5}^{(ij)} = f_{21}, \qquad K_{1,6}^{(ij)} = 4 M_{ij} P_{1,6}^{(ij)} = f_{13},$$

$$K_{1,7}^{(ij)} = 4 M_{ij} P_{1,7}^{(ij)} = f_{19}, \qquad K_{1,8}^{(ij)} = M_{ij} P_{1,8}^{(ij)} = f_{11}.$$

$$K_{2,1}^{(ij)} = M_{ij} P_{2,1}^{(ij)} = f_5 + f_{17}, \qquad K_{2,2}^{(ij)} = M_{ij} P_{2,2}^{(ij)} = f_5 - f_{17},$$

$$K_{2,3}^{(ij)} = 4 M_{ij} P_{2,3}^{(ij)} = f_7 + f_{20}, \qquad K_{2,4}^{(ij)} = 4 M_{ij} P_{2,4}^{(ij)} = f_7 - f_{20},$$

$$K_{2,5}^{(ij)} = M_{ij} P_{2,5}^{(ij)} = 4 f_{17}, \qquad K_{2,6}^{(ij)} = M_{ij} P_{2,6}^{(ij)} = 4 f_{20},$$

$$K_{2,7}^{(ij)} = M_{ij} P_{2,7}^{(ij)} = f_{23}, \qquad K_{2,8}^{(ij)} = 4 M_{ij} P_{2,8}^{(ij)} = f_{23} + 2 f_{24},$$

$$K_{2,9}^{(ij)} = 4 M_{ij} P_{2,9}^{(ij)} = f_{23} + 2 f_{22}, \qquad K_{2,10}^{(ij)} = 4 M_{ij} P_{2,10}^{(ij)} = f_7 + f_{18},$$

$$K_{2,11}^{(ij)} = 4 M_{ij} P_{2,11}^{(ij)} = f_7 - f_{18}, \qquad K_{2,12}^{(ij)} = 16 M_{ij} P_{2,12}^{(ij)} = f_9 + f_{26},$$

$$K_{2,13}^{(ij)} = 16M_{ij}P_{2,13}^{(ij)} = f_9 - f_{26}, \qquad K_{2,14}^{(ij)} = 4M_{ij}P_{2,14}^{(ij)} = 4f_{18},$$
$$K_{2,15}^{(ij)} = 16M_{ij}P_{2,15}^{(ij)} = 4f_{26},$$

$$K_{3,1}^{(ij)} = M_{ij}P_{3,1}^{(ij)} = f_{12}, \qquad K_{3,2}^{(ij)} = 4M_{ij}P_{3,2}^{(ij)} = f_{13} + f_{19},$$
$$K_{3,3}^{(ij)} = 4M_{ij}P_{3,3}^{(ij)} = f_{13} - f_{19}, \qquad K_{3,4}^{(ij)} = 4M_{ij}P_{3,4}^{(ij)} = f_{15} + f_{25},$$
$$K_{3,5}^{(ij)} = 4M_{ij}P_{3,5}^{(ij)} = f_{15} - f_{25}, \qquad K_{3,6}^{(ij)} = 16M_{ij}P_{3,6}^{(ij)} - 2M_{ij}P_{1,2}^{(ij)} = f_{16},$$
$$K_{3,7}^{(ij)} = 4M_{ij}P_{3,7}^{(ij)} = 2f_{25}, \qquad K_{3,8}^{(ij)} = 4M_{ij}P_{3,8}^{(ij)} = 2f_{19}\ .$$

Кроме того, необходимо учесть следующие соотношения:

$$P_{1,2}^{(ij)} = 2P_{0,1}^{(ij)}, \quad f_3 = -4f_2, \quad f_6 = \frac{1}{2}(f_2 + f_5) - f_4, \quad f_{14} = 8f_2\,.$$

## 4 ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ВЕКОВОЙ ЧАСТИ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Для возможности использования результатов нашего исследования мы создали вычислительные программы, позволяющие получать численные значения коэффициентов разложения вековой части возмущающей функции, описывающей взаимное притяжение двух спутников планет для заданного отношения $\alpha$ их больших полуосей. Программа с названием VVE-U содержит формулы разложения в ряды по степеням параметра $\eta_{ij}$, стремящемся к нулю при $\alpha$, стремящемся к единице. Входным параметром программы является отношение $\alpha$, которое может быть как меньше, так и больше единицы. В зависимости от выбора пользователя, программа вычисляет как коэффициенты $P_{\nu,l}^{(ij)}\left(a_i, a_j\right)$, так и коэффициенты $K_{\nu,l}^{(ij)}\left(a_i, a_j\right)$ или функции $f_m$ с использованием вышеприведенных соотношений между ними. При обращении к программе возможно вычислять либо один коэффициент (для заданного набора индексов), либо все коэффициенты сразу. В отличие от алгоритмов, основанных на вычислениях коэффициентов Лапласа, наша программа позволяет вычислять функции $f_m$ для любого отношения полуосей, в частности, произвольно близких к единице.

