ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 23 за 2014 г.

Варин В.П.

Плоские разложения и их приложения

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

В.П. Варин

ПЛОСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Москва, 2014

УДК 521.1+531.314

В.П. Варин. Плоские разложения и их приложения. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2014.

Рассматриваются полиномиальные ОДУ вблизи вырожденной особой точки. Изучаются семейства решений ОДУ, экспоненциально близких решению, представленному формальным степенным рядом. Показано, что для систем ОДУ на плоскости все решения такого семейства однозначно определяются в виде ряда из плоских функций. В настоящее время такие (плоские) разложения мало изучены. Степенные ряды, входящие в плоские разложения, могут как сходиться, так и расходиться. Приводятся примеры вычисления плоских разложений и рассматриваются их приложения. Вычислено плоское разложение решения проблемы Блазиуса вблизи бесконечности и показано, что это асимптотическое разложение сращивается со степенным разложением Блазиуса вблизи нуля.

V.P. Varin. Flat expansions and their applications. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2014.

We consider polynomial ODEs at degenerate singularities. We study families of solutions to an ODE which are exponentially close to a solution represented by a formal power series. We demonstrate that for plane polynomial systems all solutions of such a family are uniquely determined as series of flat functions. At present, such (flat) expansions are poorly understood. Power series involved in flat expansions may converge or diverge. We give some examples of computation of flat expansions and consider their applications. We compute a flat expansion of the solution to the Blasius problem at infinity and demonstrate that this asymptotic expansion can be matched with the Blasius power series expansion at the origin.

§ 1. Введение

Разложения функций и, в частности, решений ОДУ вблизи особой точки в асимптотические ряды по элементарным и специальным функциям всегда имели не только теоретическое, но также и большое вычислительное значение.

В настоящее время эта классическая область анализа бурно развивается, вероятно, не в последнюю очередь благодаря новым техническим возможностям, которые предоставляют компьютеры.

Здесь невозможно дать даже краткого обзора новых направлений исследований в этой области и новых понятий, таких, например, как гиперасимптотики, суперасимптотики, и обобщающее их понятие трансряда (см. [1, 2] и вложенные ссылки).

В этой статье рассматривается весьма частный случай трансрядов, который мы называем *плоскими разложениями*.

Смысл этого понятия можно пояснить на элементарном классическом примере обычного степенного асимптотического разложения, который можно найти в любом руководстве по асимптотическому анализу (см., например, [3, стр. 17]).

Примеры такого рода приводятся обычно вместе с пояснением, что степенной асимптотический ряд представляет функцию лишь приближенно, т.е. с точностью до некоторой плоской функции, которая не влияет на степенной ряд, так как она асимптотически меньше (или больше) любого члена асимптотического разложения.

Плоские разложения возникают естественным образом, когда мы пытаемся выяснить природу плоской добавки к степенному асимптотическому разложению.

Если эту плоскую добавку удается вычислить, то немедленно возникает необходимось вычислить следующую плоскую добавку, так как квадрат плоской функции асимптотически меньше ее самой, и т.д.

В такой общей формулировке эта проблема не обозрима и не представляет для нас интереса, так как мы будем рассматривать не асимптотические ряды вообще, а лишь асимптотические ряды, которые являются формальными решениями ОДУ.

Асимптотические ряды, вообще говоря, нельзя дифференцировать, но эти последние дифференцировать по определению можно.

Рассмотрим простейший из возможных нетривиальных примеров алгебраических ОДУ: полиномиальную автономную систему на плоскости, которая записывается в виде одного уравнения первого порядка

$$p(x, y)dy - q(x, y)dx = 0, \tag{1}$$

где p и q – полиномы от x, y.

Предположим, что начало координат является немонодромной особой точкой системы (1). Тогда существуют характеристические траектории, входящие в особую точку [4, стр. 89]. Качественное поведение таких траекторий хорошо изучено.

Однако если рассматривать проблему конструктивного описания таких траекторий, т.е. представления этих траекторий вблизи особенности в виде некоторых рядов или разложений, то сразу возникает ряд нерешенных проблем, одна из которых – это какого типа разложение следует искать.

Тот факт, что такое разложение окажется трансрядом, не вызывает сомнения, однако и пользы от данного наблюдения не много.

Проблема конструктивного описания траекторий, входящих в особенность, возникает, например, в численном анализе. Применение стандартных численных процедур возможно только в области, где векторное поле аналитично. Вычисление начального участка траектории по его разложению вблизи особой точки позволяет отступить от сингулярности и свести задачу к стандартной для численного анализа. Для этих целей главный член асимптотики решения редко бывает достаточным, так как вблизи сингулярности траектории могут быть сильно неустойчивыми, и приближение к решению требуется с большой точностью.

До недавнего времени были хорошо изучены два типа трансрядов для решений уравнения (1), входящих в особую точку:

(а) степенные разложения по целым или рациональным степеням независимой переменной, в том числе включающие произвольную константу;

(б) так называемые пси-ряды [5, стр. 249], т.е. степенные ряды по иррациональным степеням независимой переменной; или степенные ряды с коэффициентами, зависящими от логарифма независимой переменной.

Но возможные типы разложений этим не могут исчерпываться, что показывает классический (слегка модифицированный) пример Эйлера [6, стр. 220] – уравнение

$$x^2 y' = y - x, \tag{2}$$

которое имеет решение в виде формального степенного ряда

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)!\, x^k. \tag{3}$$

На самом деле, каждому формальному разложению решения ОДУ соответствует некоторая функция, которая является фактическим решением этого уравнения (см. [7]). Иногда такая функция может быть восстановлена по ее степенному (расходящемуся) ряду с точностью до плоской функции.

Решение (3) является частным решением уравнения Эйлера. Общее (формальное) решение уравнения (2) записывается в виде

$$y(x) = y_0(x) + C\mathrm{e}^{-1/x}, \tag{4}$$

где C – произвольная константа.

Решение (4) дает простейший пример плоской добавки к частному степенному решению (3), представленному асимптотическим рядом.

Если взять возмущение уравнения (2), добавив к правой части нелинейные по x и y члены, то главный член асимптотики степенного решения (3), т.е. $y \asymp x$, сохранится, что легко проверить. Если предположить, что плоская добавка сохранится (или вообще имеется) у решения модифицированного уравнения (мы покажем, что это так), то эта добавка умножится сама на себя и даст плоские функции большего порядка малости, т.е. ряд из плоских функций.

Как будет показано, общее решение в таких случаях представляется в виде формального ряда по плоским функциям, т.е. функциям, убывающим (либо возрастающим) быстрее любой степени.

Решения ОДУ в виде трансрядов этого типа мало изучены. Примеры таких (экспоненциальных) трансрядов приводились в качестве решения некоторых интегрируемых уравнений Риккати [2, стр. 46].

В этой работе мы дадим необходимое и достаточное условие существования формальных разложений решений уравнения (1) вблизи особенности (начала координат) по плоским функциям. Мы покажем, что такое разложение (если существует) – единственно и записывается в следующем виде:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C^k \mathrm{e}^{kR(x)} y_k(x), \tag{5}$$

где C – произвольная вещественная константа; $y_0(x)$ – формальный степенной ряд по рациональным возрастающим степеням x; $y_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ – формальные степенные ряды по рациональным или вещественным возрастающим степеням x (коэффициент при младшем члене ряда $y_1(x)$ равен 1 ввиду произвольности C); $R(x)$ – конечная сумма мономов (кратко: *полином*), имеющих отрицательные рациональные степени x.

