



Зенюк Д.А., Орлов Ю.Н.

О применении дробного
исчисления Римана —
Лиувилля для описания
распределений
вероятностей

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Зенюк Д.А., Орлов Ю.Н. О применении дробного исчисления Римана — Лиувилля для описания распределений вероятностей // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 18. 21 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-18>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

Д.А. Зенюк, Ю.Н. Орлов

**О применении дробного исчисления
Римана — Лиувилля для описания
распределений вероятностей**

Москва — 2014

Зенюк Д.А., Орлов Ю.Н.

О применении дробного исчисления Римана — Лиувилля для описания распределений вероятностей

В работе рассмотрены вопросы применения аппарата дробных дифференциальных и интегральных операторов Римана — Лиувилля для анализа абсолютно непрерывных распределений. Показано, что в общем случае переход к дробным операторам существенно меняет привычные свойства плотностей, что делает неприменимыми некоторые стандартные методы статистического анализа. Выявлена неоднозначность соответствия между уравнением Фоккера — Планка и его возможными аналогами дробного порядка. Отмечено, что уравнения типа Фоккера — Планка с дробными производными в диффузионном слагаемом не допускают гидродинамическую подстановку, обычную в теории кинетических уравнений.

Ключевые слова: дробное исчисление, операторы Римана — Лиувилля, вероятностная мера, функции распределения.

Dmitry Alexeyevich Zenyuk, Yurii Nikolaevich Orlov

On the application of Riemann — Liouville fractional calculus to the analysis of probability distributions

In this paper some issues of application of Riemann — Liouville fractional differential and integral operators to the analysis of absolutely continuous distributions are considered. In general case such transition considerably change common properties of probability densities, making standard statistical techniques unfeasible. It is shown that Fokker — Planck equation may have multiple analogues of fractional order. It is also demonstrated that fractional equations of the Fokker — Planck type do not permit ordinary hydrodynamical substitution.

Key words: fractional calculus, Riemann — Liouville operators, probability measure, distribution functions.

Оглавление

Введение	3
Функции распределения.....	4
Эволюционные уравнения для функции плотности.....	15
Заключение	18
Список литературы	18

Введение

Изучение интегралов и производных нецелого порядка имеет богатую и продолжительную историю: первое упоминание о возможности рассматривать дифференциалы и производные порядка $1/2$ встречается в письмах Лейбница к Лопиталю (1695 г.) и Уоллису (1697 г.). Фрагментарные упоминания об этом вопросе содержатся также в работах Эйлера (1738 г.), Лапласа (1812 г.), Лакруа (1820 г.) и Фурье (1822 г.). Полноценная теория дробного исчисления и некоторые ее приложения были последовательно описаны в серии работ Лиувилля (1832–1837 гг.), хотя некоторые полученные там результаты были не совсем строгими с современной точки зрения. К концу 19 в. на основе конструкции, предложенной Лиувиллем, и более поздней работы Римана (1874 г.) были получены результаты, считающиеся сегодня в теории дробного исчисления классическими. Более подробные ретроспективные обзоры исследований в этой области можно найти, например, в [1–4].

В последние десятилетия все больший интерес привлекают приложения дробного исчисления к различным инженерным и естественнонаучным задачам — им посвящена обширная библиография; не претендуя на полноту, отметим здесь работы [1–3, 5–9]. Аппарат дробного исчисления успешно применяется для изучения механики вязкоупругих тел (см. обзор [6]), к которым относятся, например, полимеры и стекловидные эмали. По-видимому, именно в рамках этой области исследований впервые были рассмотрены дифференциальные уравнения с дробными частными производными. В [3] при исследовании диффузионных процессов в задачах аналитической химии впервые было получено уравнение диффузии с дробными производными; в последующие годы исследованиям в этой области посвящалось большое количество работ (см. [7, 10–20] и цитированную там литературу). На сегодняшний день аппарат дробного исчисления активно используется в рамках изучения «аномальных» кинетических процессов, наблюдаемых во фрактальных структурах со сложными топологическими свойствами или демонстрирующих нетривиальные корреляционные зависимости, объединенных под общим названием «странная кинетика» [21, 22].

Следует подчеркнуть, что подавляющее большинство упоминавшихся работ опирается на замену *ad hoc* обычных интегральных и дифференциальных операторов в известных функциональных соотношениях их дробными аналогами. Обычно такой подход обогащает описание системы, позволяя включить в него эридитарные эффекты и пространственную нелокальность [23]. Однако, как будет показано в представляемой работе, такая замена в контексте теории вероятностей, напротив, приводит к множеству нежелательных последствий, лишь усложняющих анализ.

Функции распределения

Вообще говоря, существует несколько неэквивалентных подходов к определению дробных интегральных и дифференциальных операторов; наибольшее распространение среди них, однако, получили односторонние операторы Римана — Лиувилля. Дробные интегралы Римана — Лиувилля порядка α определяются выражениями

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(\xi) (x - \xi)^{\alpha-1} d\xi, \quad x > a, \quad (1)$$

$$(I_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(\xi) (\xi - x)^{\alpha-1} d\xi, \quad x < b. \quad (2)$$

Первый из них называется левосторонним, второй — соответственно, правосторонним. Эти конструкции, очевидно, определены для функций из $L_1([a, b])$, существуя почти всюду. Дробные производные Римана — Лиувилля определяются соотношениями

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x f(\xi) (x - \xi)^{n-\alpha-1} d\xi, \quad (3)$$

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b f(\xi) (\xi - x)^{n-\alpha-1} d\xi, \quad (4)$$

