



Самотохин А.С., Хуторовский З.Н.

Метод первоначального
определения параметров
околоземных орбит по трем
угловым измерениям

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Самotoхин А.С., Хуторовский З.Н. Метод первоначального определения параметров околоземных орбит по трем угловым измерениям // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 44. 31 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-44>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.С.Самотохин, З.Н.Хуторовский

**Метод первоначального определения
параметров околоземных орбит
по трем угловым измерениям**

Москва — 2014

Самотохин А.С., Хуторовский З.Н.

Метод первоначального определения параметров околоземных орбит по трем угловым измерениям

Рассмотрен метод первоначального определения параметров орбит околоземных космических объектов по трем угловым измерениям. Предложенный метод позволяет определять параметры орбит по измерениям на дугах длиной более 180 градусов. Метод предназначен для обнаружения не каталогизированных космических объектов по результатам оптических обзоров.

Ключевые слова: определение орбит, космический мусор, метод Гаусса, триангуляция.

Alexander Sergeevich Samotokhin, Zakhary Naumovich Khutorovsky

Method for initial determining Earth satellites orbits on base of three angular observations.

Method for initial determining Earth satellites orbits on base of three angular observations is considered. Proposed method allows detecting orbit parameters when the angular separation between observations exceeds 180 degrees. The method is intended for detection not catalogued space objects on base of the optical observations.

Key words: orbit determination, space debris, Gauss method, triangulation.

Оглавление

Введение	3
Теоретические основы метода	4
Метод Гаусса и его модификации	6
Численное моделирование	9
Учет ограничений на топоцентрические дальности	10
Уравнение Лагранжа и его действительные корни	11
Область возможных решений	12
Визуализация области решений.....	17
Использование алгоритмов триангуляции	21
Стратегии поиска решений	24
Апробация алгоритма	29
Заключение.....	30
Библиографический список.....	31

Введение

В последние годы в отечественной и зарубежной практике для целей контроля космического пространства все чаще применяются обзорные оптические средства. Работа этих средств планируется таким образом, что в течение одной ночи одни и те же участки небесной сферы наблюдаются по несколько раз. Результатом наблюдений являются наборы очень коротких, вплоть до нескольких секунд, треков космических объектов.

При обработке результатов таких измерений часть треков может принадлежать каталогизированным (известным) космическим объектам, а часть – космическим объектам, данные о которых отсутствуют в каталогах систем контроля космического пространства (СККП). Как правило, обработка треков известных объектов не вызывает особых проблем. Однако обнаружение орбит новых объектов по набору коротких треков, которые не были идентифицированы с известными объектами каталога, является достаточно сложной задачей. Для успешного решения такой задачи необходимы алгоритмы, которые позволяли бы при разумных вычислительных затратах (т.е. без использования сложных моделей движения) находить наборы треков, которые принадлежали бы одному и тому же объекту, и строить для таких объектов достоверные орбиты.

Одним из возможных подходов решения задачи обнаружения является перебор всех возможных троек оптических наблюдений и построение для каждой из них орбиты, которая удовлетворяла бы простейшей модели орбитального движения по законам Кеплера. Метод получения таких орбит по 3 угловым измерениям широко известен в астрономии и носит название метода

Гаусса [1]. Однако, как будет показано далее, этот метод позволяет строить орбиты по 3 угловым измерениям только в тех случаях, когда угловое расстояние между точками измерений достаточно мало и не превышает несколько десятков градусов. Такое ограничение является существенным при обработке измерений оптических обзоров на околоземных орбитах и не позволяет построить эффективный алгоритм обнаружения неизвестных космических объектов.

В настоящей работе предложен метод определения орбит для случаев, когда оптические измерения относятся к космическим объектам, находящимся на геоцентрических орбитах, и расположены в пределах одного витка.

Теоретические основы метода

В качестве исходных данных для рассматриваемого метода используются три угловых измерения. Каждое из этих измерений описывается следующими параметрами ($i=0,1,2$):

\mathbf{p}_i - вектор, определяющий положение наблюдательного пункта в пространстве;

\mathbf{e}_i - единичный вектор, направленный вдоль линии визирования оптического измерения;

t_i - время измерения

Для определенности будем считать, что индексы i выбраны таким образом, что $t_1 < t_0 < t_2$. а все вектора заданы в инерциальной геоцентрической системе отсчета (например, J2000).

Для упрощения дальнейших выкладок введем скалярную переменную

$$D = \mathbf{e}_0 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) \quad (1)$$

и матрицу

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{p}_0) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{p}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{p}_2) \\ (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2, \mathbf{p}_0) & (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2, \mathbf{p}_1) & (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2, \mathbf{p}_2) \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0, \mathbf{p}_0) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0, \mathbf{p}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0, \mathbf{p}_2) \end{vmatrix} \quad (2)$$

размерности 3x3 (здесь под $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$ понимается смешанное произведение трех векторов). Отметим, что значение D и элементы матрицы \mathbf{S} зависят только от параметров измерений.

При введенных обозначениях геоцентрический радиус-вектор \mathbf{r}_i , определяющий положение космического объекта в момент t_i , вычисляется по формуле

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{p}_i + \rho_i \mathbf{e}_i, \quad (3)$$

где ρ_i – топоцентрическая (наклонная) дальность i -того измерения.

Если точки, определяемые векторами \mathbf{r}_0 , \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 принадлежат орбите Кеплера, то для них выполняются условия

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= f_1 \mathbf{r}_0 + g_1 \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{r}_2 &= f_2 \mathbf{r}_0 + g_2 \mathbf{v}_0,\end{aligned}\quad (4)$$

где \mathbf{v}_0 – вектор скорости в момент времени t_0 , а f_1, f_2, g_1, g_2 – некоторые коэффициенты, зависящие от параметров орбиты. Исключение из уравнений (4) переменной \mathbf{v}_0 приводит к уравнению

$$n_1 \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 + n_2 \mathbf{r}_2 = 0, \quad (5)$$

в котором

$$\begin{aligned}n_1 &= \frac{g_2}{f_1 g_2 - f_2 g_1} \\ n_2 &= \frac{-g_1}{f_1 g_2 - f_2 g_1}\end{aligned}\quad (6)$$

Можно показать, что для коэффициентов n_1, n_2 выполняются соотношения

$$n_1 = \frac{|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}, \quad n_2 = \frac{|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \quad (7)$$

Таким образом n_1, n_2 являются отношениями площадей треугольников, построенных на векторах $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$ к площади треугольника, построенного на векторах $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$.

Подстановка уравнений (3) в уравнения (5) и последующее их разрешение относительно топоцентрических дальностей ρ_i приводит к следующей системе скалярных уравнений:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \frac{-s_{00} + n_1 s_{01} + n_2 s_{02}}{D} \\ \rho_1 &= -\frac{n_1 s_{11} - s_{10} + n_2 s_{12}}{n_1 D} \\ \rho_2 &= -\frac{n_1 s_{21} - s_{20} + n_2 s_{22}}{n_2 D}.\end{aligned}\quad (8)$$

Следовательно, задача построения орбиты Кеплера по трем угловым измерениям сводится к нахождению коэффициентов n_1, n_2 , которые удовлетворяют приведенным выше уравнениям. Как только найдены значения n_1, n_2 , с помощью уравнений (8) можно вычислить топоцентрические дальности

для всех трех измерений, и положения космического объекта на орбите, используя уравнения (3). Очевидно, задача не имеет решения, если $D=0$.

Метод Гаусса и его модификации

Метод построения орбиты Кеплера по 3 угловым измерениям был впервые предложен Гауссом. Он основан на получении начального приближения по конечным формулам и организации итерационной процедуры, уточняющей это начальное приближение. В настоящее время известно несколько модификаций этого метода, которые используют одну и ту же процедуру для получения начального приближения и различаются лишь алгоритмами, используемыми в итерационных процедурах уточнения начального приближения.

Получение начального приближения в методе Гаусса основано на использовании следующего приема. Введем в рассмотрение относительные времена τ_0, τ_1, τ_2 , которые вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= (t_0 - t_1)\sqrt{\mu} \\ \tau_2 &= (t_2 - t_0)\sqrt{\mu} \\ \tau_0 &= \tau_1 + \tau_2,\end{aligned}\tag{9}$$

Тогда коэффициенты n_1, n_2 , могут вычислены через τ_0, τ_1, τ_2 с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned}n_1 &= n_1^0 + \frac{c_1}{|\mathbf{r}_0|^3} \\ n_2 &= n_2^0 + \frac{c_2}{|\mathbf{r}_0|^3},\end{aligned}\tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}n_1^0 &= \frac{\tau_1}{\tau_0} \\ n_2^0 &= \frac{\tau_2}{\tau_0},\end{aligned}\tag{11}$$

а коэффициенты c_1, c_2 связаны со временем следующими соотношениями:

$$c_1 = \frac{\tau_1 \tau_2}{6} (1 + n_1^0) + \frac{r_0'}{4r_0} \frac{\tau_1 \tau_2 (\tau_0 \tau_2 - \tau_1^2)}{\tau_0} + \dots\tag{12}$$

$$c_2 = \frac{\tau_1 \tau_2}{6} (1 + n_2^0) - \frac{r_0'}{4r_0} \frac{\tau_1 \tau_2 (\tau_0 \tau_1 - \tau_2^2)}{\tau_0} + \dots,$$

Однако, поскольку ни геоцентрическая дальность r_0 ни ее производные не известны, то уравнения (12) заменяют приближенным соотношением

$$\begin{aligned} c_1 &\approx \frac{\tau_1 \tau_2}{6} (1 + n_1^0) \\ c_2 &\approx \frac{\tau_1 \tau_2}{6} (1 + n_2^0) \end{aligned} \quad (13)$$

за счет отбрасывания старших членов в разложении (12).