Экспоненциальные трансряды часто упоминаются в одном контексте с расходящимися степенными рядами, так что может сложиться впечатление, что здесь существует причинно-следственная связь. Однако это не так. Формальные степенные ряды $y_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots$, входящие в разложение (5), могут как расходиться, так и сходиться, а также обрываться (т.е. быть полиномами). Например, в уравнении (2): $y_0(x)$ – расходится, $y_1(x) = 1$, $y_k(x) = 0$, $k = 2, \ldots$

Более содержательный пример можно сконструировать следующим образом.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$y(x) = \frac{P(x)}{1 - C\,Q(x)\mathrm{e}^{R(x)}}, \tag{6}$$

где P и Q – рациональные функции, а $R(x)$ – полином по отрицательным степеням x. Разлагая правую часть уравнения (6) по степеням C, получим разложение вида (5), где все ряды сходятся, включая $y_0(x) = P(x)$. Если продифференцировать уравнение (6) по x и подставить туда константу C, найденную из уравнения (6), то в результате получается нелинейное уравнение вида (1), имеющее функцию (6) в качестве общего решения. ∎

Статья имеет следующую структуру.

В § 2 приводится необходимое и достаточное условие существования разложения (5). Необходимость при этом эквивалентна существованию полинома $R(x)$ нужного вида, который находится однозначно вместе с первой плоской добавкой. Условие существования плоской добавки является и достаточным, что доказывается построением разложения (5) по индукции.

В § 3 даются несколько примеров вычисления рядов (5). Ряды $y_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ вычисляются методом неопределенных коэффициентов. При этом результаты § 2 гарантируют разрешимость всех линейных уравнений для коэффициентов, и логарифмы в степенных разложениях $y_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ не возникают.

В § 4 рассматривается приложение плоских рядов к классической проблеме Блазиуса [8].

Блазиус был, вероятно, одним из первых, кто вычислил плоский трансряд (по крайней мере, первые 2 его члена), и попытался применить его для решения задачи о погранслое.

По-видимому, никто (включая самого Блазиуса) не обратил внимания на новую природу того объекта, который удалось вычислить Блазиусу. Напротив, Блазиус подвергся критике за то, что безо всякого обоснования использовал асимптотические ряды в вычислениях и, соответственно, получил весьма грубое приближение.

Мы покажем, что трудности, с которыми столкнулся Блазиус, были скорее технического, нежели принципиального характера. Иными словами, метод Блазиуса, который состоит в сращивании степенного разложения в окрестности нуля с асимптотическим разложением в окрестности бесконечности, – работает.

С другой стороны, мы покажем, что оптимизм Блазиуса относительно того, что его асимптотический ряд может быть продолжен с помощью тех же функций, что участвовали в вычислении первых двух членов, оказался не оправданным.

На самом деле, начиная с третьей плоской добавки появляются новые трансценденты, которые не выражаются через известные специальные функции.

Таким образом, асимптотический ряд Блазиуса следует искать в виде ряда (5), который вычисляется алгоритмически и служит, в свою очередь, асимптотическим разложением для этих новых трансцендентов.

§ 2. Существование и единственность плоских разложений

Предположим, что уравнение (1) имеет решение $y_0(x)$ в виде формального степенного ряда по возрастающим рациональным степеням x. Коэффициенты ряда $y_0(x)$ обычно не могут быть выражены в общем виде как функции номера члена ряда, однако всегда можно предъявить рекуррентную формулу, по которой они вычисляются однозначно. Случаи, когда ряд $y_0(x)$ обрывается, т.е. $y_0(x)$ является полиномом, или вообще отсутствует, т.е. $y_0(x) \equiv 0$, и решение уравнения (1) начинается прямо с плоской добавки, – не исключаются.

Теорема 1. *Пусть уравнение* (1) *имеет решение в виде формального степенного ряда* $y_0(x)$ *по возрастающим рациональным степеням* x. *Уравнение* (1) *имеет однопараметрическое семейство формальных решений вида* (5) *тогда и только тогда, когда степенное решение* $y_0(x)$ *имеет плоскую добавку.*

Доказательство. Найдем сначала необходимое и достаточное условие того, что решение $y_0(x)$ имеет плоскую добавку. Для этого запишем решение в виде $y(x) = y_0(x) + z_1(x)$, где $z_1(x)$ – некоторая функция, убывающая (возрастающая) быстрее любой степени x при $x \to 0$. Линеаризуя уравнение (1) на решении $y_0(x)$, получаем уравнение для функции $z_1(x)$

$$L(z_1(x)) := p(x, y_0(x)) z_1'(x) - \left(q_y(x, y_0(x)) - p_y(x, y_0(x)) y_0'(x)\right) z_1(x) = 0, \quad (7)$$

где $p_y = \partial p/\partial y$, $q_y = \partial q/\partial y$. Уравнение (7) имеет решение

$$z_1(x) = C \exp\left(\int_0^x S(t)dt\right), \quad (8)$$

где C – произвольная вещественная константа, и

$$S(x) = \frac{q_y(x, y_0(x)) - p_y(x, y_0(x)) y_0'(x)}{p(x, y_0(x))}.$$

Функция $S(x)$ является отношением двух рядов по возрастающим степеням x. Разложим ее в ряд. Пусть $S(x) = B_r x^{r-1} + \ldots$ Условие

$$r < 0 \tag{9}$$

является необходимым и достаточным для существования плоской добавки. Достаточность очевидна, а необходимость следует из того, что если (9) не верно, то после интегрирования в формуле (8) в показателе экспоненты будут только положительные степени x и, возможно, логарифм (при $r = 0$), т.е. $z_1(x)$ представляется в виде степенного ряда.

Проведем почленное интегрирование степенного ряда $S(x)$ и выделим члены с отрицательными степенями, которых может быть только конечное число. Их оставим в экспоненте. Члены с положительными степенями и логарифм в экспоненте можно переразложить в степенной ряд (см. Замечание 1). Таким образом,

$$z_1(x) = C\mathrm{e}^{R(x)} y_1(x), \tag{10}$$

как и требовалось согласно формуле (5). Здесь полином $R(x) = Bx^r + \ldots$ и ряд $y_1(x)$ определяются однозначно ($B = B_r/r$, см. Замечание 2).

Рассуждая по индукции, представим решение уравнения (1) в виде

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{l=1}^{k-1} C^l \mathrm{e}^{lR(x)} y_l(x) + C^k z_k(x) + O(C^k), \tag{11}$$

т.е. найдем k-ю плоскую добавку. Для этого подставим решение (11) в уравнение (1) и разложим его в ряд Тейлора по C.

Уравнение для $z_k(x)$ имеет вид

$$L(z_k(x)) = \mathrm{e}^{kR(x)} F_k(x), \tag{12}$$

т.е. уравнение для $z_k(x)$ является неоднородным уравнением (7), где вместо $z_1(x)$ стоит $z_k(x)$ и вместо нуля в правой части стоит однородная функция от $\mathrm{e}^{R(x)}$ степени k с коэффициентами из степенных рядов, определяемых ранее найденными $y_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Последнее утверждение следует из того, что степень экспоненты не меняется при дифференцировании и равна k в k-м члене разложения уравнения (1) в ряд Тейлора по C. Таким образом, $F_k(x)$ – известный нам степенной ряд.