Для проверки полученных нами результатов мы создали другую программу с названием VVE-F, которая вычисляет все вышеупомянутые коэффициенты с использованием коэффициентов Лапласа. Вычислительные формулы основаны на выражениях для $f_m$ , данных Мюрреем и Дермоттом (1999), и на вышеприведенных соотношениях между

$P_{\nu,l}^{(ij)}\left(a_i,a_j\right)$, $K_{\nu,l}^{(ij)}\left(a_i,a_j\right)$ и $f_{\mathrm{m}}$. Входным параметром служит величина $\alpha$, которая теперь всегда меньше единицы. Пользователь имеет возможность вычислять как коэффициенты $P_{\nu,l}^{(ij)}\left(a_i,a_j\right)$, так и $K_{\nu,l}^{(ij)}\left(a_i,a_j\right)$ или функции $f_{\mathrm{m}}$. Так же, как и для VVE-U, при обращении к программе существует возможность вычисления либо только одного коэффициента (с заданными индексами), либо всех сразу. Мы сравнили результаты вычислений коэффициентов разложений для целого набора значений $\alpha$, выполненных обеими программами. Для всех значений $\alpha$ в диапазоне от 0.02 до 0.98 результаты совпадают с точностью, определенной представлением чисел в памяти компьютера. При $\alpha$ = 0.01 и $\alpha$ = 0.99 мы получили совпадение первых 9 или 10 значащих цифр.

Вычислительные программы могут быть переданы заинтересованным коллегам.

## 6 ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В данной работе представлено новое разложение вековой части возмущающей функции взаимного притяжения тел, образующих планетную или спутниковую систему. Достоинством предложенного разложения является его буквенный вид, единый для любого расположения почти круговых и почти компланарных орбит притягивающих тел, а также экономный способ вычислений при близких значениях их больших полуосей ($\alpha \to 1$). Приведенные здесь соотношения были сопоставлены с известными результатами Мюррея и Дермотта (1999). Контрольные вычисления, проведенные для различных значений отношения больших полуосей, показали высокую эффективность предложенного метода. Вычислительные программы доступны для заинтересованных специалистов.

# ПРИЛОЖЕНИЕ 1

**Составляющие нулевой степени:** $\nu = 0$, $L_0 = 5$

$$Q_{0,1}^{(i,j)} = \mathrm{h}_i^2 + \mathrm{k}_i^2 - \mathrm{u}_i^2 - \mathrm{v}_i^2 = e_i^2 - s_i^2;$$

$$Q_{0,2}^{(i,j)} = \left(\mathrm{h}_i^2 + \mathrm{k}_i^2\right)^2 = e_i^4;$$

$$Q_{0,3}^{(i,j)} = \left(\mathrm{u}_i^2 + \mathrm{v}_i^2\right)^2 = s_i^4;$$

$$Q_{0,4}^{(i,j)} = \left(\mathrm{h}_i^2 + \mathrm{k}_i^2\right)\left(\mathrm{u}_i^2 + \mathrm{v}_i^2\right) = e_i^2 s_i^2;$$

$$Q_{0,5}^{(i,j)} = \left(\mathrm{h}_i \mathrm{u}_i + \mathrm{k}_i \mathrm{v}_i\right)^2 - \left(\mathrm{k}_i \mathrm{u}_i - \mathrm{h}_i \mathrm{v}_i\right)^2 =$$

$$= e_i^2 s_i^2 \cos 2\left(\pi_i - \Omega_i\right);$$

Табл. 1.1.

Функции $F_l(\alpha_{ij})$ и значения $M_l$, $S_l$

| $l$ | $F_l\left(\alpha_{ij}\right)$ | $M_l$ | $S_l$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\alpha_{ij}\left(1-\alpha_{ij}\right)\left(1-2\alpha_{ij}\right)^2$ | 2 | 2 |
| 2 | $3\alpha_{ij}^2\left(\alpha_{ij}-1\right)$ | 4 | 5 |
| 3 | $3\alpha_{ij}^2\left(1-\alpha_{ij}\right)^2$ | 2 | 0 |
| 4 | $\alpha_{ij}\left(1-\alpha_{ij}\right)$ | 3 | 4 |
| 5 | $\alpha_{ij}\left(1-\alpha_{ij}\right)^2$ | 3 | 3 |

Табл. 1.2.

Значения $d_{m,l}$, и $p_{m,l}^{(s)}$

| $l$ | $m$ | $d_{m,l}$ | $p_{m,l}^{(0)}$ | $p_{m,l}^{(1)}$ | $p_{m,l}^{(2)}$ | $p_{m,l}^{(3)}$ | $p_{m,l}^{(4)}$ | $p_{m,l}^{(5)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3/4 | -1 | 4 | -4 | | | |
| 1 | 1 | 2 | -3 | 8 | -8 | | | |
| 1 | 2 | 16 | 0 | 1 | -1 | | | |
| 2 | 0 | 1/64 | -15 | 155 | -640 | 1320 | -1360 | 560 |
| 2 | 1 | 1/12 | -15 | 205 | -836 | 1716 | -1744 | 704 |
| 2 | 2 | 1/3 | -15 | 105 | -440 | 894 | -888 | 344 |
| 2 | 3 | 16/3 | 0 | 5 | -22 | 45 | -44 | 16 |
| 2 | 4 | 64/3 | 0 | 0 | -1 | 3 | -3 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| 3 | 1 | 1 | -1 | | | | | |
| 3 | 2 | 1 | 1 | | | | | |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 4 | 1 | 3/2 | 2 | -1 | 5 | -8 | 4 | |
| 4 | 2 | 4 | 0 | -7 | 15 | -16 | 8 | |
| 4 | 3 | 32 | 0 | 0 | 1 | -2 | 1 | |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | |
| 5 | 1 | 1/4 | -20 | 27 | -28 | 12 | | |
| 5 | 2 | 2 | 0 | 11 | -16 | 8 | | |
| 5 | 3 | 16 | 0 | 0 | -1 | 1 | | |

# ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

## Составляющие первой степени: $\nu = 1$, $L_1 = 8$

$$Q_{1,1}^{(ij)} = \mathrm{h}_i\mathrm{h}_j + \mathrm{k}_i\mathrm{k}_j = e_i e_j \cos(\pi_i - \pi_j);$$
$$Q_{1,2}^{(ij)} = \mathrm{u}_i\mathrm{u}_j + \mathrm{v}_i\mathrm{v}_j = s_i s_j \cos(\Omega_i - \Omega_j);$$
$$Q_{1,3}^{(ij)} = \left(\mathrm{u}_i^2 + \mathrm{v}_i^2\right)\left(\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j + \mathrm{v}_i\mathrm{v}_j\right) = s_i^3 s_j \cos(\Omega_i - \Omega_j);$$
$$Q_{1,4}^{(ij)} = \left(\mathrm{h}_i^2 + \mathrm{k}_i^2\right)\left(\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j + \mathrm{v}_i\mathrm{v}_j\right) = e_i^2 s_i s_j \cos(\Omega_i - \Omega_j);$$
$$Q_{1,5}^{(ij)} = \left(\mathrm{h}_i^2 - \mathrm{k}_i^2\right)\left(\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j - \mathrm{v}_i\mathrm{v}_j\right) + 2\mathrm{h}_i\mathrm{k}_i\left(\mathrm{u}_i\mathrm{v}_j + \mathrm{v}_i\mathrm{u}_j\right) = e_i^2 s_i s_j \cos(2\pi_i - \Omega_i - \Omega_j);$$
$$Q_{1,6}^{(ij)} = \left(\mathrm{u}_i^2 + \mathrm{v}_i^2\right)\left(\mathrm{h}_i\mathrm{h}_j + \mathrm{k}_i\mathrm{k}_j\right) = e_i e_j s_i^2 \cos(\pi_i - \pi_j);$$
$$Q_{1,7}^{(ij)} = \left(\mathrm{u}_i^2 - \mathrm{v}_i^2\right)\left(\mathrm{h}_i\mathrm{h}_j - \mathrm{k}_i\mathrm{k}_j\right) + 2\mathrm{u}_i\mathrm{v}_i\left(\mathrm{h}_i\mathrm{k}_j + \mathrm{k}_i\mathrm{h}_j\right) = e_i e_j s_i^2 \cos(\pi_i + \pi_j - 2\Omega_i);$$
$$Q_{1,8}^{(ij)} = \left(\mathrm{h}_i^2 + \mathrm{k}_i^2\right)\left(\mathrm{h}_i\mathrm{h}_j + \mathrm{k}_i\mathrm{k}_j\right) = e_i^3 e_j \cos(\pi_i - \pi_j).$$

Табл. 2.1.

Функции $F_l(\alpha_{ij})$ и значения $M_l$, $S_l$

| $l$ | $F_l\left(\alpha_{ij}\right)$ | $M_l$ | $S_l$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $-\left(1-2\alpha_{ij}\right)^2\left(1-\alpha_{ij}\right)^{3/2}\sqrt{\alpha_{ij}}$ | 2 | 2 |
| 2 | $4\alpha_{ij}\left(1-\alpha_{ij}\right)\left(1-2\alpha_{ij}\right)^2$ | 1 | 0 |
| 3 | $2\alpha_{ij}\left(1-\alpha_{ij}\right)$ | 2 | 2 |
| 4 | $\alpha_{ij}\left(1-\alpha_{ij}\right)$ | 3 | 4 |
| 5 | $-\alpha_{ij}\left(1-\alpha_{ij}\right)^2$ | 3 | 3 |
| 6 | $-2\sqrt{\alpha_{ij}}\left(1-\alpha_{ij}\right)^{3/2}$ | 3 | 4 |
| 7 | $-2\sqrt{\alpha_{ij}}\left(1-\alpha_{ij}\right)^{3/2}$ | 3 | 4 |
| 8 | $-2\alpha_{ij}^{3/2}\left(1-\alpha_{ij}\right)^{3/2}$ | 4 | 5 |

Табл. 2.2.