где $n = [\alpha] + 1$. Можно показать, что конструкции (4)–(5) являются аналитическими продолжениями дробных интегралов (1)–(2) в область $\alpha < 0$. Из (4) следует, в частности,

$$(D_{a+}^0 f)(x) = f(x), \quad (D_{a+}^n f)(x) = f^{(n)}(x).$$

Определения дробного интегрирования и дифференцирования легко распространяются со случая конечного отрезка на случай бесконечного промежутка; при этом рассматриваемые функции должны удовлетворять некоторым дополнительным требованиям, связанным с поведением на бесконечности, чтобы соответствующие несобственные интегралы сходились. Дробные интегралы Римана — Лиувилля на $\mathbb{R}$ вводятся соотношениями

$$(I_+^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x f(\xi) (x - \xi)^{\alpha-1} d\xi, \quad (5)$$

$$(I_-^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} f(\xi) (\xi - x)^{\alpha-1} d\xi \quad (6)$$

или в виде свертки

$$(I_\pm^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} f(x \mp \xi) \xi^{\alpha-1} d\xi.$$

Производные дробного порядка вводятся аналогично (4) и (5):

$$(D_\pm^\alpha f)(x) = \frac{d^n}{dx^n} (I_\pm^{n-\alpha} f)(x).$$

Подробное описание свойств дробных операторов Римана — Лиувилля и некоторых других форм дробного интегродифференцирования можно найти в [1, 2].

Как известно, функция распределения случайной величины является ограниченной неубывающей непрерывной слева функцией, т.е.

$$\begin{aligned} F(x_1) &\leq F(x_2), \quad x_1 \leq x_2, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) &= 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow z-0} F(x) &= F(z). \end{aligned}$$

Всякая функция, удовлетворяющая этим условиям, определяет в евклидовом пространстве $\mathbb{R}$, оснащенном σ -алгеброй борелевских множеств, вероятностную меру $\mathbf{P}(\zeta < x) = F(x)$, где ζ — соответствующая случайная величина. Если вероятностная мера абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, то в соответствии с теоремой Радона — Никодима существует функция плотности $p(x)$, такая, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(\xi) d\xi = 1 - \int_x^{+\infty} p(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Функция плотности почти всюду неотрицательна и удовлетворяет очевидному нормировочному условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) d\xi = 1.$$

В цикле работ [24–26] была предпринята попытка построения «теории вероятностей дробного порядка», основанная на непосредственной замене обычных интегральных операторов в определении функции распределения (7) и связанных с ним определениях моментов и характеристической функции дробными интегралами Римана — Лиувилля; так, функция распределения

случайной величины ζ , принимающей значения из отрезка $[a, b]$, была определена как

$$F(x) = (I_{a+}^{\alpha} p)(x), (I_{a+}^{\alpha} p)(b) = 1. \quad (8)$$

Непосредственным вычислением легко установить, что для произвольных $\alpha > 0$ и неотрицательных p (8) не является функцией распределения в строгом смысле. Рассмотрим, например, функцию плотности

$$p(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{2(2^{\alpha} - 1)} (1 - |x|) \chi_{[-1,1]},$$

где χ_A — индикаторная функция множества A . Непосредственное вычисление интеграла приводит к

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{(x+1)^{\alpha+1}}{2(2^{\alpha} - 1)}, & -1 < x \leq 0; \\ \frac{(x+1)^{\alpha+1} - 2x^{\alpha+1}}{2(2^{\alpha} - 1)}, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases} \quad (9)$$

Функция (9) достигает максимума в точке $x_* = (2^{1/\alpha} - 1)^{-1}$, которая при $0 < \alpha < 1$ находится внутри отрезка $[0, 1]$; таким образом, (9) не является неубывающей функцией. В этом случае, вообще говоря, вероятность $\mathbf{P}(x_1 \leq \zeta < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$, где $x_i \in [-1, 1]$, может быть отрицательной, что очевидным образом нарушает аксиоматическое определение вероятностной меры. Хотя существует некоторое количество работ, в которых рассматриваются возможные интерпретации понятия отрицательной вероятности (краткий обзор можно найти в [27]), эта концепция пока не получила сколько-нибудь заметного распространения.

Представляется вполне естественным поставить вопрос о том, при каких условиях функции распределения абсолютно непрерывных случайных величин могут быть корректно представлены в терминах интегралов Римана — Лиувилля. Рассмотрим вначале функции плотности с ограниченным носителем $[a, b]$; функцию распределения будем определять как

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ (I_{a+}^\alpha p)(x), & a < x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (10)$$

Если функция распределения F известна и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям регулярности в точке a (см. [1]), то на $(a, b]$ соответствующая ей функция плотности является дробной производной Римана — Лиувилля порядка α от F . Таким образом, при заданном α класс допустимых функций плотности является образом множества функций распределения под действием оператора дробного дифференцирования.

В качестве примера рассмотрим

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ -\frac{(x+1)^3}{4} + \frac{3(x+1)^2}{4}, & -1 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases} \quad (11)$$

Легко убедиться, что при $\alpha = 1$ этой функции распределения соответствует плотность

$$p(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)\chi_{[-1,1]}. \quad (12)$$

Дробная производная от функции (11) может быть вычислена непосредственно; окончательное выражение имеет вид

$$p(x) = \frac{3}{2} \left[\frac{(x+1)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{(x+1)^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \right] \chi_{[-1,1]}. \quad (13)$$

Подстановка $\alpha = 1$ в (13), как и следовало ожидать, приводит к (12). Простой анализ (13) показывает, что при некоторых α функция плотности может принимать в том числе и отрицательные значения. Действительно,

$$p(1) = 2^{1-\alpha} \frac{3(1-\alpha)}{\Gamma(4-\alpha)}$$

меньше нуля при $\alpha > 1$, а поскольку функция (13) непрерывна на $(-1, 1]$, то она меньше нуля и в некоторой левой окрестности точки $x = 1$. Таким образом, неотрицательность функции плотности не является ни необходимым, ни

достаточным условием для корректности определения (10). Это объясняется тем, что знак дробной производной Римана — Лиувилля (которая совпадает с p) не связан однозначно с характером монотонности самой функции.