Будем решать неоднородное уравнение (12) методом вариации постоянной. Подставим функцию $z_k(x)$ в виде $z_k(x) = W_k(x) y_1(x)$ в уравнение (12) и учтем при этом формулу (7) для однородного уравнения. Тогда для функции $W_k(x)$ получим уравнение

$$W_k'(x) - R'(x) W_k(x) = \frac{\mathrm{e}^{kR(x)} F_k(x)}{p(x, y_0(x)) y_1(x)}. \tag{13}$$

Подставим в уравнение (13) функцию $W_k(x)$ в виде $W_k(x) = \mathrm{e}^{kR(x)}w_k(x)$. Для функции $w_k(x)$ получим уравнение

$$w_k'(x) + (k-1)R'(x)w_k(x) = \frac{F_k(x)}{p(x, y_0(x))y_1(x)}. \qquad (14)$$

Общее решение уравнения (14) включает одну плоскую добавку $C_k \exp(-(k-1)R(x))$, которой следует пренебречь, так как эта компонента решения изменит только первую плоскую добавку (10), которая уже найдена. Поэтому доказательство будет завершено, если доказать, что решение уравнения (14) однозначно находится в виде степенного ряда.

Сделаем в уравнении (14) замену независимой переменной в виде сходящегося степенного ряда $x = u + o(u)$ таким образом, что полином $R(x) = Bx^r + \dots$ преобразуется в моном Bu^r. Такая замена, очевидно, существует и единственна в силу теоремы об обратной функции. Тогда уравнение (14) записывается в виде

$$\frac{dw_k(u)}{du} + B(k-1)ru^{r-1}w_k(u) = (1 + O(u))\frac{F_k(x(u))}{p(x(u), y_0(x(u)))y_1(x(u))}, \qquad (15)$$

где $O(u)$ – ряд по положительным рациональным степеням u.

Уравнение (15) линейно, и в правой части стоит степенной ряд. Поэтому достаточно доказать разрешимость уравнения (15) в виде степенного ряда, когда в правой части стоит моном u^s с произвольной степенью s. Эта разрешимость следует из Леммы 1. ■

Лемма 1. *Пусть $r < 0$, $B \neq 0$, и s – произвольная вещественная константа. Тогда уравнение*

$$\frac{dw(x)}{dx} + Brx^{r-1}w(x) = x^{s-1}$$

однозначно разрешимо в виде формального степенного ряда

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{s-mr}}{B^m r^m} \prod_{k=1}^{m-1}(kr - s) = \frac{x^{s-r}}{Br\Gamma\left(1 - \frac{s}{r}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n + 1 - \frac{s}{r}\right) x^{-nr} B^{-n}. \qquad (16)$$

При $s/r \in \mathbb{N}$ ряд (16) обрывается.

Доказательство проводится прямой подстановкой.

Замечание 1. В случае, если коэффициенты полиномов $p(x, y)$ и $q(x, y)$ в уравнении (1) иррациональны, коэффициент при логарифме в формуле (8) после интегрирования ряда $S(x)$ может быть иррациональным. Обозначим его g. Если в разложении (5) C заменить на Cx^g, то степенные ряды $y_k(x)/x^{kg}$, $k = 1, 2, \dots$ будут иметь рациональные степени (см. Пример 6).

Замечание 2. Функция $z_1(x)$ убывает быстрее любой степени x при подходящих знаках x и B при $r < 0$. В этом случае семейство траекторий (5) (напомним, что формальным разложениям соответствуют фактические решения ОДУ, см. [7]) входит в особую точку, если ряд $y_0(x)$ включает только положительные степени x. Однако все выкладки остаются в силе для любых знаков x и B. Такие функции, возможно, описывают асимптотику транзитных траекторий вблизи решения $y_0(x)$, которое в этом случае может начинаться с отрицательных степеней x.

§ 3. Примеры вычисления плоских разложений

В Примере 1 приводится первый интеграл уравнения, разложение (5) решений которого можно получить как из первого интеграла (6), так и из самого уравнения. Пример 1 можно обобщить, если взять первый интеграл в виде некоторой алгебраической функции от x, y и $C\exp(R(x))$, и, продифференцировав первый интеграл (возможно, несколько раз), исключить экспоненту. В этом случае может оказаться, что разложение решения проще получить прямо из дифференциального уравнения, нежели выделять разложение решения из первого интеграла. В таких случаях, очевидно, все ряды будут сходиться.

Пример 2. Рассмотрим первый интеграл вида

$$y(x) = \frac{x^2(x^2+y(x)^2)}{2x-y(x)}\left(x^2+y(x)^2+C\exp((x-1)/x^2)\right)^{-1}. \qquad (17)$$

При $C = 0$ уравнение (17) имеет кратный корень $y(x) = x$. При $C \neq 0$ этот корень расщепляется таким образом, что не существует вещественного разложения решения по C. Тем не менее, одно из решений (5) дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &2\,x^3\left(x^4-y^4-x^2y^2+3\,xy^3\right)y' = y\,(6\,x^6-6\,x^2y^2+6\,xy^3+2\,x^5\\ &-6\,x^5y-3\,x^4y+xy^4+4\,x^4y^2-4\,x^4+3\,x^3y^2+6\,x^3y-3\,x^2y^3-2\,y^4), \end{aligned} \qquad (18)$$

имеющего первый интеграл (17), легко вычисляется и имеет вид

$$y(x) = x+a-\frac{a^2}{2\,x}-\frac{a^3}{8\,x^2}+\frac{3\,a^4}{4\,x^3}-\frac{145\,a^5}{128\,x^4}+O(a^6),\ a = 1/2\,\sqrt{-2\,C}\exp\left(\frac{x-1}{2\,x^2}\right).$$

Отметим, что дифференциальное уравнение (18) обладает в нуле еще тремя плоскими разложениями, два из которых комплексные. Комплексные разложения, как и связанное с ними явление Стокса, мы не рассматриваем. ■

Следующий пример показывает, что существование плоской добавки не связано с наличием горизонтального ребра диаграммы Ньютона ([5, стр. 94]).

Пример 3. Рассмотрим уравнение, диаграмма Ньютона которого имеет одно ребро, обращенное к началу координат:

$$x^4 y' = y^3 - x^3. \tag{19}$$

Уравнение (19) имеет одно степенное решение с асимптотикой $y(x) \asymp x$. Вычислим отрезок степенного ряда $y_0(x)$ и по нему определим полином $R(x) = -3/x$. Следуя алгоритму § 2, получаем плоское разложение решения

$$\begin{aligned} &y = x + \tfrac{1}{3}\,x^2 + \tfrac{1}{9}\,x^3 + \tfrac{2}{81}\,x^4 - \tfrac{2}{243}\,x^5 - \tfrac{5}{243}\,x^6 - \tfrac{181}{6561}\,x^7 - \tfrac{760}{19683}\,x^8 + \ldots \\ &+a\left(x^2 + x^3 + \tfrac{37}{54}\,x^4 + \tfrac{59}{162}\,x^5 + \tfrac{775}{5832}\,x^6 - \tfrac{79}{9720}\,x^7 - \tfrac{426829}{4723920}\,x^8 + \ldots\right) \\ &+a^2\left(x^3 + 2\,x^4 + \tfrac{58}{27}\,x^5 + \tfrac{16}{9}\,x^6 + \tfrac{782}{729}\,x^7 + \tfrac{5956}{10935}\,x^8 - \tfrac{42716}{295245}\,x^9 + \ldots\right) \\ &+a^3\left(\tfrac{7}{6}\,x^4 + \tfrac{31}{9}\,x^5 + \tfrac{142}{27}\,x^6 + \tfrac{5641}{972}\,x^7 + \tfrac{57637}{11664}\,x^8 + \tfrac{37718}{10935}\,x^9 + \ldots\right) + \ldots, \end{aligned} \tag{20}$$

где $a = C\,\mathrm{e}^{-3/x}$. Вычисление последующих плоских добавок не представляет трудностей, так как все они вычисляются по одному алгоритму. ∎

Формальные ряды по плоским функциям легко обращаются, если взять y в качестве независимой переменной в дифференциальном уравнении (1) и заново найти плоское разложение, в то время как непосредственное обращение ряда (5) не очевидно.