Значения $d_{m,l}$ и $p_{m,l}^{(s)}$

| $l$ | $m$ | $d_{m,l}$ | $p_{m,l}^{(0)}$ | $p_{m,l}^{(1)}$ | $p_{m,l}^{(2)}$ | $p_{m,l}^{(3)}$ | $p_{m,l}^{(4)}$ | $p_{m,l}^{(5)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 9/2 | -1 | 4 | -4 | | | |
| 1 | 1 | 8 | -3 | 11 | -12 | | | |
| 1 | 2 | 32 | 0 | 2 | -3 | | | |
| 2 | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | -1 | | | | | |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | -2 | | | |
| 3 | 2 | 6 | 0 | -1 | 1 | | | |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 4 | 1 | 3 | -2 | 1 | -5 | 8 | -4 | |
| 4 | 2 | 8 | 0 | 7 | -15 | 16 | -8 | |
| 4 | 3 | 64 | 0 | 0 | -1 | 2 | -1 | |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 5 | 1 | 1/2 | -20 | 27 | -28 | 12 | | |
| 5 | 2 | 4 | 0 | 11 | -16 | 8 | | |
| 5 | 3 | 32 | 0 | 0 | -1 | 1 | | |
| 6 | 0 | 9/16 | 1 | -8 | 24 | -32 | 16 | |
| 6 | 1 | 1/2 | 6 | -41 | 173 | -248 | 132 | |
| 6 | 2 | 4 | 0 | -12 | 41 | -62 | 36 | |
| 6 | 3 | 32 | 0 | 0 | 2 | -5 | 3 | |
| 7 | 0 | 9/16 | -1 | 8 | -24 | 32 | -16 | |
| 7 | 1 | 3/4 | -4 | 29 | -103 | 144 | -76 | |
| 7 | 2 | 4 | 0 | 7 | -26 | 41 | -24 | |
| 7 | 3 | 16 | 0 | 0 | -2 | 5 | -3 | |
| 8 | 0 | 5/32 | 27 | -279 | 1152 | -2376 | 2448 | -1008 |
| 8 | 1 | 1/4 | 105 | -1175 | 4858 | -10068 | 10344 | -4224 |
| 8 | 2 | 2 | 30 | -275 | 1191 | -2506 | 2572 | -1032 |
| 8 | 3 | 16 | 0 | -20 | 105 | -235 | 246 | -96 |
| 8 | 4 | 128 | 0 | 0 | 2 | -7 | 8 | -3 |

**ПРИЛОЖЕНИЕ 3**

## Составляющие второй степени: $\nu = 2$, $L_2 = 15$

$$Q_{2,1}^{(ij)} = \mathrm{h}_i^2\mathrm{h}_j^2 + \mathrm{k}_i^2\mathrm{k}_j^2 = \frac{1}{2}e_i^2e_j^2\left[1+\frac{1}{2}\boldsymbol{cos}\,2\left(\pi_i-\pi_j\right)+\frac{1}{2}\boldsymbol{cos}\,2\left(\pi_i+\pi_j\right)\right];$$

$$Q_{2,2}^{(ij)} = \mathrm{h}_i^2\mathrm{k}_j^2 + \mathrm{h}_j^2\mathrm{k}_i^2 = \frac{1}{2}e_i^2e_j^2\left[1-\frac{1}{2}\boldsymbol{cos}\,2\left(\pi_i-\pi_j\right)-\frac{1}{2}\boldsymbol{cos}\,2\left(\pi_i+\pi_j\right)\right];$$

$$Q_{2,3}^{(ij)} = \mathrm{h}_j^2\mathrm{u}_i^2 + \mathrm{k}_j^2\mathrm{v}_i^2 = \frac{1}{2}s_i^2e_j^2\left[1+\frac{1}{2}\boldsymbol{cos}\,2\left(\Omega_i-\pi_j\right)+\frac{1}{2}\boldsymbol{cos}\,2\left(\Omega_i+\pi_j\right)\right];$$

$$Q_{2,4}^{(ij)} = \mathrm{h}_j^2\mathrm{v}_i^2 + \mathrm{k}_j^2\mathrm{u}_i^2 = \frac{1}{2}s_i^2e_j^2\left[1-\frac{1}{2}\boldsymbol{cos}\,2\left(\Omega_i-\pi_j\right)-\frac{1}{2}\boldsymbol{cos}\,2\left(\Omega_i+\pi_j\right)\right];$$

$$Q_{2,5}^{(ij)} = \mathrm{h}_i\mathrm{h}_j\mathrm{k}_i\mathrm{k}_j = \frac{1}{8}e_i^2e_j^2\left[\boldsymbol{cos}\,2\left(\pi_i-\pi_j\right)-\boldsymbol{cos}\,2\left(\pi_i+\pi_j\right)\right];$$

$$Q_{2,6}^{(ij)} = \mathrm{h}_j\mathrm{k}_j\mathrm{u}_i\mathrm{v}_i = \frac{1}{8}s_i^2e_j^2\left[\boldsymbol{cos}\,2\left(\Omega_i-\pi_j\right)-\boldsymbol{cos}\,2\left(\Omega_i+\pi_j\right)\right];$$

$$Q_{2,7}^{(ij)} = \left(\mathrm{h}_i\mathrm{u}_i - \mathrm{k}_i\mathrm{v}_i\right)\left(\mathrm{h}_j\mathrm{u}_j - \mathrm{k}_j\mathrm{v}_j\right) = \frac{1}{2}e_is_ie_js_j\begin{bmatrix}\boldsymbol{cos}\left(\pi_i-\pi_j+\Omega_i-\Omega_j\right)+\\ +\boldsymbol{cos}\left(\pi_i+\pi_j+\Omega_i+\Omega_j\right)\end{bmatrix};$$