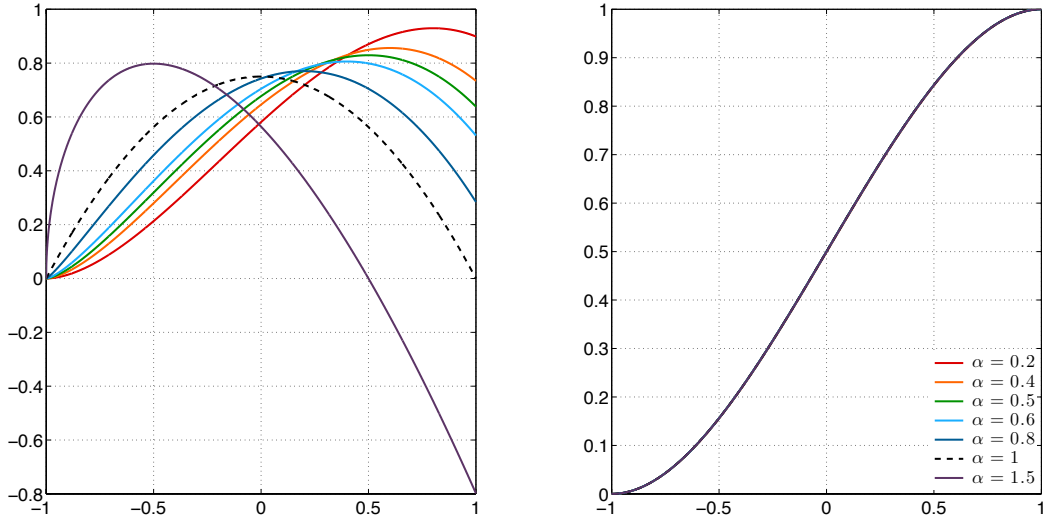


Рис. 1. Функции плотности (13) (слева) и соответствующие им функции распределения (11) (справа) при различных значениях α

Исчерпывающее описание класса функций плотности в контексте определения (10) весьма затруднительно; однако можно указать несколько простых достаточных условий. При $\alpha \geq 1$ приращение ΔF в области $x \in (a, b]$ будет определяться выражением

$$\Gamma(\alpha)\Delta F = \int_a^x p(\xi) [k_{\alpha-1}(x+\Delta x, \xi) - k_{\alpha-1}(x, \xi)] d\xi + \int_x^{x+\Delta x} p(\xi) k_{\alpha-1}(x+\Delta x, \xi) d\xi,$$

где $k_\alpha(x, \xi) = (x - \xi)^\alpha$. Если функция p неотрицательна, то, поскольку $k_{\alpha-1}(x, \xi)$ монотонно возрастает по первому аргументу, все подынтегральные функции в этом выражении при $\Delta x \geq 0$ будут неотрицательны, т.е. $\Delta F \geq 0$. Для непрерывности слева достаточно потребовать, чтобы p была ограниченной и кусочно-непрерывной функцией.

Пусть теперь $0 < \alpha < 1$. Интегрирование по частям в (10) при $x > a$ приводит к

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[p(a)k_\alpha(x, a) + \int_a^x p'(\xi)k_\alpha(x, \xi) d\xi \right], \quad (14)$$

откуда, в свою очередь, следует

$$\Gamma(\alpha+1)\Delta F = p(a)\left[k_\alpha(x+\Delta x, a) - k_\alpha(x, a)\right] + \int_a^x p'(\xi)\left[k_\alpha(x+\Delta x, \xi) - k_\alpha(x, \xi)\right]d\xi + \int_x^{x+\Delta x} p'(\xi)k_\alpha(x+\Delta x, \xi)d\xi. \quad (15)$$

Если $p(a) \geq 0$ и p' неотрицательна, то $\Delta F \geq 0$. Представление (14) также позволяет сформулировать достаточный признак непрерывности слева при $0 < \alpha < 1$: p' должна быть ограниченной кусочно-непрерывной функцией.

Таким образом, при $\alpha \geq 1$ искомому классу принадлежат ограниченные кусочно-непрерывные неотрицательные функции (что в целом совпадает с обычными требованиями к функции плотности); в случае же $0 < \alpha < 1$ в этот класс входят неубывающие функции с ограниченной кусочно-непрерывной производной, такие, что $p(a) \geq 0$.

На отрезке $[-1, 1]$, например, классу плотностей принадлежит, в силу полученного достаточного условия, семейство степенных функций

$$p(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{2^\alpha\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\gamma-1)} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\beta-1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{\gamma-1} \chi_{[-1,1]} \quad (16)$$

с $\alpha + \beta \geq 1$ и $\gamma = 1$ (см. также рис. 2 и 3).

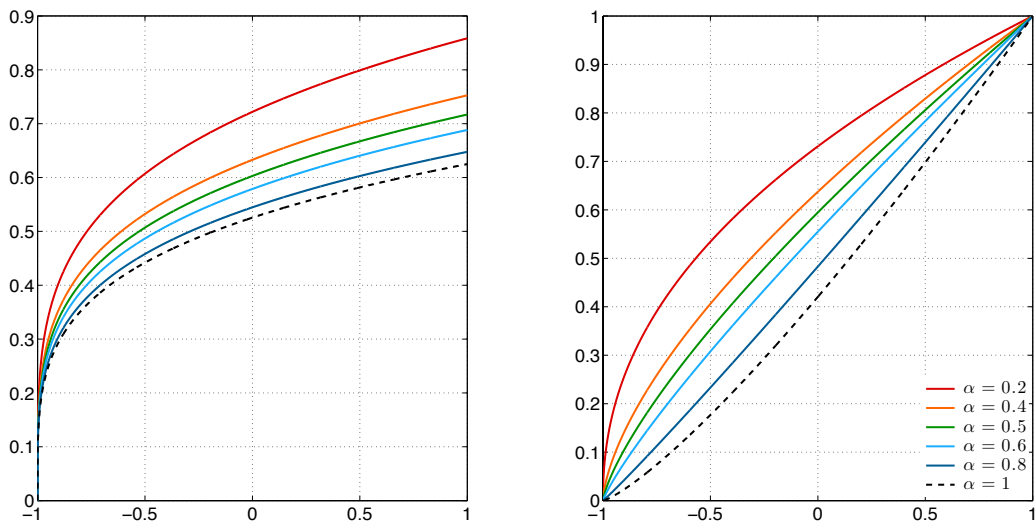


Рис. 2. Функции плотности (16) (слева) и соответствующие им функции распределения (10) (справа) при различных значениях α ; $\beta = 1.25$, $\gamma = 1$