Приведем пример системы, которая имеет два степенных решения, одно из которых имеет плоскую добавку. Этот пример также показывает, что главный член степенной асимптотики не определяет плоскую добавку.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$(y^3 - x^2)y' + x^3 = 0. \tag{21}$$

Уравнение (21) имеет два степенных решения, первое из которых

$$y(x) = 1/2\,x^2 + 1/48\,x^6 + \frac{1}{320}\,x^{10} + O(x^{14}),$$

как нетрудно убедиться, не имеет плоской добавки.

Второе степенное решение имеет вид

$$y_0(x) = x^{2/3} - 1/2\,x^2 - x^{10/3} + O(x^{14/3}),$$

причем главный член степенной асимптотики аннулирует полином $p(x, y)$, т.е. не позволяет определить полином $R(x) = -1/x^{4/3}$ плоской добавки.

Обозначим $w = x^{1/3}$, $a = C\exp(-1/w^4)$, тогда общее решение уравнения

(21) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&y = w^2 - \tfrac{1}{2}\,w^6 - w^{10} - \tfrac{55}{12}\,w^{14}\ldots\\
&+a\left(w^{-16} - \tfrac{13}{2}\,w^{-12} - \tfrac{25}{24}\,w^{-8} - \tfrac{409}{12}\,w^{-4} - \tfrac{390377}{1152} - \tfrac{43060153}{11520}\,w^4 + \ldots\right)\\
&+a^2\left(2\,w^{-38} - 27\,w^{-34} + \tfrac{569}{6}\,w^{-30} - \tfrac{1009}{6}\,w^{-26} - \tfrac{8023}{18}\,w^{-22} + \ldots\right) \qquad (22)\\
&+a^3\left(6\,w^{-60} - 126\,w^{-56} + \tfrac{11027}{12}\,w^{-52} - \tfrac{25649}{8}\,w^{-48} + \tfrac{847471}{192}\,w^{-44} + \ldots\right) +\\
&\ldots\blacksquare
\end{aligned}
$$

Сходимость асимптотических рядов, входящих в плоские добавки, требует отдельного исследования. Согласно Лемме 1, коэффициенты рядов могут расти как $n!$, что и реализуется в уравнении Эйлера (2). Однако эти ряды могут обрываться или сходиться (Примеры 1, 2).

Приведем пример, указывающий на связь плоских разложений с функциями Бесселя. Этот пример также показывает, что заведомо расходящиеся степенные асимптотические ряды при плоских добавках могут однозначно суммироваться, причем в отношение целых функций (после замены $x \to 1/x$). Похожая ситуация возникает в проблеме Блазиуса (см. § 4).

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$x^3 y' = y^2 - x^2. \qquad (23)$$

Уравнение (23) интегрируемо. Его общее решение, как легко проверить, имеет вид

$$y(x) = x\,\frac{2\pi I_0(1/x) + C\,K_0(1/x)}{2\pi I_1(1/x) - C\,K_1(1/x)}, \qquad (24)$$

где I_j, K_j, $j = 0,1$ – функции Бесселя мнимого аргумента первого и второго рода соответственно, и C – произвольная константа. Разложения (5) решений уравнения (23) можно получить из решения (24), или, следуя § 2, из уравнения (23). Приведем одно из разложений решения (24):

$$y = x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{3}{8}\,x^3 + \ldots + C\,\mathrm{e}^{-2/x}\left(x + \frac{3}{4}\,x^2 + \frac{21}{32}\,x^3 + \ldots\right) + \ldots$$

Второе разложение можно получить из (24) заменой $C \to 1/C$. $\blacksquare$

Плоские разложения нашли неожиданное приложение в том, что помогли автору обнаружить одну досадную ошибку в книге [5]. На стр. 407 там приводится уравнение первого порядка, которое имеет ужасающее (abominable) решение в окрестности нуля. Уравнение имеет вид

$$z^2 w' = pz + qw, \quad p \neq 0,\ q \neq 0. \qquad (25)$$

Сначала там дается корректное решение уравнения (25) в виде квадратуры:

$$w(z) = \exp\left(-\frac{q}{z}\right)\,\left[p\int \exp\left(\frac{q}{t}\right)\frac{dt}{t} + C\right],$$

а затем приводится асимптотическое разложение решения в окрестности нуля:

$$w(z) = \exp\left(-\frac{q}{z}\right)\,\left[p\left(\log z - \frac{q}{1!z} - \frac{q^2}{2!2z^2} - \ldots\right) + C\right]. \qquad (26)$$

Решение (26) имеет логарифм при плоской добавке, что находится в противоречии с теоремой 1, которая это запрещает.

На самом деле, формула (26) ошибочна, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Но можно поступить проще: две последовательно выполненные замены переменной $z = q\,x$ и $w(x) = -p\,y(x)$ показывают, что уравнение (25) – это слегка замаскированное уравнение Эйлера (2), которое имеет решение (4).

Таким образом, вычисление плоского разложения решения ОДУ может быть полезно даже в случае, если известно общее решение в виде квадратуры, для вычисления асимптотического разложения этой квадратуры.

Следующий пример подтверждает этот тезис, а также выполняет обещание, данное во введении.

Пример 6. Рассмотрим уравнение Эйлера (2) и добавим к правой части нелинейное возмущение. Утверждается, что главный член асимптотики степенного решения сохранится, а также сохранится плоское разложение с тем же полиномом $R(x) = -1/x$ в экспоненте. Доказательство проведем методом предъявления.

Поскольку вычисление плоских разложений для уравнений с символьными коэффициентами очень громоздко, ограничимся только квадратичными членами нелинейного возмущения, т.е. рассмотрим уравнение

$$x^2 y' = y - x + a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2. \qquad (27)$$

Уравнение (27) удается проинтегрировать с помощью систем компьютерной алгебры (CAS). Получаются весьма громоздкие решения, занимающие по полстраницы и выражаемые через специальные функции Куммера или Уиттекера [9]. Однако эти решения – лишь сокращенная запись решения, выражаемого через гипергеометрические функции (от аргументов, зависящих от коэффициентов a, b, c иррациональным образом). И это последнее уже занимает две страницы и дает другой пример «ужасного решения».

Такого рода формулы обычно бесполезны для практического вычисления функции. Плоское разложение решений уравнения (27) одновременно является асимптотическим разложением этих сложных решений. Оно имеет вид

$$
\begin{aligned}
&y = x - (a+b+c-1)\,x^2 + (a+b+c-1)\,(b+2\,c-2)\,x^3 + \ldots \\
&+A\,(1 - 2\,c\,(a+b+c-1)\,x \\
&\quad +c\,(a+b+c-1)\,(b-2+2\,a\,c+2\,c^2+2\,b\,c)\,x^2 + \ldots) \\
&+A^2\left(c - c\,(b-2\,c+4\,a\,c+4\,b\,c+4\,c^2)\,x + \ldots\right) + \ldots
\end{aligned}
\tag{28}
$$

где $A = C\,\mathrm{e}^{-1/x}\,x^{b+2\,c}$.

Мы опустили в формуле (28) слишком громоздкие члены асимптотик, однако даже по этому сокращенному выражению видно, что общее решение уравнения (27) должно заметно упрощаться при $c = 0$, либо при $a+b+c = 1$, либо при $b + 2\,c \in \mathbb{Z}$. ■

§ 4. Плоский асимптотический ряд Блазиуса

Divergent series converge faster than convergent series because they don't have to converge.

