



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 32 за 2014 г.



Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А.,  
Тишкин В.Ф., Утиралов Д.И.

Реализация граничных  
условий прилипания для  
разрывного метода  
Галеркина

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Реализация граничных условий прилипания для разрывного метода Галеркина / М.Е.Ладонкина [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 32. 16 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-32>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**М.Е.Ладонкина, О.А.Неклюдова,  
В.Ф.Тишкин, Д.И. Утиралов**

**Реализация  
граничных условий прилипания  
для разрывного метода Галеркина**

**Москва — 2014**

**Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф., Утиралов Д.И.**

Реализация граничных условий прилипания для разрывного метода Галеркина

Предложен новый способ реализации граничных условий прилипания для решения уравнений Навье-Стокса разрывным методом Галеркина. Для численного эксперимента была выбрана задача обтекания плоской пластины вязким слабосжимаемым газом. В результате расчета в исследуемой области устанавливается ламинарное течение, скорость которого соответствует закону распределения Блазиуса.

**Ключевые слова:** разрывный метод Галеркина, уравнения Навье-Стокса, граничное условие прилипания

**Marina Eugenievna Ladonkina, Olga Alexandrovna Neklyudova, Vladimir Fedorovich Tishkin, Dmitriy Igorevich Utiralov**

The no-slip boundary conditions for discontinuous Galerkin method

A new way of implementation of no-slip boundary conditions for discontinuous Galerkin method for solving Navier Stokes equations was proposed. The problem of streamline of flat plate by viscous weakly compressible gas was chosen for the numerical experiment. As a result a laminar stream was settled in the chosen area. The velocity distribution corresponds to the Blasius equation.

**Key words:** discontinuous Galerkin method, Navier Stokes equations, no-slip boundary condition

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 14-01-00145\_a.

## Оглавление

Введение .....	3
Метод Галеркина с разрывными базисными функциями для уравнений Навье-Стокса .....	3
Граничное условие прилипания.....	6
Решение тестовой задачи.....	13
Выводы .....	15
Список литературы.....	15

## Введение

Данная работа посвящена решению уравнений Навье-Стокса на треугольных сетках методом Галеркина с разрывными базисными функциями (РМГ), или Discontinuous Galerkin Method (DGM) [1], который характеризуется высоким порядком точности получаемого решения [2-5]. Как принято при решении уравнений второго порядка разрывным методом Галеркина [5], в данной работе уравнения Навье-Стокса записаны в виде системы уравнений первого порядка и решение происходит в два этапа. На первом этапе вычисляются компоненты тензора вязких напряжений, аппроксимация которых, как и аппроксимация решения, в пределах ячейки сетки находится в виде полиномов степени  $p$  с зависящими от времени коэффициентами [5-7], при этом не возникает никаких трудностей. В то время как на следующем этапе, при определении компонент вектора консервативных переменных, могут возникнуть определенные сложности в ячейках на границе области с условием прилипания. В данной работе предложен как алгоритм определения компонент тензора вязких напряжений на границе области с условием прилипания, так и способ вычисления компонент тензора в виде полиномов степени  $p$  в фиктивной ячейке для сохранения сквозного счета.

Для верификации работы предложенных граничных условий использовалась задача об обтекании плоской пластины вязким слабосжимаемым газом, где получено хорошее согласие результатов расчета с профилем Блазиуса.

Авторы выражают искреннюю признательность В.Г. Приймаку за ценные замечания, сделанные во время обсуждения работы.

## Метод Галеркина с разрывными базисными функциями для уравнений Навье-Стокса

Рассмотрим уравнения Навье-Стокса [8], записанные в виде системы уравнений первого порядка, дополненной подходящими начально-краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \partial_t U + \nabla \cdot F(U) - \nabla \cdot G(U, \boldsymbol{\tau}) &= 0, \\ \boldsymbol{\tau} &= \left( \lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \hat{\mathbf{E}}(\operatorname{div} \mathbf{v}) + 2\mu \mathbf{S}(\mathbf{v}), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{v}) = \frac{\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^*}{2},$$

$$U = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{Bmatrix}, F(U) = \begin{pmatrix} F_x(U) \\ F_y(U) \end{pmatrix}, F_x(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E+p)u \end{pmatrix}, F_y(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E+p)v \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$G(U, \boldsymbol{\tau}) = \begin{pmatrix} G_x(U, \boldsymbol{\tau}) \\ G_y(U, \boldsymbol{\tau}) \end{pmatrix}, G_x(U, \boldsymbol{\tau}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} \end{pmatrix}, G_y(U, \boldsymbol{\tau}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $U$  – вектор консервативных переменных,  $F(U)$ ,  $G(U, \boldsymbol{\tau})$  – функции невязкого и вязкого потока соответственно,  $v=(u, v)$  – вектор скорости,  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости,  $\lambda$  – вторая вязкость,  $\boldsymbol{\tau}$  – тензор вязких напряжений.