$$Q_{2,8}^{(ij)} = \mathrm{h}_i\mathrm{k}_j\mathrm{u}_j\mathrm{v}_i + \mathrm{h}_j\mathrm{k}_i\mathrm{u}_i\mathrm{v}_j = \frac{1}{4}e_is_ie_js_j\begin{bmatrix}\boldsymbol{cos}\left(\pi_i-\pi_j+\Omega_i-\Omega_j\right)-\\ -\boldsymbol{cos}\left(\pi_i-\pi_j-\Omega_i+\Omega_j\right)+\\ +\boldsymbol{cos}\left(\pi_i+\pi_j-\Omega_i-\Omega_j\right)-\\ -\boldsymbol{cos}\left(\pi_i+\pi_j+\Omega_i+\Omega_j\right)\end{bmatrix};$$

$$Q_{2,9}^{(ij)} = \mathrm{h}_i\mathrm{h}_j\mathrm{v}_i\mathrm{v}_j + \mathrm{k}_i\mathrm{k}_j\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j = \frac{1}{4}e_is_ie_js_j\begin{bmatrix}\boldsymbol{cos}\left(\pi_i-\pi_j-\Omega_i+\Omega_j\right)+\\ +\boldsymbol{cos}\left(\pi_i-\pi_j+\Omega_i-\Omega_j\right)-\\ -\boldsymbol{cos}\left(\pi_i+\pi_j-\Omega_i-\Omega_j\right)-\\ -\boldsymbol{cos}\left(\pi_i+\pi_j+\Omega_i+\Omega_j\right)\end{bmatrix};$$

$$Q_{2,10}^{(ij)} = \mathrm{h}_i^2\mathrm{u}_j^2 + \mathrm{k}_i^2\mathrm{v}_j^2 = \frac{1}{2}e_i^2 s_j^2\left[1+\frac{1}{2}\boldsymbol{cos}\,2\left(\pi_i - \Omega_j\right)+\frac{1}{2}\boldsymbol{cos}\,2\left(\pi_i + \Omega_j\right)\right];$$

$$Q_{2,11}^{(ij)} = \mathrm{h}_i^2\mathrm{v}_j^2 + \mathrm{k}_i^2\mathrm{u}_j^2 = \frac{1}{2}e_i^2 s_j^2\left[1-\frac{1}{2}\boldsymbol{cos}\,2\left(\pi_i - \Omega_j\right)-\frac{1}{2}\boldsymbol{cos}\,2\left(\pi_i + \Omega_j\right)\right];$$

$$Q_{2,12}^{(ij)} = \mathrm{u}_i^2\mathrm{u}_j^2 + \mathrm{v}_i^2\mathrm{v}_j^2 = \frac{1}{2}s_i^2 s_j^2\left[1+\frac{1}{2}\boldsymbol{cos}\,2\left(\Omega_i - \Omega_j\right)+\frac{1}{2}\boldsymbol{cos}\,2\left(\Omega_i + \Omega_j\right)\right];$$

$$Q_{2,13}^{(ij)} = \mathrm{u}_i^2\mathrm{v}_j^2 + \mathrm{u}_j^2\mathrm{v}_i^2 = \frac{1}{2}s_i^2 s_j^2\left[1-\frac{1}{2}\boldsymbol{cos}\,2\left(\Omega_i - \Omega_j\right)-\frac{1}{2}\boldsymbol{cos}\,2\left(\Omega_i + \Omega_j\right)\right];$$

$$Q_{2,14}^{(ij)} = \mathrm{h}_i\,\mathrm{k}_i\,\mathrm{u}_j\,\mathrm{v}_j = \frac{1}{8}e_i^2 s_j^2\left[\boldsymbol{cos}\,2\left(\pi_i - \Omega_j\right)-\boldsymbol{cos}\,2\left(\pi_i + \Omega_j\right)\right];$$

$$Q_{2,15}^{(ij)} = \mathrm{u}_i\,\mathrm{u}_j\,\mathrm{v}_i\,\mathrm{v}_j = \frac{1}{8}s_i^2 s_j^2\left[\boldsymbol{cos}\,2\left(\Omega_i - \Omega_j\right)-\boldsymbol{cos}\,2\left(\Omega_i + \Omega_j\right)\right].$$

Табл. 3.1.

Функции $F_l(\alpha_{ij})$ и значения $M_l$, $S_l$

| $l$ | $F_l\left(\alpha_{ij}\right)$ | $M_l$ | $S_l$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\alpha_{ij}-1$ | 4 | 7 |
| 2 | $\alpha_{ij}-1$ | 4 | 7 |
| 3 | $\alpha_{ij}-1$ | 3 | 5 |
| 4 | $\alpha_{ij}-1$ | 3 | 5 |
| 5 | $2\left(\alpha_{ij}-1\right)^2$ | 4 | 6 |
| 6 | $2\left(\alpha_{ij}-1\right)$ | 3 | 5 |
| 7 | $\alpha_{ij}^{3/2}\left(1-\alpha_{ij}\right)^{3/2}$ | 3 | 3 |
| 8 | $-2\alpha_{ij}^{1/2}\left(1-\alpha_{ij}\right)^{3/2}$ | 3 | 4 |
| 9 | $-2\alpha_{ij}^{1/2}\left(1-\alpha_{ij}\right)^{3/2}$ | 3 | 4 |
| 10 | $\alpha_{ij}\left(\alpha_{ij}-1\right)$ | 3 | 4 |
| 11 | $\alpha_{ij}\left(\alpha_{ij}-1\right)$ | 3 | 4 |
| 12 | $\alpha_{ij}\left(\alpha_{ij}-1\right)$ | 2 | 2 |
| 13 | $\alpha_{ij}\left(\alpha_{ij}-1\right)$ | 2 | 2 |
| 14 | $2\alpha_{ij}\left(1-\alpha_{ij}\right)^2$ | 3 | 3 |
| 15 | $4\alpha_{ij}\left(1-\alpha_{ij}\right)$ | 2 | 2 |

Табл. 3.2.