Подстановка уравнений (9)-(11), (13) в первое уравнение (8) приводит к уравнению

$$\rho_0 + P - \frac{Q}{\left(\sqrt{\rho_0^2 + 2C\rho_0 + R^2}\right)^3} = 0, \quad (14)$$

которое в литературе часто называют уравнением Лагранжа. Коэффициенты P , C , R^2 , Q этого уравнения вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} C &= \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{p}_0 \\ R^2 &= |\mathbf{p}_0|^2 \\ P &= \frac{s_{00} - n_1^0 s_{01} - n_2^0 s_{02}}{D} \\ Q &= \frac{c_1 s_{01} + c_2 s_{02}}{D}. \end{aligned} \quad (15)$$

Отметим, что коэффициенты P , C , R^2 в этом уравнении зависят только от параметров центрального измерения в момент времени t_0 , а коэффициент Q зависит также от c_1 , c_2 (т.е. от параметров орбиты).

С учетом сказанного выше, процедура получения начального приближения в методе Гаусса сводится к следующей последовательности действий. На основании уравнений (9), (11) и приближенных уравнений (13) вычисляются коэффициенты c_1 , c_2 . Далее при известных значениях c_1 , c_2 численно решается уравнение (14) относительно ρ_0 . При известном значении ρ_0 по формулам (3) вычисляется геоцентрическая дальность r_0 и затем вычисляется начальное приближение для n_1 , n_2 , как результат решения уравнений (10).

Более подробно свойства уравнения Лагранжа (14) будут рассмотрены в последующих разделах. Сейчас же отметим одно важное обстоятельство: это уравнение является нелинейным и может иметь несколько действительных

корней. Это приводит к тому, что начальное приближение может быть не единственным и создает дополнительные трудности в тех модификациях метода Гаусса, которые требуют решения уравнения Лагранжа на промежуточных итерациях.

После того, как получено начальное приближение для n_1 , n_2 , в различных модификациях метода Гаусса используются разные итерационные процедуры для уточнения. Здесь мы ограничимся лишь кратким описанием нескольких таких модификаций.

В уже упоминавшейся работе [1] описана модификация метода Гаусса, в которой используются формулы Гиббса и формулы, основанные на решении уравнений Гаусса, определяющих отношение площадей секторов и треугольников. В этой модификации на каждой итерации происходит уточнение значений c_1 , c_2 и повторное решение уравнений Лагранжа.

В [2] приводится описание модификации метода Гаусса, в которой уравнение Лагранжа решается только один раз на нулевой итерации, а последующее уточнение проводится в терминах n_1 , n_2 с использованием методов Гиббса или Херрика-Гиббса. Однако, как отмечают сами авторы, эта модификация успешно работает только в тех случаях, когда длина дуги не превышает 60 градусов.

Наконец, наибольший интерес представляет метод, описанный [3], который в настоящее время используется в отечественной СККП. По своей логике он подобен методу, описанному в [1]. Однако, на его промежуточных итерациях, после того, как вычислены значения n_1 , n_2 , происходит вычисление наклонных дальностей по формулам (8). Это, в свою очередь, позволяет определить положения \mathbf{r}_i в моменты времени t_i . Далее с использованием метода Бэттина (Richard H. Battin, [4]) осуществляется решение задачи Ламберта (определение параметров орбиты Кеплера по двум положениям и разности времен между ними) на двух смежных дугах. Значения коэффициентов f_1 , f_2 , g_1 , g_2 , полученные в результате решения этих задач затем усредняются и используются для вычисления c_1 , c_2 для следующей итерации. Поскольку метод Бэттина обеспечивает решение задачи Ламберта на дугах длиной до одного витка, такой подход позволяет получать решения на длинных дугах вплоть до 180 градусов.

Несмотря на различия, все рассмотренным выше модификациям метода Гаусса присущи две особенности, которые делают проблематичным их использование для целей обнаружения космических объектов по оптическим измерениям. Во-первых, при длинных дугах начальные приближения для c_1 , c_2 , полученные по приближенным формулам (13), могут давать такие значения, для которых не существует ни одного действительного корня уравнения (14). В этом случае любая из рассмотренных модификаций метода Гаусса будет давать отказ. Во-вторых, ни для одной из рассмотренных модификаций не доказана сходимость используемых в них итерационных процедур.

Численное моделирование

С целью изучения возможности применения метода Гаусса для задач обнаружения был поставлен численный эксперимент. В этом эксперименте моделировались угловые измерения для 1637 реальных космических объектов, которые отсутствуют в публичном каталоге Стратегического командования США, и которые были обнаружены по измерениям Научной сети оптических инструментов для астрометрических и фотометрических наблюдений (НСОИ АФН, в зарубежной литературе – ISON).

Движение каждого из этих объектов прогнозировалось с помощью точной модели движения, основанной численном интегрировании уравнений движения. В уравнениях движения учитывались все реальные возмущения, включая нецентральность и неравномерность гравитационного поля Земли, воздействие гравитации Луны и Солнца и сил светового давления. Для каждого объекта случайным образом выбирались тройки времен для выполнения угловых измерений. Моделирование было организовано таким образом, что для 10 случаев эти тройки располагались на дугах менее 90 градусов, и для 10 случаев - на дугах от 90 до 180 градусов. Таким образом для каждого объекта генерировалось 20 троек угловых измерений, а общий объем моделирования составил $1637 \times 20 = 32740$ реализаций в каждой серии моделирования.

Полученные таким образом тройки измерений передавались на вход программы, реализующей модификацию метода Гаусса согласно [3], если полученная тройка измерений удовлетворяла двум условиям. Во-первых, полученные точки на орбите должны быть видны хотя бы из одной точки на поверхности Земли. Во-вторых, угловая скорость перемещения космического объекта относительно точки наблюдения не должна была превышать величины 0.07 град/с.

Для контроля качества решений, получаемых с помощью модифицированного метода Гаусса, использовалось два критерия. Во-первых, контролировалась невязка по вектору скорости между истинной орбитой и орбитой Кеплера, полученной с помощью метода Гаусса. Во-вторых, для каждой тройки измерений вводилось четвертое (контрольное) измерение, которое располагалось на угловом расстоянии в 90 градусов от последнего измерения в тройке. Качество решения считалось приемлемым, если угловые невязки этого 4 четвертого измерения с построенной орбитой Кеплера не превышали тех значений, которые обычно используются при идентификации оптических измерений с известными (каталогизированными) орбитами.

Для чистоты эксперименты было сгенерировано три серии реализаций при разных значениях случайных чисел. Результаты обработки этих серий представлены в таблице 1.

Результаты численного моделирования

Номер серии	1	2	3	%
Всего реализаций	32740	32740	32740	
Удовлетворяют ограничениям	26221	26150	26084	100.0%
Невязка по скорости менее 1 м/с	18317	18291	18246	69.9%
Невязка по скорости более 1 м/с	3894	3805	3957	14.9%
Нет привязки контрольного трека	102	80	87	0.4%
Решение не найдено	3908	3974	3794	14.9%

Как видно из приведенных данных, примерно в 15.3% случаев либо вообще не удается построить какой-либо орбиты, либо полученные орбиты оказываются недостоверными и сильно отличаются от параметров истинного движения. Еще в 14.9% получаются орбиты, которые находятся в «пограничной» зоне из-за больших невязок по вектору скорости.

Анализ полученных результатов позволил также выявить основные причины отказов и появления недостоверных решений. Таковыми являются:

1. Начальное приближение, получаемое с помощью описанной ранее методики оказывается таковым, что уравнение (14) для него не имеет действительных корней. Это приводит к отсутствию решения.
2. Отсутствует сходимость итерационной процедуры.
3. Существует несколько возможных решений поставленной задачи, но находится только одно, которое является посторонним. Этот случай будет рассмотрен более подробно позже.
4. В некоторых случаях не удается получить решения из-за неадекватности истинного движения законам Кеплера. Обычно это происходит для объектов космического мусора с большим отношением площади к массе.

Учет ограничений на топоцентрические дальности

Как уже отмечалось ранее, метод Гаусса широко применяется в астрономии для определения орбит астероидов и комет на гелиоцентрических орбитах. В этом случае сложно указать как дальности до наблюдаемых объектов, так и параметры их орбит. Однако, когда речь о системах контроля околоземного космического пространства, это не так. Практический интерес для таких систем представляют объекты искусственного происхождения, находящиеся на эллиптических геоцентрических орбитах.

Поэтому при создании методов обнаружения таких объектов представляется целесообразным ввести в рассмотрение ограничения на топоцентрические дальности:

$$\rho_{\min} < \rho_i < \rho_{\max} \quad (16)$$

где ρ_{\max} , ρ_{\min} – некоторые априорные константы.

Для большинства практических задач в системах контроля околоземного космического пространства разумными представляются следующие значения этих констант: $\rho_{\min} = 2000$ км, $\rho_{\max} = 85000$ км. Нижнее ограничение обусловлено двумя факторами. Во-первых, для низких орбит (с высотами менее 3500 км) более эффективно обнаружение на основе радиолокационных, а не оптических измерений. Во-вторых, на небольших расстояниях от наблюдательного пункта угловая скорость перемещения космических объектов оказывается высокой и не позволяет проводить оптические наблюдения в виде короткого трека. Верхнее ограничение на топоцентрическую дальность определяется характеристиками орбит реально существующих космических объектов.

Таким образом, в дальнейшем мы несколько сузим рассматриваемую задачу. Мы будем пытаться строить только такие орбиты, которые удовлетворяют ограничениям (16).

Уравнение Лагранжа и его действительные корни

Как уже отмечалось ранее, уравнение (14) является нелинейным и может иметь несколько действительных корней. Рассмотрим более подробно вопрос о возможном числе этих корней и алгоритме их поиска.