G.F. Carrier

Отношение к степенным расходящимся асимптотическим рядам и их применению в анализе неоднократно менялось за последние 300 лет. Эйлер пользовался ими регулярно и весьма плодотворно. Абель их отвергал как порождение дьявола, что не помешало ему изобрести метод суммироавния рядов «по Абелю». Пуанкаре их реабилитировал и дал строгое определение степенного асимптотического ряда. Определение Пуанкаре также подвергалось критике как чисто «экзистенциальное» [3, стр. 27]. Кроме того, это определение не учитывает экспоненциально малых эффектов, что сам Пуанкаре отчетливо понимал.

Современное отношение к степенным асимптотическим рядам (см. [3]) мало отличается от отношения к обычным сходящимся степенным рядам и практически совпадает с позицией Эйлера [6]. Сходимость или расходимость ряда совершенно не актуальна, если существует способ (алгоритм) извлечь из ряда нужную информацию о функции, которая породила данный ряд. Разумеется, такие способы (суммирования) существуют и продолжают развиваться.

На этом фоне кажется довольно странным, что работа Блазиуса [8] осталась практически не замеченной в том ее аспекте, который относится к асимптотическим разложениям. Теперь, если статью Блазиуса и вспоминают, как в [10, 11, 12], то лишь для того, чтобы следуя Вейлю [13] напомнить, что Блазиус ошибался, сращивая степенной и асимптотический ряд.

Между тем метод, которым пользовался Блазиус для построения своего асимптотического ряда (т.е. в окрестности бесконечности), весьма напоминает метод построения плоского разложения решения ОДУ, изложенный в теореме 1. Мы покажем, что так случилось потому, что это и есть плоское разложение.

Таким образом, Блазиус использовал «экспоненциальные трансряды» в прикладной задаче задолго до того, как их научились вычислять на компьютере на простых примерах. Кроме того, Блазиус вычислил два члена этого ряда в такой форме, что заведомо расходящиеся степенные асимптотические ряды (которые там неявно присутствуют) оказались просуммированными как целые функции.

Напомним, что дифференциальное уравнение Блазиуса имеет вид

$$y'''(x) + 2\,y(x)\,y''(x) = 0. \tag{29}$$

Коэффициент 2 здесь взят из соображений удобства и для упрощения формул. В статье Блазиуса [8] он отсутствует. Такую же форму уравнения использовал Вейль [13]. В силу инвариантности уравнения (29) относительно преобразования

$$x \to x/\alpha, \quad y(x) \to \alpha\,y(x)$$

это не принципиально.

Проблема Блазиуса состоит в определении начального значения функции $s = y''(0)$ так, что при условиях $y(0) = y'(0) = 0$ выполняется условие на бесконечности $y'(\infty) = 1$ (см. [14]).

Здесь неявно предполагается разрешимость этой задачи, на чем Блазиус не останавливался. Разрешимость доказана, в частности, Вейлем [13].

Метод Блазиуса решения этой задачи не оптимален. Но нас занимает только принципиальная возможность решить данную задачу путем сращивания степенного разложения функции $y(x)$ в нуле, где она голоморфна, с асимптотическим разложением в бесконечности.

Вейль поставил такую возможность под сомнение [13], причем в такой убедительной форме, что возражения Вейля, в свою очередь, не ставились под сомнение. Между тем ни метод Блазиуса, ни возражения Вейля не являются доказательствами.

На вычислении степенного ряда для функции $y(x)$ в нуле мы не останавливаемся. Нам достаточно знать, что он эффективно вычисляется и имеет конечный радиус сходимости $R \approx 2.845019$ (см. [8, 11, 12]).

Асимптотический ряд Блазиус строил следующим образом.

Функция $y(x)$ имеет асимптоту $y_0(x) = x - b$, где $b > 0$ – некоторая константа, которую предстоит определить. Но функция $y_0(x) = x - b$ также является решением уравнения (29), поэтому функцию $y(x)$ следует искать в виде $y(x) \approx y_0(x) + y_1(x)$, где $y_1(x)$ – это некоторая малая поправка.

Блазиус находит эту поправку в виде интегралов, которые в современной записи просто выражаются через функцию ошибок $\mathrm{erfc}\,(x) = 1 - \mathrm{erf}\,(x)$, и экспоненту. Т.е. поправка оказывается экспоненциально малой.

Далее Блазиус находит вторую малую поправку $y_2(x)$, которая квадратично зависит от первой. При вычислении $y_2(x)$ приходится многократно интегрировать по частям, что весьма трудоемко, но в результате получается выражение, куда входят (почти) те же функции, что и в первую поправку $y_1(x)$.

В этом месте Блазиус делает ошибочное заключение (мы это покажем), что далее ряд продолжается тем же способом, но новые малые поправки уже можно искать методом неопределенных коэффициентов, так как все входящие в них функции уже известны.

Мы воспроизведем выкладки Блазиуса в весьма упрощенном виде.

Заметим, что если $y(x)$ – решение уравнения (29), то $y(x + \mathrm{const})$ также является решением. Поэтому мы сдвинем функцию $y(x)$ влево на величину b так, что теперь асимптотой является биссектриса $y = x$ (и сохраним обозначения).

Следуя теореме 1, представим решение в виде ряда

$$y(x) = x + C\,y_1(x) + C^2\,y_2(x) + C^3\,y_3(x) + \dots, \tag{30}$$

где C – это константа интегрирования, которая возникает на первом шаге. Далее константа C умножается сама на себя, что весьма кстати, так как степень при C теперь измеряет порядок экспоненциальной малости добавки при $x \to \infty$.

Таким образом, (30) – это ряд (5) (после замены $x \to 1/x$), где роль степенного ряда $y_0(x)$ играет моном x, а плоские добавки оказались целыми функциями. Как мы увидим, это просуммированные асимптотические ряды.

Функции $y_1(x), y_2(x), \dots$ последовательно находятся из бесконечной треугольной системы линейных ОДУ в виде квадратур (см. статью Блазиуса [8]). Мы приведем готовые формулы.

$$y_1(x) = 2\exp(-x^2) - 2\sqrt{\pi}\,x\,\mathrm{erfc}\,(x), \tag{31}$$

$$y_2(x) = 6\sqrt{\pi}\exp(-x^2)\,\mathrm{erfc}\,(x) - 2\,\pi\,x\,\mathrm{erfc}^2\,(x) - 4\sqrt{2\pi}\,\mathrm{erfc}\,(\sqrt{2}\,x). \tag{32}$$

Формулы (31), (32) (в иных обозначениях) получены Блазиусом. Нетрудно убедиться, что

$$y_1(x) \asymp \exp(-x^2), \quad y_2(x) \asymp \exp(-2\,x^2), \quad x \to \infty$$

(для этого и был нужен коэффициент 2 в (29)). Точные асимптотики мы приведем позднее.

Блазиус полагал, что далее будут возникать только комбинации из функций, входящих в (31), (32). Однако (весьма громоздкие) вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}&y_3(x) = -144\, e_3(x) + 21\pi\, \mathrm{erfc}^2\,(x)\exp(-x^2) - 4\, x\, \pi^{3/2}\, \mathrm{erfc}^3\,(x)\\&-4\sqrt{\pi}\, x\ \mathrm{erfc}\,(x)\ \exp(-2\, x^2) + 8\,\pi\,\sqrt{2}\,\mathrm{erfc}\,(x)\,\mathrm{erfc}\,(\sqrt{2}\, x)\\&+2\,\pi\, x^2\,\mathrm{erfc}^2\,(x)\exp(-x^2) + 6\sqrt{3\,\pi}\, x\,\mathrm{erfc}\,(\sqrt{3}\, x) - 4\ \exp(-3\, x^2),\end{aligned} \tag{33}$$

где

$$e_3(x) = \sqrt{\pi}\int_x^\infty \mathrm{erfc}\,(t)\exp(-2\,t^2)\,dt \asymp \exp(-3\,x^2)\left(\frac{1}{6x^2} - \frac{5}{36x^4} + \ldots\right).$$

При помощи CAS нетрудно проверить, что отрезок ряда (30) является (пока формальным) решением уравнения (29) с точностью $O(C^4)$ (т.е. $y_3(x) \asymp \exp(-3\,x^2)$). Однако некоторые CAS, как оказалось, не умеют вычислять функции, входящие в (31)–(33), т.е. интегрировать по частям выражения вида

$$\int x^n\,\mathrm{erfc}^2\,(x)dx, \quad \int x^n\,\mathrm{erfc}\,(x)\exp(-x^2)dx,\ \ldots$$

хотя их можно найти в справочниках. Эти квадратуры пришлось вычислять, в основном, вручную.