Для применения разрывного метода Галеркина покроем область  $\Omega$ , на которой ищется решение, треугольной сеткой  $T_h$ . На каждом элементе  $T_j$  приближенное решение системы уравнений (1) будем искать в виде полиномов  $P(x)$  степени  $p$  с зависящими от времени коэффициентами:

$$U_h(x, t) = \sum_{k=0}^{st} U_k(t) \phi_k(x), \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{ijh}(x, t) = \sum_{k=0}^{st} \tau_{ijk}(t) \phi_k(x), \quad i, j = x, y,$$

где  $st$  – размерность пространства полиномов, а  $\phi_k(x)$  – соответствующая базисная функция. В данной работе в качестве базисных функций используется базис Тейлора:

$$\phi_0 = 1, \quad \phi_1 = \frac{x - x_c}{\Delta x}, \quad \phi_2 = \frac{y - y_c}{\Delta y}, \quad (5)$$

где  $x_c, y_c$  – координаты центра масс соответствующего тетраэдра.

Приближенное решение системы (1) в разрывном методе Галеркина ищется как решение следующей системы [1]:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{T_j} \phi_k(\mathbf{x}) \cdot U_h(\mathbf{x}, t) d\Omega + \oint_{\partial T_j} \phi_k(\mathbf{x}) \cdot h_F(U_h^+, U_h^-, n) d\sigma - \\
& - \int_{T_j} \left( \frac{\partial \phi_k(\mathbf{x})}{\partial x} F_x(U_h(\mathbf{x}, t)) + \frac{\partial \phi_k(\mathbf{x})}{\partial y} F_y(U_h(\mathbf{x}, t)) \right) d\Omega - \\
& - \oint_{\partial T_j} \phi_k(\mathbf{x}) \cdot h_G(U_h^+, \boldsymbol{\tau}^+, U_h^-, \boldsymbol{\tau}^-, n) d\sigma + \\
& + \int_{T_j} \left( \frac{\partial \phi_k(\mathbf{x})}{\partial x} G_x(U_h(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)) + \frac{\partial \phi_k(\mathbf{x})}{\partial y} G_y(U_h(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)) \right) d\Omega = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\int_{T_j} \boldsymbol{\tau} \cdot \Phi_k d\Omega &= \oint_{\partial T_j} \left( \lambda - \frac{2}{3} \mu \right) (\Phi_k \cdot \hat{\mathbf{E}}) \cdot h_v(v^+, v^-, n) d\sigma - \\
& - \int_{T_j} \left( \text{grad} \left( \left( \lambda - \frac{2}{3} \mu \right) (\Phi_k \cdot \hat{\mathbf{E}}) \right), \mathbf{v} \right) d\Omega + \oint_{\partial T_j} \mu [h_s(v^+, v^-, n) \cdot \Phi_k] d\sigma - \\
& - \int_{T_j} (\mathbf{v}, \text{div}(\mu \Phi_k)) d\Omega, \quad \forall \phi_k(\mathbf{x}), k = 0..st
\end{aligned} \tag{7}$$

где  $\Phi_k$  – симметричная тензорная функция,  $U_h(\mathbf{x}, t)$  – вектор решения,  $n$  – вектор внешней единичной нормали по границе элемента  $\partial T_j$ .  $h_F(U_h^+, U_h^-, n)$ ,  $h_G(U_h^+, \boldsymbol{\tau}^+, U_h^-, \boldsymbol{\tau}^-, n)$ ,  $h_v(v^+, v^-, n)$ ,  $h_s(v^+, v^-, n)$  – потоковые функции, вычисленные на границе элемента  $\partial T_j$ . Величины, обозначенные через  $U_h^-, \boldsymbol{\tau}^-, v^-$ , вычисляются на границе  $\partial T_j$  элемента  $T_j$  по значениям внутри элемента  $T_j$ , в то время как величины, обозначенные через  $U_h^+, \boldsymbol{\tau}^+, v^+$ , вычисляются на границе  $\partial T_j$  по значениям в соседней к данному элементу  $T_j$  ячейке.  $h_F(U_h^+, U_h^-, n)$  – численная потоковая функция, зависящая от значений приближенного решения по обе стороны границы элемента и от направления единичного нормального вектора  $n$ . Функция  $h_F(\cdot, \cdot, \cdot)$  – функция монотонного численного потока [9-12], для которой выполнено условие согласования

$$h_F(U_h(\mathbf{x}, t), U_h(\mathbf{x}, t), n) = F(U_h(\mathbf{x}, t)). \tag{8}$$