Запишем это уравнение в следующей форме

$$Q(\rho_0) = (\rho_0 + P) (\rho_0^2 + 2C\rho_0 + R^2)^{3/2}. \quad (17)$$

Здесь $Q(\rho_0)$ – функция, задающая такие значения коэффициента Q , которые соответствуют решению уравнения (14). Первая производная этой функции имеет вид:

$$\frac{dQ(\rho_0)}{d\rho_0} = (\rho_0^2 + 2C\rho_0 + R^2)^{1/2} (4\rho_0^2 + (3P + 5C)\rho_0 + 3PC + R^2). \quad (18)$$

Видно, что знак этой производной определяется знаком второго сомножителя, который в свою очередь является квадратной функцией ρ_0 . Тогда точки экстремума функции $Q(\rho_0)$ определяются условием

$$4\rho_0^2 + (3P + 5C)\rho_0 + 3PC + R^2 = 0. \quad (19)$$

Поскольку левая часть уравнения (19) является квадратичной функцией ρ_0 , то может существовать не более двух действительных корней этого уравнения.

Если дискриминант уравнения (19)

$$D_q = 9P^2 + 25C^2 - 18PC - 16R^2. \quad (20)$$

меньше нуля, то функция $Q(\rho_0)$ является монотонной на всем интервале изменения ρ_0 , и уравнение (14) может иметь не более одного действительного корня.

В противном случае точки экстремумов функции $Q(\rho_0)$ определяются корнями уравнения (19) по формулам:

$$\rho_{Q1,2} = \frac{-3P - 5C \pm \sqrt{9P^2 + 25C^2 - 18PC - 16R^2}}{8}. \quad (21)$$

Таким образом в самом общем случае функция $Q(\rho_0)$ имеет не более 2 экстремумов, и, следовательно, не более 3 действительных корней. С учетом введенных ранее ограничений (16) мы можем гарантировано найти все действительные корни, удовлетворяющие (16), используя любой численный метод нахождения корней нелинейного уравнения на ограниченном отрезке.

Область возможных решений

Как уже отмечалось ранее, решение поставленной задачи сводится к нахождению коэффициентов n_1, n_2 , которые связаны с топоцентрическими дальностями ρ_i соотношениями (8). Рассмотрим отображение введенных ранее ограничений (16) на плоскость параметров n_1, n_2 .

Из формы уравнений (8) вытекают следующие свойства:

1. Для любого i ($i=0,1,2$) уравнение $\rho_i = const$ отображается на плоскость n_1, n_2 , как прямая линия.
2. Линии, соответствующие уравнениям $\rho_0 = \rho_{01}, \rho_0 = \rho_{02}$ (где ρ_{01}, ρ_{02} – некоторые константы) отображаются на плоскость n_1, n_2 в виде прямых параллельных линий.
3. Линии, соответствующие уравнениям $\rho_1 = \rho_{11}, \rho_1 = \rho_{12}$ (где ρ_{11}, ρ_{12} – некоторые константы) отображаются на плоскость n_1, n_2 в виде прямых линий, точка пересечения которых имеет координаты $n_1=0, n_2=s_{10}/s_{12}$.
4. Аналогично линии, соответствующие уравнениям $\rho_2 = \rho_{21}, \rho_2 = \rho_{22}$ (где ρ_{21}, ρ_{22} – некоторые константы) отображаются на плоскость n_1, n_2 в виде прямых линий, точка пересечения которых имеет координаты $n_1=s_{20}/s_{21}, n_2=0$.

Последние два свойства не очевидны на первый взгляд. Однако их легко доказать, разрешив систему уравнений

$$\begin{cases} \rho_{11} = -\frac{n_1 s_{11} - s_{10} + n_2 s_{12}}{n_1 D} \\ \rho_{12} = -\frac{n_1 s_{11} - s_{10} + n_2 s_{12}}{n_1 D} \end{cases}, \quad (22)$$

которая вытекает из второго уравнения соотношений (8), относительно n_1, n_2 (для ρ_2 уравнения аналогичны). Отметим важное обстоятельство: решение этой системы не зависит от ρ_{11}, ρ_{12} . Иными словами: любые прямые линии, которые на плоскости ρ_1, ρ_2 параллельны одной из осей координат, на плоскости n_1, n_2 пересекаются в точках, координаты которых были приведены выше.

Таким образом, границами области возможных решений на плоскости n_1, n_2 являются прямые линии (или отрезки прямых линий). Поясним сказанное с помощью графических иллюстраций.

Как уже отмечалось ранее, решение поставленной задачи сводится к нахождению коэффициентов n_1, n_2 , которые связаны с топоцентрическими дальностями ρ_i соотношениями (8). Рассмотрим отображение введенных ранее ограничений (16) на плоскость параметров n_1, n_2 .

Очевидно, ограничения вида $\rho_{\min} < \rho_1 < \rho_{\max}, \rho_{\min} < \rho_2 < \rho_{\max}$ на плоскости ρ_1, ρ_2 выглядят, как замкнутый квадрат. Отображение этих ограничений на плоскость n_1, n_2 зависит от значений элементов матрицы \mathbf{S} и параметра D . Например, возможен случай, показанный на рис. 1, когда эти ограничения отображаются в виде замкнутого четырехугольника (синим цветом закрашена область, удовлетворяющая этим ограничениям).

На этом рисунке тонкими линиями показаны продолжения отрезков, которые на плоскости ρ_1, ρ_2 являются сторонами исходного квадрата. Точки пересечения этих линий обозначены на рисунке с помощью маркеров голубого цвета F1 и F2.

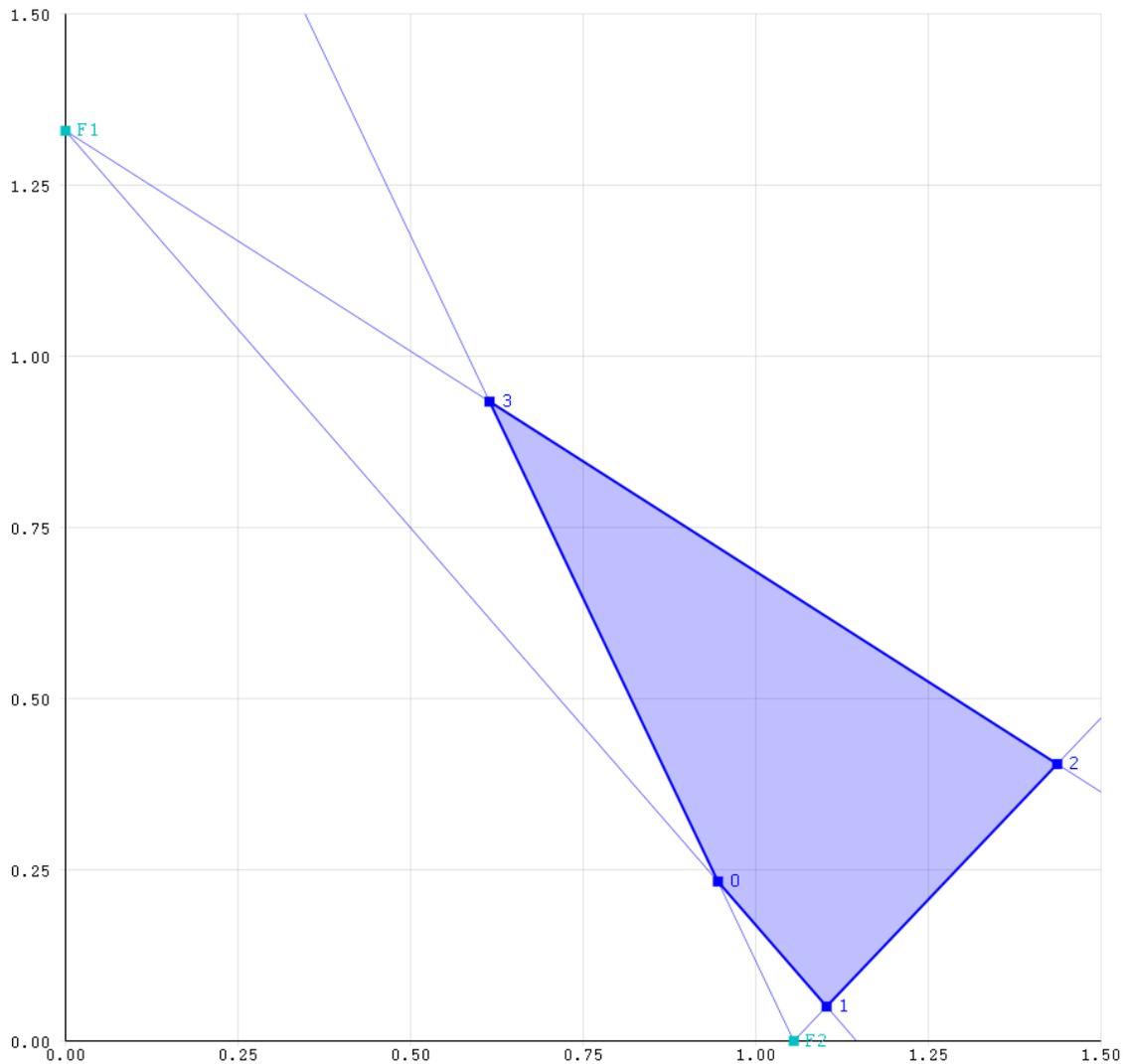


Рис. 1. Отображение ограничений на ρ_1, ρ_2 на плоскости n_1, n_2 .

Теперь наложим на построенный рисунок область, удовлетворяющую ограничениям $\rho_{\min} < \rho_0 < \rho_{\max}$. В соответствии с указанными выше свойствами эта область будет ограничена двумя параллельными прямыми линиями и на рис. 2 она закрашена зеленым цветом. Пересечение областей, закрашенных на этом рисунке синим и зеленым цветом и будет областью возможных решений.