Наиболее полезным оказался справочник [15]. Пользуясь случаем, исправляем в нем опечатку. Формула 1.5.3.(1) на стр. 31 должна выглядеть так:

$$\begin{aligned}&\int x^\lambda\ \exp(-b^2\,x^2)\,\mathrm{erf}\,(a\,x)dx = -\tfrac{1}{2\,b^2}\,x^{\lambda-1}\ \exp(-b^2\,x^2)\,\mathrm{erf}\,(a\,x)\\&+\tfrac{a}{b^2\sqrt{\pi}}\int x^{\lambda-1}\ \exp(-(a^2+b^2)\,x^2)dx + \tfrac{\lambda-1}{2\,b^2}\int x^{\lambda-2}\ \exp(-b^2\,x^2)\,\mathrm{erf}\,(a\,x)dx.\end{aligned}$$

Функция $e_3(x)$, входящая в функцию $y_3(x)$, не выражается в более простом виде, т.е. она оказалась новым трансцендентом (см. [15, стр. 32], формула 1.5.3.(12)). Это означает, что дальнейшее вычисление ряда (30) методом Блазиуса с помощью квадратур если не бессмысленно, то во всяком случае бесполезно. Далее будут появляться все новые трансценденты, вычисление которых все более затруднительно.

Заметим, что функция $e_3(x)$ не лучше и не хуже функции ошибок в вычислительном отношении. Однако функция erf () имеет предысторию и уже является стандартной.

Таким образом, ряд (30) можно формально продолжить неограниченно как ряд из целых функций. Получается формальное решение уравнения

Блазиуса с нужной асимптотикой. И хотя существование решения с нужной асимптотикой доказано [13], к ряду (30) это не имеет отношения. Тем не менее, справедлива

Теорема 2. *Формальный ряд* (30) *сходится равномерно на любом полубесконечном интервале* $[x_0, \infty]$ *при достаточно малом* C.

Доказательство. Заметим, что порядок экспоненциальной малости функций $y_k(x)$ при $x \to \infty$ не меняется при дифференцировании и интегрировании. Это утверждение можно уточнить, если представить $y_k(x)$ в виде произведения степенного асимптотического ряда и экспоненты $\exp(-k\,x^2)$.

Рассмотрим тождество

$$y(x) = p\,x + q + \int_x^\infty (t-x)v(t)\,dt, \quad v(x) = y''(x), \tag{34}$$

где константы p и q можно выбрать однозначно так, чтобы удовлетворить начальные либо краевые условия для функции $y(x)$, предполагая, что интеграл в (34) существует.

Тождество (34) позволяет записать уравнение Блазиуса (29) в виде

$$v'(x) + 2\,(p\,x + q + \int_x^\infty (t-x)v(t)\,dt)\,v(x) = 0. \tag{35}$$

Решение уравнения (35) ищем в виде ряда

$$v(x) = C\,v_1(x) + C^2\,v_2(x) + C^3\,v_3(x) + \ldots, \tag{36}$$

который должен совпадать с дважды продифференцированным рядом (30), т.е. $v_n(x) = y_n''(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Теперь заметим, что

$$y_1''(x) = 4\exp(-x^2),$$

в то время как общее решение для функции $v_1(x)$, полученное из уравнения (35), имеет вид

$$v_1(x) = \mathrm{const}\,\exp(-p\,x^2 - 2\,q\,x).$$

Поэтому необходимо $p = 1$ и $q = 0$.

Таким образом, уравнение (35) принимает вид

$$v'(x) + 2\,v(x)\,x = 2\,v(x)\int_x^\infty (x-t)\,v(t)\,dt. \tag{37}$$

Подставив ряд (36) в это уравнение, получаем систему уравнений

$$v_n'(x) + 2\,x\,v_n(x) = R_n(x) = \sum_{m=1}^{n-1} 2\,v_{n-m}(x)\int_x^\infty (x-t)v_m(t)\,dt,\ n \in \mathbb{N}. \tag{38}$$

При $n = 1$, получаем

$$v_1'(x) + 2\,x\,v_1(x) = 0,$$

поэтому можно взять $v_1(x) = 4\exp(-x^2)$.

Далее, для $n > 1$ получаем

$$v_n(x) = -\exp(-x^2)\int_x^\infty R_n(t)\exp(t^2)dt + C_n\exp(-x^2), \tag{39}$$

где следует положить $C_n = 0$, так как член с этой асимптотикой уже найден и при интегрировании здесь не возникает. Докажем это.

Лемма 2. *Формальный ряд* (36) *состоит из положительных целых функций* $v_n(x) \asymp \exp(-n\,x^2)$, *монотонно убывающих при* $x > 0$.

Доказательство. Так как $v_1(x) = 4\exp(-x^2)$, то в силу (38),

$$0 > R_2(x) = -16\,(1 - x\sqrt{\pi}\exp(x^2)\,\mathrm{erfc}\,(x))\exp(-2\,x^2) \asymp -\frac{8}{x^2}\exp(-2\,x^2).$$

Поэтому в силу (39), $0 < v_2(x) \asymp \exp(-2\,x^2)$, т.е. $C_2 = 0$, и т.д. Очевидно, $v_2(x)$ – целая функция, как и все последующие. Так как $t > x$ под интегралом в (38), то $R_n(x) < 0$, и т.д. ∎

Фактически, мы уже нашли $v_k(x)$, $k = 1, 2, 3$. Нужно лишь продифференцировать уже найденные выше $y_k(x)$ два раза. По этой (более простой) схеме вычислений новые трансценденты возникают позже, чем по схеме Блазиуса.

Таким образом, ряд (36) формально продолжается неограниченно и все функции $v_n(x)$ обладают нужной асимптотикой и являются целыми и положительными (что совсем не очевидно из их явного вида).

Докажем теперь сходимость этого ряда.

Сделаем замену переменной $v(x) = w(x)\exp(-x^2)$ в уравнении (37). Получим уравнение

$$w'(x) = 2\,w(x)\int_x^\infty (x-t)\,w(t)\,\exp(-t^2)dt. \tag{40}$$

Можно показать разрешимость уравнения (40), если следуя Вейлю [13] поделить его на $w(x)$, проинтегрировать и взять экспоненту. Однако не ясно, как решать конструктивно полученное трансцендентное интегральное уравнение. Сам Вейль на этом не останавливался.

Рассмотрим билинейный оператор

$$P_2\colon (w_1, w_2) \to 2\int_x^\infty w_1(u)\left(\int_u^\infty (t-u)w_2(t)\exp(-t^2)dt\right)du + A, \tag{41}$$

зависящий от параметра $A > 0$ и действующий в пространстве непрерывных функций $C[x_0, \infty]$.

Покажем, что существует полушар $S(B) = \{y(x) : 0 \le y(x) \le B\} \in C[x_0, \infty]$, в котором оператор $P(w) = P_2(w, w)$ является сжимающим при достаточно малом A.