Функция распределения в этом случае может быть найдена простым вычислением

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\alpha+\beta-1}, & -1 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Этому семейству, в частности, принадлежит аналог равномерного распределения, получаемый при $\beta = 1$ и $\gamma = 1$.

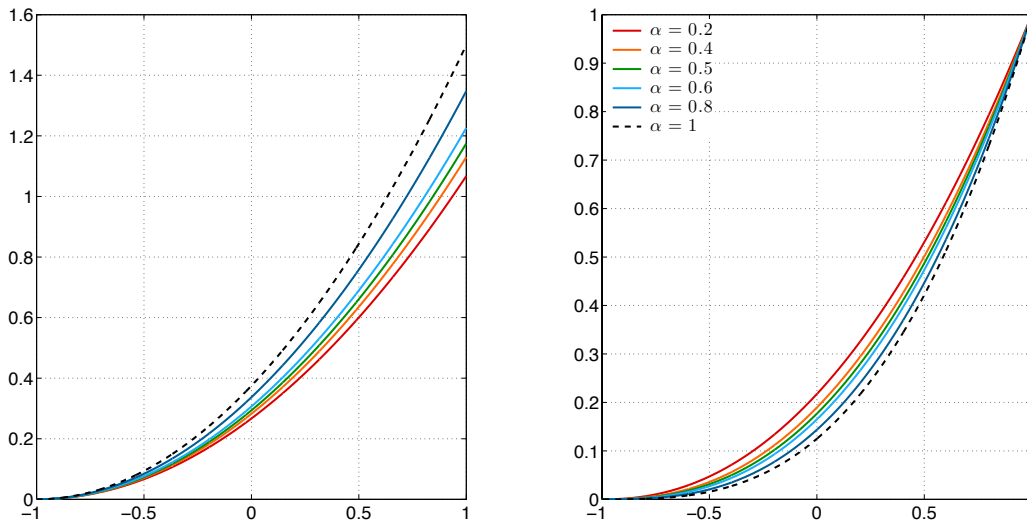


Рис. 3. Функции плотности (16) (слева) и соответствующие им функции распределения (10) (справа) при различных значениях α ; $\beta = 3$, $\gamma = 1$

Поведение дробных плотностей, соответствующих (10), в окрестности точки b существенно зависит от значения α . Так, при $0 < \alpha < 1$ на $(a, b]$ справедливо представление [1]

$$p(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{F(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x F'(\xi)(x-\xi)^{-\alpha} d\xi \right].$$

Поскольку F не убывает, найдется по крайней мере один отрезок, на котором F' (мы ограничимся рассмотрением лишь абсолютно непрерывных F , что исключает функции, для которых производная почти всюду равна нулю, как, например, для функции Кантора). Тогда сумма в правой части

$$p(b) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{F(a)}{(b-a)^\alpha} + \int_a^b F'(\xi)(b-\xi)^{-\alpha} d\xi \right]$$

является строго положительной.

При $1 \leq \alpha < 2$ аналогичное выражение для плотности принимает вид

$$p(x) = \frac{F(a)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \frac{F'(a)}{\Gamma(2-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}} + \int_a^x F''(\xi)(x-\xi)^{1-\alpha} d\xi. \quad (17)$$

Значение дробной плотности в точке b здесь зависит от направления выпуклости функции F и, вообще говоря, может быть любым, в том числе и равным нулю. Действительно, пусть функция F такова, что $F(a) = F'(a) = 0$ и

$$F''(x) = \chi_{(a,c]} + (\gamma - 1)\chi_{(c,b]}, \quad a < c < b, \gamma = \left(\frac{b-a}{b-c}\right)^{2-\alpha} > 1.$$

Вычисляя интеграл в (17), получим

$$\Gamma(3-\alpha)p(b) = (b-a)^{2-\alpha} - \gamma(b-c)^{2-\alpha} = 0.$$

Функция распределения F с указанными выше свойствами существует:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ K(x-a)^2, & a < x \leq c; \\ K\left[(c-a)(2x-a-c) - (\gamma-1)(x-c)^2\right], & c < x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (18)$$

На рис. 4 показаны соответствующие дробные плотности при некоторых α .