Значения $d_{m,l}$ и $p_{m,l}^{(s)}$

| $l$ | $m$ | $d_{m,l}$ | $p_{m,l}^{(0)}$ | $p_{m,l}^{(1)}$ | $p_{m,l}^{(2)}$ | $p_{m,l}^{(3)}$ | $p_{m,l}^{(4)}$ | $p_{m,l}^{(5)}$ | $p_{m,l}^{(6)}$ | $p_{m,l}^{(7)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3/32 | -6 | -145 | 2100 | -10565 | 27080 | -38088 | 28000 | -8400 |
| 1 | 1 | 1/4 | -12 | -371 | 5367 | -26848 | 68836 | -96768 | 70880 | -21120 |
| 1 | 2 | 2 | 0 | -118 | 1313 | -6575 | 17086 | -24114 | 17568 | -5160 |
| 1 | 3 | 16 | 0 | 0 | 85 | -558 | 1573 | -2292 | 1672 | -480 |
| 1 | 4 | 384 | 0 | 0 | 0 | -3 | 14 | -24 | 18 | -5 |
| 2 | 0 | 3/32 | 6 | -83 | 604 | -2647 | 6936 | -10520 | 8480 | -2800 |
| 2 | 1 | 1/4 | 12 | -169 | 1421 | -6656 | 17868 | -27136 | 21664 | -7040 |
| 2 | 2 | 2 | 0 | -26 | 299 | -1629 | 4586 | -6982 | 5472 | -1720 |
| 2 | 3 | 16 | 0 | 0 | 23 | -154 | 455 | -700 | 536 | -160 |
| 2 | 4 | 128 | 0 | 0 | 0 | -3 | 14 | -24 | 18 | -5 |
| 3 | 0 | 3/16 | -1 | 8 | -24 | 32 | -16 | 0 | | |
| 3 | 1 | 1/4 | -4 | 29 | -144 | 267 | -204 | 60 | | |
| 3 | 2 | 2 | 0 | 14 | -59 | 109 | -104 | 40 | | |
| 3 | 3 | 16 | 0 | 0 | -3 | 11 | -13 | 5 | | |
| 4 | 0 | 3/16 | 1 | 12 | -136 | 448 | -624 | 320 | | |
| 4 | 1 | 1/4 | 4 | 63 | -736 | 2241 | -2980 | 1460 | | |
| 4 | 2 | 2 | 0 | 34 | -193 | 511 | -632 | 280 | | |
| 4 | 3 | 48 | 0 | 0 | -3 | 11 | -13 | 5 | | |
| 5 | 0 | 3/16 | 6 | 37 | -711 | 3248 | -6824 | 6960 | -2800 | |
| 5 | 1 | 1/2 | 12 | 113 | -1860 | 8236 | -17248 | 17568 | -7040 | |
| 5 | 2 | 4 | 0 | 46 | -461 | 2012 | -4238 | 4328 | -1720 | |
| 5 | 3 | 32 | 0 | 0 | -31 | 171 | -388 | 408 | -160 | |
| 5 | 4 | 256 | 0 | 0 | 0 | 3 | -11 | 13 | -5 | |
| 6 | 0 | 3/8 | -1 | -2 | 56 | -208 | 304 | -160 | | |
| 6 | 1 | 1/2 | -4 | -17 | 296 | -987 | 1388 | -700 | | |
| 6 | 2 | 4 | 0 | -10 | 67 | -201 | 264 | -120 | | |
| 6 | 3 | 32 | 0 | 0 | 3 | -11 | 13 | -5 | | |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | |
| 7 | 1 | 1 | 5 | 37 | -64 | 36 | | | | |
| 7 | 2 | 16 | -5 | 15 | -21 | 12 | | | | |
| 7 | 3 | 64 | 0 | 2 | -5 | 3 | | | | |
| 8 | 0 | 1/4 | 9 | -72 | 216 | -288 | 144 | | | |
| 8 | 1 | 1/2 | 24 | -179 | 581 | -800 | 420 | | | |
| 8 | 2 | 8 | 0 | -9 | 37 | -61 | 36 | | | |
| 8 | 3 | 32 | 0 | 0 | 2 | -5 | 3 | | | |
| 9 | 0 | 1/4 | -9 | 72 | -216 | 288 | -144 | | | |
| 9 | 1 | 1/2 | -24 | 169 | -655 | 928 | -492 | | | |
| 9 | 2 | 8 | 0 | 19 | -67 | 103 | -60 | | | |
| 9 | 3 | 96 | 0 | 0 | -2 | 5 | -3 | | | |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 10 | 1 | 1/4 | 8 | -41 | 25 | 8 | -12 | | | |
| 10 | 2 | 2 | 0 | 3 | -3 | 8 | -8 | | | |
| 10 | 3 | 16 | 0 | 0 | -1 | 2 | -1 | | | |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 11 | 1 | 1/4 | -32 | 53 | -85 | 88 | -36 | | | |
| 11 | 2 | 2 | 0 | 25 | -57 | 56 | -24 | | | |
| 11 | 3 | 48 | 0 | 0 | -1 | 2 | -1 | | | |

