ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 14 за 2014 г.

Ларионов Е.А., Зверяев Е.М., Алероев Т.С.

К теории слабого возмущения нормальных операторов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ларионов Е.А., Зверяев Е.М., Алероев Т.С. К теории слабого возмущения нормальных операторов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 14. 31 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-14

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Е.А. Ларионов, Е.М. Зверяев, Т.С. Алероев

К теории слабого возмущения нормальных операторов

Москва — 2014

Ларионов Е.А., Зверяев Е.М., Алероев Т.С.

К теории слабого возмущения нормальных операторов

Работа посвящена изучению операторов, возникающих при возмущении нормальных операторов с дискретным спектром и сопряжённых с ними операторных пучков. Впервые спектральные свойства таких операторов исследовал М.В. Келдыш, установивший полноту системы их корневых векторов и распределение собственных значений. В данной работе установлена базисность этой системы, локализация корневых векторов и собственных значений рассматриваемых операторов.

Ключевые слова: оператор Келдыша, распределение собственных значений, базисность.

Evgeny Alekseevich Larionov, Evgeny Mikhajlovich Zveriaev,
Temirhan Sultanovich Aleroev

On Theory of Normal Operators Weak Perturbations

Work is devoted to the study of operators arising under perturbation of normal operators with the discrete spectrum and associated operator bundles. M.V. Keldysh was the first who investigated the spectral properties of these operators. He established the completeness of the root vectors system and the eigenvalues distribution. The system basis property and root vectors and eigenvalues localization for the operators are established.

Key words: Keldysh operator, eigenvalues distribution, basis property.

Оглавление

Изучение свойств операторов, полученных слабым возмущением нормальных (в частности самосопряжённых) операторов связано с теорией операторных пучков М.В. Келдыша, возникших в связи с изученными им дифференциальными уравнениями в гильбертовом пространстве. Полиномиальному операторному пучку определённой структуры сопоставляется линейный операторный пучок, действующий в ортогональной сумме гильбертовых пространств и порождённый им оператор, являющийся слабым возмущением нормального оператора. Ключевыми моментами в изучении спектральных свойств рассматриваемых операторов является предложенный в данной работе критерий компактности линейных операторов. При исследовании соответствующих операторных пучков существенно используются свойства операторов, самосопряжённых в пространствах с индефинитной метрикой.

1. Вспомогательные понятия

В теории возмущений и при решении прикладных задач в соответствующем гильбертовом пространстве $\hbar$ возникают операторы вида $A=(I+S)H$ и $B=H(I+S_1)$, называемые при компактных S и S_1 слабыми возмущениями оператора H. Множество всех линейных компактных операторов в $\hbar$ обозначается γ_∞.

В типичной ситуации самосопряжённый оператор H^{-1} с дискретным спектром возмущается оператором T, причём $Д(H^{-1})\subset Д(T)$ и оператор $Q=TH\in\gamma_\infty$. В результате операторы $A^{*-1}=(I+Q)H^{-1}$, $A^*=H(I+S_1)$ и $A=(I+S)H$ оказываются слабыми возмущениями соответственно H^{-1} и H. Здесь $S_1=(I+Q)^{-1}-I$, $S=S_1^*$ и предполагается, что операторы A и H аннулируются лишь в нуле. Основные спектральные свойства операторов $A=(I+S)H$ и $B=H(I+S_1)$ при $H\in\gamma_p$; когда $\left(H^{n_0}\right)^*=H^{n_0}$; $S,S_1\in\gamma_\infty$; $n_0\in N$ установил М.В. Келдыш [1,2] и операторы такой структуры назовём операторами келдышевского вида. Здесь $\gamma_p=\left\{A\in\gamma_\infty \left| \sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(A)<\infty \right.\right\}$; где $s_n(A)-s-$ числа оператора A.

Слабые возмущения нормальных операторов вида $\left(H^{n_0}\right)^*=H^{n_0}$ возникают при сопоставлении пучку

$$K(\lambda)=I-T_0-\lambda HT_1-...\lambda^{n-1}H^{n-1}T_{n-1}-\lambda^n H^n, \tag{1}$$

где H, $T_j\in\gamma_\infty$; $j=0,1,...,n-1$ линейного пучка

$$\tilde{K}(\lambda)=\tilde{I}-\tilde{T}-\lambda\tilde{H} \tag{2}$$

действующего в пространстве $\tilde{\hbar}=\sum_{1}^{n}\oplus\hbar$. Полнота в $\hbar$ системы корневых векторов (СКВ) пучка $\tilde{K}(\lambda)$ эквивалентна n-кратной полноте СКВ пучка $K(\lambda)$.

Пусть оператор $A=(I+S)H$; S, $H\in\gamma_\infty$; $H^*H=HH^*$; $(\tilde{x}_n)$ и $(\tilde{y}_n)$ полные в $\hbar$ СКВ соответственно операторов A и H, отвечающие их занумерованным с учётом кратностей в порядке уменьшения модуля собственным числам λ_n и μ_n; $x_n=\tilde{x}_n/\|\tilde{x}_n\|$, $y_n=\tilde{y}_n/\|\tilde{y}_n\|$. Согласно $H^*H=HH^*$ система (y_n) образует ортонормальный базис $\hbar$. Для полного компактного оператора имеют место следующие свойства [3]:

Свойство 1. Ограниченная последовательность собственных векторов (СВ) оператора A слабо сходится к нулю.

Свойство 2. Наличие последовательности соотношений

$$Ax_k^i=\lambda_k x_k^i+x_k^{i-1};\quad 0<C_1<\left\|x_k^{i-1}\right\|<C_2,\quad i\in N \tag{3}$$

влечёт равенство

$$\lim\left\|x_k^i\right\|=\infty. \tag{4}$$

Свойство 3. Для $A=(I+S)H$; S, $H\in\gamma_\infty$; $H^*H=HH^*$ при условии (3).

$$\lim_{k\to\infty}|\lambda_k|\cdot\left\|x_k^i\right\|=\infty. \tag{5}$$

Для СКВ $(\tilde{z}_n)$ оператора $A^*=H(I+S^*)$, образующей биортогональную к $(\tilde{x}_n)$ систему в $\hbar$, справедливы аналогичные свойства.

Замечание 1. Согласно свойству 2 СКВ $(\tilde{x}_n)$ и $(\tilde{z}_n)$ операторов A и A^*, содержащие бесконечное число присоединённых векторов, не являются почти нормированными. В силу отмеченных выше свойств систем $(\tilde{x}_n)$ и $(\tilde{z}_n)$ и структуры операторов A и A^* имеют место соотношения

$$\left\|\frac{Hx_n}{\lambda_n}-x_n\right\|\underset{n\to\infty}{\to}0, \tag{6}$$

$$\left\|\frac{Hz_n}{\bar{\lambda}_n}-z_n\right\|\underset{n\to\infty}{\to}0, \tag{7}$$

где $x_n=\tilde{x}_n/\|\tilde{x}_n\|$, $z_n=\tilde{z}_n/\|\tilde{z}_n\|$. Поскольку $Hx_n=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\left(x_n,y_k\right)y_k$ и $Hz_n=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\left(z_n,y_k\right)y_k$, то согласно соотношениям (6) и (7) будет

$$\phi_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\mu_k}{\lambda_n}-1\right|^2\cdot\left|\left(x_n,y_k\right)\right|^2\underset{n\to\infty}{\to}0, \tag{8}$$

$$\Psi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\mu_k}{\bar{\lambda}_n} - 1 \right|^2 \cdot \left| (z_n, y_k) \right|^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{9}$$

Соотношения (8) и (9), связывающие корневые векторы и собственные значения операторов A и H и, соответственно, A^* и H, служат основой для обоснования в работах [4, 5] равенств

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1, \tag{10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{\lambda}_n}{\mu_n} = 1. \tag{11}$$

2. Об одном свойстве операторов келдышевского вида

Пусть оператор $A = (I+S)H$, $S \in \gamma_\infty$, $H = H^* \in \gamma_\infty$, обладает инвариантным подпространством $\hbar$, P_1 ортопроектор на $\hbar_1$ и A_1 есть сужение A на $\hbar_1$. Возникает вопрос: является ли A_1 слабым возмущением некоторого самосопряжённого оператора? Оказывается справедливо следующее **свойство наследования:** келдышевский вид оператора A сохраняется для его сужений и A_1 есть слабое возмущение самосопряжённого в $\hbar_1$ оператора $\tilde{H}_1$, который либо совпадает с оператором $H_1 = P_1 H P_1$, либо отличается от H_1 на конечномерный оператор.

Доказательство: a) Пусть P_2 ортопроектор на $\hbar_2 = \overline{H\hbar_1}$ – замыкание линеала $\hbar_2^1 = H\hbar_1$. Поскольку $A\hbar_1 \subset \hbar_1$, $\ker A = \{0\}$ и $S \in \gamma_\infty$, оператор $(I+S)$ гомеоморфно отображает $\hbar_2$ на $\hbar_1$. Применив к равенству $x = x + Sx - Sx$ ортопроектор P_1 на $\hbar_1$, получим $P_1 x = x + Sx - P_1 Sx$,

$$P_1 x = P_2 x + Q_1 S P_2 x \qquad Q_1 = I - P_1. \tag{1}$$

Запишем соотношение $AP_1 = P_1 A P_1$ в виде

$$A_1 = P_1 H P_1 + P_1 S H P_1. \tag{2}$$

Согласно формуле (1) оператор $P_1 P_2 \div \hbar_2 \to \hbar_1$ совпадает на $\hbar_2$ с оператором $P_2 + Q_1 S P_2$ и в силу $S \in \gamma_\infty$ может аннулировать лишь конечномерное подпространство. Вместе с $\ker H = \{0\}$ это влечёт, что $\dim \ker H_1 < \infty$.

b) В случае $\ker H_1 = \{0\}$ представим A_1 в виде

$$A_1 = \left[P_1 + P_1 S H P_1 \cdot (P_1 H P_1)^{-1} \right] P_1 H P_1 \tag{3}$$

и покажем, что оператор $S_1 = P_1SHP_1 \cdot \left(P_1HP_1\right)^{-1}$ допускает компактное замыкание. Рассмотрим оператор $P_1HP_1 \cdot P_1H^{-1}P_2$. Поскольку $\overline{HP_1\hbar} = P_2\hbar$, то $H^{-1}P_2 = \left(P_1 \oplus Q_1\right)H^{-1}P_2 = P_1H^{-1}P_2$ и поэтому для $x \in H\hbar_2$

$$P_1HP_1 \cdot P_1H^{-1}P_2 = P_1HH^{-1}P_2 = P_1P_2. \qquad (4)$$

Оператор $H_1 = P_1HP_1$ самосопряжён и при $\ker H_1 = \{0\}$ область его значений $R(H_1)$ всюду плотна в $\hbar_1$. Это означает, что оператор $P_1HP_1 \cdot P_1H^{-1}P_2$ всюду плотный в $\hbar_2$ линеал $\hbar_2^{/}$ отображает на всюду плотный в $\hbar_1$ линеал $R(H_1)$. В силу соотношения (4) область значений P_1P_2 также всюду плотна в $\hbar_1$.

с) Ядро $\hat{\hbar}_0$ оператора P_1P_2 совпадает с $\hbar_2 \cap \hbar_1^{\perp}$, $\hbar_1^{\perp} = \hbar\Theta\hbar_1$. Поскольку для $x \in \hat{\hbar}_0$ имеем $P_2x = -Q_1SP_2x$, а $S \in \gamma_\infty$, то $\dim\hat{\hbar}_0 < \infty$. Положим $\overset{0}{\hbar}_2 = \hbar_2\Theta\hat{\hbar}_0$ и покажем, что P_1P_2 ограниченно обратим на линеале $\hbar_1^{/} = P_1P_2\overset{0}{\hbar}_2$. Допустим обратное. Тогда в $\overset{0}{\hbar}_2$ существует последовательность $\left(x_n\right)$, $\|x_n\| = 1$, такая, что $\left(P_1x_n\right)\underset{n\to\infty}{\to}\{0\}$. В силу слабой компактности единичной сферы найдётся подпоследовательность $\left(x_{n_k}\right)\underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} x_0$. Поскольку $\left(Q_1SP_2x_{n_k}\right)\underset{k\to\infty}{\to} Q_1SP_2x_0$, то в силу (1) и предположения, что $\left(P_1x_{n_k}\right)\underset{k\to\infty}{\to}\{0\}$ имеем соотношение $\left(x_{n_k}\right)\underset{k\to\infty}{\to} x_0$. Тем самым $x_0 = -Q_1SP_2x_0$, причём $x_0 \neq \{0\}$. Теперь с одной стороны $x_0 \in \overset{0}{\hbar}_2$, а с другой стороны $x_0 \in \hbar_1^{\perp}$, что невозможно, ибо $x_0 \neq \{0\}$, а $\hbar_2^0 \cap \hbar_1^{\perp} = \{0\}$. Ограниченная обратимость оператора P_1P_2 на линеале $P_1P_2\hbar_2^0$ влечёт его замкнутость по норме $\|x\|$. Если $\ker H_1 = \{0\}$, то $\overline{P_1P_2\hbar_2} = \hbar_1$ и согласно соотношению $P_1P_2\hbar_2 = P_1\left(P_0 \oplus \overset{0}{P}_2\right)\hbar_2 = P_1\overset{0}{P}_2\hbar_2 = P_1P_2\overset{0}{\hbar}_2$. В силу (4) оператор $P_2HP_1(P_1HP_1)^{-1}$ ограничен и поскольку $SHP_1 = SP_2HP_1$, то расширение по непрерывности оператора S_1 является компактным в $\hbar_1$ оператором. Таким образом, в случае $\ker H_1 = \{0\}$ вид оператора $A = (I+S)H$ наследуется его сужениями на A инвариантные подпространства.