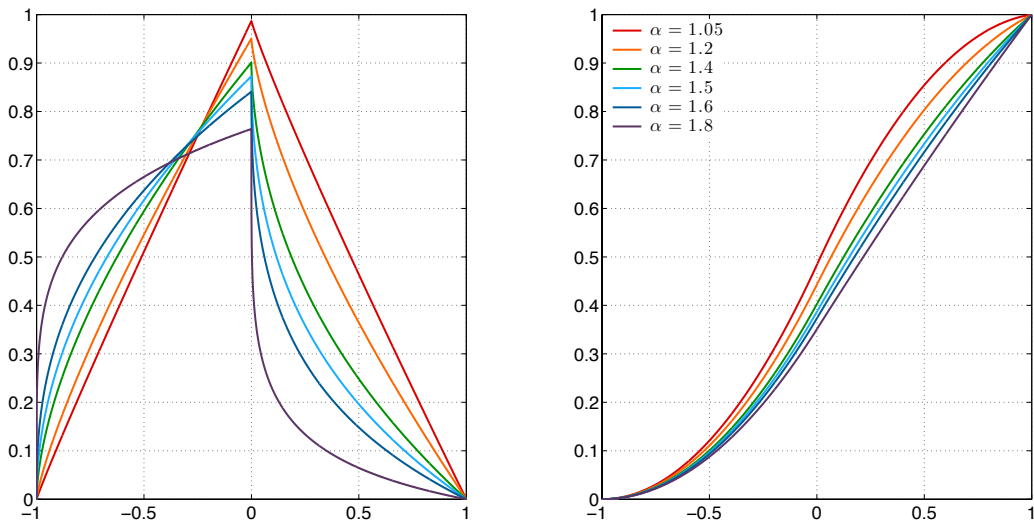


Рис. 4. Функции плотности (17) (слева) и соответствующие им функции распределения (18) (справа) при различных значениях α

Множитель K подбирается так, чтобы $F(b)=1$. Легко показать, что функция (18) будет непрерывной и неубывающей при любом выборе c . При $\alpha \geq 2$ анализ может быть проведен аналогичным образом; таким образом, отсутствие плотностей, которые бы обращались в ноль на обоих концах отрезка $[a, b]$, характерно только для $0 < \alpha < 1$.

Возможен также альтернативный подход к определению функции распределения в терминах правостороннего интегрального оператора:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ 1 - (I_{b-}^\alpha p)(x), & a < x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (19)$$

При этом (19) совпадает с (10) лишь для $\alpha = 1$. Как и в случае левосторонних интегралов, допустимые функции плотности могут быть найдены как правосторонняя дробная производная от $1 - F$, где F — функция распределения некоторой случайной величины. Например, функции распределения (11) соответствует семейство плотностей

$$p(x) = \frac{3}{2} \left[\frac{(1-x)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{(1-x)^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \right] \chi_{[-1,1]},$$

которое, очевидно, может быть получено из (13) инверсией знака переменного x .

Повторяя приведенные выше рассуждения, легко показать, что в этом случае при $0 < \alpha < 1$ для монотонности функции распределения достаточно потребовать выполнения условия $p' \leq 0$ на (a, b) , т.к.

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+1)\Delta F = p(b) & \left[k_\alpha(b, x) - k_\alpha(b, x + \Delta x) \right] + \int_{x+\Delta x}^b p'(\xi) \left[k_\alpha(\xi, x) - \right. \\ & \left. - k_\alpha(\xi, x + \Delta x) \right] d\xi + \int_x^b p'(\xi) k_\alpha(\xi, x) d\xi \end{aligned}$$

и функция $k_\alpha(\xi, x)$ монотонно убывает по второму аргументу. В соответствии с этим достаточным условием классу плотностей принадлежат, например, функции (16) с $\alpha + \gamma \geq 1$ и $\beta = 1$ (см. также рис. 5).

Рассмотренные построения легко могут быть распространены на случай функций с неограниченным носителем; при этом, однако, необходимо дополнительно потребовать, чтобы p нужным образом убывала на бесконечности. Например, если функция распределения определена с помощью правостороннего интегрального оператора

$$F(x) = \left[1 - (I_{0-}^\alpha p)(x) \right] \chi_{(0,+\infty)},$$

классу плотностей принадлежит экспоненциальное однопараметрическое семейство

$$p(x) = \lambda^\alpha e^{-\lambda x} \chi_{(0,+\infty)}$$

с $\lambda > 0$. Функция распределения здесь легко может быть найдена непосредственным вычислением:

$$F(x) = \left[1 - e^{-\lambda x} \right] \chi_{(0,+\infty)}.$$

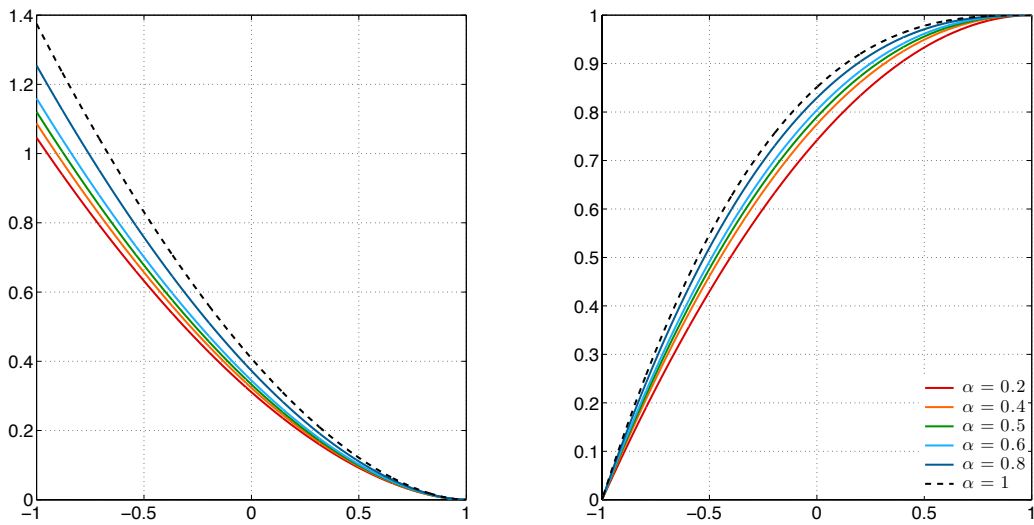


Рис. 5. Функции плотности (16) (слева) и соответствующие им функции распределения (19) (справа) при различных значениях α ; $\beta = 1$, $\gamma = 2.75$

Для функций, носитель которых совпадает с $\mathbb{R}$, рассмотрение проводится аналогично. Например, на рис. 6 представлены несколько функций плотности (полученных с помощью численных методов) при различных α , соответствующие стандартному распределению Гаусса:

$$p(x) = (D_+^\alpha F)(x), \quad F(x) = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(x)].$$

Полученные выше достаточные условия для функций плотности при $0 < \alpha < 1$, связанные с сохранением знака производной функции плотности, для функций, определенных на всей числовой оси, теряют смысл: действительно, для существования $(I_+^\alpha p)(x)$ на всей оси необходимо потребовать достаточно быстрого убывания p при $x \rightarrow \pm\infty$; но тогда p не может быть неубывающей положительной функцией на всей оси.