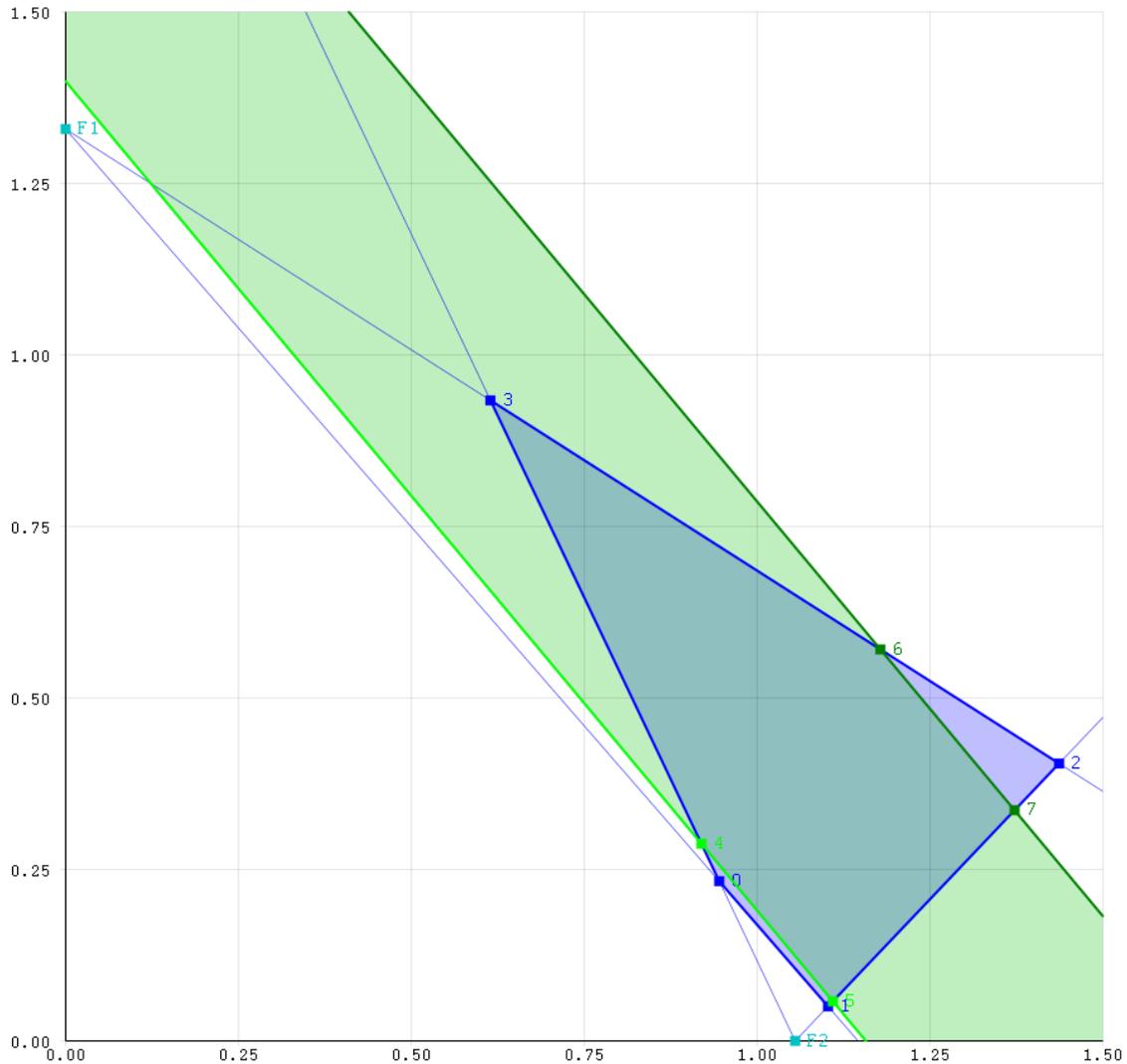


Рис. 2. Отображение ограничений на дальности на плоскости n_1, n_2 .

Пример, приведенный на рис. 1,2 является наиболее простым случаем, когда область возможных решений представляет из себя замкнутый выпуклый многоугольник. Однако в общем случае эта область будет иметь более сложную форму, хотя и с границами в виде прямых линий.

Если разрешить два последних уравнения из (8) относительно n_1, n_2 , то мы получим следующие соотношения

$$\begin{aligned}
 n_1 &= \frac{s_{10}(D\rho_2 + s_{22}) - s_{20}s_{12}}{(D\rho_1 + s_{11})(D\rho_2 + s_{22}) - s_{12}s_{21}} \\
 n_2 &= \frac{s_{20}(D\rho_1 + s_{11}) - s_{10}s_{21}}{(D\rho_1 + s_{11})(D\rho_2 + s_{22}) - s_{12}s_{21}}.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Знаменатели обоих выражений в (23) совпадают и при обращении их в 0 порождают неопределенность. Линия, которая отвечает условию обращения знаменателей в 0

$$(D\rho_1 + s_{11})(D\rho_2 + s_{22}) - s_{12}s_{21} = 0 \quad (24)$$

на плоскости ρ_1, ρ_2 выглядит, как гипербола. Если эта линия пересекает на плоскости ρ_1, ρ_2 какую-либо из сторон квадрата, соответствующего ограничениям $\rho_{\min} < \rho_1 < \rho_{\max}, \rho_{\min} < \rho_2 < \rho_{\max}$, то эта сторона будет проецироваться на плоскость n_1, n_2 в виде двух лучей прямых линий. В этом случае области возможных решений могут выглядеть, например, так, как это показано на рис. 3.

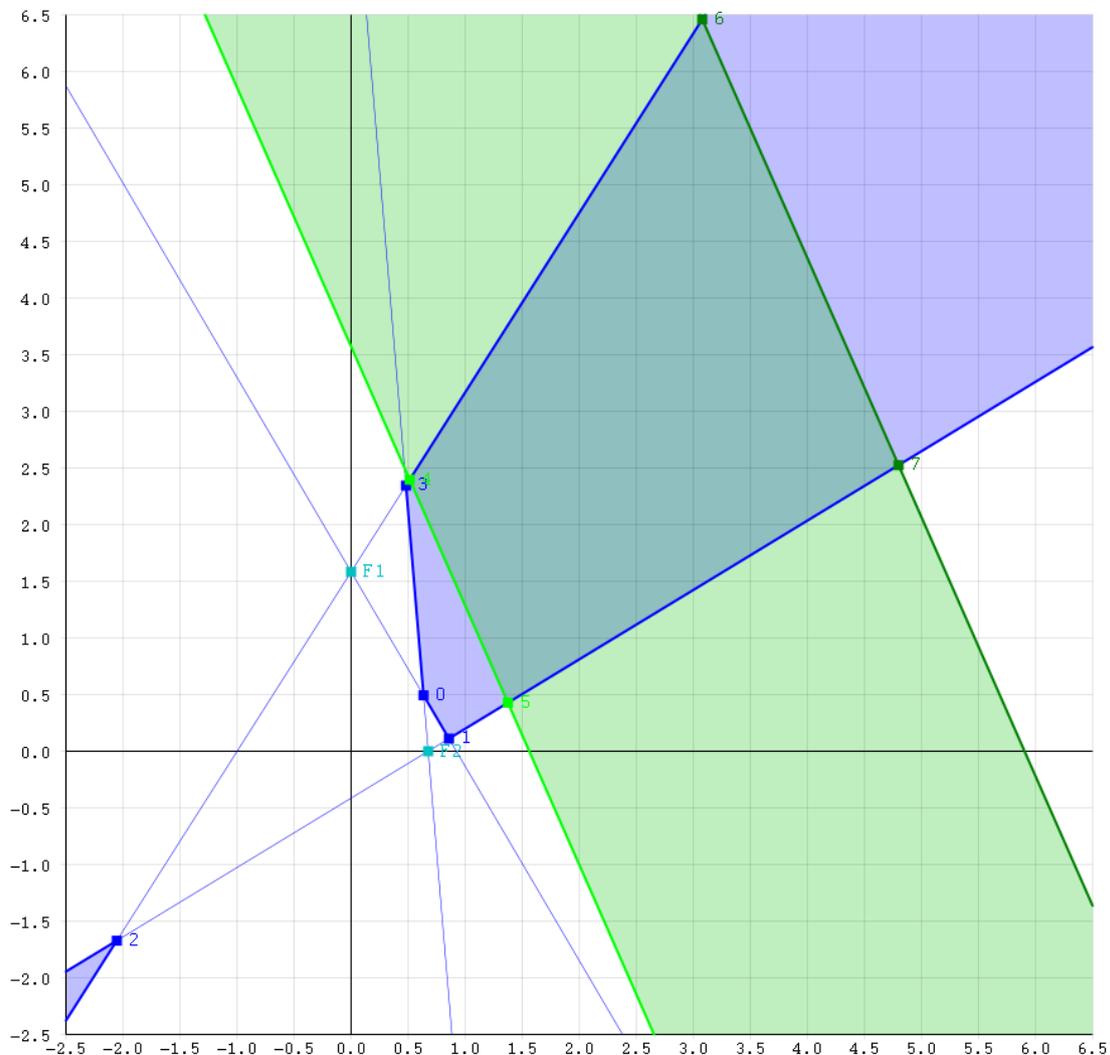


Рис. 3. Отображение ограничений на дальности на плоскости n_1, n_2 .

Хотя в данном случае область возможных решений также является замкнутой, из этого рисунка хорошо видно, что она может иметь более сложную структуру.

Во-первых, исходный квадрат на плоскости ρ_1, ρ_2 , который соответствует ограничениям $\rho_{\min} < \rho_1 < \rho_{\max}$, $\rho_{\min} < \rho_2 < \rho_{\max}$, может отображаться на плоскости n_1, n_2 в виде набора незамкнутых областей. На рис. 3 таких областей две (они нанесены синим цветом), но в общем случае их число может достигать до четырех.

Во-вторых, результирующая область возможных решений (которая на приведенных рисунках является пересечением областей синего и зеленого цветов) не обязательно является замкнутой: все зависит от того, как будут ориентированы линии, соответствующие ограничениям по ρ_0 .