d) Пусть $\hat{\hbar}_0 \neq \{0\}$ и $n = \dim\hat{\hbar}_0$. Поскольку $\hbar_2 = \overset{0}{\hbar}_2 \oplus \hat{\hbar}_0$ и $\overline{\hbar}_2^1 = \hbar_2$, то в линеале $\hbar_2^1$ существует n-мерное подпространство $\hat{\varepsilon}_0$, причём $\hat{\varepsilon}_0 \cap \overset{0}{\hbar}_2 = \{0\}$ и $\overline{\overset{0}{\hbar}_2 + \hat{\varepsilon}_0} = \hbar_2$. Если $\hat{N}_0$ и $\overset{0}{N}_2$ – операторы проектирования линеала $\tilde{\hbar}_2 = \overset{0}{\hbar}_2 + \hat{\varepsilon}_0$ на $\hat{\varepsilon}_0$ и $\overset{0}{\hbar}_2$ параллельно соответственно $\overset{0}{\hbar}_2$ и $\hat{\varepsilon}_0$, то $\delta = \left\|\hat{N}_0\right\|^{-1} = \inf\limits_{\|x\|=1; x\in\hat{\varepsilon}_0} \left\|x - \overset{0}{P}_2 x\right\|$, где $\overset{0}{P}_2$ – ортопроектор на h_2^0. Единичная сфера $\hat{S}(0;1)$ в $\hat{\varepsilon}_0$ компактна, а потому существует такой вектор $\hat{x}\in\hat{S}(0;1)$, что $\delta = \left\|\hat{x} - \overset{0}{P}_2\hat{x}\right\|$ и поскольку $\hat{x}\notin\overset{0}{\hbar}_2$, то $\delta>0$ и $\left\|\hat{N}_0\right\|<\infty$, а тогда и $\left\|\overset{0}{N}_2\right\|<\infty$. Ограниченность косопроекторов $\hat{N}_0$ и $\overset{0}{N}_2$ равносильна разложению $\hbar_2 = h_2^0 + \hat{\varepsilon}_0$, согласно которому $\overset{\prime}{\hbar}_2 = \overset{0\prime}{\hbar}_2 + \hat{\varepsilon}_0$, где $\overset{0\prime}{\hbar}_2 = \overset{\prime}{\hbar}_2 \cap \overset{0}{\hbar}_2$. Если $\overline{\overset{0\prime}{\hbar}_2} \ne \overset{0}{\hbar}_2$, то найдётся ненулевой вектор $x_0 = \hat{x}_{20} + \hat{x}_0$; $\hat{x}_0\in\hat{\varepsilon}_0$; $\hat{x}_{20}\in\overset{0}{\hbar}_2$, причём $\hat{x}_{20}\notin\overline{\overset{0\prime}{\hbar}_2}$. Для последовательности (x_n) из $\overset{\prime}{\hbar}_2$, сходящейся к x_0, с учётом $\left(\overset{0}{N}_2 x_n\right)\in\overset{0\prime}{\hbar}_2$ и $\left\|\overset{0}{N}_2\right\|<\infty$ получим $\left(\overset{0}{N}_2 x_n\right)\underset{n\to\infty}{\to}\overset{0}{N}_2 x_0 \in \overline{\overset{0\prime}{\hbar}_2}$, что в силу $\overset{0}{N}_2 x_0 = \hat{x}_{20}$ противоречит предположению. Таким образом, линеал $\overset{0\prime}{\hbar}_2$ плотен в $\overset{0}{\hbar}_2$.

Пусть ε_1 и $\overset{0}{\hbar}_1$ – линеалы из $\hbar_1$, отображаемые оператором H соответственно на ε_0 и $\overset{0\prime}{\hbar}_2$. При этом линеал $\hbar_1^{\prime} = \varepsilon_1 + \overset{0}{\hbar}{}_2^{\prime}$ преобразуется в линеал $\tilde{\hbar} = \varepsilon_0 + \overset{0\prime}{\hbar}_2$. Поскольку $P_1P_2 = P_1HH^{-1}P_2$ на $\hbar_2^{\prime}$ и $P_1P_2\overset{0}{\hbar}_2 = \hbar_1$, а $\overline{\overset{0}{\hbar}{}_2^{\prime}} = \overset{0}{\hbar}_2$, то линеал $\overset{0}{\hbar}{}_1^{\prime}$ всюду плотен в $\hbar_1$. Тем самым $\varepsilon_1=\{0\}$, а тогда и $\varepsilon_0=\{0\}$, а потому $\overset{0}{\hbar}_2=\hbar_2$ и $\hbar_0 = \ker P_1P_2 = \{0\}$. Ядро оператора P_1P_2 состоит из образа ядра оператора H_1 при отображении $H:\hbar_1\to\hbar_2^{\prime}$ и $\ker H_1 = \dim\ker H_1 = \dim\ker P_1P_2$.При $\ker H_1=\{0\}$ оператор P_1P_2 гомеоморфно отображает $\hbar_2$ на $\hbar_1$.

e) Пусть $\hbar_0 = \ker H_1$, $\hbar_{10} = \hbar\oplus\hbar_0$, P_0 и P_{10} – ортопроекторы на $\hbar_0$ и $\hbar_{10}$. Если $H_{10} = H_1/\hbar_{10}$, то $H_{10} = P_{10}HP_{10}$. Равенствами $H_0\phi_k = \mu_k\phi_k$, где (ϕ_k) ортонормальный базис $\hbar_0$, $\mu_k = \overline{\mu_k} \ne 0$, построим оператор $H_0 = H_0^*$. Для оператора $\tilde{H}_1 = H_{10}\oplus H_0$ $\ker\tilde{H}_1 = \{0\}$. Имеем, что $\tilde{H}_1 = P_1HP_1 + H_0P_0$, ибо $P_1HP_1 = P_{10}HP_{10}$. Перепишем (2) в виде $A_1 = P_1HP_1 +_1 H_0P_0 + P_1SHP_1 - H_0P_0$ и представим A_1 в форме

$$A_1 = \left(P_1 + P_1SHP\cdot\tilde{H}_1^{-1} - H_0P_0\tilde{H}_1^{-1}\right)\tilde{H}_1. \qquad (5)$$

Пусть P_{20} – ортопроектор на $\hbar_{20} = \overline{H\hbar_{10}}$. Повторяя рассуждения, проведённые в случае $\hbar_0 = \{0\}$, получим ограниченность оператора $P_{20}HP_{10}\left(P_{10}HP_{10}\right)^{-1}$ на

$R(H_1)$. В силу $\tilde{H}_1^{-1} = H_{10}^{-1} \oplus H_0^{-1}$ и $H_0 P_0 \tilde{H}_1^{-1} = P_0$ имеем $P_2 H P_{10} \tilde{H}_1^{-1} = P_{20} H P_{10} H_{10}^{-1}$, $P_2 H P_0 \tilde{H}_1^{-1} = P_2 H P_0 H_0^{-1}$. Тем самым оператор $P_2 H P_1 \cdot \tilde{H}_1^{-1}$ ограничен, что вместе с $S \in \gamma_\infty$ и $SHP_1 = SP_2 HP_1$ влечёт предкомпактность операторов $P_1 SHP_1 \cdot \tilde{H}_1^{-1}$ и $Q_1^{/} = P_1 SHP_1 \cdot \tilde{H}_1^{-1} - H_0 P_0 \tilde{H}_1^{-1}$. Из этого и (5) следует, что $A_1 = (P_1 + \tilde{Q}_1)\tilde{H}_1$, $\tilde{Q}_1, \tilde{H}_1 \in \gamma_\infty, \tilde{H}_1 = \tilde{H}_1^*$. Свойство наследования обосновано.

Замечание. В случае $\|S\| < 1$ доказательство отмеченного свойства упрощается, ибо тогда $\ker P_1 P_2 = \{0\}$, а потому и $\ker H_1 = \{0\}$. Если $H > 0$, то $\ker H_1 = \{0\}$, так как $(Hx, x) = 0$ влечёт $x = \{0\}$.

3. Некоторые применения свойства наследования вида

Установленное нами свойство оператора келдышевского вида является полезным в некоторых вопросах спектральной теории операторов и её приложениях.

1. Спектральный синтез. Если любое A-инвариантное подпространство L есть замыкание линейной оболочки (ЗЛО) корневых векторов A из L, то говорят, что оператор A допускает спектральный синтез. В [6] построен первый пример компактного оператора с полной в $\hbar$ системой корневых векторов (СКВ), не допускающего спектрального синтеза. В то же время оператор $A = (I + S)H$, $S \in \gamma_\infty$ при $H = H^* \in \gamma_p$ его допускает. Здесь $\gamma_p = \left\{ A \in \gamma_\infty : \sum_1^\infty S_n^p < \infty, \text{p} > 0 \right\}$. Известно [7], что СКВ оператора келдышевского вида при $H = H^* \in \gamma_\omega$ или $S \in \gamma_\omega$, $\gamma_\omega = \left\{ A \in \gamma_\omega : \sum_{-\infty}^{\infty} S_n / 2n - 1 < \infty \right\}$, полна в $\hbar$. Из свойства наследования вытекает, что такой оператор допускает спектральный синтез.

2. О почти полноте части корневых векторов пучка М.В. Келдыша. Известно [1], что СКВ квадратичного пучка М.В. Келдыша

$$K(\lambda) = I - T_0 - \lambda H T_1 - \lambda^2 H^2, \quad T_0, T_1 \in \gamma_\infty, \quad H = H^* \in \gamma_p \quad H > 0$$

двукратно полна в $\hbar$, а почти весь его спектр при любом $\varepsilon > 0$ локализован в секторах $\Gamma_1 = \{\lambda \in C : -\varepsilon < \arg\lambda < \varepsilon\}$ и $\Gamma_2 = \{\lambda \in C : \pi - \varepsilon < \arg\lambda < \pi + \varepsilon\}$. Обозначим множество всех собственных значений (СЗ) $K(\lambda)$ из Γ_i через Λ_i и пусть L_i ЗЛО системы E_i его КВ отвечающих Λ_i, $i = 1, 2$. Система E_i называется почти полной, если коразмерность L_i в $\hbar$ конечна.

Теорема. Системы E_1 и E_2 почти полны в $\hbar$.

Доказательство. Пучок $K(\lambda)$ порождает в $\hbar=\hbar\oplus\hbar$ линейный пучок $\tilde{K}(\lambda)=\tilde{I}-\tilde{T}-\lambda\tilde{H}$, $\tilde{I}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, $\tilde{T}=\begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ T_1 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{H}=\begin{pmatrix} 0 & H \\ H & 0 \end{pmatrix}$. Спектр $\tilde{K}(\lambda)$ совпадает с множеством СЗ оператора $\tilde{A}^{-1}$; $\tilde{A}=\tilde{H}\left(\tilde{I}-\tilde{T}\right)^{-1}=\tilde{H}\left(\tilde{I}+\tilde{S}\right)$; $\tilde{S}\in\gamma_\infty$, а полнота в $\hbar$ СКВ $\tilde{A}$ эквивалентна двукратной полноте СКВ $\tilde{K}(\lambda)$ в $\hbar$. Пусть $\tilde{L}_i\left(\tilde{F}_i\right)$ – ЗЛО всех КВ $\tilde{A}\left(\tilde{A}^*\right)$, отвечающих $\Lambda_i\left(\bar{\Lambda}_i\right)$, $i=1, 2$. Допустим $\operatorname{codim} L_2=\infty$. Тогда ортогональное дополнение $\tilde{F}_1^0$ к $\tilde{L}_2$ содержит подпространство $\hbar_+^1=\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $x\in\hbar_+^1$, $\dim\hbar_+^1=\infty$. Здесь $\hbar_+^1=\hbar\oplus\hbar_+^2$ есть проекция $\tilde{L}_2$ на первую компоненту разложения $\tilde{\hbar}=\hbar\oplus\hbar$. Согласно свойству наследования оператор $\tilde{A}_1^*=\tilde{A}^*/\tilde{F}_1^0$ имеет вид $\tilde{A}_1^*=\left(\tilde{P}_1+\tilde{S}_1\right)\tilde{H}_1$, $\tilde{S}\in\gamma_\infty$, $\tilde{H}_1=\tilde{H}_1^*$, $\ker\tilde{H}_1=\{0\}$. В разложении $\tilde{F}_1^0=\tilde{\hbar}_+^1\oplus\tilde{\hbar}_1$ получим, что

$$\tilde{H}=\begin{pmatrix} 0 & \tilde{P}_+^1\tilde{H}\tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_1\tilde{H}\tilde{P}_+^1 & \tilde{P}_1\tilde{H}\tilde{P}_1 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{P}_+^1\left(\tilde{P}_1\right)$ – ортопроектор на $\tilde{\hbar}_+^1(\tilde{\hbar}_1)$.