В уравнении (5) на границе элемента необходимо вычислить потоковые значения величин  $h_v$  и  $h_s$ . Для их вычисления используем формулы:

$$h_V(v^+, v^-, n) = \left( \frac{v^+ + v^-}{2}, n \right); \quad (9)$$

$$h_S(v^+, v^-, n) = \frac{v^+ + v^-}{2} \otimes n + n \otimes \frac{v^+ + v^-}{2}.$$

Потоковое значение величины  $h_G(U_h^+, \tau^+, U_h^-, \tau^-, n)$  на границе элемента предлагается вычислять аналогично тому, как это сделано для уравнения теплопроводности [7], используя стабилизирующие добавки.

$$\begin{aligned} \tau^r(U_h^+, \tau^+, U_h^-, \tau^-, n) &= \frac{\tau^+ + \tau^-}{2} + \\ &+ C_1 \left( (v^+ - v^-), n \right) \hat{E} + C_2 \frac{(v^+ - v^-) \otimes n + n \otimes (v^+ - v^-)}{2}, \quad (10) \\ h_G(U_h^+, \tau^+, U_h^-, \tau^-, n) &= G_x(U_h^+, U_h^-, \tau^r) n_x + G_y(U_h^+, U_h^-, \tau^r) n_y. \end{aligned}$$

### Граничное условие прилипания

Рассмотрим треугольник  $T_k$ , расположенный на границе области, на которой задано граничное условие прилипания.

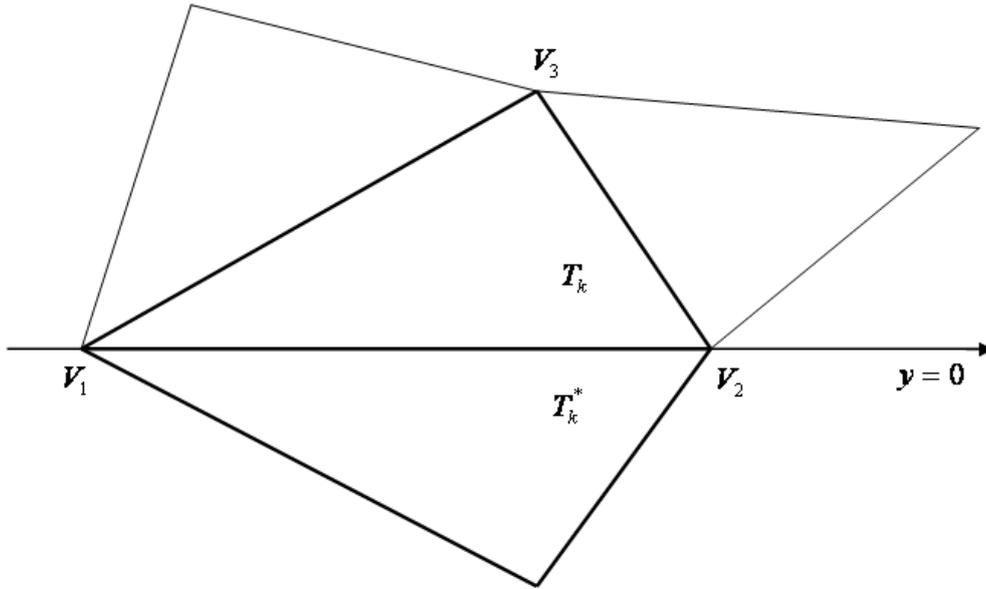


Рис. 1. Треугольник  $T_k$ , расположенный на границе области

Предположим, что одна из сторон  $V_1V_2$  лежит на прямой  $y=0$ , в противном случае мы всегда можем воспользоваться преобразованием координат, так чтобы это условие было выполнено.

Наши уравнения содержат выражения с контурными интегралами, при вычислении которых мы можем столкнуться с проблемой, что одна или 2 стороны ячейки попадают на границу расчетной области.

Условие прилипания характеризуется равенством нулю компонент скорости на границе

$$u=0, \quad v=0. \quad (11)$$

Тогда на границе также выполняются равенства  $\rho u=0$  и  $\rho v=0$ , которые запишем в виде линейных полиномов

$$\begin{aligned} (\rho u)_0 + (\rho u)_1 \left( \frac{x-x_c}{\Delta x} \right) + (\rho u)_2 \left( \frac{y-y_c}{\Delta y} \right) &= 0; \\ (\rho v)_0 + (\rho v)_1 \left( \frac{x-x_c}{\Delta x} \right) + (\rho v)_2 \left( \frac{y-y_c}{\Delta y} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Выпишем условие (12) для вершин  $V_1(x_1,0)$  и  $V_2(x_2,0)$ , принадлежащих граничному ребру  $\rho u|_{V_1}=0$  и  $\rho u|_{V_2}=0$ .

$$\begin{cases} 0 = \rho u_0 + \rho u_1 \frac{(x_1-x_c)}{\Delta x} + \rho u_2 \left( -\frac{y_c}{\Delta y} \right); \\ 0 = \rho u_0 + \rho u_1 \frac{(x_2-x_c)}{\Delta x} + \rho u_2 \left( -\frac{y_c}{\Delta y} \right). \end{cases} \quad (13)$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим:

$$\rho u_1 \left( \frac{x_1-x_2}{\Delta x} \right) = 0.$$

Откуда следует, что  $\rho u_1=0$ . Аналогично получаем  $\rho v_1=0$ .