Завершая обсуждение области возможных решений, ответим несколько обстоятельств, которые имеют особую важность именно для алгоритмов обнаружения. Как было показано ранее, построение области возможных решений сводится к очень простым математическим операциям: достаточно записать уравнения 6 прямых линий, коэффициенты которых зависят только от значений матрицы \mathbf{S} и параметра D (уравнения (1), (2)), и найти точки пересечения этих линий на плоскости n_1, n_2 .

Если окажется что построенная таким образом область решений является пустой, то мы можем уверенно утверждать, что измерения анализируемой тройки принадлежат разным объектам. Такой вывод можно сделать, не прибегая к поиску начального приближения и запуску итерационной процедуры поиска решения, что неизбежно пришлось бы делать при использовании известных модификаций метода Гаусса.

В общем случае область возможных решений может состоять из 4 подобластей на плоскости n_1, n_2 . Это подобласти могут быть замкнутыми или незамкнутыми. Однако в любом случае их границами являются прямые линии, и каждая из таких подобластей всегда расположена внутри одной четверти плоскости n_1, n_2 .

Введем следующие обозначения:

φ_1 - угол между векторами \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}_1 ,

φ_2 - угол между векторами \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}_2 .

Тогда первая четверть плоскости n_1, n_2 ($n_1 > 0, n_2 > 0$) будет соответствовать условиям $\varphi_1 + \varphi_2 < 180^\circ$. Вторая четверть ($n_1 > 0, n_2 < 0$) будет отвечать условиям $\varphi_1 < 180^\circ, \varphi_2 > 180^\circ, \varphi_1 + \varphi_2 > 180^\circ$. Для третьей четверти ($n_1 < 0, n_2 < 0$) будут выполняться условия $\varphi_1 < 180^\circ, \varphi_2 < 180^\circ, \varphi_1 + \varphi_2 > 180^\circ$, а для четвертой - $\varphi_1 > 180^\circ, \varphi_2 < 180^\circ, \varphi_1 + \varphi_2 > 180^\circ$.

Таким образом, используя относительно несложный математический аппарат, мы можем убедиться в отсутствии приемлемых решений для конкретной тройки угловых измерений, а также указать четверти плоскости n_1, n_2 , в которых эти решения могут существовать.

Визуализация области решений

В дальнейшем при визуализации области возможных решений будут использованы два приема.

В ряде случаев для визуализации области возможных решений будет использоваться вспомогательная система координат ρ_0, Y . Пересчет координат в нее выполняется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{-s_{00} + n_1 s_{01} + n_2 s_{02}}{D} \\ Y &= -\frac{s_{02}(n_1 - n_{10}) - s_{01}(n_2 - n_{20})}{D} \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} n_{10} &= \frac{D\rho_{\min} + s_{00}}{\sqrt{s_{01}^2 + s_{02}^2}} s_{01} \\ n_{20} &= \frac{D\rho_{\min} + s_{00}}{\sqrt{s_{01}^2 + s_{02}^2}} s_{02}. \end{aligned} \quad (26)$$

Отметим, что первое уравнение в (25) совпадает с первым уравнением в (8), а координата Y выбрана таким образом, что вектор направленный вдоль нее будет перпендикулярен любой линии $\rho_0 = const$ в плоскости n_1, n_2 .

Использование такой системы координат объясняется тем обстоятельством, что зачастую на плоскости n_1, n_2 область решений оказывается весьма узкой и при ее визуализации весьма сложно увидеть, как в действительности шел ход решения. Такой пример показан ниже на рис. 4.

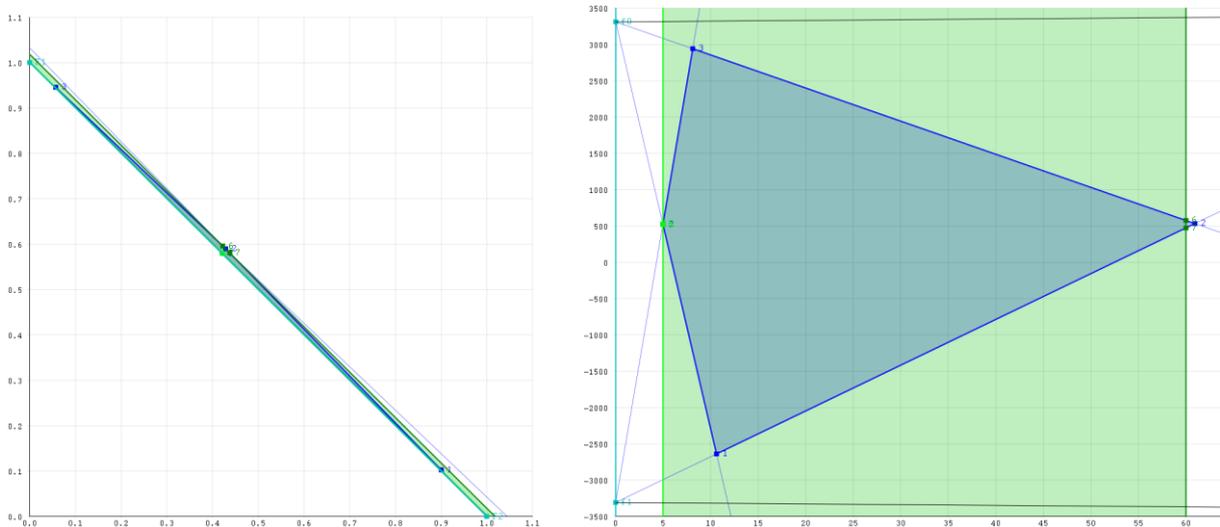


Рис. 4. Пример использования координат ρ_0, Y для визуализации.

Здесь в левой части показана область возможных решений в плоскости n_1, n_2 , а в правой – в координатах ρ_0, Y . Отметим, что координаты ρ_0, Y имеют размерность дальности и на осях рисунка в правой части используются тысячи километров.

Отметим, что введенная выше система координат будет использоваться далее только для целей визуализации и не будет использоваться при фактическом поиске решений.

Второй прием будет касаться используемых цветов и требует специального пояснения. Если заданы значения параметров n_1, n_2 , то используя формулы (8), мы можем определить значения топоцентрических дальностей ρ_i измерений. Далее, используя (3), можно вычислить геоцентрические вектора \mathbf{r}_i , задающие положения космического объекта в моменты измерений. Тогда, зная времена измерений t_i , можно решить две задачи Ламберта для двух дуг по векторам $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2$ (т.е. определить параметры орбит Кеплера, которые проходят через эти вектора). В общем случае параметры этих орбит будут различаться. Нас интересуют такие решения, при которых все положения \mathbf{r}_i находятся на орбите с одинаковыми параметрами. Если такое условие выполняется, то в момент времени t_0 мы должны получать один и тот же вектор скорости \mathbf{v}_0 вне зависимости от того для какой из двух орбит он вычислен.

С другой стороны, при использовании уравнений (1), (8) все три вектора \mathbf{r}_i всегда лежат в одной плоскости. Следовательно, вектор \mathbf{v}_0 , вычисленный по любой из этих орбит также будет лежать в этой же плоскости. С учетом сказанного введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Delta v_{0r} &= v_{01r} - v_{02r} \\ \Delta v_{0n} &= v_{01n} - v_{02n} \\ \Phi &= \sqrt{\Delta v_{0r}^2 + \Delta v_{0n}^2},\end{aligned}\tag{27}$$

где

v_{01r}, v_{02r} - проекции векторов скорости \mathbf{v}_0 , вычисленные для каждой из дуг, на направление \mathbf{r}_0

v_{01n}, v_{02n} - проекции векторов скорости \mathbf{v}_0 , вычисленные для каждой из дуг, на направление, ортогональное \mathbf{r}_0 и лежащее в плоскости орбиты.

Тогда поставленную нами задачу можно рассматривать, как задачу решения нелинейной системы уравнений:

$$\begin{aligned}\Delta v_{0r}(n_1, n_2) &= 0 \\ \Delta v_{0n}(n_1, n_2) &= 0.\end{aligned}\tag{28}$$

Далее при визуализации области возможных решений условия $\Delta v_{0r}=0$ и $\Delta v_{0n}=0$ будут отображаться на рисунках в виде линий соответственно синего и красного цвета. Искомые решения будут соответствовать точкам пересечения этих линий. Цвет фона внутри области решений будем назначать в зависимости от значения Φ (зеленый цвет для нулевых значений с переходом через желтый цвет к красному).

С учетом изложенных условий область решений, которая была показана выше на правой стороне рис. 4 будет выглядеть следующим образом:

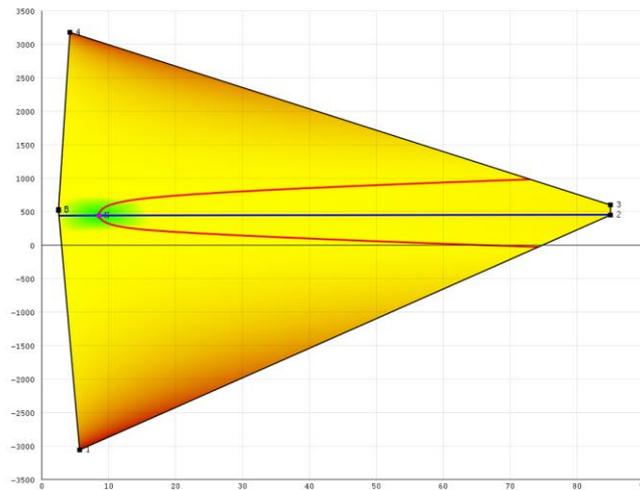


Рис. 5. Пример визуализации области решений.

Используя, приемы визуализации, которые были описаны выше, приведем еще два конкретных примера, которые иллюстрируют несовершенство существующих методов решения поставленной задачи.