В силу (2) $\left(\tilde{H}_1x,x\right)=0$ на $\tilde{\hbar}_+^1$, что вместе с $\ker\tilde{H}_1=\{0\}$ и $\dim\hbar_+^1=\infty$ влечёт существование у $\tilde{H}_1$ бесконечного числа как положительных, так и отрицательных СЗ. Тогда $\tilde{A}_1^*$, имея келдышевский вид, обладает бесконечным множеством СЗ не только в Γ_1, но и в Γ_2, что противоречит тому, что почти весь его спектр локализован в Γ_1.

4. О минимально полных подсистемах корневых векторов квадратичных пучков

1. Вопрос составления или выделения минимально полных в $\hbar$ систем КВ квадратичных пучков $L(\lambda)$ из всей системы его КВ возникает довольно часто и является важным с точки зрения приложений. При этом типичными являются ситуации, когда $L(\lambda)$ имеет либо не более конечного числа вещественных СЗ, либо таково их число вне R. Заметим, что задачи о колебаниях упругого полуцилиндра, о колебаниях волноводов приводят к первому типу пучков, в то время как задача колебаний вязкой капиллярной жидкости порождает пучок второго типа.

В задачах первого круга колебания континуума ищутся в виде нормальных волн $u(x_1,x_2,x_3,t)=e^{i(\omega t+\tilde{\lambda}x_1)}v(x_2,x_3)$ и возникают [8] самосопряжённые квадратичные пучки

$$L_\omega(\lambda)=\tilde{\lambda}^2 A+2\tilde{\lambda}B+I-P-\omega^2 R \qquad (1)$$

с компактными операторами A, B, P и R. Их можно преобразовать к виду

$$L_\omega(\lambda)=\lambda^2 I+\lambda B_\omega+C_\omega. \qquad (2)$$

B_ω и C_ω компактны и зависят от параметра ω, причём $C_\omega>0$.

Система (v_n) корневых векторов пучка $L_\omega(\lambda)$ двукратно полна [8] в $\hbar$, на R локализовано не более конечного числа собственных значений (СЗ) и возникает задача выделения из (v_n) минимально полной в $\hbar$ подсистемы $\left(v_n^{(1)}\right)$. В силу условия $\lim\limits_{x_1\to\infty} u(x_1,x_2,x_3,t)=0$ берутся волны с векторами v_n, отвечающими λ_n с $\operatorname{Im}\lambda_n>0$. Если $\sigma(L_\omega)\cap R\neq\varnothing$, то согласно принципу излучения Зоммерфельда-Мандельштама [9] к совокупности диссипативных волн добавляются все уносящие энергию волны с $\lambda_n\in R$. В случае, когда всем λ_k с $\operatorname{Im}\lambda_k=0$ отвечают лишь собственные векторы (СВ), эти волны выделяются из условия $d\lambda/d\omega>0$. Сложности появляются при наличии цепочек КВ $\left(v_0^j,v_1^j,...,v_{p_j}^j\right), j=b...s$, отвечающих $\lambda_j\in R$, которые назовём параболическими (p-цепочками). Пучку $L_\omega(\lambda)$ в $\tilde{\hbar}=\hbar\oplus\hbar$ сопоставляется самонапряжённый относительно формы $[\tilde{x},\tilde{y}]=(J\tilde{x},\tilde{y}),\ J=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}$, оператор

$$H_\omega=\begin{pmatrix} 0 & C_\omega^{1/2}\\ -C_\omega^{1/2} & -B_\omega\end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Затем строятся [5] приведённые p-цепочки, которым отвечают жордановы цепочки $\left(f_0^j,f_1^j,...,f_{p_j}^j\right)$ КВ оператора H_ω, причём $a^{jj}=\left[\tilde{f}_0^j,\tilde{f}_{p_j}^j\right]\neq 0$, а $a^{jj}\in R$. После этого в случае наличия p-цепочек нечётной длины $l_j=p_j+1$ при $a^{jj}>0$ из приведённой цепочки отбираются первые $p_j/2+1$ векторов, а если $p_j+1=2q_j$, то первые q_j векторов.

2. Пусть $\left\{y_j^r\right\}; j=\overline{1,s_j}; r=\overline{0,p_j}$ – некоторая каноническая по М.В. Келдышу СКВ-пучка $L(\lambda)$, отвечающая его СЗ $\lambda_j=\lambda_j$, а $\left\{z_j^r\right\}$ – сопряжённая с ней каноническая СКВ-пучка $L^*(\lambda)$ при $\lambda=\lambda_j$. В силу $L^*(\lambda_j)=L(\lambda_j)$ корневые линеалы $L_j=clin\left\{y_j^r\right\}_0^{p_j}$ и $L_j^*=clin\left\{z_j^r\right\}_0^{p_j}$ совпадают и систему $\left\{z_j^r\right\}$ можно выбрать [10] такой, что

$$z_j^r=\varepsilon_j y_j^r;\quad \varepsilon_j=\pm 1;\quad r=0,1,2,...,p_j;\quad j=1,2,...,s_j. \qquad (4)$$

При выполнении (4) система $y_j^1,\ y_j^2,\ldots,\ y_j^{p_j}$ называется [10] нормальной. Система $\{y_j^r\}$ называется [8] приведённой, если $a^{ij}=\left[\tilde{y}_i^{p_i},\tilde{y}_j^0\right]\delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Нормальная цепочка является [10] приведённой.

3. Нахождение минимально полной в $\hbar$ подсистемы КВ пучка $L(\lambda)$ сопряжено [8, 10] с выделением из системы $\{y_j^r\}$ подсистем $\left(y_0^j,y_j^1,...,y_j^{p_j^+}\right)$ и $\left(y_0^j,y_j^1,...,y_j^{p_j^-}\right)$, осуществляемой [10] при $p_j=2n_j$ по знаку ε_j. Если $p_j=2n_j-1$, то [5, 6] $p_j^+=p_j^-=\dfrac{p_j+1}{2}$. Более простой способ выделения этих подсистем, не связанный с условиями (4), основан на следующем предложении.

Лемма. Если A_n одноклеточный J_n-самосопряжённый оператор с собственным значением $\lambda_0=\bar{\lambda}_0$ в пространстве $\hbar_n$, то $|n_1-n_2|\le 1$, где $J_n=P_{n_1}-P_{n_{12}}$; $P_{n_1}\oplus P_{n_{12}}=I_n$; $n_1=\dim P_{n_1}$; $n_2=\dim P_{n_2}$.

По теореме Л.С. Понтрягина A_n обладает $n_1(n_2)$-мерным J_n-неотрицательным (J_n-неположительным) инвариантным подпространством $L_{n_1}^+(L_{n_2}^-)$. Поскольку $\lambda_0=\bar{\lambda}_0$, то $L_0=L_{n_1}^+\cap L_{n_2}^-\neq\{0\}$ и согласно одноклеточности A_n имеем, что $\dim L_0=\min\{n_1,n_2\}$. Допустим $|n_1-n_2|>1$, например, $n_1-n_2=2$. Если $x_1,x_2,...,x_{n_2},x_{n_2+1},x_{n_1},x_{n_1+1},...x_{n_1+n_2}$ СКВ-оператора A_n, то $L_0=L_{n_2}^-=\operatorname{clin}\{x_k\}_1^{n_2}$; $L_{n_2}^+=\operatorname{clin}\{x_k\}_1^{n_1}$ и

$$A_nx_{n_1}=\lambda_0x_{n_1}+x_{n_2+1};\quad A_nx_{n_1}=\lambda_0x_{n_1}+x_{n_2+1};\quad A_nx_{n_2+1}=\lambda_0x_{n_2+1}+x_{n_2},\tag{5}$$

$$\left[A_nx_{n_1},x_{n_2+1}\right]=\lambda_0\left[x_{n_1},x_{n_2+1}\right]+\left[x_{n_2+1},x_{n_2+1}\right],\tag{6}$$

где $[x,y]=(J_nx,y)$, а (x,y) – обычное скалярное произведение.

В силу (5) и (6)

$$\left[x_{n_1},x_{n_2}\right]=\left[x_{n_2+1},x_{n_2+1}\right].\tag{7}$$

Поскольку $\left[x_{n_2+1},x_{n_2+1}\right]>0$, а согласно $\left\|\left[x_{n_p},x_{n_2}\right]\right\|\le\left[x_{n_1},x_{n_1}\right]^{1/2}\cdot\left[x_{n_2},x_{n_2}\right]^{1/2}$ и $x_{n_2}\in L_0$ имеем $\left[x_{n_1},x_{n_2}\right]=0$, то (5) противоречит допущению, что $|n_1-n_2|>1$.

При $n_1=n_2$ имеем $L_{n_1}^+=L_{n_2}^-=L_0$. Если $|n_1-n_2|=1$, то корневой вектор $\frac{x_{n_1+n_2+1}}{2}$ является J_n-дефинитным: при $n_1>n_2$ он J_n- положителен, а когда $n_1<n_2$ этот вектор J_n-отрицателен.

4. Пусть СКВ $\{f_n\}$ пучка $L(\lambda)=I+\lambda B+\lambda^2 C$ двукратно полна в $\hbar$ и тем самым СКВ $\left\{\tilde{f}_n\right\}=\left\{\begin{matrix}\lambda_n C^{1/2} f_n + C^{1/2} f_{n-1}\\ f_n\end{matrix}\right\}$ оператора $H=\begin{pmatrix}-B & -C^{1/2}\\ C^{1/2} & 0\end{pmatrix}$ полна в $\tilde{\hbar}=\hbar\oplus\hbar$. Это имеет место, например, при $C>0$; $C\in\gamma_p$; $B\in\gamma_\infty$ и $C^{-1/2}B\in\gamma_\infty$, ибо в этом случае $L(\lambda)$ есть квадратичный пучок Келдыша

$$L(\lambda)=I+\lambda C^{1/2}\cdot C^{1/2}B+\lambda^2(C^{1/2})^2. \tag{8}$$

При любом $\varepsilon>0$ вне секторов $\left|\arg z-\dfrac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$ и $\left|\arg z-\dfrac{3\pi}{2}\right|<\varepsilon$ может находиться не более конечного числа СЗ пучка $L(\lambda)$. Если $B=B^*$, то $(JH)^*=JH$; $J=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}$ и совпадающие множества $\sigma(L)$ и $\sigma(H)$ симметричны относительно вещественной оси. При $p_j+1=2n_j$ подсистеме $\left\{f_j^z\right\}_1^{n_j}$ КВ пучка $L(\lambda)$ отвечает n_j –мерное J-нейтральное H-инвариантное подпространство $\tilde{L}_j^0\subset\tilde{F}_j=clin\left\{\tilde{f}_j^z\right\}_1^{n_j}$ и $p_j^+=\dfrac{p_j+1}{2}$. При $p_j=2n_j$ вектор $\tilde{f}_j^{m_{j+1}}$ согласно лемме J – дефинтен и $p_j^+=p_{j/f+1}$когда$\left[\tilde{f}_j^{p_j/z+1},\tilde{f}_j^{p_j/z+1}\right]>0$, а если $\left[\tilde{f}_j^{p_j/z+1},\tilde{f}_j^{p_j/z+1}\right]<0$, то $p_j^+=p_{j/2}$. Тогда соответственно $p_j^-=p_{j/2}$ и $p_j^-=p_{j/2}+1$.

Рассмотрим систему $\left\{\tilde{f}_j^{(+)}\right\}$ $\left(\left\{\tilde{f}_j^{(-)}\right\}\right)$, состоящую из всех КВ, отвечающих СЗ пучка $L(\lambda)$ с $\operatorname{Im}\lambda>0\,(\operatorname{Im}\lambda<0)$, всех цепочек $\left\{f_j^z\right\}_1^{p_j^+}\left(\left\{f_j^z\right\}_1^{p_j^-}\right)$ и всех СВ пучка $L(\lambda)$, отвечающих J-положительным (J-отрицательным) СВ оператора Н. Этим системам соответствуют системы $\left\{f_n^{(+)}\right\}$ и $\left\{f_n^{(-)}\right\}$ КВ оператора Н. Пусть $L_+=clin\left\{\tilde{f}_n^{(+)}\right\}_1^\infty$ и $L_-=clin\left\{\tilde{f}_n^{(-)}\right\}_1^\infty$. В силу полноты совокупности $\left\{\tilde{f}_n^{(+)}\right\}\cup\left\{\tilde{f}_n^{(-)}\right\}$ в $\hbar$ подпространство $L_+(L_-)$ является максимальным J-неотрицательным (J-неположительным), а потому $P_+L_+=\hbar$ и $P_-L_-=\hbar$. Здесь P_+ и P_- – ортопроектор на первую (вторую) компоненту пространства $\tilde{\hbar}=\hbar\oplus\hbar$. При гомеоморфизмах $P_\pm:L_\pm\to\hbar$ полные в $L_\pm$ системы $\left\{\tilde{f}_n^{(+)}\right\}$ и $\left\{\tilde{f}_n^{(-)}\right\}$ преобразуются в полные в $\hbar$ системы $\left\{f_n^+\right\}$ и $\left\{f_n^-\right\}$.