Также из условия прилипания (12) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial t} &= 0, \\ k \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_0)}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho v_1)}{\partial t} &= 0, \\ k \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_0)}{\partial t} &= 0, \text{ где } k = \frac{-y_c}{\Delta y}.\end{aligned}\quad (15)$$

Распишем подробно уравнения системы (6) для импульса:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^2 \frac{\partial(\rho u)_i}{\partial t} \int_{T_k} \phi_i \phi_j dV + \oint_{\partial T_k} [(\rho u^2 + p)n_x + (\rho uv)n_y] \phi_j dS - \\ - \int_{T_k} \left[ (\rho u^2 + p) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + (\rho uv) \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right] dV -\end{aligned}\quad (16)$$

$$- \oint_{\partial T_k} [\tau_{xx} \cdot n_x + \tau_{yx} \cdot n_y] \phi_j dS + \int_{T_k} \left[ \tau_{xx} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right] dV = 0.$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^2 \frac{\partial(\rho v)_i}{\partial t} \int_{T_k} \phi_i \phi_j dV + \oint_{\partial T_k} [(\rho uv)n_x + (\rho v^2 + p)n_y] \phi_j dS - \\ \int_{T_k} \left[ (\rho uv) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + (\rho v^2 + p) \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right] dV + \oint_{\partial T_k} [\tau_{xy} \cdot n_x + \tau_{yy} \cdot n_y] \phi_j dS -\end{aligned}\quad (17)$$

$$\int_{T_k} \left[ \tau_{xy} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right] dV = 0.$$

Уравнения (16,17) содержат контурные интегралы, при вычислении которых мы используем формулы численного потока вида (8) и (9). Если для вычисления  $h_F(U_h^+, U_h^-, n)$  на ребре треугольника  $T_k$ , расположенного на границе области, достаточно знания газодинамических величин, заданных в фиктивной ячейке, то для определения  $h_G(U_h^+, \boldsymbol{\tau}^+, U_h^-, \boldsymbol{\tau}^-, n)$  необходимо знание и компоненты тензора вязких напряжений.

Для определения значений  $\tau_{xx}|_{\partial T_k}, \tau_{xy}|_{\partial T_k}, \tau_{yy}|_{\partial T_k}$  на границе двух треугольников  $T_k$  и  $T_p$  будем использовать формулы (18).

$$\begin{aligned}
\tau_{xx}^{\bar{A}} &= \frac{\tau_{xx}^k + \tau_{xx}^p}{2} + C_1 \left( (u^k - u^p)n_x + (v^k - v^p)n_y \right) + C_2 (u^k - u^p)n_x, \\
\tau_{xy}^{\bar{A}} &= \frac{\tau_{xy}^k + \tau_{xy}^p}{2} + C_2 \frac{(v^k - v^p)n_x + (u^k - u^p)n_y}{2}, \\
\tau_{yy}^{\bar{A}} &= \frac{\tau_{yy}^k + \tau_{yy}^p}{2} + C_1 \left( (u^k - u^p)n_x + (v^k - v^p)n_y \right) + C_2 (v^k - v^p)n_y.
\end{aligned} \tag{18}$$

Обозначим через  $A_j$ ,  $j = \overline{0,2}$  сумму интегралов в формуле (16), вычисленную от всех известных величин

$$\begin{aligned}
A_j &= -\oint_{\partial T_k} \left[ (\rho u^2 + p)n_x + (\rho uv)n_y \right] \varphi_j dS + \oint_{V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow V_1} \left[ \tau_{xx}^I \cdot n_x + \tau_{xy}^I \cdot n_y \right] \varphi_j dS + \\
&+ \int_{V_1}^{V_2} \left[ \left( \frac{\tau_{xx}^k}{2} + C_2 (u^k - u^{k*})n_x \right) \cdot n_x \right] \cdot \varphi_j dS + \\
&+ \int_{V_1}^{V_2} \left[ \left( \frac{\tau_{xy}^k}{2} + C_2 \frac{v^k n_x + u^k n_y - v^{k*} n_x - u^{k*} n_y}{2} \right) \cdot n_y \right] \cdot \varphi_j dS \\
&+ \int_{T_k} \left[ (\rho u^2 + p) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + (\rho uv) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] dV - \int_{T_k} \left[ \tau_{xx} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] dV,
\end{aligned} \tag{19}$$

$\oint_{V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow V_1}$  – контурный интеграл по двум сторонам треугольника, расположенным внутри расчетной области.