Следует отметить, что при рассмотрении функций распределения, представимых дробными интегралами Римана — Лиувилля, предварительный

выбор носителя функции плотности имеет существенное значение — это связано с тем, что дробная производная константы при $\alpha \notin \mathbb{N}$ не равна нулю (см., например, [1]).

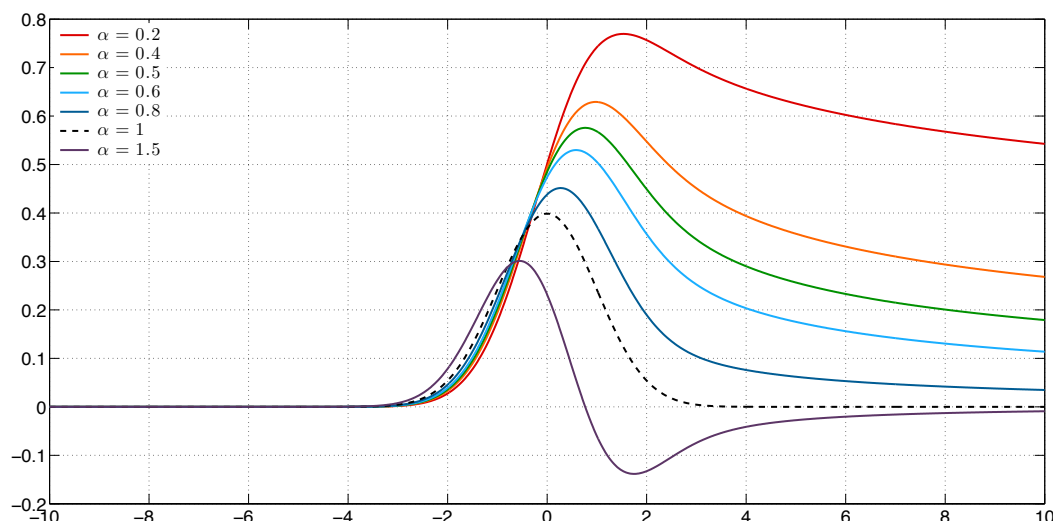


Рис. 6. Функции плотности, соответствующие стандартному распределению Гаусса, при различных значениях α

Рассмотрим, например, функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{x+1}{2}, & -1 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Основываясь на соотношении (10) и выполняя дробное дифференцирование на промежутке $(-1, 1]$, можно показать, что соответствующая плотность имеет вид

$$p(x) = \frac{(x+1)^{1-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)} \chi_{[-1,1]}.$$

Однако, выполняя дробное дифференцирование F на полуоси $[-1, +\infty)$, можно получить другую функцию плотности p_* , соответствующую той же самой функции распределения. Для получения аналитического выражения для плотности предварительно необходимо вычислить интеграл

$$j_\alpha(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \int_{-1}^1 (1+\xi)(x-\xi)^{\alpha-1} d\xi.$$

После замены $\eta = (\xi+1)(x+1)^{-1}$ получим

$$j_{\alpha}(x) = \frac{(x+1)^{1+\alpha}}{2\Gamma(\alpha)} B_{\frac{2}{x+1}}(2, \alpha) = \frac{(x+1)^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} {}_2F_1\left(2, 1-\alpha, 3, \frac{2}{x+1}\right).$$

Тогда, при $0 < \alpha < 1$

$$p_*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{(x+1)^{1-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)}, & -1 < x \leq 1; \\ \frac{dj_{\alpha}}{dx} + \frac{(x-1)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, & x > 1. \end{cases}$$

Эволюционные уравнения для функции плотности

Большое количество работ (см., например, [28–32] и цитированную там литературу) посвящено построению дробных аналогов уравнения Фоккера — Планка в контексте различных физических (описание «аномальных» кинетических процессов в сложноструктурированных средах) или математических (исследование различных обобщений уравнения Ланжевена и уравнения Чепмена — Колмогорова) задач; в работах [33–36] предложены схемы численного моделирования дискретных случайных процессов, для которых функция плотности удовлетворяет дробному уравнению Фоккера — Планка в той или иной форме. Однако, как будет показано ниже, переход к дробным операторам в стандартном уравнении Фоккера — Планка в предположении, что функция распределения и функция плотности связаны соотношением типа (18), в некотором смысле ухудшает свойства получаемого уравнения.

Будем рассматривать уравнение для совместной плотности распределения случайного процесса $f(x, v, t)$ следующего вида:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - C_{1x} D_+^{\alpha} f - C_{2v} D_+^{\alpha} f = 0, \quad (20)$$

где ${}_x D_+^{\alpha}$ и ${}_v D_+^{\alpha}$ — соответственно частные левосторонние дробные производные Римана — Лиувилля по переменным x и v [1]. Известно, что при $\alpha = 2$ уравнение (20), представляющее собой в этом случае одну из форм двумерного уравнения Фоккера — Планка, допускает т.н. гидродинамическую подстановку [37]

$$f(x, v, t) = p(x, t) \delta(v - V(x, t)), \quad (21)$$

позволяющую перейти от (20) к системе дифференциальных уравнений для маргинальной функции плотности p и функции V .