5. Дробно-линейные пучки

1. Рассмотрим в $\hbar$ операторный пучок, возникающий в задаче о малых колебаниях вязкой жидкости в сосуде [11]

$$Q(\mu)=I-\mu G-\frac{1}{\mu}H,\quad G=G^*,\quad H=H^*. \tag{1}$$

Покажем, что при ограниченных G и H невещественный спектр $Q(\mu)$ локализован в сегментах

$$\varGamma_1=\left\{\mu:\frac{1}{2\|G\|}\le|\mu|\le 2\|H\|,\frac{1}{2\|G\|}\le \operatorname{Re}\mu\le 2\|H\|\right\},$$

$$\varGamma_2=\left\{\mu:\frac{1}{2\|G\|}\le|\mu|\le 2\|H\|,-2\|H\|\le \operatorname{Re}\mu\le \frac{1}{2\|G\|}\right\}.$$

Пусть $\mu_+(y)$ и $\mu_-(y)$ – корни уравнения $\big(Q(\mu)y,y\big)=0$, $\|y\|=1$. Тогда $\mu_+(y)\mu_-(y)=(Hy,y)/(Gy,y)$, а потому, если

$$\mu_+(y)=\frac{1+\sqrt{1-4(Gy,y)(Hy,y)}}{2(Gy,y)}, \tag{2}$$

то

$$\mu_-(y)=\frac{2(Hy,y)}{1+\sqrt{1-4(Gy,y)(Hy,y)}}. \tag{3}$$

В силу $\left|1+\sqrt{1-4(Gy,y)(Hy,y)}\right|\ge 1$, $\dfrac{1}{|(Gy,y)|}\ge\dfrac{1}{\|G\|}$, $|(Hy,y)|\le \operatorname{Re}\mu<\dfrac{1}{2\|G\|}$, а числа $\mu_-(y)$ на отрезке $\big[-2\|H\|,2\|H\|\big]$. Если $\mu_+(y)\ne\overline{\mu_+(y)}$, то согласно (2) и (3) $\overline{\mu_+(y)}=\mu_-(y)$, а потому невещественные $\mu_+(y)$ и $\mu_-(y)$ расположены в $\varGamma_1$ и $\varGamma_2$. Для $\mu\in\sigma(Q)$ $\exists(y_n),\|y_n\|=1$, что либо $\big(\mu_+(y_n)\big)\underset{n\to\infty}{\to}\mu$, либо $\big(\mu_-(y_n)\big)\underset{n\to\infty}{\to}\mu$ и $\big(Q(\mu)y_n\big)\underset{n\to\infty}{\to}\{0\}$. Тем самым при $\bar\mu\ne\mu$ имеем $\mu\in\varGamma_1\cup\varGamma_2$.

2. Уравнение $Q(\mu)y=\{0\}$ переписывается в виде [12]

$$y=\frac{i\mu}{2}(-i\alpha G)y+\frac{1}{i\mu/\alpha}\cdot\frac{iH_y}{\alpha},\ \pm\alpha\in\sigma(Q). \tag{4}$$

Оно порождает в $\tilde\hbar=\hbar\oplus\hbar$ пучок

$$\tilde L_\alpha(\tilde\lambda)=\begin{pmatrix} I & -i\left(\alpha G+\dfrac{H}{\alpha}\right)\\ i\left(\alpha G+\dfrac{H}{\alpha}\right) & I\end{pmatrix}-\tilde\lambda\begin{pmatrix}-i\alpha G & 0\\ 0 & \dfrac{iH}{\alpha}\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}\tilde\lambda=\tilde\mu+\dfrac{1}{\tilde\mu}\\ \tilde\mu=\dfrac{i\mu}{\alpha}.\end{matrix} \tag{5}$$

В силу выбора α и $G,H\in\gamma_\infty$, оператор $W_0=\begin{pmatrix} I & -i\left(\alpha G+\dfrac{H}{\alpha}\right) \\ i\left(\alpha G+\dfrac{H}{\alpha}\right) & I \end{pmatrix}$ непрерывно обратим и может иметь лишь конечное число отрицательных СЗ. Тем самым форма $[\tilde{x},\tilde{y}]=(W_0\tilde{x},\tilde{y})$ задаёт в $\tilde{\hbar}$ индефинитное скалярное произведение конечного ранга. Оператор $\tilde{A}=W^{-1}A_0$, $A_0=\begin{pmatrix} -\alpha G & 0 \\ 0 & H/\alpha \end{pmatrix}$ компактен и W_0 -самосопряжён $(W_0-c.c.)$. Имеем, что $\ker\tilde{A}=\ker A_0$. На W_0-ортогональном дополнении $\tilde{\hbar}_1$ и $\ker\tilde{A}$ индуцируется W_0-СС в $\tilde{\hbar}_1$ оператор $\tilde{A}_1$. Он обладает [13] полной в $\tilde{\hbar}_1$ СКВ, образующей базис Рисса.

Пусть $\tilde{A}\tilde{x}_n=\dfrac{1}{\tilde{\lambda}_n}\tilde{x}_n$, $\tilde{x}_n=\begin{pmatrix} y_n \\ y_n/\tilde{\mu}_n \end{pmatrix}$. Векторы

$$\hat{x}_n=\begin{pmatrix} \dfrac{y_n}{\sqrt{1+1/|\tilde{\mu}_n|^2}} \\ \dfrac{|\tilde{\mu}_n|\cdot y_n}{\tilde{\mu}_n\sqrt{1+1/|\tilde{\mu}_n|^2}} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

образуют в $\tilde{\hbar}_1$ базис Рисса. Итак, при полных G и H СКВ $\tilde{L}_\alpha(\tilde{\lambda})$ полна в $\tilde{\hbar}$, а СКВ $Q(\mu)$ двукратно полна в $\hbar$. Спектр $\sigma(Q)$ состоит из объединения двух вещественных последовательностей $\left(\mu_n^-\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ и $\left(\mu_n^+\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ и конечного числа невещественных СЗ. При $\left(\mu_n^+\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty\left(\left(\mu_n^-\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\right)$ вторая (первая) компонента сходится к нулю и имеем сближение $\hat{x}_n$ с $\hat{y}_n^+=\begin{pmatrix} \dfrac{y_n}{\sqrt{1+1/|\tilde{\mu}_n|^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ и

$$\hat{y}_n^-=\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{|\mu_n|\,y_n}{\mu_n\sqrt{1+|\tilde{\mu}_n|^2}} \end{pmatrix}.$$

3. Умножая слева $L_1(\lambda)$ на J, получим

$$L_1(\lambda)=\begin{pmatrix} I & G-H \\ G-H & -I \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -H \end{pmatrix},\quad \lambda=\mu+\frac{1}{\mu}. \qquad (7)$$

Оператор $W=\begin{pmatrix} I & G-H \\ G-H & -I \end{pmatrix}$ обратим. В самом деле, пусть $W\tilde{x}=\{0\}$, $\tilde{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Тогда $x+(G-H)y=\{0\}$, $(G-H)x-y=\{0\}$, $x+(G-H)^2x=\{0\}$ и $x=\{0\}$. Аналогично имеем $y=\{0\}$ и $\ker W=\{0\}$. Тем самым W задаёт в $\hbar$ регулярную W-метрику $[\tilde{x},\tilde{y}]=(W\tilde{x},\tilde{y})$. Оператор $\hat{A}_1=W^{-1}A$, $A=\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -H \end{pmatrix}$ W– СС и компактен. Если $Q(\mu_n)y_n=\{0\}$, $x+(G-H)^2x=\{0\}$, то $\tilde{y}_n=\begin{pmatrix} y_n \\ y_n/\mu_n \end{pmatrix}$ СВ $\hat{A}_1$. Возьмём

$$\hat{y}_n=\begin{pmatrix} \dfrac{y_n}{\sqrt{1+1/|\mu_n|^2}} \\ \dfrac{y_n}{\sqrt{1+|\mu_n|^2}} \end{pmatrix}, \qquad n\in N, \qquad \overline{\mu_n}=\mu_n.$$

Поскольку

$$(W\hat{y}_n,\hat{y}_n)=\frac{\mu_n^2}{1+\mu_n^2}+\frac{2\mu_n\left(\left(G-H\right)y_n,y_n\right)}{1+\mu_n^2}-\frac{1}{1+\mu_n^2},$$

то при $(\mu_n)\underset{n\to\infty}{\to}0$, получим $(W\hat{y}_n,\hat{y}_n)\underset{n\to\infty}{\to}-1$.Тем самым для достаточно больших (малых) $\mu_n^+\left(\mu_n^-\right)$ СВ

$$\hat{y}_n^+=\left(\frac{y_n^+}{\sqrt{1+1/\left(\mu_n^+\right)^2}},\frac{y_n^+}{\sqrt{1+\left(\mu_n^+\right)^2}}\right)$$

W- положителен, а СВ

$$\hat{y}_n^-=\left(\frac{y_n^-}{\sqrt{1+1/\left(\mu_n^-\right)^2}},\frac{y_n^-}{\sqrt{1+\left(\mu_n^-\right)^2}}\right)$$

W-отрицателен. Согласно построению $L_\alpha(\lambda)$ и $L_1(\lambda)$ вектору $\tilde{y}_n(y_n,y_n/\tilde{\mu}_n)$ отвечает вектор $\hat{y}_n(y_n,y_n/\mu_n)$. Поскольку $\hat{y}_n=S_\alpha\tilde{y}_n$, где $S_\alpha=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & i\alpha I \end{pmatrix}$, то ССВ $\{\hat{y}_n\}$ оператора $\hat{A}$ образует базис Рисса в $\hat{L}=\operatorname{clin}\{\hat{y}_n\}$. В силу конечности ранга индефинитности формы $[\tilde{x},\tilde{y}]=(W_0\tilde{x},\tilde{y})$ $\operatorname{codim}\hat{L}<\infty$ и СКВ-оператора $\hat{A}$ образует базис Рисса в $\tilde{\hbar}$.

Пусть $Q(\mu_0)y_0=0$. Вектор $y_0\in\hbar$ называется СВ 1-го рода, нейтральным или 2-го рода, если соответственно

$$(W\hat{y}_0,\hat{y}_0)>0;\ (W\hat{y}_0,\hat{y}_0)=0;\ (W\hat{y}_0,\hat{y}_0)<0. \tag{8}$$

Для вектора $\hat{y}=(y\ \ y/\mu)$;

$$(W\tilde{y},\tilde{y})=1+\frac{2}{\mu}\left(\left(G-H\right)y,y\right)-\frac{1}{\mu^2}, \tag{9}$$

и при $\mu_0 = \mu + (y_0)\left(\mu_0 = \mu - (y_0)\right)$ имеем вектор 1-го (2-го) рода, а когда $\mu + (y_0) = \mu - (y_0)$ или $\mu_0 \neq \overline{\mu_0}$ этот вектор нейтрален. Заметим, что только нейтральные СВ пучка $Q(\mu)$ при $\mu_0 = \overline{\mu_0}$ могут иметь присоединённые векторы, ибо из равенства $Q(\mu_0)y_1 + y_0 - 2\mu_0 G y_0 = 0;\ \|y_0\| = 1$ следует, что $\mu_0 = 1/2(Gy_0, y_0)$. Составление полной в $\hbar$ СКВ-пучка $Q(\mu)$ сводится к построению максимального W-неотрицательного L_+ или W-неположительного L_- $\hat{A}$-инвариантных подпространств из его СКВ. Каждой СКВ $\left\{y_j^r\right\}_0^{p_j}$ пучка $Q(\mu)$ отвечает СКВ$\left\{\hat{y}_j^r\right\}_0^{p_j}$ оператора $\hat{A}$. При $\lambda_j = \overline{\lambda_j}$ и $p_j + 1 = 2q_j$ из линеала $\hat{L}_j = clin\left\{y_j^r\right\}_0^{p_j}$ отбираем q_j-мерный W-нейтральный линеал $\hat{L}_j^+ = clin\left\{y_j^r\right\}_0^{q_j}$, а когда $p_j = 2t_j$, то линеал $\hat{L}_j^+ = clin\left\{\hat{y}_j^r\right\}_0^{t_j+1}$ при $\left(W\hat{y}_j^{t_{j+1}}, \hat{y}_j^{t_{j+1}}\right) > 0$и $L_j^+ = clin\left\{\hat{y}_j^r\right\}_0^{t_j}$ при $\left(W\hat{y}_j^{t_{j+1}}, \hat{y}_j^{t_{j+1}}\right) < 0$. Замыкание линейной оболочки (ЗЛО) всех таких отобранных линеалов, всех W-положительных СВ оператора $\hat{A}$ и всех его корневых линеалов, отвечающих СЗ $\lambda_j \neq \overline{\lambda}_j$ с $\operatorname{Im}\lambda_j > 0$ порождает L_+. Аналогичным образом строится L_-.

Пусть $\tilde{P}_+$ и $\tilde{P}_-$ – ортопроекторы в $\tilde{\hbar}$, отвечающие спектральному разложению $W = W_+ \oplus W_-$и $\tilde{\hbar}_+ = \tilde{P}_+\tilde{\hbar};\ \tilde{\hbar} = \tilde{P}_-\tilde{\hbar};\ \tilde{\hbar} = \tilde{\hbar}_= \oplus \tilde{\hbar}_-$. Оператор $\hat{A}$ обладает максимальной W-семидефинитной парой подпространств $\left\{L_+^0, L_-^0\right\}$. В силу базисности СКВ$\left\{\hat{y}_n\right\}$ и приведённому выше построению, получим $L_+^0 = L_+$ и $L_-^0 = L_-$, а потому $\tilde{P}_\pm L_\pm = \tilde{\hbar}_\pm$.