Учитывая нормаль к граничной стороне  $\vec{n} = (0, -1)$ , перепишем систему (16) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho u_0}{\partial t} S_{\Delta} &= A_0 - 0.5 \int_{V_1}^{V_2} \tau_{xy}^{k*} d\Gamma; \\
\frac{\partial \rho u_1}{\partial t} \int_{T_k} \frac{(x - x_c)^2}{\Delta x^2} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial t} \int_{T_k} \frac{(x - x_c)(y - y_c)}{\Delta x \Delta y} &= A_1 - 0.5 \int_{V_1}^{V_2} \tau_{xy}^{k*} \frac{(x - x_c)}{\Delta x} d\Gamma; \\
\frac{\partial \rho u_1}{\partial t} \int_{T_k} \frac{(x - x_c)(y - y_c)}{\Delta x \Delta y} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial t} \int_{T_k} \frac{(y - y_c)^2}{\Delta y^2} &= A_2 - 0.5 \int_{V_1}^{V_2} \tau_{xy}^{k*} \frac{(y - y_c)}{\Delta y} d\Gamma.
\end{aligned} \tag{20}$$

Введем обозначения

$$I_1 = 0.5 \int_{V_1}^{V_2} \tau_{xy}^{k*} d\Gamma, \quad (21)$$

$$I_2 = 0.5 \int_{V_1}^{V_2} \tau_{xy}^{k*} \cdot x d\Gamma.$$

И будем учитывать, что  $I_3 = 0.5 \int_{V_1}^{V_2} \tau_{xy}^{k*} \cdot y d\Gamma = 0.5 \int_{V_1}^{V_2} \tau_{xy}^{k*} \cdot 0 d\Gamma = 0$ . Перепишем

систему (20) в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho u_0}{\partial t} S_\Delta = - \left( \frac{\partial \rho u_2}{\partial t} k \right) S_\Delta = A_0 - I_1; \\ \frac{\partial \rho u_2}{\partial t} \int_{T_k} \frac{(x-x_c)(y-y_c)}{\Delta x \Delta y} dx dy = A_1 - \frac{1}{\Delta x} I_2 + \frac{x_c}{\Delta x} I_1; \\ \frac{\partial \rho u_2}{\partial t} \int_{T_k} \frac{(y-y_c)^2}{\Delta y^2} dx dy = A_2 + \frac{y_c}{\Delta y} I_1. \end{cases} \quad (22)$$

Из первого уравнения выразим  $\frac{\partial \rho u_2}{\partial t} = \frac{(I_1 - A_0) \Delta y}{-y_c S_\Delta}$  и, подставив в третье уравнение, получим уравнение относительно неизвестного  $I_1$ :

$$\frac{(I_1 - A_0) \Delta y}{-y_c S_\Delta} \int_{T_k} \frac{(y-y_c)^2}{\Delta y^2} = A_2 + \frac{y_c}{\Delta y} I_1, \quad (23)$$

из которого следует формула для определения  $I_1$  в явном виде

$$I_1 = \frac{-A_2 y_c S_\Delta + A_0 K_1 \Delta y}{K_1 \Delta y + \frac{y_c}{\Delta y} y_c S_\Delta}, \quad (24)$$

$$\text{где } K_1 = \int_{T_k} \frac{(y-y_c)^2}{\Delta y^2}, K_2 = \int_{T_k} \frac{(x-x_c)(y-y_c)}{\Delta x \Delta y}.$$

Из 2-го уравнения следует

$$I_2 = A_1 \Delta x + I_1 \left( x_c + \frac{K_2 \Delta x \Delta y}{y_c S_\Delta} \right) - \frac{A_0 K_2 \Delta x \Delta y}{y_c S_\Delta}. \quad (25)$$

Повторим аналогичные рассуждения для системы уравнений (17), обозначив через  $C_j$  сумму интегралов (17), вычисленную от всех известных величин.

$$\begin{aligned}
C_j = & - \oint_{\partial T_k} [(\rho uv)n_x + (\rho v^2 + p)n_y] \varphi_j dS + \\
& + \oint_{V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow V_1} [\tau_{xy}^{\Gamma} \cdot n_x + \tau_{yy}^{\Gamma} \cdot n_y] \varphi_j dS + \\
& + \int_{V_1}^{V_2} \left[ \left( \frac{\tau_{xx}^k}{2} + C_2(u^k - u^{k*})n_x \right) \cdot n_x \right] \cdot \varphi_j dS + \int_{V_1}^{V_2} \frac{\tau_{yy}^k}{2} + (v_p - v_k)n_x dS + \\
& + \int_{V_1}^{V_2} \frac{\tau_{xy}^k}{2} + \frac{v_p n_x + u_p n_y - v_k n_x - u_k n_y}{2} dS \\
& + \int_{T_k} [(\rho uv) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + (\rho v^2 + p) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}] dV - \int_{T_k} \left[ \tau_{xy} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] dV.
\end{aligned} \tag{26}$$