Табл. 3.2 (продолжение)

Значения $d_{m,l}$ и $p_{m,l}^{(s)}$ для $\nu = 2$ и $l > 11$

| $l$ | $m$ | $d_{m,l}$ | $p_{m,l}^{(0)}$ | $p_{m,l}^{(1)}$ | $p_{m,l}^{(2)}$ | $p_{m,l}^{(3)}$ | $p_{m,l}^{(4)}$ | $p_{m,l}^{(5)}$ | $p_{m,l}^{(6)}$ | $p_{m,l}^{(7)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| 12 | 1 | 2 | 2 | 1 | -1 | | | | | |
| 12 | 2 | 18 | 0 | -1 | 1 | | | | | |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| 13 | 1 | 2 | 1 | -1 | 1 | | | | | |
| 13 | 2 | 6 | 0 | -1 | 1 | | | | | |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | |
| 14 | 1 | 1/2 | -20 | 27 | -28 | 12 | | | | |
| 14 | 2 | 4 | 0 | 11 | -16 | 8 | | | | |
| 14 | 3 | 32 | 0 | 0 | -1 | 1 | | | | |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| 15 | 1 | 1 | -1 | -2 | 2 | | | | | |
| 15 | 2 | 6 | 0 | 1 | -1 | | | | | |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

### Составляющие третьей степени: $\nu = 3$, $L_3 = 8$

$$Q_{3,1}^{(ij)} = \left(\mathrm{h}_j^2 + \mathrm{k}_j^2\right)\left(\mathrm{h}_i\mathrm{h}_j + \mathrm{k}_i\mathrm{k}_j\right) = e_i e_j^3 \cos\left(\pi_i - \pi_j\right);$$

$$Q_{3,2}^{(ij)} = \mathrm{h}_i\mathrm{h}_j\mathrm{u}_j^2 + \mathrm{k}_i\mathrm{k}_j\mathrm{v}_j^2 = \frac{1}{2}e_i e_j s_j^2\left[\cos\left(\pi_i - \pi_j\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\pi_i + \pi_j - 2\Omega_j\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\pi_i + \pi_j + 2\Omega_j\right)\right];$$

$$Q_{3,3}^{(ij)} = \mathrm{h}_i\mathrm{h}_j\mathrm{v}_j^2 + \mathrm{k}_i\mathrm{k}_j\mathrm{u}_j^2 = \frac{1}{2}e_i e_j s_j^2\left[\cos\left(\pi_i - \pi_j\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\pi_i + \pi_j - 2\Omega_j\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\pi_i + \pi_j + 2\Omega_j\right)\right];$$

$$Q_{3,4}^{(ij)} = \mathrm{h}_j^2\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j + \mathrm{k}_j^2\mathrm{v}_i\mathrm{v}_j = \frac{1}{2}e_j^2 s_i s_j\left[\cos\left(\Omega_i - \Omega_j\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi_j - \Omega_i - \Omega_j\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi_j + \Omega_i + \Omega_j\right)\right];$$

$$Q_{3,5}^{(ij)} = \mathrm{k}_j^2\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j + \mathrm{h}_j^2\mathrm{v}_i\mathrm{v}_j = \frac{1}{2}e_j^2 s_i s_j\left[\cos\left(\Omega_i - \Omega_j\right) - \frac{1}{2}\cos\left(2\pi_j - \Omega_i - \Omega_j\right) - \frac{1}{2}\cos\left(2\pi_j + \Omega_i + \Omega_j\right)\right];$$

$$Q_{3,6}^{(ij)} = \left(\mathrm{u}_j^2 + \mathrm{v}_j^2\right)\left(\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j + \mathrm{v}_i\mathrm{v}_j\right) = s_i s_j^3 \cos\left(\Omega_i - \Omega_j\right);$$

$$Q_{3,7}^{(ij)} = \mathrm{h}_j\mathrm{k}_j\left(\mathrm{u}_i\mathrm{v}_j + \mathrm{u}_j\mathrm{v}_i\right) = \frac{1}{4}e_j^2 s_i s_j\left[\cos\left(2\pi_j - \Omega_i - \Omega_j\right) - \cos\left(2\pi_j + \Omega_i + \Omega_j\right)\right];$$

$$Q_{3,8}^{(ij)} = \mathrm{u}_j\mathrm{v}_j\left(\mathrm{h}_i\mathrm{k}_j + \mathrm{h}_j\mathrm{k}_i\right) = \frac{1}{4}e_i e_j s_j^2\left[\cos\left(\pi_i + \pi_j - 2\Omega_j\right) - \cos\left(\pi_i + \pi_j + 2\Omega_j\right)\right].$$

Табл. 4.1.