В общем случае, при ненатуральных α , подстановка (21) в (20) с последующим интегрированием по переменному v после некоторых манипуляций приводит к

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Vp) - C_{1x} D_+^\alpha p - C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} p_v D_+^\alpha \delta = 0. \quad (22)$$

Действие дробной производной Римана — Лиувилля на функцию Дирака рассматривается в целом так же, как и в случае обычных производных: для основных функций ϕ из пространства Лизоркина оно определяется соотношением [1]

$$(D_\pm^\alpha \delta, \phi) = (\delta, D_\mp^\alpha \phi).$$

Формальное выполнение дробного дифференцирования в последнем слагаемом (22) в соответствии с этим правилом, однако, невозможно, поскольку в выражении

$$\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dv^n} \int_v^{+\infty} (\eta - v)^{n-\alpha-1} d\eta$$

несобственный интеграл расходится. Эту проблему можно было бы обойти, считая, что пространство скоростей является ограниченным отрезком, т.е. $v \in [a, b]$; в этом случае дробная производная от функции Дирака при $\alpha \notin \mathbb{N}$ будет отлична нуля и уравнение для маргинальной плотности (в предположении, что $a < V < b$ при любых x и t) будет неоднородным:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Vp) - C_{1x} D_+^\alpha p - \frac{C_2}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{p}{(b-V)^\alpha} = 0.$$

Такой подход, однако, не имеет под собой достаточных оснований и накладывает слишком строгие ограничения на рассматриваемую систему.

Еще одним существенным затруднением является возможность построения несколько неэквивалентных дробных аналогов уравнения Фоккера — Планка в зависимости от того, в какой форме этого уравнения и каким образом была осуществлена замена обычных дифференциальных операторов на операторы дробного порядка (см. также [7]). Так, например, краевой задаче для одномерного уравнения Фоккера — Планка в форме (для удобства будем рассматривать случай постоянных коэффициентов)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + A \frac{\partial p}{\partial x} - B \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0; \quad (23)$$

$$p(a, t) = p(b, t) = 0, \quad p(x, 0) = \phi(x) \quad (24)$$

могут соответствовать два различных уравнения:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + AD_{a+}^{\alpha} p - BD_{a+}^{2\alpha} p = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + AD_{a+}^{\alpha} p - BD_{a+}^{\alpha+1} p = 0, \quad (26)$$

с теми же граничными условиями. Заметим, что при $\alpha < 1$ решения этих уравнений не могут быть плотностями в смысле определения (10), поскольку, как было показано выше, при таких значениях α не существует плотностей, обращающихся в ноль на обоих концах отрезка.

В то же время из (23) следует (в предположении, что поток вероятности обращается в ноль на границах отрезка) эквивалентная краевая задача для функции распределения

$$\frac{\partial F}{\partial t} + A \frac{\partial F}{\partial x} - B \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; \quad (27)$$

$$F(a, t) = 0, \quad F(b, t) = 1, \quad F(x, 0) = \theta(x). \quad (28)$$

Ей также можно поставить в соответствие два различных уравнения, по форме совпадающих с (25) и (26):

$$\frac{\partial F}{\partial t} + AD_{a+}^{\alpha} F - BD_{a+}^{2\alpha} F = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + AD_{a+}^{\alpha} F - BD_{a+}^{\alpha+1} F = 0, \quad (30)$$

при этом распределения, задаваемые этими четырьмя уравнениями, в общем случае не совпадают друг с другом. Заметим также, что решения (29) и (30) с граничными условиями (28) при некоторых α не являются функциями распределения: на рис. 7 хорошо видно, что полученные решения могут быть немонотонны.

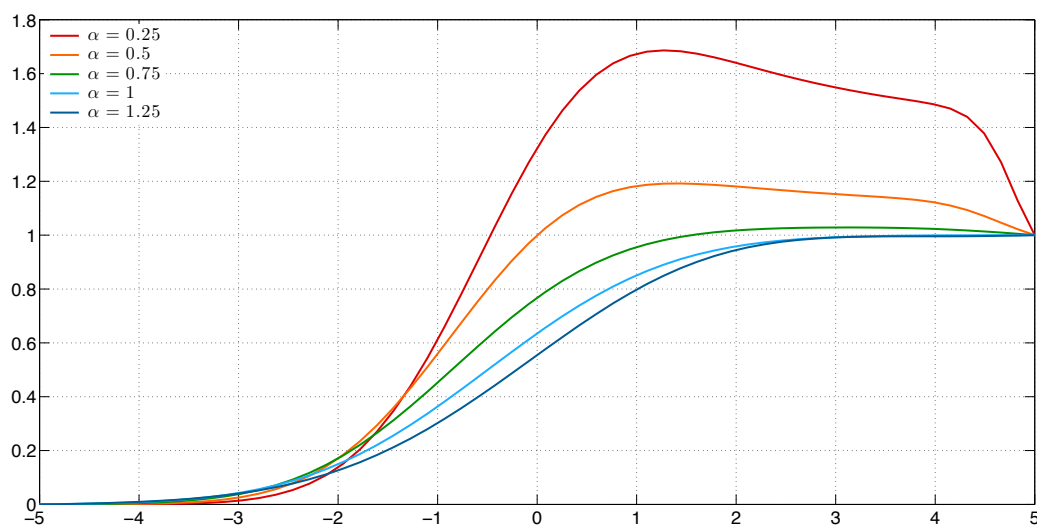


Рис. 7. Решения уравнения (29) при различных α на отрезке $[-5, 5]$; в качестве начального условия было выбрано стандартное распределение Гаусса

Заключение

Проведенный анализ показывает, что подход к определению вероятностной меры с помощью интегралов Римана — Лиувилля порождает ряд существенных затруднений. К ним, например, следует отнести нестандартные свойства плотностей, делающие невозможным применение обычных статистических методов: например, плотность, принимающую отрицательные значения, нельзя аппроксимировать с помощью обычной техники эмпирических частот. Отметим также, что сам переход к дробным операторам неоднозначен: одному и тому же объекту можно поставить в соответствие различные конструкции (с лево- или правосторонними операторами, на конечном или бесконечном промежутках), которые в общем случае совпадают друг с другом только при $\alpha = 1$, т.е. в рамках стандартной теории.