На рис. 6 показан пример расходящегося процесса при поиске решения. В данном примере исходная задача имеет два решения (красная и синяя линии пересекаются дважды). Начальное приближение расположено в нижней части рисунка и обозначено маркером S. Промежуточные итерации обозначены маркерами черного цвета и соединены тонкими линиями.

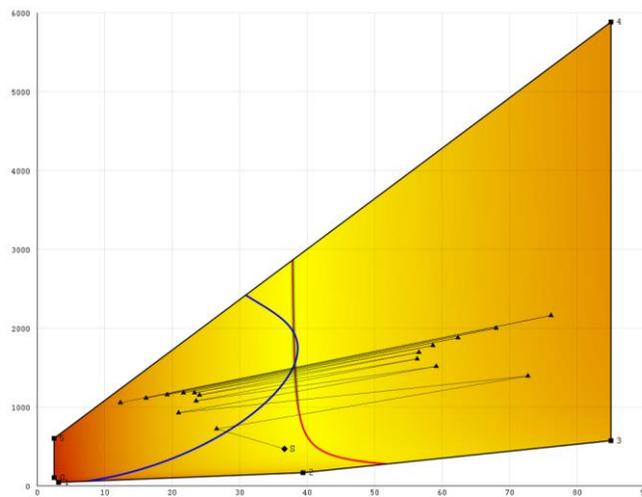


Рис. 6. Пример расходящегося процесса.

На рис. 7 показан другой пример, когда имеется 3 возможных решения исходной задачи, а процедура получения начального приближения, основанная

на численном решении уравнения (14), дает только один корень.

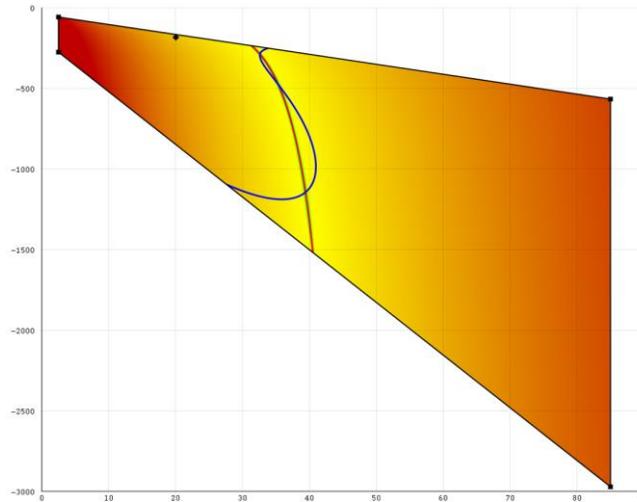


Рис. 7. Пример области с тремя возможными решениями.

Примеры, показанные на рис. 6 и 7, доказывают, что в общем случае известные методы, которые были описаны нами ранее, не позволяют найти все существующие решения.

Использование алгоритмов триангуляции

Далее будет приведено описание алгоритма поиска решений поставленной задачи, основанного на использовании триангуляции, т.е. разбиении области возможных решений на непересекающиеся треугольники в плоскости n_1, n_2 , и последующим использованием двумерной линейной интерполяции.

При описании этих алгоритмов мы будем использовать обозначения x, y для искомых переменных и обозначения $f_1(x, y), f_2(x, y)$ – для функций (имея в виду, что под x, y понимаются n_1, n_2 , а под f_1, f_2 – соответственно $\Delta v_{0r}, \Delta v_{0n}$). При таких обозначениях решение поставленной задачи сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0 \\ f_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Общая идея предлагаемого алгоритма состоит в том, что сначала вся область возможных решений разбивается на набор непересекающихся треугольников. Вычисление значений функций f_1, f_2 выполняется в вершинах этих треугольников. На каждой очередной итерации происходит вычисление значений функций f_1, f_2 в одной или нескольких дополнительных точках, после чего опять выполняется разбиение области на треугольники с учетом новых вершин. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет найдено решение или пока мы не убедимся в его отсутствии. Более подробно алгоритмы разбиения на

треугольники (триангуляция) и алгоритмы вычисления новых вершин будут рассмотрены далее.

Пусть нам известны значения функций f_1, f_2 в трех вершинах, не лежащих на одной прямой. Обозначим координаты этих вершин как x_i, y_i ($i=0,1,2$), а значения функций в них, как f_{1i}, f_{2i} . Тогда линейное приближение для решения системы (29) может быть вычислено по конечным формулам:

$$\begin{aligned} x_s &= x_0 + \alpha(x_1 - x_0) + \beta(x_2 - x_0) \\ y_s &= y_0 + \alpha(y_1 - y_0) + \beta(y_2 - y_0), \end{aligned} \quad (30)$$

где:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{A}{C}, \quad \beta = \frac{B}{C} \\ A &= f_{20}f_{12} - f_{10}f_{22} \\ B &= f_{10}f_{21} - f_{20}f_{11} \\ C &= f_{11}f_{22} - f_{10}f_{22} - f_{11}f_{20} - f_{12}f_{21} + f_{12}f_{20} + f_{10}f_{21} \end{aligned} \quad (31)$$

Положение точки x_s, y_s относительно треугольника, по вершинам которого была выполнена линейная интерполяция, определяется величинами α и β . Эта точка будет находиться внутри треугольника, если соблюдаются условия:

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta < 1. \quad (32)$$

Приведенные формулы (30), (31) можно рассматривать, как обобщение метода хорд для решения нелинейных уравнений в одномерном случае. Однако, следует иметь в виду, что если в одномерном случае смена знака функции на ограниченном отрезке гарантирует существование хотя бы одного корня внутри этого отрезка, то в двумерном случае это не так. Даже если величины x_s, y_s , вычисленные на основании (30), (31), оказываются внутри треугольника, вершинами которого являются три узла, реальное решение системы (29) может находиться за его границами.

Если имеется некоторое множество вершин, то всегда можно построить некоторый выпуклый многоугольник таким образом, что все вершины окажутся или на границе этого многоугольника, или внутри него. Однако разбиение такого многоугольника на треугольники может быть выполнено несколькими способами. В созданном алгоритме для этих целей используется алгоритм триангуляции, удовлетворяющий условию Делоне [5].

Триангуляция удовлетворяет условию Делоне, если внутри окружности, описанной вокруг любого построенного треугольника, не попадает ни одна из заданных точек триангуляции. С теоремами, доказывающие свойства и методы построения такой триангуляции можно ознакомиться, например, в уже

упоминавшейся работе [5]. Здесь же мы отметим лишь некоторые свойства, которые важны для наших практических целей.

Во-первых, триангуляция Делоне является единственной для заданного набора вершин. Во-вторых, триангуляция Делоне обладает максимальной суммой минимальных углов всех своих треугольников среди всех возможных триангуляций. Последнее свойство позволяет избегать «узких» треугольников, которые в пределе вырождаются в отрезки прямых линий.

Алгоритм построения триангуляции Делоне сводится к рекурсивной процедуре проверки условий Делоне для пар смежных треугольников. В случае, если для некоторой такой пары это условие не выполняется, то треугольники должны быть перестроены. Пример такого перестроения показан на рис. 8.

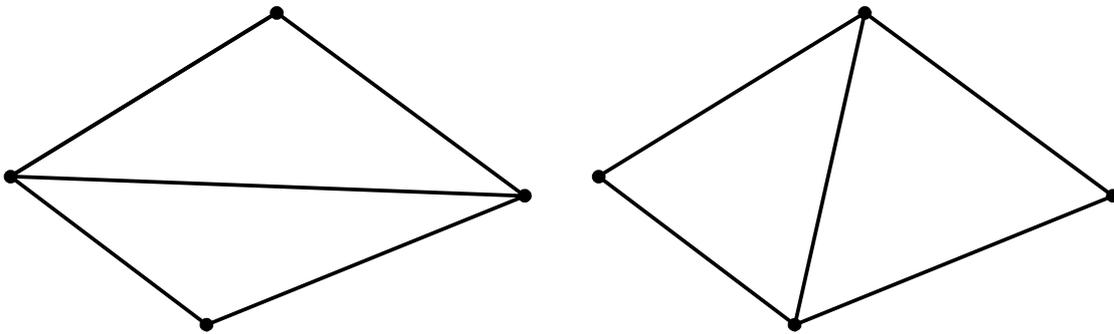


Рис. 8. Проверка условия Делоне для смежных треугольников.

Здесь условие Делоне не выполняется для левой пары треугольников, но оно будет выполнено, если по этим же 4 вершинам перестроить треугольники так, как это показано в правой части рисунка.

После того, как выполнено разбиение области на треугольники, дальнейшие действия зависят от значений функций f_1 , f_2 в существующих вершинах и от свойств получившихся треугольников.

При аппроксимации функций f_1 , f_2 двумерной линейной интерполяцией, построенной по 3 вершинам треугольника, условия $f_1=0$ и $f_2=0$ соответствуют прямым линиям на плоскости x , y . Будем называть в дальнейшем эти линии *линиями нулевого уровня*. Точка пересечения этих линий будет являться линейным приближением решения системы (29). Введем также понятие *ранга треугольника*, величина которого будет назначаться в зависимости от расположения линий нулевого уровня относительно исходного треугольника. Назначение ранга выполняется по правилам, которые сформулированы ниже.

Треугольнику назначается ранг 0, если ни одна из линий нулевого уровня не пересекает ни одной из сторон треугольника. Треугольнику назначается ранг 1, если одна из линий нулевого уровня имеет пересечения со сторонами треугольника, а вторая – нет. Треугольнику назначается ранг 2, если обе линии нулевого уровня пересекают стороны треугольника, но точка пересечения этих линий находится вне треугольника. Треугольнику назначается ранг 3, если точка пересечения линий нулевого уровня лежит внутри треугольника и

существует сторона треугольника, которая не пересекается ни с одной из линий нулевого уровня. Треугольнику назначается ранг 4, если точка пересечения линий нулевого уровня лежит внутри треугольника и все три стороны треугольника пересекаются с линиями нулевого уровня.