Учитывая, что нормаль к граничной стороне  $\vec{n} = (0, -1)$ , перепишем систему в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho v_0}{\partial t} S_{\Delta} &= C_0 - 0.5 \int_{V_1}^{V_2} \tau_{yy}^{k*} d\Gamma; \\
\frac{\partial \rho v_1}{\partial t} \int_{T_k} \frac{(x - x_c)^2}{\Delta x^2} + \frac{\partial \rho v_2}{\partial t} \int_{T_k} \frac{(x - x_c)(y - y_c)}{\Delta x \Delta y} &= C_1 - 0.5 \int_{V_1}^{V_2} \tau_{yy}^{k*} \frac{(x - x_c)}{\Delta x} d\Gamma; \\
\frac{\partial \rho v_1}{\partial t} \int_{T_k} \frac{(x - x_c)(y - y_c)}{\Delta x \Delta y} + \frac{\partial \rho v_2}{\partial t} \int_{T_k} \frac{(y - y_c)^2}{\Delta y^2} &= C_2 - 0.5 \int_{V_1}^{V_2} \tau_{yy}^{k*} \frac{(y - y_c)}{\Delta y} d\Gamma.
\end{aligned} \tag{27}$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned}
I_4 &= 0.5 \int_{V_1}^{V_2} \tau_{yy}^{k*} d\Gamma, \\
I_5 &= 0.5 \int_{V_1}^{V_2} \tau_{yy}^{k*} x d\Gamma, \\
I_6 &= 0.5 \int_{V_1}^{V_2} \tau_{yy}^{k*} y d\Gamma = 0.5 \int_{V_1}^{V_2} \tau_{yy}^{k*} \cdot 0 d\Gamma = 0,
\end{aligned} \tag{28}$$

приходим к системе:

$$\tag{29}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial \rho v_2}{\partial t} \left( \frac{y-y_c}{\Delta y} \right) S_\Delta = C_0 - I_4; \\ \frac{\partial \rho v_2}{\partial t} \int_{T_k} \frac{(x-x_c)(y-y_c)}{\Delta x \Delta y} = C_1 - \frac{1}{\Delta x} I_5 + \frac{x_c}{\Delta x} I_4; \\ \frac{\partial \rho v_2}{\partial t} \int_{T_k} \frac{(y-y_c)^2}{\Delta y^2} = C_2 + \frac{y_c}{\Delta y} I_4; \end{cases}$$

из которой нетрудно выразить величины  $I_4, I_5$

$$I_4 = \frac{-C_2 y_c S_\Delta + C_0 K_1 \Delta y}{K_1 \Delta y + \frac{y_c}{\Delta y} y_c S_\Delta}; \quad (30)$$

$$I_5 = C_1 \Delta x + I_4 \left( x_c + \frac{K_2 \Delta x \Delta y}{y_c S_\Delta} \right) - \frac{C_0 K_2 \Delta x \Delta y}{y_c S_\Delta}.$$

В целях сохранения единообразия схемы вычислений определим коэффициенты разложения компонент тензора вязких напряжений в фиктивной ячейке:

$$\tau \tau_{xx}^{k*} = \sum_{i=0}^2 \tau_{xx_i}^{k*} \varphi_i, \quad \tau \tau_{xy}^{k*} = \sum_{i=0}^2 \tau_{xy_i}^{k*} \varphi_i, \quad \tau \tau_{yy}^{k*} = \sum_{i=0}^2 \tau_{yy_i}^{k*} \varphi_i.$$

Расписав подробно интегралы  $I_1-I_6$ , получим следующую систему:

$$\begin{aligned} 2I_1 &= \int_{V_1}^{V_2} \tau_{xy}^{k*} d\Gamma = \tau_{xy_0}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} 1 \cdot d\Gamma + \frac{1}{\Delta x} \tau_{xy_1}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} (x-x_c) d\Gamma + \frac{1}{\Delta y} \tau_{xy_2}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} (y+y_c) d\Gamma, \\ 2I_2 &= \int_{V_1}^{V_2} \tau_{xy}^{k*} x d\Gamma = \tau_{xy_0}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} x \cdot d\Gamma + \frac{1}{\Delta x} \tau_{xy_1}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} (x-x_c) x d\Gamma + \frac{1}{\Delta y} \tau_{xy_2}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} (y+y_c) x d\Gamma, \\ 2I_3 &= \int_{V_1}^{V_2} \tau_{xy}^{k*} y d\Gamma = \tau_{xy_0}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} y \cdot d\Gamma + \frac{1}{\Delta x} \tau_{xy_1}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} (x-x_c) y d\Gamma + \frac{1}{\Delta y} \tau_{xy_2}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} (y+y_c) y d\Gamma, \quad (31) \\ 2I_4 &= \int_{V_1}^{V_2} \tau_{yy}^{k*} d\Gamma = \tau_{yy_0}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} 1 \cdot d\Gamma + \frac{1}{\Delta x} \tau_{yy_1}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} (x-x_c) d\Gamma + \frac{1}{\Delta y} \tau_{yy_2}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} (y+y_c) d\Gamma, \\ 2I_5 &= \int_{V_1}^{V_2} \tau_{yy}^{k*} x d\Gamma = \tau_{yy_0}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} x \cdot d\Gamma + \frac{1}{\Delta x} \tau_{yy_1}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} (x-x_c) x d\Gamma + \frac{1}{\Delta y} \tau_{yy_2}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} (y+y_c) x d\Gamma, \end{aligned}$$

$$2I_6 = \int_{V_1}^{V_2} \tau_{yy}^{k*} y d\Gamma = \tau_{yy_0}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} y \cdot d\Gamma + \frac{1}{\Delta x} \tau_{yy_1}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} (x - x_c) y d\Gamma + \frac{1}{\Delta y} \tau_{yy_2}^{k*} \int_{V_1}^{V_2} (y + y_c) y d\Gamma.$$

Все интегралы в правой части системы (31) могут быть легко вычислены:

$$\int_{x_1}^{x_2} 1 dx = x_2 - x_1;$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{x - x_c}{\Delta x} dx = \frac{0.5}{\Delta x} (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - \frac{x_c}{\Delta x} (x_2 - x_1);$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{y_c}{\Delta y} dx = \frac{y_c}{\Delta y} (x_2 - x_1);$$

$$\int_{x_1}^{x_2} x dx = 0.5(x_2 - x_1)(x_2 + x_1);$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{x(x - x_c)}{\Delta x} dx = \frac{1}{3\Delta x} (x_2^3 - x_1^3) - \frac{x_c}{2\Delta x} (x_2 - x_1)(x_2 + x_1);$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{x(y + y_c)}{\Delta y} dx = \frac{y_c}{2\Delta y} (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Третье и шестое уравнения системы (31) автоматически обращаются в тождества на прямой  $y=0$ , поэтому коэффициенты уравнения могут быть произвольными. Коэффициенты разложения компоненты тензора вязких напряжений  $\tau_{xx_0}, \tau_{xx_1}, \tau_{xx_2}$  также задаются произвольно. Положим их равными 1.

## Решение тестовой задачи

Для численного эксперимента была выбрана задача обтекания плоской пластины вязким слабосжимаемым газом, при этом была выделена небольшая область  $[X] \times [Y] = (40:46) \times (0:12.6)$ , на которой течение остается ламинарным. В начальный момент времени во всей области были заданы следующие газодинамические параметры: плотность  $\rho = 1$ , давление  $p = 0,5$ , скорость  $(u, v) = (0,3, 0)$ , скорость на бесконечности  $u_\infty = 0,3$ , коэффициент динамической вязкости  $\mu = 0,01$ , коэффициент второй вязкости полагаем равным нулю, показатель адиабаты  $\gamma = 7/5$ .

На левой и правой границах области компоненты скорости  $u(x, y)|_{x=40}$ ,  $u(x, y)|_{x=46}$  и  $v(x, y) = -\int_0^y \frac{du}{dx} dy$  распределены в соответствии с законом Блазиуса. На нижней границе задано условие прилипания, на верхней – равенство завихренности нулю  $\frac{du(x, y)}{dy} - \frac{dv(x, y)}{dx} = 0$ .

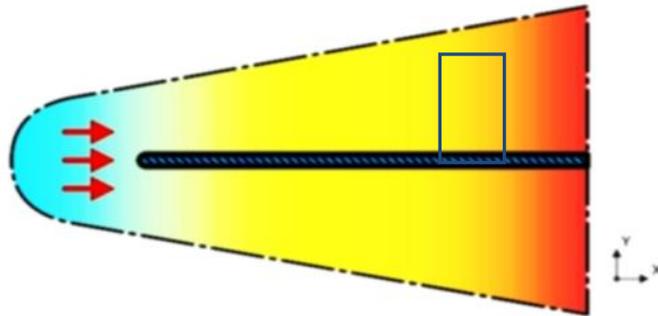


Рис. 2. Обтекание плоской пластины

В результате расчета в исследуемой области устанавливается ламинарное течение, скорость которого соответствует закону распределения Блазиуса. Проводилось сравнение распределения скорости в различных областях  $(x, y)|_{x=const}$  с точным профилем Блазиуса на момент времени  $T = 12$ .