Пусть $\tilde{\hbar}_1$(ЗЛО) всех W-дефинитных СВ $\hat{y}_n^+$ и $\hat{y}_n^-$ и корневых линеалов, отвечающих всем невещественным СЗ, а $\tilde{\hbar}_2$ – всех корневых линеалов $\tilde{L}_j^{p_j^+}$ и $\tilde{L}_j^{p_j^-}$ и тем самым

$$\tilde{\hbar} = \tilde{\hbar}_1 [+] \tilde{\hbar}_2. \tag{10}$$

Если $\left\{\tilde{L}_1^+, \tilde{L}_1^-\right\}$ и $\left\{\tilde{L}_2^+, \tilde{L}_2^-\right\}$ – дуальные пары W-семидефинитных $\hat{A}$-инвариантных подпространств, то

$$\tilde{L}_+ = \tilde{L}_1^+ [+] \tilde{L}_2^+;\ \tilde{L}_- = \tilde{L}_1^- [+] \tilde{L}_2^-. \tag{11}$$

Квадратичная форма $(W\tilde{y}, \tilde{y})$в $\tilde{\hbar}_2$ имеет p^+ положительных и p^- отрицательных слагаемых. Если $\hbar^+(\hbar^-)$ – ЗЛО всех КВ пучка $Q(\mu)$, отвечающих $\tilde{L}_1^+(\tilde{L}_1^-)$, то $\operatorname{codim}\hbar^+ = p^+$ $(\operatorname{codim}\hbar^- = p^-)$, ибо СКВ$\hat{A}$ полна в $\tilde{\hbar}$ с согласно

$p^+ = \dim \tilde{L}_2^+$, а $p^- = \dim \tilde{L}_2^-$. Поскольку $\tilde{L}_2^+\left(\tilde{L}_2^-\right)$ есть ЗЛО всех $\hat{L}_j^+ = \mathrm{clin}\left\{\hat{y}_j^z\right\}_0^{p_j^+}$ $\left(\hat{L}_j^- = \mathrm{clin}\left\{\hat{y}_j^z\right\}_0^{p_j^-}\right)$, то СКВ-порождающая $\hbar^+(\hbar^-)$ вместе со всеми системами $\left\{y_j^z\right\}_0^{p_j^+}\left(\left\{y_j^z\right\}_0^{p_j^-}\right)$ полна в $\hbar$.

Пусть $P_+\left(P_-\right)$ – ортопроекторы на первую $\hbar_+ = P_+\tilde{\hbar}$ (вторую $\hbar_- = P_-\tilde{\hbar}$ компоненты разложения $\tilde{\hbar} = \hbar \oplus \hbar$. При отображении $P_+ : L_+ \to \hbar_+ \equiv \hbar$ $(P_- : L_- \to \hbar_- \equiv \hbar)$ получим СКВ, отвечающую $L_+(L_-)$. Для всех векторов $\tilde{y} = \left(y/0\right)$ $\left(\tilde{z} = \left(z/0\right)\right)$ имеем $\left(W\tilde{y}, \tilde{y}\right) > 0$ $\left(\left(W\tilde{z}, \tilde{z}\right) < 0\right)$. Поскольку $\left(W\tilde{z}, \tilde{z}\right) = \left(\left(G - H\right)y, z\right)$, то $\left(G - H\right) \in \gamma_\infty$ следует, что $\tilde{P}_\pm - P_\pm = L_\pm \in \gamma_\infty$. Компактность операторов L_+ и L_- вместе с равенствами $\tilde{P}_\pm L_\pm = \tilde{\hbar}_\pm$ влечёт соотношения $\tilde{P}_\pm L_\pm = \tilde{\hbar}_\pm$. При гомеоморфизме $P_+ : L_+ \to \hbar\left(P_- : L_- \to \hbar\right)$ базис Рисса в $L_+\left(L_-\right)$ из корневых векторов оператора $\hat{A}$ трансформируется в базис Рисса из СВ пучка $Q\left(\mu\right)$первого (второго) рода и части его нейтральных СВ и корневых линеалов, отобранных по указанному выше правилу.

Замечание. При $G > 0$ пучок $Q\left(\mu\right)$ сводится к квадратичному пучку μ в $\tilde{\hbar}$ возникает самосопряжённый относительно формы $\left[\tilde{x}, \tilde{y}\right] = \left(J\tilde{x}, \tilde{y}\right)$ оператор A, где $J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$. В этом случае максимальность J-семидефинитных A-инвариантных подпространств (аналогичных L_+ и L_-) эквивалентна их гомеоморфности $\hbar$, порождающей соответствующие базисы Рисса из КВ пучка $Q\left(\mu\right)$. При $G, H \in \gamma_\infty$ оператор $W = J(\tilde{I} + \tilde{S})$, где $\tilde{I} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$; $\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & G - H \\ G - H & 0 \end{pmatrix}$ является слабым возмущением оператора J, а потому существуют такие операторы $S_\pm \in \gamma_\infty$, что $\hbar_\pm = \left(I + S_+\right)\tilde{\hbar}_+$; $\hbar_- = \left(I + S_-\right)\tilde{\hbar}_+$. В силу этого равенства $\tilde{P}_\pm L_\pm = \tilde{\hbar}_\pm$ и $P_\pm L_\pm = \hbar_\pm \equiv \hbar$ эквивалентны. Отметим, что соотношения $\overline{P_\pm L_\pm} = \hbar$ являются следствием полноты в $\hbar$ соответствующих частей СКВ$Q\left(\mu\right)$.

6. Локализация спектра при слабом возмущении

Поскольку оператор $A=(I+S)H$ есть слабое возмущение оператора Н, то естественно ожидать, что спектр $\sigma(A)$ находится вблизи спектра $\sigma(H)$. В самом деле, справедливы следующие свойства.

Свойство 1. Для последовательности λ_n существует такая последовательность $\mu_n(\lambda_n)$ из (μ_n), что

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(\lambda_n)/\mu_n=1. \tag{1}$$

Пусть $\mu_n(\lambda_n)$ – множество всех $\mu_k\in\sigma(H)$, для которых $|\lambda_n-\mu_k|$ минимально и в (μ_n) найдётся такая подпоследовательность $\left\{\mu_{n_j}(\lambda_{n_j})\right\}$, что $\mu_{n_j}(\lambda_{n_j})/\lambda_{n_j}\underset{j\to\infty}{\to}\delta\neq 1$. Согласно построению $\mu_n(\lambda_n)$ и предположению $\delta\neq 1$ для достаточно больших *j* имеем $\left|\mu_k/\lambda_{n_j}-1\right|>\delta_0>0; k\in N$. Эта оценка вместе с (1) влечёт невозможное соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(x_{n_j},y_{n_j}\right)\right|^2\underset{j\to\infty}{\to}0, \tag{2}$$

ибо $\left\|x_{n_j}\right\|=1$.

Замечание. Из свойства 1 о близости спектров $\sigma(A)$ и $\sigma(H)$ вытекает результат [1,2] о локализации характеристических чисел пучка $K(\lambda)$. Пучку $K(\lambda)$ в пространстве $\hbar=\underbrace{\hbar\oplus\hbar...\oplus\hbar}_{m}$ сопоставляется оператор $\tilde{A}=(\tilde{I}+\tilde{S})\tilde{H}$; $\tilde{H},\tilde{S}\in\tilde{\gamma}_\infty$; $\left(\tilde{H}^m\right)^*=\tilde{H}^m$ со спектром $\sigma(\tilde{H})$, локализованным на лучах $\arg z=\frac{\pi k}{m}$ *(k*=0,1*,…,*2*m*-1*)* и при любом $\varepsilon>0$ вне секторов $\mathit{\Gamma}_k=\left\{z:\left|\arg z=\frac{\pi}{m}k\right|<\varepsilon\right\}$ может оказаться не более конечного числа характеристических чисел пучка $K(\lambda)$, совпадающих с собственными числами оператора $\tilde{A}^{-1}$. Согласно свойству 1 спектр $\sigma(\tilde{A}^{-1})$ локализован вблизи спектра $\sigma(\tilde{H}^{-1})$. В силу соотношений (8) и (9) пункта 1 для достаточно больших *n* элементы матриц $\mathrm{T}=\left(\left(\left|\frac{\mu_k}{\lambda_n}-1\right|^2\right)\right)$ и $\mathrm{T}^*=\left(\left(\left|\frac{\mu_k}{\bar{\lambda}_n}-1\right|^2\right)\right)$ малы около, а элементы матриц $Q=\left(\left(|x_n,y_k|^2\right)\right)$ и $Q^*=\left(\left(|\bar{z}_n,y_k|^2\right)\right)$ – вне соответствующих диагоналей. Отмеченные локализации собственных значений и корневых векторов операторов H и A позволяют установить [4, 5], что в случае $H=H^*$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\mu_n}=1,$$

а при $\left(H^m\right)^*=H^m$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{(k)}}{\mu_n^{(k)}}=1.$$

Здесь $\left\{\lambda_n^{(k)}\right\}$ и $\left\{\mu_n^{(k)}\right\}$ – подпоследовательности собственных чисел оператора $\tilde{H}$ и пучка $K(\lambda)$ из сектора Γ_k.

7. Критерий компактности линейных операторов в гильбертовом пространстве

Линейный ограниченный оператор A в гильбертовом пространстве $\hbar$ компактен [14], если он каждую слабо сходящуюся последовательность $\left(x_n\right)\underset{n\to\infty}{\rightharpoonup}\{0\}$ преобразует в сходящуюся по норме $\|x\|$ к вектору $\{0\}$ последовательность $\left(Ax_n\right)$. Возникает вопрос о компактности А при условии

$$\left(A\phi_n\right)\underset{n\to\infty}{\rightarrow}\{0\}, \tag{1}$$

где $\left(\phi_n\right)$ минимальная полная в $\hbar$ система с

$$\inf_n\|\phi_n\|>0 \text{ и } \sup_n\|\phi_n\|<\infty \tag{2}$$

являющейся почти нормированной.

Ответ положителен, если для любого бесконечномерного ортопроектора P система $\left(P\phi_n\right)$ некомпактна. Системы, обладающие таким свойством, назовём изотропно некомпактными и обозначим их множество через M_0. Мы покажем, что $\left(\phi_n\right)\in M_0$, когда наряду с (2)

$$\sup_n\|\phi_n\|\cdot\|g_n\|<C<\infty, \tag{3}$$

где $\left(g_n\right)$ – биортогональная к $\left(\phi_n\right)$ система. Заметим, что почти нормированный базис удовлетворяет условию (3). Совокупность всех линейных компактных операторов в $\hbar$ обозначается γ_∞.

В данной работе предлагается следующий **критерий компактности:** ограниченный линейный оператор A компактен при условии (1) для некоторой системы $\left(\phi_n\right)\in M_0$.

Доказательство. Представим A в полярном виде $A=U\mathrm{H}$, где $\mathrm{H}=(A^*A)^{1/2}$ – самосопряжённый, а U – изометрический оператор в $\hbar$. Поскольку

$\|A\phi_n\| = \|\mathrm{H}\phi_n\|$, условие $A\phi_n \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}$ эквивалентно $(\mathrm{H}\phi_n) \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}$. Установим, что $\lambda = 0$ есть единственная точка накопления в спектре $\sigma(\mathrm{H})$. Допустим в $\sigma(\mathrm{H})$ есть точка накопления $\lambda_0 \neq 0$и пусть Δ – интервал, содержащий λ_0, причём $0 \notin \bar{\Delta}$. Обозначим $\hbar_\Delta$ инвариантное подпространство H, отвечающее Δ, H_0 – сужение H на $\hbar_\Delta$, P_0 – ортопроектор на $\hbar_\Delta$. В силу $\lambda_0 \in \Delta$ получим, что $\dim \hbar_\Delta = \infty$. Положим $\phi_{n,0} = P_0\phi_n, n \in N$. Из $\mathrm{H} = \mathrm{H}^*$ следует $\mathrm{H}P_0 = P_0 H$, а потому $\mathrm{H}P_0\phi_n = P_0\mathrm{H}\phi_n$, $n \in N$. Поскольку $(\mathrm{H}\phi_n) \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}$, то $(\mathrm{H}\phi_{n,0}) \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}$ и тем самым

$$(\mathrm{H}_0\phi_{n,0}) \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}. \tag{4}$$

По условию $(\phi_{n,0})$ содержит некомпактную подпоследовательность $(\phi_{n_k,0})$ и $(\mathrm{H}_0\phi_{n_k,0}) \underset{k\to\infty}{\to} \{0\}$, а потому $0 \in \sigma(H_0)$. С другой стороны $\sigma(\mathrm{H}_0) \subset \bar{\Delta}$, а $0 \notin \bar{\Delta}$. Самосопряжённый оператор H, не имеющий отличных от нуля предельных точек в $\sigma(\mathrm{H})$, компактен, а тогда таковым будет и оператор *A*. При $(\phi_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ условие (1) становится и необходимым.