Правила назначения ранга проиллюстрированы на рис. 9 (на этом рисунке линии нулевого уровня показаны красным и синим цветами).

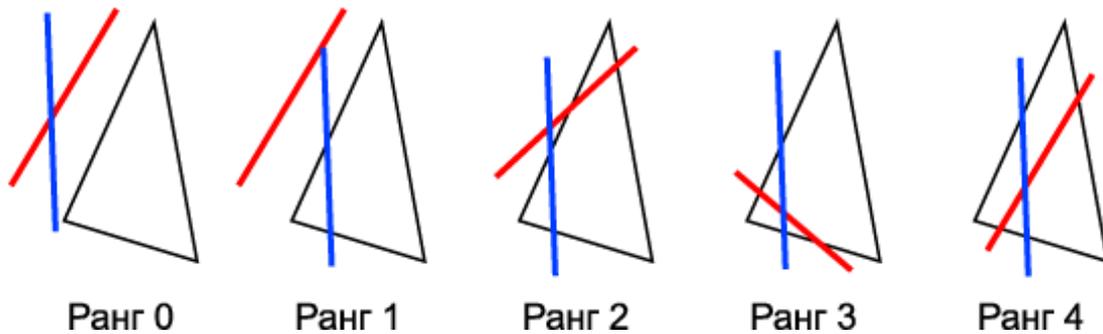


Рис. 9. Правила ранжирования треугольников.

Стратегии поиска решений

В предыдущем разделе были описаны теоретические основы, на которых базируется предлагаемый алгоритм поиска решений. Здесь же мы приводим полное описание этого алгоритма.

Поиск решений осуществляется внутри возможной области решений, которая строится на основании алгоритмов, описанных ранее в разделе «Область возможных решений». Как было показано ранее, эта область может состоять из нескольких (до 4) подобластей, каждая из которых целиком расположена в одной из четвертей плоскости n_1 , n_2 . Далее мы будем рассматривать алгоритм поиска решений только внутри одной такой подобласти. Если их несколько, то аналогичный алгоритм может быть повторен для каждой из них.

Алгоритм состоит из трех фаз. На первой фазе выполняется начальное разбиение построенной области решений на непересекающиеся треугольники. При необходимости с целью повышения информативности в разбиение могут быть добавлены дополнительные вершины. Вторая фаза представляет из себя итерационную процедуру, на каждом шаге которой происходит добавление одной или нескольких вершин и построение новой триангуляции, удовлетворяющей условиям Делоне. Если в результате выполнения второй фазы удается найти решение и если это решение оказывается неудовлетворительным для алгоритма обнаружения, то выполняется третья фаза алгоритма. На третьей фазе из триангуляции исключаются треугольники, примыкающие к найденному решению, и с помощью алгоритмов второй фазы выполняется поиск дополнительного решения. Последовательное выполнение второй и третьей фаз алгоритма может быть повторено несколько раз, если в

этом есть необходимость. Подробности каждой из фаз алгоритма рассмотрены ниже.

На первой фазе строится начальное разбиение, которое включает в себя вершины, являющиеся точками пересечения прямых линий, соответствующих ограничениям на наклонные дальности (см. раздел «Область возможных решений»). В число вершин включаются точки, полученные на основании алгоритма вычисления начального приближения (см. раздел «Метод Гаусса и его модификации»).

Особый случай имеет место, когда область решений не является замкнутой. Тогда две ее границы являются параллельными лучами на плоскости n_1, n_2 соответствующим ограничениям $\rho_0 = \rho_{\min}$ и $\rho_0 = \rho_{\max}$. В этом случае область искусственно замыкается путем построения дополнительной фиктивной границы, перпендикулярной лучам ограничений для ρ_0 . Эта фиктивная граница проводится через одну из вершин таким образом, чтобы полученная замкнутая область имела максимальную площадь на плоскости n_1, n_2 .

Переход к следующей (второй) фазе алгоритма выполняется, если в полученной триангуляции присутствует хотя бы один треугольник с рангом больше или равным 2. Если это не так, то проверяется наличие треугольников с рангом 1 и общее число треугольников N_t . Если $N_t < N_{\min}$ (где N_{\min} - настраиваемый параметр алгоритма) и существует хотя бы один треугольник ранга 1, то в триангуляцию добавляются дополнительные вершины, которые расположены на ребрах существующей триангуляции где происходит смена знаков функций f_1, f_2 . Вычисление координат этих вершин выполняется с помощью линейной интерполяции.

Если в результате описанных операций не удастся получить триангуляцию, которая бы содержала хотя бы один треугольник с рангом больше или равным 2, то считается, что рассматриваемая область не содержит решений.

Вторая фаза алгоритма является наиболее сложной и заслуживает наиболее подробного обсуждения. К моменту выполнения этой фазы мы располагаем N_v вершинами, в которых известны значения функций f_1, f_2 . По этим вершинам строится триангуляция, удовлетворяющая условиям Делоне. Треугольники, образующие эту триангуляцию сортируются таким образом, чтобы в начале списка находились треугольники с минимальными значениями функционала Φ (см. (27)) в вершинах, а индексы вершин в треугольниках назначаются таким образом, чтобы выполнялось условие $\Phi_0 \leq \Phi_1 \leq \Phi_2$.

На каждой итерации второй фазы алгоритма последовательно вызываются процедуры, которые реализуют различные стратегии поиска решений. В зависимости от кода завершения очередной процедуры может происходить останов работы алгоритма, переход к следующей процедуре внутри текущей итерации или переход к следующей итерации с добавлением новых вершин.

Вторая фаза алгоритма может завершиться либо нахождением решения, либо отказом. Считается, что решение найдено, если обнаружен узел, для которого $\Phi \leq \varepsilon$ (где ε – некоторая константа). Отказ может иметь место в одном из двух случаев: если в текущей триангуляции нет ни одного треугольника ранга больше 1 или если число вершин в триангуляции превысило некоторое предельное значение N_{vmax} .

Приведем описание процедур, которые вызываются внутри одной итерации на второй фазе работы алгоритма. В этом описании процедуры перечислены в том порядке, в котором они вызываются. Под обозначением Φ_{min} понимается минимальное значение Φ среди всех существующих вершин текущей триангуляции.

Процедура 1: поиск решения вблизи глобального минимума. Для всех треугольников, которые содержат вершину с Φ_{min} выполняется вычисление координат новой вершины по формулам (30), (31). Если координаты новой вершины оказываются внутри замкнутой области решений и не совпадают ни с одной из существующих вершин, то для них вычисляются значения функций f_1 , f_2 . В случае, если найдена вершина, удовлетворяющая условию $\Phi \leq \varepsilon$, происходит выход из второй фазы алгоритма. Если найдена вершина, для которой $\Phi < 0.1 \cdot \Phi_{min}$, то происходит переход к следующей итерации. Если в результате выполнения процедуры 1 удастся найти вершину, для которой $\Phi < \Phi_{min}$, то также происходит переход к следующей итерации. В противном случае происходит переход на выполнение процедуры 2, которая описана ниже.

Процедура 2: поиск решения вблизи локальных минимумов. Здесь под локальным минимумом понимается такая вершина, у которой Φ меньше любой другой вершины, связанной с ней в триангуляции ребрами. Процедура аналогична описанной выше процедуре 1. Разница состоит в том, что сравнение происходит с величиной Φ не в глобальном, а в локальном минимуме. Если удастся найти новый локальный минимум с меньшим значением Φ , происходит переход к следующей итерации. В противном случае, происходит переход на следующую процедуру.

Процедура 3: поиск решения за пределами замкнутой области. Эта процедура выполняется только в том случае, если исходная область возможных решений не являлась замкнутой. Для каждого треугольника выполняется вычисление координат новой вершины по формулам (30), (31). Если координаты новой вершины лежат за пределами замкнутой области, но внутри исходной области, то для такой вершины вычисляются значения функций f_1 , f_2 . Если Φ для этой вершины оказывается меньше Φ_{min} , то такая вершина добавляется к существующей триангуляции (при этом область триангуляции расширяется) и происходит переход к следующей итерации.

Процедура 4: поиск решений внутри треугольников ранга 4. Поиск решения выполняется с помощью итераций, в которых участвуют два треугольника: исходный и рабочий. Перед началом выполнения итераций параметры рабочего треугольника выставляются по параметрам исходного.

Далее на каждой итерации выполняются следующие действия. Для рабочего треугольника анализируется положение точки возможного решения, вычисленной по (30), (31). Если эта точка находится за пределами исходного треугольника, то итерации прерываются (на первой итерации эта точка всегда находится внутри него, поскольку исходный треугольник имеет ранг 4). Для новой вершины вычисляются функции f_1 , f_2 и функционал Φ . Если $\Phi \leq \varepsilon$, новая вершина является решением. Если $\Phi > \Phi_2$, то итерации для текущего треугольника прерываются. В противном случае формируется новый рабочий треугольник из новой вершины и вершин 0 и 1 рабочего треугольника и итерации продолжаются. Если для очередного исходного треугольника итерации были прерваны (без нахождения решения), то проводится проверка выполнения условия $\Phi_0 < 0.8 \cdot \Phi_{\min}$ (здесь Φ_0 – значение функционала в 0-й вершине рабочего треугольника). Если это условие выполняется (нашли новую точку глобального минимума), то выполняется переход к следующей итерации фазы 2.

Процедура 5: поиск решений внутри треугольников ранга 3. Эта процедура аналогична процедуре 4. Отличие состоит в том, что для каждого треугольника ранга 3 по формулам (30), (31) вычисляется только одна новая вершина. Выполнение процедуры прерывается, если в результате добавления этих новых вершин удастся обнаружить решение, новый локальный минимум или треугольник ранга 4 (в последних двух случаях выполняется переход на следующую итерацию фазы 2). Если же этого не происходит, то все треугольники ранга 3 разбиваются на менее крупные (по их центральной точке), и происходит переход к выполнению процедуры 6.