Список литературы

- [1] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
- [2] Miller K. S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York etc.: John Wiley & Sons, 1993. 366 p.
- [3] Oldham K. B., Spaniel J. The fractional calculus. San Diego etc.: Academic Press, 1974. 240 p.
- [4] Ross B. The development of fractional calculus 1695–1900 // Historia Mathematica. 1997. Vol. 4. P. 75–89.

- [5] Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order // *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics* / Ed. by A. Carpinteri, F. Mainardi. Wien and New York: Springer, 1997. P. 223–276.
- [6] Mainardi F. Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics // *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics* / Ed. by A. Carpinteri, F. Mainardi. Wien and New York: Springer, 1997. P. 291–348.
- [7] Nonnenmacher T.F., Metzler R. Applications of fractional calculus techniques to problems in biology // *Applications of fractional calculus in physics* / Ed. by R. Hilfer. Singapore etc.: World Scientific, 2000. P. 377–428.
- [8] Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego etc.: Academic Press, 1999. 366 p.
- [9] Васильев В.В., Симак Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Киев: НАН Украины, 2008. 256 с.
- [10] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam etc.: Elsevier, 2006. 541 p.
- [11] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
- [12] Hilfer R. Fractional diffusion based on Riemann — Liouville fractional derivatives // *The Journal of Physical Chemistry B*. 2000. Vol. 104, no. 16. P. 3914–3917.
- [13] Mainardi F., Luchko Y., Pagnini G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2001. Vol. 4, no. 2. P. 153–192.
- [14] Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Physics reports*. 2000. Vol. 339, no. 1. P. 1–77.
- [15] Metzler R., Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2004. Vol. 37, no. 31.
- [16] Моделирование физических полей в наноразмерных и фрактальных структурах: отчет о НИР / Сумский государственный университет; Л.А. Фильштинский и др. 2009. 68 с.
- [17] Giona M., Roman H. E. Fractional diffusion equation on fractals: three-dimensional case and scattering function // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1992. Vol. 25, no. 8. P. 2107–2117.
- [18] Giona M., Roman H.E. Fractional diffusion equation on fractals: One-dimensional case and asymptotic behavior // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1992. Vol. 25, no. 8. P. 2093–2105.
- [19] Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation // *Applied Mathematics Letters*. 1996. Vol. 9, no. 6. P. 23–28.
- [20] Fujita Y. Integro-differential equations which interpolates the heat and the wave

- equation // Osaka Journal of Mathematics. 1990. Vol. 27, no. 2. P. 309–321.
- [21] Shlesinger M.F., Zaslavsky G.M., Klafter J. Strange kinetics // Nature. 1993. Vol. 363, no. 6424. P. 13–37.
- [22] Зеленый Л.М., Милованов А.В. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // УФН. 2004. Т. 174, № 8. С. 809–852.
- [23] Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. I. Математические основы и проблема интерпретации // Автоматика и телемеханика. 2013. № 4. С. 3–42.
- [24] Jumarie G. Fractional Euler's integral of first and second kinds. Application to fractional Hermit's polynomials and to probability density of fractional order // Journal of Applied Mathematics & Informatics. 2010. Vol. 28, no. 1–2. P. 257–273.
- [25] Jumarie G. Probability calculus of fractional order and fractional Taylor's series application to Fokker — Planck equation and information of non-random functions // Chaos, Solitons & Fractals. 2009. Vol. 40, no. 3. P. 1428–1448.
- [26] Jumarie G. Path probability of random fractional systems defined by white noises in coarse-grained time. Applications of fractional entropy // Fractional Differential Calculus. 2011. Vol. 1, no. 1. P. 47–87.
- [27] Tenreiro Machado J.A. Fractional coin and fractional derivatives // Abstract and Applied Analysis. 2013. Vol. 2013.
- [28] Tarasov V.E. Fractional Fokker — Planck equation for fractal media // Chaos. 2005. Vol. 15, no. 2. P. 023102.
- [29] Дубков А.А., Спаньоло Б. Стационарные вероятностные характеристики супердиффузии // Актуальные проблемы статистической радиофизики. 2006. Т. 5. С. 55–65.
- [30] Lévy anomalous diffusion and fractional Fokker — Planck equation / V.V. Yanovsky, A.V. Chechkin, D. Schertzer, A.V. Tur // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2000. Vol. 282, no. 1. P. 13–34.
- [31] Fractional Fokker — Planck equation for nonlinear stochastic differential equations driven by non-Gaussian Lévy stable noises / D. Schertzer, M. Larchevêque, J. Duan et al. // Journal of Mathematical Physics. 2001. Vol. 42. P. 200–212.
- [32] Zaslavsky G. M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Physics Reports. 2002. Vol. 371, no. 6. P. 461–580.
- [33] Discrete random walk models for space-time fractional diffusion / R. Gorenflo, F. Mainardi, D. Moretti et al. // Chemical Physics. 2004. Vol. 284, no. 1. P. 521–541.
- [34] Fractional diffusion: probability distributions and random walk models / R. Gorenflo, F. Mainardi, D. Moretti et al. // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2002. Vol. 305, no. 1. P. 106–112.
- [35] Andries E., Umarov S., Steinberg S. Monte-Carlo random walk simulations

based on distributed order differential equations with applications to cell biology
// Fractional Calculus and Applied Analysis. 2006. Vol. 9, no. 4. P. 351–369.

- [36] Umarov S., Steinberg S. Random walk models associated with distributed fractional order differential equations // High Dimensional Probability: Proceedings of the Fourth International Conference. Vol. 51 of IMS Lecture Notes-Monograph. 2006. P. 117.
- [37] Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 112 с.