Очевидно, $0 < P(y) < P(B)$ при $y \in S(B)$. Поэтому условие $P(y) \in S(B)$ записывается как $P(B) < B$, т.е.

$$A < B - 1/4\, H(x)\, B^2, \tag{42}$$

где

$$H(x) = \sqrt{\pi}\left(1 + 2\,x^2\right)\,\mathrm{erfc}\,(x) - 2\,x \exp(-x^2).$$

Можно проверить, что $H(x)$ – положительная монотонно убывающая функция. Поэтому, если условие (42) выполнено при $x = x_0$, то оно выполнено при $x_0 < x$. Далее, очевидно, можно взять достаточно малое B, а затем A, так, что условие (42) можно считать выполненным.

Итак, оператор P переводит полушар $S(B)$ в себя. Покажем, что оператор P сжимающий, т.е. существует $\rho < 1$ такое, что

$$||P(y_1) - P(y_2)|| < \rho||y_1 - y_2||, \quad y_1, y_2 \in S(B).$$

Здесь символ $||.||$ обозначает норму в пространстве $C[x_0, \infty]$.

Обозначим $y_1 = y_2 + h$, где $|h(x)| \le ||h|| \le B$. Тогда, временно положив $A = 0$, так как этот параметр входит в оператор P аддитивно, получаем

$$\begin{aligned}
&|P(y_1) - P(y_2)| \le \\
&|P_2(y_2, h)| + |P_2(h, y_2)| + |P_2(h, h)| \le P_2(B, |h|) + P_2(|h|, B) + P_2(B, |h|) \le \\
&(2\,P_2(B, 1) + P_2(1, B))\,||h|| = 3\,B\,P(1)\,||h|| < \rho||h||.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство записывается как

$$3/4\,B\,H(x) < \rho, \tag{43}$$

чего всегда можно добиться выбором B для любого $0 < \rho < 1$ и любого $x_0 \in \mathbb{R}$.

Условие (43) является усилением неравенства $0 < \mathrm{rhs}(42)$, т.е. $B\,H(x) < 4$.

Таким образом, выполнены условия теоремы о сжимающем отображении, т.е. существует единственное решение уравнения $w = P(w)$ в полушаре $S(B)$ при подходящем выборе параметров A и B. Это решение может быть получено простыми итерациями $w_{n+1} = P(w_n)$ начиная с любого начального приближения $w_0 \in S(B)$.

Положим $A = 4\,C$ и возьмем $w_0 = 0$. Тогда

$$w_1 = 4\,C, \quad w_2 = 4\,C + C^2\,v_2 \exp(x^2),\ \ldots$$

По построению $w_n \exp(-x^2)$ совпадает с отрезком ряда (36) до степени C^n включительно и мажорирует этот отрезок ряда. Поскольку $w_n \to w$ при $n \to \infty$ в равномерной метрике, то ряд (36) сходится равномерно.

В силу оценки $v_n(x) < B\exp(-x^2)$ и равномерной сходимости, ряд (36) можно интегрировать почленно, т.е. применить оператор $\int_x^\infty (.)dt$ дважды.

Мы доказали, что ряд (30) сходится равномерно при достаточно малом $C > 0$, и все функции $y_n(x)$ являются целыми и положительными (что также не очевидно из их явного вида). Сходимость при достаточно малом $C < 0$ очевидна. ■

Хотя все функции, входящие в ряд (30), являются целыми и ряд сходится, его сумма, очевидно, не является целой функцией. Как известно (см. [11, 12]), функция $y(x)$ имеет 3 особенности, расположенные в вершинах равностороннего треугольника на границе круга сходимости ее степенного ряда. Эти особенности были охарактеризованы как «полюса с логарифмическими поправками». Иными словами, природа этих особенностей пока не известна. Весьма вероятно, что эти же особенности лежат на границе области сходимости ряда (30), так как другие особенности функции $y(x)$ неизвестны.

Теперь мы располагаем всем необходимым, чтобы реабилитировать метод Блазиуса. Для этого достаточно установить, что область сходимости степенного ряда функции $y(x)$ в нуле перекрывается с областью сходимости ряда (30).

Заметим, что условия сходимости (42) и (43) ряда (30) являются достаточными, т.е. реальная область сходимости, вероятно, шире. Исключая параметр B из этих условий, получаем оценку

$$C < \frac{2}{9}\,\frac{1}{H(x_0)}, \tag{44}$$

из которой следует, что область сходимость ряда (30) сужается при $x_0 \to -\infty$ как $O(1/x_0^2)$.

Приведем результаты наших расчетов (в расширенной арифметике с 32 десятичными разрядами).

Константа $s \approx 0.664114672430392$ вычислена с точностью $\approx$ 30 десятичных разрядов в статье [14] (здесь она умножена на 2). Возьмем $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = s$ и проинтегрируем уравнение (29) до $x_1 = 16$. При этом $y''(x_1) \approx 1.33 \times 10^{-100}$, т.е. далее интегрировать не имеет смысла. Получаем

$$b = x_1 - y(x_1) \approx 0.860393828760251.$$

Проинтегрируем уравнение (29) до $x_1 = 4$. Зная b и используя отрезок ряда (30): $y(x) \approx x + C\,y_1(x) + C^2\,y_2(x)$, получаем

$$C = C_* \approx 0.11686381064255.$$

Результаты наших расчетов совпадают (кроме последнего знака) с результатами, приведенными в [12, табл. 4.1], где $B = -2\,b$, $\kappa = s/2$, $Q = 2\,C$, и радиус сходимости $S = 2\,R$. Надо также иметь в виду, что константа Q там определялась по-другому.

Теперь заметим, что при $x_0 = 0$, $C_* < 2/9/H(x_0) \approx 0.125375463$, т.е. метод Блазиуса работает, причем с запасом, так как правая граница сходимости для степенного ряда (которая, напомним, сдвинута влево на величину b): $x_* = R - b \approx 1.9846$. При этом $2/9/H(x_*) \approx 151.4$.

Теперь мы попытаемся обойтись вовсе без степенного ряда (см. эпиграф), т.е. установить сходимость ряда (30) на интервале $[-b = x_0, \infty]$.

Мы располагаем только отрезком ряда (30) до степени C^3. Используя константу $C = C_*$, получаем график функции Блазиуса (сдвинутый на b влево) (см. рис. 1), который неотличим от функции, полученной численными методами.