Процедура 6: разбиение треугольников ранга 2. Эта процедура выполняется только в том случае, если в текущей триангуляции есть хотя бы один треугольник ранга 2, но нет ни одного треугольника ранга 3 или 4. Эта процедура наименее очевидна из всех рассмотренных и ее следует рассмотреть более подробно.

Как уже отмечалось, при использовании линейной интерполяции приближениями для линий нулевого уровня являются прямые линии. Если разбить область решений на треугольники и использовать внутри каждого из них линейные приближения, полученные по трем вершинам этого треугольника, то тогда линии нулевого уровня будут выглядеть, как ломаные линии, состоящие из прямых отрезков. В силу того обстоятельства, что мы используем линейную интерполяцию, положение точек пересечений этих линий с ребрами не зависят от того, какой из двух смежных треугольников использовался для вычисления координат точки пересечения.

Однако в действительности линии нулевого уровня являются нелинейными кривыми, точное положение которых не известно. Поэтому точки пересечения истинных линий нулевого уровня не совпадают с теми точками, которые получаются в результате линейного приближения. Но ребра, на которых есть такие пересечения являются как бы «воротами» для истинных

линий: поскольку на концах этих ребер соответствующие функции f_1 и/или f_2 имеют разные знаки. С другой стороны, в треугольниках ранга 2 всегда есть хотя бы одно ребро, которое пересекается с обеими функциями нулевого уровня.

Алгоритм процедуры 6 сводится к тому, что для каждого треугольника ранга 2 находятся ребра, имеющие два пересечения с линиями нулевого уровня. На такие ребра добавляется дополнительная вершина, положение которой находится на равном расстоянии от прогнозируемых точек пересечений линий нулевого уровня с этим ребром. Работа процедуры останавливается, если в результате ее выполнения в триангуляции появляется хотя бы один треугольник ранга более 2. Если этого не происходит (все треугольники имеют ранг не выше 1), то решение в рассматриваемой области отсутствует.

Проиллюстрируем сказанное с помощью рис. 10.

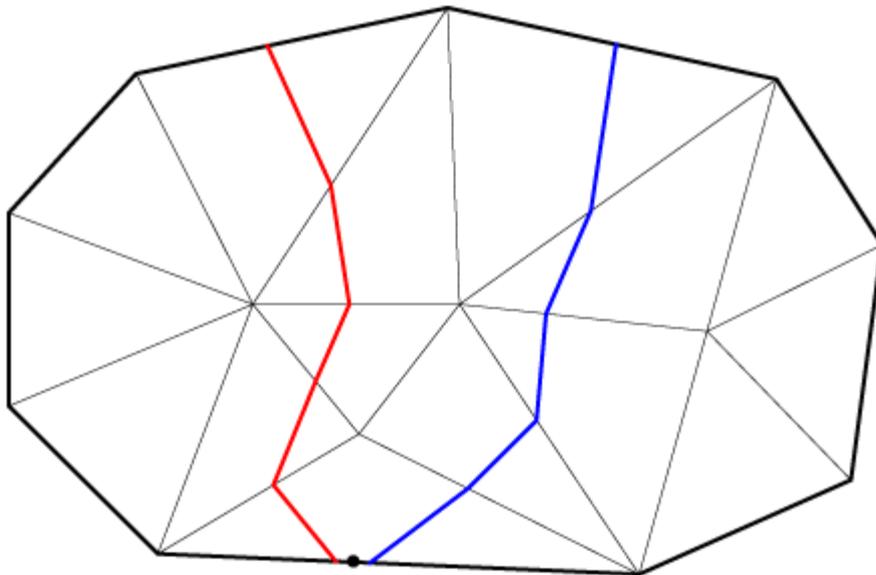


Рис. 10. Выбор точки разбиения для процедуры 6.

На этом рисунке с помощью красной и синих линий показаны линии нулевого уровня, полученные с помощью линейной интерполяции по вершинам триангуляции. Все треугольники, за исключением самого нижнего, имеют ранг не выше 1. Самый нижний треугольник имеет ранг 2 и две точки пересечений линий нулевого уровня с самым нижним ребром. Новая вершина, которая будет добавлена в процедуре 6 обозначена здесь с помощью небольшого черного круга. После того, как эта вершина будет добавлена, точки пересечения линий нулевого с нижним ребром уточнятся.

Если в результате выполнения второй фазы алгоритма было найдено решение (т.е. была найдена вершина, удовлетворяющая условию $\Phi \leq \epsilon$) и это решение оказалось неудовлетворительным для алгоритма обнаружения, то выполняется третья фаза алгоритма. Цель этой фазы состоит в том, чтобы подготовить триангуляцию для поиска дополнительных решений, если таковые существуют. Из текущей триангуляции исключаются все треугольники с

вершиной, соответствующей найденному решению, а также смежные с ними, у которых все вершины удовлетворяют условию $\Phi \leq \varepsilon_1$, где ε_1 – некоторая константа, удовлетворяющая условию $\varepsilon_1 > \varepsilon$. Поиск решений в такой усеченной триангуляции выполняется с помощью процедур второй фазы алгоритма, которые были описаны выше.

Апробация алгоритма

С целью проверки характеристик описанного выше алгоритма использовался тот же набор космических объектов, который был подробно описан ранее в разделе «Численное моделирование». При моделировании использовались следующие значения констант: $N_{min}=6$, $\varepsilon=10^{-6}$ м/с, $\varepsilon_1=10^{-4}$ м/с. Результаты моделирования представлены в таблице 2, структура которой аналогична приведенной ранее таблице 1.

Таблица 2

Результаты численного моделирования для дуг менее 180°

Номер серии	1	2	3	%
Всего реализаций	32740	32740	32740	
Удовлетворяют ограничениям	26221	26150	26084	100.0%
Невязка по скорости менее 1 м/с	20051	20045	19941	76.5%
Невязка по скорости более 1 м/с	6049	5975	6036	23.0%
Нет привязки контрольного трека	82	75	80	0.3%
Решение не найдено	39	55	27	0.2%

Сравнение приведенных результатов с теми, которые были приведены ранее в таблице 1, показывает резкое сокращение числа отказов алгоритма (с 14.9% до 0.2%, т.е. почти на два порядка). Также существенно возросло число объектов, для которых удалось выполнить привязку контрольного трека (с 84.8% до 99.5%).

Также была проведена серия расчетов для случая, когда угловые измерения расположены на расстоянии от 180 до 270 градусов. На практике такая задача представляет интерес, когда проводится совместная обработка оптических обзоров от нескольких наблюдательных средств, разнесенных по долготе, в течение одной ночи. При моделировании использовались те же значения констант алгоритмов, которые были приведены выше. Результаты моделирования представлены в таблице 3.

Таблица 3

Результаты численного моделирования для дуг от 180° до 270°

Номер серии	1	2	3	%
Всего реализаций	16370	16370	16370	
Удовлетворяют ограничениям	10799	10826	10793	100.0%
Невязка по скорости менее 1 м/с	1006	1009	1014	9.3%
Невязка по скорости более 1 м/с	7216	7249	7310	67.3%
Нет привязки контрольного трека	1918	1960	1848	17.6%
Решение не найдено	659	608	621	5.8%

Как видно из таблицы, количественные оценки работы алгоритма в этом случае существенно хуже, чем в предыдущем. Однако на текущем этапе исследований мы рассматриваем полученный результат, как положительный, поскольку он доказывает принципиальную возможность получения решений на дугах более 180 градусов, чего было невозможно добиться с помощью известных модификаций метода Гаусса. Улучшение количественных характеристик получаемых решений для столь длинных дуг является одним из возможных направлений дальнейших исследований.

Заключение

В настоящей работе представлен новый алгоритм первоначального построения орбиты Кеплера по трем угловым измерениям. Представленный алгоритм ориентирован на обнаружение неизвестных космических объектов искусственного происхождения на геоцентрических объектах. При построении алгоритма использовались те же теоретические основы, что в методе Гаусса.

При разработке алгоритма использовались ограничения на наклонные дальности, которые характерны для искусственных объектов на геоцентрических орбитах. Учет этих ограничений позволил создать алгоритм построения области возможных решений для таких объектов. Использование этого алгоритма позволяет без выполнения сложных вычислений убедиться в отсутствии решений в случаях, когда измерения принадлежат к разным объектам, что весьма важно для задач обнаружения неизвестных космических объектов.

Предложенный алгоритм поиска решений основан на триангуляции Делоне в плоскости параметров n_1 , n_2 . По сравнению с известными модификациями метода Гаусса применение предложенного алгоритма имеет ряд очевидных преимуществ:

1. Решения могут быть получены при отсутствии начального приближения с использованием метода Гаусса.

2. Не требуется решать уравнение Лагранжа на промежуточных итерациях.
3. Алгоритм позволяет находить несколько возможных решений поставленной задачи.
4. Алгоритм позволяет находить решения для случаев, когда измерения расположены на дугах длиной более 180 градусов.

Недостатком разработанного алгоритма является сложность его программной реализации по сравнению с известными модификациями метода Гаусса.

Библиографический список

- [1] Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. // М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит. — 1968.
- [2] David A. Vallado. Fundamentals of Astrodynamics and Applications. // Microcosm Press/Springer; 3rd edition — April 20, 2007.
- [3] Boykov V.F., Khutorovsky Z.N., Sbytov N.N. An Algorithm of Preliminary NEO Orbital Parameters Determination Based on Three Optical Positional Measurements. // Proc. the 6th US/Russian Space Surveillance Workshop — Russia, Pulkovo — 2005.
- [4] Richard H. Battin. An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. // American Institute of Aeronautics & Astronautics — 1999.
- [5] Скворцов А. В. Триангуляция Делоне и её применение // Издательство Томского университета — 2002 г. — URL: <http://www.ict.edu.ru/ft/004503/09.pdf>