Замечание. Когда (ϕ_n) – почти нормированный базис имеем, что $(\phi_n) \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}$, ибо для всех $x \in \hbar$ сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (x, \phi_n) g_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ влечёт $(\phi_n, x) \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}$. Здесь (g_n) – биортогональный к (ϕ_n) базис в $\hbar$. При $\ker A = \{0\}$ условие (1) влечёт $(\phi_n) \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}$. Пусть $\hbar_0 = \ker H$; $\hbar_1 = \hbar \Theta \hbar_0$, P_1 – ортопроектор на $\hbar_1$; $\phi_{n,1} = P_1\phi_n$; H_1 – сужение H на $\hbar_1$. Из $(H\phi_n) \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}$ следует $(H_1\phi_{n,1}) \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}$, а потому $(\phi_{n,1}) \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}$ и при $A \in \gamma_\infty$ получим, что $(A\phi_n) \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}$.

Заметим, что в приведённых выше рассуждениях при обосновании компактности самосопряжённого оператора *H* не требуется его ограниченности и поэтому предложенное условие компактности распространяется на замкнутые операторы *A* с плотной в $\hbar$ областью определения, ибо такие операторы допускают [15] полярное представление. Это обстоятельство наряду с необходимостью проверки условия (1) лишь на одной последовательности $(\phi_n) \in M_0$, слабо сходящейся к $\{0\}$, существенно отличает предложенный здесь критерий от известного критерия [14].

Лемма. Если система (ϕ_n) удовлетворяет условиям (2) и (3), а P_1 – ортопроектор и

$$\|\phi_n - P_1\phi_n\| \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}, \tag{5}$$

то ортопроектор $P_0 = I \ominus P_1$ конечномерен.

Доказательство. Без ограничения общности рассуждений положим $\|\phi_n\|=1$, $n\in N$. Согласно (5) для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое число $n_0\in N$, что для всех $n>n_0$

$$\|\phi_n-\phi_{n,1}\|<\varepsilon;\ \phi_{n,1}=P_1\phi_n. \tag{6}$$

Пусть $\tilde{\hbar}_{n_0}=L(\phi_n)_{n+1}^{\infty}$; $\hbar_{1,n_0}=L(\phi_{n,1})_{n_0+1}^{\infty}$; $\hbar_n=L(\phi_n)_1^{\infty}$; $k\neq n$; $\hbar_n^{/}=P_1\hbar_n$; $\hat{\hbar}_{1,n_0}=L(\phi_{k,1})_{n_0+1}^{\infty}$; $k\neq n$; P_{1,n_0} – ортопроектор на $\hbar_{1,n_0}$; $P_{0,n_0}=I\oplus P_{1,n_0}$; ε_{0,n_0}(или F_{0,n_0}) или $F_{0,n_0}=P_{0,n_0}\hbar$. Здесь L означает замыкание линейной оболочки L соответствующей совокупности векторов. Если $d_n=d_n(\phi_n,\hbar_n)$ – расстояние от ϕ_n до $\hbar_n$, то $d_n=\sqrt{1-\rho_n^2}$, где

$$\rho_n=\sup_{x\in S_n}|(\phi_n,x)|;S_n=\{x\in\hbar_n|\ \|x\|=1\}. \tag{7}$$

Согласно (3) $\inf\limits_n d_n=\delta>0$, а потому $\sup\limits_n\rho_n=\delta$, а потому $\sup\limits_n\rho_n=\sqrt{1-\delta^2}$ и $|(\phi_n,x)|\leq\sqrt{1-\delta^2}$ при $x\in\hbar_n$; $n\in N$, а с учётом (6) и соотношения

$$\left|(\phi_{n,1},x)\right|-|\phi_{n,},x|\leq|\phi_{n,1}-\phi_n,x|<\varepsilon;\ x\in S_n \tag{8}$$

имеем оценку

$$\sup_{x\in S_n}\left|(\phi_{n,1},x)\right|\leq\varepsilon+\sqrt{1-\delta^2}. \tag{9}$$

Из (9) явствует, что

$$\inf_{n\succ n_0}d_{n,1}=\inf_{n\succ n_0}d_{n,1}(\phi_{n,1},\hbar_n)=\delta_1>0. \tag{10}$$

Поскольку $\left|(\phi_{n,1},x)\right|=|\phi_{n,,1},P_1x|$, то $d_{n,1}^{/}=(\phi_{n,1},\hbar_n^{/})=d_{n,1}=(\phi_{n,1},\hbar_n)$ и с учётом $\hat{\hbar}_{1,n_0}\subset P_1\hbar_n$ получим соотношение

$$\inf_{n\succ n_0}d_{n,1}=\inf_{n\succ n_0}d_{n,1}(\phi_{n,1},\hbar_n)=\delta_1>0. \tag{11}$$

Таким образом, система $(\phi_{n,1})_{n_0+1}^{\infty}$ равномерно минимальна в $\tilde{\hbar}_{n_0}^{/}=P_1\tilde{\hbar}_{n_0}$, а это влечёт, что $\dim P_{0,n_0}=n_0$. В самом деле, из предположения $\dim P_{0,n_0}>n_0$ следует соотношение $n_{1,0}=F_{0,n_0}\cap\tilde{\hbar}_{n_0}\neq\{0\}$, а поскольку линеал $L_{n_0}=\left\{x\in\tilde{\hbar}_{n_0}\middle|x=\sum\limits_{n\succ n_0}(x,g_n)\phi_n\right\}$ всюду плотен в $\tilde{\hbar}_{n_0}$, то и $\hat{\hbar}_{1,0}=F_{0,n_0}\cap Ln_0\neq\{0\}$.

Для $\{0\}\neq x\in\hat{\hbar}_{1,0}$, (а когда (ϕ_n) базис в $\hbar$ для $\{0\}\neq x\in\hbar_{1,0}$), имеем, что $P_{1,0}x=\{0\}$ и получим равенство

$$\sum_{n\succ n_0}(x,g_n)=\{0\}, \tag{12}$$

противоречащее минимальности системы $(\phi_{n,1})$. Из включения $P_0 \subset P_{0,n_0}$ и $\dim P_{0,n_0} = n_0$ явствует, что $\dim P_0 < 0$ и лемма 1 доказана.

Следствие. Полная в $\hbar$ система (ϕ_n) при условиях (2) и (3) изотропно некомпактна. Предполагая существование бесконечномерного ортопроектора P_0, влекущего соотношение $(P_0\phi_n)\underset{n\to\infty}{\to}\{0\}$, получим, что $\|\phi_n - P_1\phi_n\|\underset{n\to\infty}{\to}\{0\}$, где $P_1 = I \oplus P_0$. Согласно лемме 1 коразмерность проектора P_1 не превышает размерности подпространства $\hbar_{n_0}$, а потому $\dim P_0 \le n$, что противоречит предположению $\dim P_0 = \infty$.

Заметим, что при условиях (2), (3) и (5) система $(\phi_n^{/}) = (\phi_n)_1^{n_0} \cup (\phi_{n,1})_{n_0+1}^{\infty}$ наряду с (ϕ_n) полна в $\hbar$ и равномерно минимальна. Ортопроектор P_{1,n_0} гомеоморфно отображает $\tilde{\hbar}_{n_0}$ на $L(\phi_{n,1})_{n_0+1}^{\infty}$ и когда (ϕ_n) является базисом в $\hbar$, то и система $(\phi_n^{/})$ образует базис $\hbar$. Следующий пример показывает существенность условия (3) для изотропной некомпактности (ϕ_n).

Пусть $V = I + S_0$ – унитарный оператор в $\hbar$, отображающий бесконечномерное подпространство L_1 на L_2, причём S_0 компактен и $L_1 \cap L_2 = \{0\}$. Ортонормальный базис (e_n) из L_1 преобразуется оператором V в ортонормальный базис (Ve_n) в L_2.Обозначим P_1, P_2 и P_0 ортопроекторы соответственно на L_1, L_2 и ортогональное дополнение L_0 к L_1 в $\hbar_1 = \overline{L_1 + L_2}$. Система (ϕ_k), элементы которой при нечётных $K = 2\rho - 1$ совпадают с e_n, а при чётных $k = 2p$ с Ve_n, полна и минимальна в $\hbar_1$. Поскольку $(e_n)\underset{n\to\infty}{\rightharpoonup}\{0\}$ и $(S_0 e_n)\underset{n\to\infty}{\to}\{0\}$, то $\|Ve_n - e_n\|\underset{n\to\infty}{\to} 0$, а потому

$$(P_0\phi_k)\underset{k\to\infty}{\to}\{0\} \tag{13}$$

и система $(\phi_k) \notin M_0$.

Пусть (g_k) – биортогональная к (ϕ_k) система в $\hbar_1$. Из (13), $(g_{2p}, \phi_{2p}) = 1$ и $g_{2p} \in L_0$ явствует, что $\|g_{гp}\|\underset{p\to\infty}{\to}\infty$ и тем самым условие (3) не выполняется. Согласно $\|P_1 e_n - e_n\|\underset{n\to\infty}{\to} 0$ и компактности S_0 имеем, что $\dim(L_0 \cap L_2) < \infty$ и система $(P_1 Ve_n)$ почти (с конечным дефектом) полна в L_1, а потому система $(P_1\phi_k)$ не минимальна в L_1.

Почти нормированная полная в $\hbar$ система $(\phi_n) \notin M_0$ когда существует разложение $I = P_0 \oplus P_1$ с $\dim P_0 = \infty$ и $(P_0\phi_n)\underset{n\to\infty}{\to}\{0\}$. Наличие такого ортопроектора P_0 возможно если система $(P_1\phi_n)$ наряду с полной в $\hbar_1$ подсистемой (ϕ_k) содержит бесконечное число линейно независимых элементов (ϕ_j). Согласно $\|P_1\phi_n - \phi_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ подпространства $F_1 = L(\phi_k)_1^\infty$ и $F_2 = L(\phi_j)_1^\infty$ близки к $\hbar_1 = P_1\hbar$. Одной из мер близости подпространств F_1 и F_2 является минимальный угол $\theta(F_1, F_2)$ определяемый равенством [16]

$$\cos\theta(F_1,F_2) = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(x,y)|; \quad x \in F_1; \quad y \in F_2. \tag{14}$$

Из $\theta(F_1,\hbar)_1 = 0$ и $\theta(\hbar_1, F_2) = 0$ следует, что $\theta(F_1, F_2) = 0$

Пусть N_1 и N_2 – бесконечные подмножества N, причём $N_1 \cup N_2 = N$ и $N_1 \cap N_2 \neq \varnothing$. Если для (ϕ_n) не выполнено (3), то расстояние $d_n(\phi_n, \hbar_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ и поэтому $\theta(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) = 0$, где $\hbar_n = L(\phi_m)$; $m \in N$; $m \neq n; \tilde{L}_1 = L(\phi_k)$; $k \in N_1$; $\tilde{L}_2 = L(\phi_j)$; $j \in N_2$.

Пусть $\tilde{P}_1$ – ортопроектор на $\tilde{L}_1$ и $\tilde{P}_0 = I \oplus \tilde{P}_1$. Согласно $d_j(\phi_j, \tilde{L}_1) \underset{j\to\infty}{\to} 0$ получим $(\tilde{P}_0\phi_j) \underset{j\to\infty}{\to} \{0\}$ и тем самым $(\tilde{P}_0\phi_n) \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}$. Итак, условие (3) является необходимым для изотропной некомпактности системы (ϕ_n).

Приведём ещё пример, проясняющий существенность $(\phi_n) \in M_0$ для компактности линейного оператора при условии (1).

Пусть (e_n) – ортонормальный базис $\hbar$; $(\alpha_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$; $0 < \alpha_n < 1$; $e_n^/ = e_n + \alpha_n e_n$; $n \in N$. Рассмотрим в $\tilde{\hbar} = \hbar \oplus \hbar$ систему $(\tilde{\phi}_n) : (\tilde{\phi}_{2n-1}) = \begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix}$; $\tilde{\phi}_{2n} = \begin{pmatrix} e_n \\ \alpha_n e_n \end{pmatrix}$. Система $(\tilde{\phi}_n)$ полна в $\hbar$, причём $(\tilde{\phi}_n) \notin M_0$, ибо $(\tilde{P}_2\tilde{\phi}_n) \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}$, где $\tilde{P}_2$ – ортопроектор на вторую компоненту $\hbar$. Рассмотрим в $\hbar$ оператор $\tilde{A} = B \oplus C$, где $Be_n = \beta_n e_n$; $\beta_n \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}$, а $C \notin \gamma_\infty$, например, $C = P_2$. Тогда $(\tilde{A}\tilde{\phi}_n) \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}$, однако $\tilde{A}$ не компактен.

В заключение отметим, что предложенный в этой работе критерий компактности полезен в некоторых вопросах теории линейных операторов, например, в вопросах об устойчивости базисов гильбертова пространства при слабом возмущении [17].