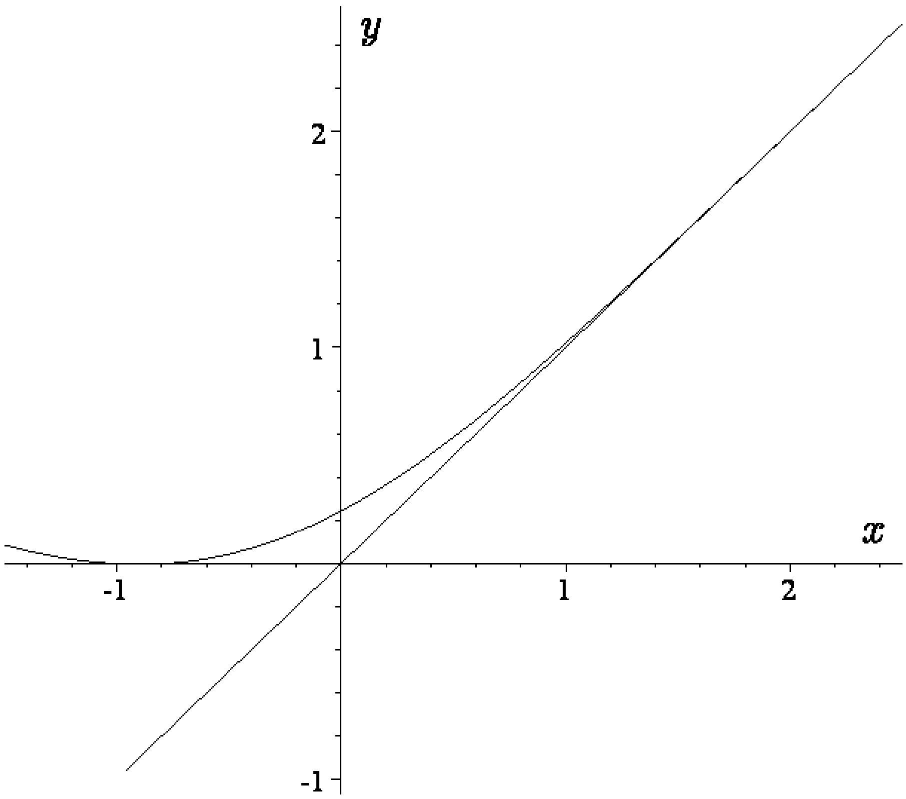

Рис 1. Функция Блазиуса, представленная плоским рядом.

Осталось проверить, насколько хорошо выполняются краевые условия в начале интервала при $x = x_0 = -b$.

Однако теперь ни b, ни C, ни s не известны. Мы найдем их, решив «обратную проблему Блазиуса», т.е. определим интервал $[x_0, \infty]$ и константу C так, что ряд (30) (имеющий нужную асимптотику в бесконечности) сходится и $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Это два уравнения относительно двух неизвестных x_0 и C. С помощью Maple получаем

$$C \approx 0.11742437764239, \quad b = -x_0 \approx 0.88673978127115.$$

После чего $s = y''(x_0) \approx 0.57468729191270$.

Таким образом, весьма вероятно, что ряд (30) сходится на интервале $[-b, \infty]$, хотя трех членов ряда не достаточно, чтобы это установить достоверно.

Теперь покажем, что ряд (30) вычисляется как асимптотический ряд (5).

Теорема 1 здесь не применима, но если знать заранее (или предположить), что плоский ряд существует, то его можно вычислить по алгоритму вычисления плоского ряда (5), который работает без существенных изменений. При этом мы используем информацию о явном виде полинома $R(x)$ в экспоненте. Таким образом, положив $a = C\,\mathrm{e}^{-x^2}$, получаем

$$
\begin{aligned}
y(x) = x &+ a\left(\tfrac{1}{x^2} - \tfrac{3}{2\,x^4} + \tfrac{15}{4\,x^6} - \tfrac{105}{8\,x^8} + \tfrac{945}{16\,x^{10}} - \tfrac{10395}{32\,x^{12}} + \tfrac{135135}{64\,x^{14}} + \ldots\right) \\
&+ a^2\left(\tfrac{1}{4\,x^5} - \tfrac{21}{16\,x^7} + \tfrac{423}{64\,x^9} - \tfrac{9375}{256\,x^{11}} + \tfrac{234405}{1024\,x^{13}} - \tfrac{6618465}{4096\,x^{15}} + \tfrac{209814255}{16384\,x^{17}} + \ldots\right) \\
&+ a^3\left(\tfrac{5}{72\,x^8} - \tfrac{173}{288\,x^{10}} + \tfrac{14059}{3456\,x^{12}} - \tfrac{369973}{13824\,x^{14}} + \tfrac{30379175}{165888\,x^{16}} - \tfrac{2669238655}{1990656\,x^{18}} + \ldots\right) \\
&+ a^4\left(\tfrac{17}{864\,x^{11}} - \tfrac{1633}{6912\,x^{13}} + \tfrac{110609}{55296\,x^{15}} - \tfrac{6756695}{442368\,x^{17}} + \tfrac{3656281775}{31850496\,x^{19}} + \ldots\right) + \ldots
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Ряд (45) и его компоненты можно продолжить неограниченно, так как при их вычислении используются только алгебраические операции с полиномами. Эти операции умеет делать любая CAS по определению.

Существуют различные способы использовать ряд (45) для вычисления функции $y(x)$ внутри круга сходимости ее степенного ряда. Самый простой из них – это суммирование знакопеременных рядов, входящих в (45), до наименьшего члена. Иными словами, метод Блазиуса работает и при использовании асимптотического ряда без его предварительного суммирования в виде ряда (30).

Если бы Блазиус был прав относительно типа функций, входящих в ряд (30), то этот последний можно было бы восстановить по ряду (45) методом неопределенных коэффициентов. Однако это невозможно.

Тем не менее, возможно, в принципе, численно-аналитически продолжить компоненты ряда (45) так, как если бы удалось их просуммировать. Однако эта задача выходит за рамки данного исследования.

Предварительную версию данной статьи, поданную в журнал «Дифференциальные уравнения», где ее держали два с половиной года, прежде чем отклонить, а также некоторые комментарии по этому поводу см. в [16].

Список литературы

[1] H. Segur, S. Tanveer, H. Levine Eds., ”Asymptotics beyond All Orders“, NATO ASI Series B: Physics Vol. 284. (Plenum Press, N.Y. 1991).

[2] G.A. Edgar, ”Transseries for beginners“, [arxiv:0801.4877v5], (2009). (`http://arxiv.org/abs/0801.4877v5`).

[3] F.W.J. Olver, ”Asymptotics and Special Functions“. (A K Peters, 1997).

[4] В.И. Арнольд, Ю.С. Ильяшенко, ”Обыкновенные дифференциальные уравнения“. Итоги науки и техники, т. 1. (М:ВИНИТИ, 1985).

[5] E. Hille, ”Ordinary Differential Equations in the Complex Domain“. (John Wiley & Sons. New-York, 1976).

[6] L. Euler, ”De seriebus divergentibus“. Novi Comment. Acad. Sci. Petropolitanae, **5**, 1754/55, p. 205-237; reprint: ”Opera omnia“. Ser. I, V. 14. (Teubner, Leipzig, 1925), p. 585-617.

[7] А.Н. Кузнецов, ”О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением“. Функциональный анализ и его приложения. 1989. Т. 23. Вып. 4. стр. 63-74.

[8] H. Blasius, ”Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung“. Z. Math. Phys. **56**, 1-37 (1908); reprint: ”The boundary layers in fluids with little friction“. National Advisory Committee for Aeronautics, Tech. Memo. 1256. (Washington 1950).

[9] M. Abramowitz, I. Stegun, ”Handbook of Mathematical Functions“. (New York: Dover, 1972).

[10] B. Brighi, A. Fruchard, T. Sari, ”On the Blasius problem“, Adv. Diff. Eqn. **13**, 509-600 (2008).

[11] J.P. Boyd, ”The Blasius function in the complex plane“, Experiment. Math., **8**, 381-394 (1999).

[12] J.P. Boyd, ”The Blasius Function: Computations Before Computers, the Value of Tricks, Undergraduate Projects, and Open Research Problems“. SIAM REVIEW V. 50. No.4, pp. 791-804 (2008).

[13] H. Weyl, ”Concerning the differential equations of some boundary-layer problems“. Proc. Nat. Acad. Sci., **27**, 578-583 (1941).

[14] V.P. Varin, "A solution of the Blasius problem". Preprint 40, Moscow: IPM M.V. Keldysh (2013),
(http://library.keldysh.ru/preprint.asp?lg=e&id=2013-40).

[15] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, "Интегралы и ряды. Специальные функции". (М.: Наука. 1983).

[16] (https://www.dropbox.com/s/ygvabvka6tn2tr8/Comments.zip).