Функции $F_l(\alpha_{ij})$ и значения $M_l$, $S_l$

| $l$ | $F_l\left(\alpha_{ij}\right)$ | $M_l$ | $S_l$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\left(1-\alpha_{ij}\right)^{3/2}/\sqrt{\alpha_{ij}}$ | 4 | 7 |
| 2 | $\alpha_{ij}^{3/2}\left(1-\alpha_{ij}\right)^{3/2}$ | 3 | 3 |
| 3 | $\sqrt{\alpha_{ij}}\left(1-\alpha_{ij}\right)^{3/2}$ | 3 | 4 |
| 4 | $\alpha_{ij}-1$ | 3 | 5 |
| 5 | $\alpha_{ij}-1$ | 3 | 5 |
| 6 | $2\alpha_{ij}\left(\alpha_{ij}-1\right)$ | 2 | 2 |
| 7 | $\alpha_{ij}-1$ | 3 | 5 |
| 8 | $\sqrt{\alpha_{ij}}\left(1-\alpha_{ij}\right)^{3/2}$ | 3 | 4 |

Табл. 4.2.

Значения $d_{m,l}$ и $p_{m,l}^{(s)}$

| $l$ | $m$ | $d_{m,l}$ | $p_{m,l}^{(0)}$ | $p_{m,l}^{(1)}$ | $p_{m,l}^{(2)}$ | $p_{m,l}^{(3)}$ | $p_{m,l}^{(4)}$ | $p_{m,l}^{(5)}$ | $p_{m,l}^{(6)}$ | $p_{m,l}^{(7)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3/16 | -4 | -1 | 408 | -2829 | 8712 | -14088 | 11680 | -3920 |
| 1 | 1 | 1/2 | -8 | -26 | 1195 | -7683 | 23042 | -36612 | 29864 | -9856 |
| 1 | 2 | 4 | 0 | -28 | 369 | -2134 | 6177 | -9542 | 7556 | -2408 |
| 1 | 3 | 32 | 0 | 0 | 32 | -216 | 633 | -967 | 742 | -224 |
| 1 | 4 | 256 | 0 | 0 | 0 | -4 | 19 | -33 | 25 | -7 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | |
| 2 | 1 | 1/2 | -5 | -37 | 64 | -36 | | | | |
| 2 | 2 | 8 | 5 | -15 | 21 | -12 | | | | |
| 2 | 3 | 32 | 0 | -2 | 5 | -3 | | | | |
| 3 | 0 | 9/4 | -1 | 8 | -24 | 32 | -16 | | | |
| 3 | 1 | 1/2 | -24 | 169 | -655 | 928 | -492 | | | |
| 3 | 2 | 8 | 0 | 19 | -67 | 103 | -60 | | | |
| 3 | 3 | 96 | 0 | 0 | -2 | 5 | -3 | | | |
| 4 | 0 | 3/8 | 1 | -8 | 24 | -32 | 16 | 0 | | |
| 4 | 1 | 1/2 | 4 | -29 | 144 | -267 | 204 | -60 | | |
| 4 | 2 | 4 | 0 | -14 | 59 | -109 | 104 | -40 | | |
| 4 | 3 | 32 | 0 | 0 | 3 | -11 | 13 | -5 | | |
| 5 | 0 | 3/8 | -1 | -12 | 136 | -448 | 624 | -320 | | |
| 5 | 1 | 1/2 | -4 | -63 | 736 | -2241 | 2980 | -1460 | | |
| 5 | 2 | 4 | 0 | -34 | 193 | -511 | 632 | -280 | | |
| 5 | 3 | 96 | 0 | 0 | 3 | -11 | 13 | -5 | | |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| 6 | 1 | 1 | -1 | -2 | 2 | | | | | |
| 6 | 2 | 6 | 0 | 1 | -1 | | | | | |
| 7 | 0 | 3/4 | 1 | 2 | -56 | 208 | -304 | 160 | | |
| 7 | 1 | 1 | 4 | 17 | -296 | 987 | -1388 | 700 | | |
| 7 | 2 | 8 | 0 | 10 | -67 | 201 | -264 | 120 | | |
| 7 | 3 | 64 | 0 | 0 | -3 | 11 | -13 | 5 | | |
| 8 | 0 | 9/4 | 1 | -8 | 24 | -32 | 16 | | | |
| 8 | 1 | 3 | 4 | -29 | 103 | -144 | 76 | | | |
| 8 | 2 | 16 | 0 | -7 | 26 | -41 | 24 | | | |
| 8 | 3 | 64 | 0 | 0 | 2 | -5 | 3 | | | |

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. Единое представление вековой части возмущающей функции взаимного притяжения в спутниковой системе планеты // Астрономический вестник, 2013а, т. 47, № 5, сс. 448-451 (Vashkov'yak M.A, Vashkov'yak S.N., Emel'yanov N.V. General Presentation of Secular Part of the Perturbing Function of Mutual Attraction in the Satellite System of Planet // Solar System Research, 2013a, vol. 47, no 5, pp. 414-417.)
2. Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. Разложение вековой части возмущающей функции для орбит с большими полуосями, сравнимыми по величине // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 43. 27 с.

   URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-43
3. Ласкар и Робутель (Laskar J. & Roboutel Ph.) Stability of the Planetary Three-Body Problem. // Cel. Mech. & Dyn. Astron., 1995, v. 62, pp. 193-217.
4. Лидов и Зиглин (Lidov M.L. & Ziglin S.L.) Celestial Mechanics (1974, vol. 9, pp. 151-173.
5. Мюррей и Дермотт (Murray Carl D. & Dermott Stanley F.) Solar System Dynamics. Cambridge University Press (1999).

## Оглавление