8. Локализация корневых векторов при слабом возмущении

В силу соотношений (8) и (9) пункта 1, влекущих определённую структуру матриц L и L^*, ортопроекции векторов x_n и z_n на $Y_{p_n} = \mathrm{clin}(y_k)_1^{p_{n-1}}$ и

$Y_{q_n} = \operatorname{clin}\left(y_k\right)_{q_{n+1}}^{\infty}$ стремятся к нулю при $(n - p_n) \to \infty$ и $(q_n - n) \to \infty$, а потому существенные их части локализованы в $y_{p_n}^{q_n} = \operatorname{clin}\left(y_k\right)_{p_n}^{q_n}$.Применив к равенству $Ay_n/\mu_n - y_n = Sy_n$ ортопроектор $\tilde{P}_k$ на $\tilde{X}_k = L(x_n)_{k+1}^{\infty}$, получим соотношение

$$\tilde{P}_k \frac{Ay_n}{\mu_n} - \tilde{P}_k y_n = \tilde{P}_k S y_n \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{1}$$

$$\tilde{P}_k y_n \underset{(k-n)\to\infty}{\longrightarrow} \{0\}. \tag{2}$$

Из (2) следует, что для любых $\varepsilon > 0$ и n найдётся такое $t_n \in N$, что $\left\|\tilde{P}_{tn} y_j\right\| < \varepsilon,$ а потому

$$\left\|y_j - Q_{t_n} y_j\right\| < \varepsilon; \quad 1 \le j \le n, \tag{3}$$

где $Q_{t_n} = I - \tilde{P}_{t_n}$ – ортопроектор на $Z_{t_n} = L\left(z_k\right)_1^{t_n}$.

Пусть $S_n(0,1)$ и $S_{tn}^{/}(0,1)$ – единичные сферы в $Y_n = L\left(y_j\right)_1^n$ и Z_{t_n}, а $\delta_n = \sup\limits_{x\in S_n(0,1)} \left\|P_{t_n} x\right\|$. В силу (3) и ортонормальности $\left(y_n\right)$ δ_n есть величина порядка ε. Факт наличия оценки $\left\|x - Q_{t_n}\right\| k\delta_n$ запишем в виде

$$S_n(0,1) \subset \delta_n S_{t_n}^{/}(0,1). \tag{4}$$

Пусть Q_n-ортопроектор на $Z_n = L\left(z_k\right)_1^n$. Из $A^*Q_n = Q_n A^* Q_n$ следует $Q_n A = Q_n A Q_n = A_n$ и применяя к равенству $Ay_k/\mu_k - y_k = Sy_k$ оператор Q_n, имеем

$$Q_n A Q_n \frac{y_k}{\mu_n} - Q_n y_k = Q_n S y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \{0\}, \tag{5}$$

$$\frac{\left\|Q_n A Q_n y_k\right\|^2}{\left|\mu_n\right|} = \sum_{j=1}^{n} \frac{s_{j,n}^2}{\left|\mu_k\right|^2} \left|\left(y_k, \phi_{j,k}\right)\right|^2, \tag{6}$$

где $s_{j,n}$ суть s-числа A_n; $\left(\phi_{j,n}\right)$ – ортонормальный базис в Z_n; $\left(A_n^* A_n\right)^{1/2} \phi_{j,n} = s_{j,n} \phi_{j,n}$. Поскольку $s_{j,n}/\left|\mu_k\right| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, то

$$\left\|Q_n y_k\right\|^2 = \left|\sum_{j=1}^{n} \left(y_k, \phi_{j,n}\right)\right|^2 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{7}$$

и для любых n и ε $\exists$ такое $t_n^{/} \in N$, что для всех $k > t_n^{/}$ имеем $\left\|Q_n y_k\right\|$. Величина

$$\delta_n^{/} = \sup_{y\in S_{t_n}^{/}(0,1)} \left\|Q_n y\right\|^2 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{8}$$

в силу ортонормальности $\left(y_n\right)$ имеет порядок ε. Здесь $S^{/}_{t_n}(0,1)$ – единичная сфера в $\tilde{Y}^{/}_{tn}=L(y_k)_1^{t_n^{/}}$. Полагая $\delta_n^0=\max\left(\delta_n,\delta_n^{/}\right)$, а $t_n^0=\max\left(t_n,t_n^{/}\right)$, получим соотношения

$$S_n(0,1)\subset\delta_n^0 S^{/}_{t_n^0}(0,1);\;\; S^{/}_n(0,1)\subset\delta_n^0 S_{t_n^0}(0,1). \tag{8}$$

Ортопроекция $P_{t_n^0}S^{/}_n(0,1)\subset Y_{t_n^0}$ и δ_n^0 - близка к $Z_{t_n^0}$. Это с учётом δ_n^0-близости к $Z_{t_n^0}$ сферы $S_n(0,1)$ означает её близость порядка δ_n^0 со сферой $S^{/}_n(0,1)$. СКВ $\left(\tilde{x}^{/}_n\right)$ оператора $A_1=H(I+S)=(I+S)^{-1}A(I+S)$, подобного A, полна в $\hbar$ и $A_1^*(I+S^*)H$; $S^*\in\gamma_\infty$. Повторяя приведённые выше рассуждения, получим близость порядка δ_n^0 единичных сфер из Y_n и X_n и поскольку $X_n=(I+S)X^{/}_n$; $S\in\gamma_\infty$; $X^{/}_n=L\left(X^{/}_n\right)_1^n$, близость того же порядка сферы $S^1_n(0,1)$ с единичной сферой $S^{//}_n(0,1)$ из X_n. Итак, сферы $S_{n-1}(0,1)$, $S^{/}_{n-1}(0,1)$ и $S^{//}_{n-1}(0,1)$ – единичные сферы в Y_{n-1}, Z_{n-1} и X_{n-1}. Элемент $x_n\in S^{//}_n(0,1)\subset X_n$ ортогонален к $S^{/}_{n-1}(0,1)$, а элемент $y_n\in S_n(0,1)\subset Y_n$ в силу близости сфер $S_{n-1}(0,1)$ и $S^{/}_{n-1}(0,1)$ близок к x_n. Аналогично имеем сближение y_n с z_n и тем самым

$$\|x_n-y_n\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0;\;\; \|z_n-y_n\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0, \tag{9}$$

$$\|x_n-z_n\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0. \tag{10}$$

Из соотношений (9) и (10) следует [5] оценка

$$\|N_n\|<C<\infty;\quad n\in N \tag{11}$$

эквивалентная базисности $\left(x_n\right)$ в $\hbar$. В (11) N_n – оператор проектирования на X_n параллельно $\tilde{X}_n$. Приведённый выше критерий компактности позволяет установить, что системы $\left(x_n\right)$ и $\left(z_n\right)$ образуют базисы Рисса. На плотном в $\hbar$ линеале L рассмотрим линейный оператор T

$$T\left(\sum_x\left(x,y_n\right)y_n\right)=\sum_x\left(x,y_n\right)\left(x_n-y_n\right). \tag{12}$$

Пусть $\left(\hat{z}_n\right)$ – биортогональная к $\left(x_n\right)$ система в $\hbar$. Согласно равенствам

$$\left(x_n-y_n,\hat{z}_n\right)=\left(y_n,y_n-\hat{z}_n\right);\quad n\in N \tag{13}$$

имеем соотношение

$$\left(\sum_x\left(x,y_n\right)\left(x_n-y_n\right),\sum_y\left(y,x_n\right)\hat{z}_n\right)=\left(\sum_x\left(x,y_n\right)y_n,\sum_y\left(y,x_n\right)\left(y_n-\hat{z}_n\right)\right). \tag{14}$$

В силу (14) область определения сопряжённого с T оператора T^* содержит плотный в $\hbar$ линеал $L' = \left\{ y \in \hbar \middle| y = \sum_{y} (y, x_n) \hat{z}_n \right\}$, а потому T допускает замыкание $\bar{T} = (T^*)^*$. По построению $\bar{T} y_n \underset{n\to\infty}{\to} \{0\}$ и согласно предложенному выше критерию оператор $\bar{T}$ компактен. Оператор $B = I + T$ преобразует базис $\{y_n\}$ в систему $\{x_n\}$ и ограничен вместе с обратным $B^{-1} = (I+T)^{-1}$. Аналогично строится оператор $B_1 = I + T_1; T_1 \in \gamma_\infty$; $B_1 y_n = z_n$; $n \in N$ и операторы B_1 и $B_1 = (I+T_1)^{-1}$ ограничены. Таким образом, системы $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ образуют базисы $\hbar$, эквивалентные ортонормированному базису $\{y_n\}$, которые называются базисами Рисса.

Пусть $\left(\tilde{X}_n^{(k)}\right)$ – СКВ оператора $\tilde{A}$, отвечающая последовательности его собственных чисел $\left(\lambda_n^{(k)}\right)$ из Γ_k; $\tilde{L}_k = \operatorname{clin}\left(\tilde{X}_n^{(k)}\right)$; $\hat{X}_n^{(k)} = \tilde{X}_n^{(k)} \big/ \left\|\tilde{X}_n^{(k)}\right\|$; $\left(\mu_n^{(k)}\right)$ – последовательность собственных чисел оператора $\tilde{H}$ на луче $\arg\lambda = \frac{\pi}{n} k$, а $\left(\tilde{y}_n^{(k)}\right)$ – его ССВ, отвечающая $\left(\mu_n^{(k)}\right)$; $\left(\hat{y}_n^{(k)}\right) = \tilde{y}_n^{(k)} \big/ \left\|\tilde{y}_n^{(k)}\right\|$; $X_n^{(k)}$ – СКВ-пучка $K(\lambda)$, соответствующая $\left(\hat{X}_n^{(k)}\right)$.

Рассуждениями, аналогичными приведённым выше, получим соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(k)}}{\mu_n^{(k)}} = 1, \tag{15}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \hat{x}_n^{(k)} - \hat{y}_n^{(k)} \right\| = 0. \tag{16}$$

Согласно (16) СКВ$\left(\hat{x}_n^{(k)}\right)$ образует базис Рисса в $\tilde{L}_k$. Поскольку коразмерность линеала $\tilde{L} = \sum_{k=0}^{2n-1}{}' \dotplus \tilde{L}_k$ в $\hbar$ конечна, то система $\hat{x}_n$ является базисом Рисса в $\hbar$, а СКВ(x_n) пучка $K(\lambda)$ образуется n-базис Рисса в $\hbar$.

Рассмотрим случай конечного числа n_0 отрицательных собственных чисел оператора $\tilde{H}^{n_0}$. Элементы ортонормальной системы $\left(y_n^{(k)}\right)$ суть собственные векторы оператора H и $\operatorname{codim} L^{(k)} = n_0$, где $L^{(k)} = \operatorname{clin}\left(y_n^{(k)}\right)$.

Равенство (16) влечёт соотношение

$$\left\| X_n^{(k)} - y_n^{(k)} \right\| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \tag{17}$$

и по предложенному выше критерию компактности $X_n^{(k)} = (P_k + T_k) y_n^{(k)}$; $T_k \in \gamma_\infty$; P_k - ортопроектор на $L^{(k)}$.

9. Заключительные замечания

Элементарные решения некоторых нестационарных задач ищутся в виде $X_n(t)=X_n e^{-\tilde{\lambda}_n t}$; $\tilde{\lambda}_n=\lambda_n^{-1}$ и физический смысл установленной выше локализации собственных чисел и корневых векторов оператора $A=(I+S)H$ заключается в асимптотическом сближении амплитуд и фаз слабо возмущённых и невозмущённых движений.

Согласно свойству 2 СКВ$\{x_n\}$ компактного оператора *A*, содержащая бесконечное число присоединённых векторов, не удовлетворяет условиям

$$0<C_1<\inf_n \|x_n\|; \quad \sup_n \|x_n\|<C_2<\infty.$$

Поскольку полная СКВ$\{x_n\}$ оператора $A=(I+S)H$; $S,H\in\gamma_\infty$; $H^*H=HH^*$ образует базис Рисса и тем самым условия (1) выполнены, то при слабом возмущении нормального оператора $H\in\gamma_\infty$ может возникнуть не более конечного числа присоединённых векторов оператора *A*.

Согласно М.В. Келдышу, полнота СКВ оператора $\tilde{A}=(\tilde{I}+\tilde{S})\tilde{H}$ в $\tilde{\hbar}$ эквивалентна *n*-кратной полноте СКВ пучка $K(\lambda)$ и позволяет нахождение приближённого решения задачи Коши

$$0<C_1<\inf_n \|x_n\|; \quad \sup_n \|x_n\|<C_2<\infty,$$

$$\left(I-T_0-HT_1\frac{d}{dt}-...-H^nT^{n-1}\frac{d_n}{dt^n}\right)X=0,$$

$$x(0)=x_0; x^{/}(0)=x_{0,1};...x^{(n-1)}(0)=x_{0,n-1}$$

в виде линейной комбинации функций

$$x(t)=e^{\lambda_0 t}\left(\frac{t^k}{k!}x_0+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}x_1+...+\frac{tx_{k-1}+x_k}{1!}\right).$$

Здесь $\{x_0,x_1,...x_k\}$ – цепочка КВ пучка $K(\lambda)$. Базисность СКВ-оператора $\tilde{H}$ в $\tilde{\hbar}$, влекущая наличие n-кратной базисность СКВ$K(\lambda)$ в $\hbar$, позволяет представление решения в виде ряда из функций вида (4).

Теория операторных пучков, основанная М.В. Келдышем [1, 2], усилиями многих авторов получила дальнейшее развитие. В этом аспекте значима работа М.Г. Крейна и Г. Лангера [18], в которой для исследования квадратичных пучков применена теория операторов, самосопряжённых относительно индефинитного скалярного произведения $[\tilde{x},\tilde{y}]=(W\tilde{x},\tilde{y})$; $W=W^*$.