На рис.4 сплошной зеленой линией изображен точный профиль Блазиуса, красными точками – профиль, полученный в расчетах, соответствующий  $x = 43$ .

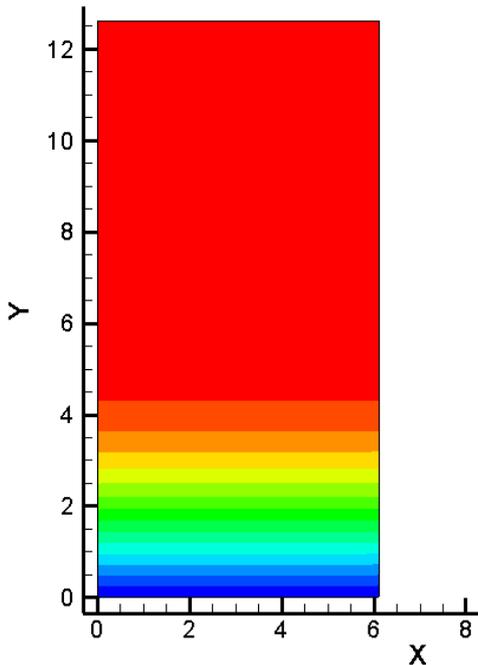


Рис. 3. Распределение плотности в момент времени  $T=12$

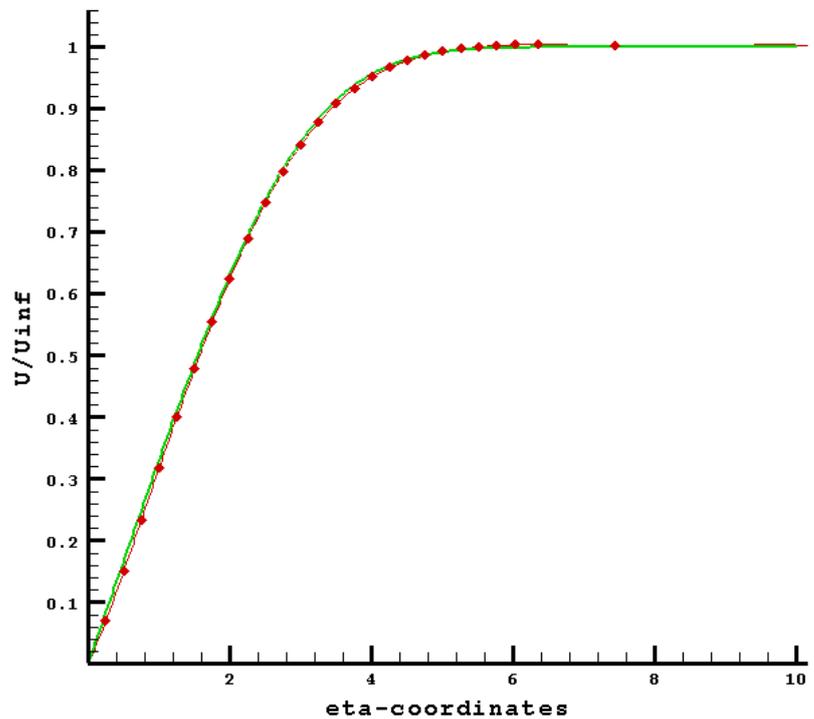


Рис. 4. Распределение скорости вдоль прямой  $x=43$

## Выводы

Результаты расчетов показали возможность применения описанного в данной работе способа вычисления граничных условий прилипания для решения уравнений Навье-Стокса разрывным методом Галеркина.

## Список литературы

1. Cockburn Bernardo. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations Lecture Notes in Mathematics, 1998, Vol. 1697, 151-268.
2. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 34. 31 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-34>

3. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Математическое моделирование 2012. т.24. N12.
4. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Лимитер повышенного порядка точности для разрывного метода Галеркина на треугольных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 53. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-53>
5. Bassi F., Rebay S. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations. // Journal of Computational Physics 1997, 131, 267–279.
6. Волков А. В. Метод численного исследования обтекания пространственных конфигураций путем решения уравнений Навье-Стокса на основе схем высокого порядка точности. / Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, М., 2010
7. Arnold D.N., Brezzi F., Cockburn B., Marini L.D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. // SIAM Journal on Numerical Analysis, 2002, 29, pp. 1749–1779.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / Теоретическая физика: Т. VI. – М.: Физматлит, 2001.
9. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction. Berlin: Springer. 1999.
10. Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1954, 7, №1, 159 -193.
11. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб., 1959, 47(89):3, 271–306.
12. Русанов В.В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961, т. I, №2, 267- 279.