При полных $G=G^*$; $H=H^*$; $G,H\in\gamma_\infty$ в [12] установлена безусловная базисность в $\tilde{\hbar}=\hbar\oplus\hbar$ СКВ $\{\tilde{x}_n\}$ *W*-самосопряжённого (*W*-СС) оператора A_0, ассоциированного с пучком $Q(\mu)$. Поскольку $J=W(\tilde{I}+\tilde{S})$ и $\tilde{S}\in\gamma_\infty$, то существует такое $n_0\in N$, что для всех $n>n_0$ подпространства $L_+^/=\operatorname{clin}\{\tilde{x}_n^+\}_{n_0+1}^\infty$ и $L_-^/=\operatorname{clin}\{\tilde{x}_n^-\}_{n_0+1}^\infty$ J-дефинитны.

При гомеоморфизмах $P_\pm:\hat{L}_\pm\to\hbar_\pm$ максимальных J-семидефинитных подпространств $\hat{L}_+$ и $\hat{L}_-$, для которых $L_+^/\subset\hat{L}_+$; $L_-^/\subset\hat{L}_-$, базисы $\{\tilde{X}_n^\pm\}_{n_0+1}^\infty$ преобразуются в базисы $\{x_n^\pm\}_{n_0+1}^\infty$ подпространств $\hbar_n^\pm=P_\pm L_\pm^/$, которые вместе с $\{x_n^+\}_1^{n_0}$ и $\{x_n^-\}_1^{n_0}$ образуют базисы Рисса в $\hbar$. Здесь $x_n^\pm=p_\pm\tilde{x}_n^\pm$; $\tilde{x}_n^\pm\in L_\pm$.

Подпространства $\hbar_+$ и $\hbar_-$ равномерно W-дефинитны и W-проекторы F_1 и F_2 на них осуществляют гомеоморфизмы $F_1:L_+\to\hbar_+$ и $F_2:L_-\to\hbar_-$. В силу $J=W(\tilde{I}+\tilde{S})$; $\tilde{S}\in\gamma_\infty$ и J-проекторы P_+ и P_- реализуют гомеоморфизмы $P_\pm:L_\pm\to\hbar_\pm$.

Базисы $\{x_n^+\}$ и $\{x_n^-\}$ образованы соответственно из всех СВ первого и второго ряда пучка $Q(\mu)$ и всех его корневых линеалов с W-нейтральными СВ, отвечающих корневым линеалам оператора A_0 из L_+ и L_-. Замеченный в [12] факт, что наличие безусловного базиса в $\tilde{\hbar}$ из СКВ связанного с пучком $Q(\mu)$ компактного оператора A_0 вытекает именно из его самосопряжённости в пространстве Понтрягина, полезен при исследовании пучков, для которых возможна такая структура сопряжённых с ними операторов $\tilde{\hbar}$. Например [19], таковы операторы $L=\begin{pmatrix}-A^{-1}B & -A^{-1}C\\ I & 0\end{pmatrix}$, порождённые самосопряжёнными пучками ограниченных операторов, являющихся компактными возмущениями пучка $L_0(\lambda)=A_0+\lambda B_0+\lambda^2C_0$ при $A\gg0$ и $C\ll0$.

Выделение из двукратно полной в $\hbar$ СКВ пучка $L(\lambda)$ минимально полной в $\hbar$ её половины, состоящей из КВ специального вида, сводится к отбору из его канонических цепочек $\{y_j^z\}_0^{p_j}$; $p_j=2l_j$; $\lambda_j=\bar{\lambda}_j$ необходимого количества первых КВ. Выясним, как соотносится отбор, реализующийся для нормальной цепочки по знаку $\varepsilon_j=\pm1$ в равенствах $z_j^z=\varepsilon_j y_j^z$ с предложенным нами правилом их отбора по знаку $\left[\tilde{y}_j^{l_j+1},\tilde{y}_j^{l_j+1}\right]$. Например, для пучка $L(\lambda)=\lambda^2I+\lambda B+C$; $B=B^*$; $c>0$. С $L(\lambda)$ ассоциирован оператор $L=\begin{pmatrix}0 & C^{1/2}\\ C^{1/2} & -B\end{pmatrix}$ в $\tilde{\hbar}=\hbar\oplus\hbar$ и

$L\tilde{y}_j^0=\lambda_j\tilde{y}_j^0$; $\tilde{y}_j^0=\left(C^{1/2}y_j^0;\lambda_j y_j^0\right)$; $L^*\tilde{z}_{1,j}^0=\lambda_j\tilde{z}_{1,j}^0$; $L^*\tilde{z}_{2,j}^0=\lambda_j\tilde{z}_{2,j}^0$; $\tilde{z}_{1,j}^0=\left(C^{1/2}y_j^0,-\lambda_j y_j^0\right)$; $\tilde{z}_{2,j}^0=\left(-C^{1/2}y_j^0,-\lambda_j y_j^0\right)$; $\lambda_j=\overline{\lambda}_j$, а потому $z_{1,j}^0=-y_j^0$ и $z_{2,j}^0=y_j^0$. Тем самым выбор знака ε_j соответствует выбору в качестве сопряжённого к $\tilde{y}_j^0$ вектора $\tilde{z}_{1,j}^0$ или $\tilde{z}_{2,j}^0=-\tilde{z}_{1,j}^0$. Поскольку оператор L является J-самосопряжённым, то в качестве вектора $\tilde{z}_j^0$, самосопряжённого к $\tilde{y}_j^0$ относительно $\left[\tilde{x},\tilde{y}\right]=\left(J\tilde{x},\tilde{y}\right)$, можно выбрать $\tilde{z}_j^0=\tilde{y}_j^0$ или $\tilde{z}_j^0=-\tilde{y}_j^0$.

При $\tilde{z}_j^0=\tilde{y}_j^0$ и $\left\|y_j^0\right\|=1$ имеем

$\left[\tilde{y}_j^0,\tilde{z}_j^0\right]=\left[\tilde{y}_j^0,\tilde{y}_j^0\right]=\left(\tilde{y}_j^0,\tilde{y}_j^0\right)=\left(Cy_j^0,\tilde{y}_j^0\right)+\lambda_j^2>0,$

$\left(\tilde{y}_j^0,\tilde{z}_j^0\right)=\left(Cy_j^0,y_j^0\right)-\lambda_j^2,$

а при $\tilde{z}_j^0=-\tilde{y}_j^0$ и $\left\|y_j^0\right\|=1$

$\left[\tilde{y}_j^0,\tilde{z}_j^0\right]=\left[\tilde{y}_j^0,-\tilde{y}_j^0\right]=-\left(\tilde{y}_j^0,\tilde{y}_j^0\right)=-\left(Cy_j^0,\tilde{y}_j^0\right)-\lambda_j^2<0$

$\left(\tilde{y}_j,\tilde{z}_j^0\right)=-\left(Cy_j^0,y_j^0\right)+\lambda_j^2.$

Выбору в качестве J-сопряжённого к $\tilde{y}_j^0$ самого $\tilde{y}_j^0$ (противоположного ему вектора $-\tilde{y}_j^0$) отвечает $z_j^0=y_j^0$ и $\varepsilon_j=1$ ($z_j^0=-y_j^0$ и $\varepsilon_j=1$).Согласно этим формулам при выборе$\left(z_j^0=-y_j^0\right)$ $z_j^0=y_j^0$ СКВ $\tilde{y}_j^0$ является J-положительным (J-отрицательным).

В цепочке нечётной длины $\left[\tilde{y}_j^0,\tilde{y}_j^0\right]=0$, а вектор $\tilde{y}_j^{l_j+1}$ является J-дефинитным и поэтому знак ε_j в равенствах $z_j^r=\varepsilon_j y_j^r$; $r=0,1,l_{j+1}$, выбирается по знаку $\left[\tilde{y}_j^{r+1},\tilde{y}_j^{r+1}\right]$. Таким образом, знак ε_j выбирается в зависимости от скалярного произведения $\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)$ или $\left[\tilde{x},\tilde{y}\right]$, относительно которого рассматривается сопряжение. Для выделения специальной минимально полной в $\hbar$ СУВ пучка $L(\lambda)$ существенно лишь, чтобы отвечающая им СКВ оператора L была полна в максимальных J-семидефинитных подпространствах L_+ или L_-, что возможно только при выборе знака ε_j совпадающим для всех цепочек $\left\{y_j^r\right\}^{l_{j+1}}$ со знаком $\left[\tilde{y}_j^{l_j+1},\tilde{y}_j^{l_j+1}\right]$ или противоположным ему, хотя знаковая характеристика по J-сопряжению СВ J-СС оператора нам представляется более естественной. Вопросы отбора специального вида СКВ операторных пучков и базисность в $\hbar$ этих систем связаны с физическим смыслом соответствующих решений изучаемых задач. Например, в задачах о колебаниях волноводов СЗ и СВ первого (второго) рода отвечает незатухающая уносящая (приносящая) энергию волна, что согласуется с принципами излучения Зоммерфельда-Мандельштама [9].

С задачей движения вязкой жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения, ассоциируется пучок $Q(\mu)=I-\mu G-H/\mu$ с $G>0$; $G\in\gamma_\infty$ и неограниченным $H\geq 0$ с $\ker H\neq\{0\}$. Сужение H_1 оператора H на ортогональное дополнение к $\ker H$ имеет дискретный спектр. Структура $Q(\mu)$ позволяет обосновать [5] известную гипотезу о локализации СЗ пучка $Q(\mu)$. Установление более тонкого факта – конечности числа его невещественных СЗ – требует привлечения [5] J-СС операторов.

Введённая в [10] знаковая характеристика нормальных цепочек применена в [20] для выделения полных в $\hbar$ половин СКВ пучка $Q(\mu)$. Этот факт и безусловная базисность в $\hbar$ половин СКВ, полученных в [20] значительными аналитическими построениями, являются следствием утверждения [12] о существовании базисов Рисса в $\tilde{\hbar}$ СКВ операторов $\tilde{A}$ и A_0 ассоциированных с пучком $Q(\mu)$. Существенно, что эти операторы самосопряжены соответственно в пространствах Понтрягина и Крейна. При этом наличие базисов Рисса специального вида в $\hbar$ обеспечено гомеоморфизмами $P_\pm : L_\pm \to \hbar$, а их существование следует из структуры W-метрики, являющейся слабым возмущением J-метрики.

Библиографический список

1. Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряжённых уравнений // Докл. АН СССР. 77. № 1. 1951. С. 11-14.

2. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряжённых линейных операторов // Успехи мат. наук. Т. 26. Вып. 4. 1971. С. 15- 41.

3. Ларионов Е.А. Свойства корневых функций некоторых дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. Т. 25. № 10. 1989. С. 1812-1815.

4. Ларионов Е.А. Асимптотика собственных чисел при слабом возмущении нормальных операторов // Докл. АН СССР. Т. 307. № 4. 1989. С. 802-806.

5. Ларионов Е.А. Локализация спектра и двукратная полнота нормальных движений в задаче о движении вязкой жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения // Докл. АН СССР. 217. № 3. 1974. С. 522-525.

6. Hamburger H.L. Uber die Zerlegung des Hilbertschen Raumes durch vollstetige lineare Transformationen // Math. Nachr. 4. (1950/51). 56- 69.

7. Мацаев В.И. Несколько теорем о полноте корневых подпространств вполне непрерывных операторов // Докл. АН СССР. 155. № 2. 1964. С. 273-276.

8. Костюченко А.Г., Оразов М.Б. Задача о колебаниях упругого полуцилиндра и связанные с ней самосопряжённые квадратичные пучки // Труды семинара им. И.Г. Петровского. М.: Издательство МГУ. 1981. Вып. 6. С. 97-143.

9. Болотовский Б.М., Столяров С.Н. Современное состояние электродинамики движущихся сред. В кн. Эйнштейновский сб. 1974. М.: Наука, 1976. С. 179-275.

10. Костюченко А.Г.. Шкаликов А.А. Самосопряжённые квадратичные пучки операторов и эллиптические задачи // Функциональный анализ и его прил.. 1983. Т.17. Вып. 2. С. 38-61.

11. Крейн С.Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде // Докл. АН СССР. 159. № 2. 1964. С. 262-265.

12. Ларионов Е.А. О базисах, составленных из корневых векторов операторного пучка // Докл. АН СССР. Т. 206. № 2. 1972. С. 283- 286.

13. Иохвидов И.С. О спектрах эрмитовых и унитарных операторов в пространстве с индефинитной метрикой // Докл. АН СССР. Т. 71. № 2. 1950. С. 225-228.

14. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. Наука. М.: 1965. 520 с.

15. Плеснер А.И. Спектральная теория линейных операторов. Наука. М.: 1965. 622 с.

16. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Теория несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука. 1965. 436 с.

17. Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Учёные записки МГУ. Математика. Т. IV. Вып. 148. 1951. С. 69-107.

18. Крейн М.Г.,Лангер Г.К. О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов // В сб.: Труды Межд. симп. по прим. теории функций в механике сплошной среды. Т. 2. М.: Наука. 1965. С. 283-322.

19. Шкаликов А.А., Плиев В.Т. Компактные возмущения сильно демпфированных пучков операторов // Математич. заметки. Т. 5. Вып. 2. 1989. С. 118-128.

20. Маркус А.С., Мацаев В.И. О базисности некоторой части собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка. // Математический сборник. 133(175):3(7) 1987. С. 293-313.