ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 12 за 2014 г.

Троицкая А.В., Сазонов В.В.

Периодические движения спутника-гиростата с большим гиростатическим моментом относительно центра масс

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Троицкая А.В., Сазонов В.В. Периодические движения спутника-гиростата с большим гиростатическим моментом относительно центра масс // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 12. 18 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-12

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

А.В.Троицкая, В.В.Сазонов

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА С БОЛЬШИМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

Москва - 2014

Аннотация

Рассматривается осесимметричный спутник-гиростат, центр масс которого движется по неизменной круговой орбите вокруг притягивающего центра. Движение спутника вокруг центра масс происходит под действием гравитационного момента. В предположении, что гиростатический момент спутника велик и направлен вдоль его оси симметрии, исследованы периодические движения этой оси в окрестности неизменного направления в абсолютном пространстве. Такие движения описываются системой дифференциальных уравнений четвертого порядка с периодическими коэффициентами, содержащей большой параметр. С помощью методов построения периодических решений дифференциальных уравнений с большим параметром доказана теорема о существовании и единственности симметричного периодического решения этой системы.

A.V.Troitskaya, V.V.Sazonov. Periodic motions of a satellite-gyrostat with a large inner angular momentum. We consider an axially symmetric satellite with a large inner angular momentum (i.e. the satellite is a gyrostat) directed along the symmetry axis. The satellite center of mass moves along a circular orbit around an attractive center, the satellite attitude motion being affected by the gravitational torque. We investigate periodic motions of the satellite symmetry axis in a vicinity of an invariable direction in the absolute space. Such motions are described by the system of differential equations of the fourth order that has periodic coefficients and contains a large parameter. We prove the unique existence of the symmetric periodic solution of the system using specific methods of large parameters.

1. Уравнения движения и краевые условия, определяющие периодические решения. Рассмотрим спутник, представляющий собой осесимметричный гиростат, центр масс которого движется по неизменной круговой орбите вокруг неподвижного притягивающего центра. Гиростатический момент спутника — постоянный и направлен вдоль его оси материальной симметрии. Для записи уравнений вращательного движения спутника введем две правые декартовы системы координат. Система $x_1x_2x_3$ образована осями Резаля спутника, ось x_1 — ось его материальной симметрии. Система $Z_1Z_2Z_3$ — инерциальная, ее ось Z_2 перпендикулярна плоскости орбиты спутника. Положение системы $x_1x_2x_3$ относительно системы $Z_1Z_2Z_3$ будем задавать углами δ и β. Система $Z_1Z_2Z_3$ переводится в систему $x_1x_2x_3$ двумя поворотами (здесь полагаем, что эти системы имеют общее начало координат): 1) на угол $\delta+\pi/2$ вокруг оси Z_2, 2) на угол β вокруг новой оси Z_3. Геометрический смысл этих углов: β — угол между осью x_1 и плоскостью орбиты Z_1Z_3, причём $\beta>0$, если эта ось лежит в полупространстве $Z_2>0$; δ — угол между осью $(-Z_3)$ и проекцией оси x_1 на плоскость Z_1Z_3, положительное направление отсчета этого угла согласовано с направлением оси Z_2.

Вращательное движение спутника описывается системой дифференциальных уравнений, полученной из динамических и кинематических уравнений Эйлера [1]:

$$\dot\delta=\frac{\Omega_2}{\cos\beta}\,,\quad \dot\beta=\Omega_3\,,$$
$$\dot\Omega_2=-(h-\Omega_2\operatorname{tg}\beta)\Omega_3-3(1-\lambda)\cos(\delta-t)\sin(\delta-t)\cos\beta\,, \tag{1.1}$$
$$\dot\Omega_3=(h-\Omega_2\operatorname{tg}\beta)\Omega_2-3(1-\lambda)\cos^2(\delta-t)\sin\beta\cos\beta\,.$$

При записи этих уравнений единицей измерения времени t служит величина, обратная орбитальной угловой скорости спутника, так что период орбитального движения равен 2π. Единицей измерения момента инерции служит экваториальный момент инерции спутника. В (1.1) Ω_2 и Ω_3 — проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси x_2 и x_3, точкой обозначено дифференцирование по времени, λ — полярный момент инерции спутника, h — проекция кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс на ось x_1.

Время входит в уравнения (1.1) периодически с периодом π, и эти уравнения инвариантны относительно замены переменных $t\to-t$, $\delta\to-\delta$, $\Omega_3\to-\Omega_3$. В силу указанных свойств можно искать π-периодические решения уравнений (1.1) специального вида. У этих решений δ и Ω_3 — нечетные функции времени, а β и Ω_2 — четные функции. Такие решения определяются краевыми условиями

$$\delta(0)=\Omega_3(0)=\delta\left(\frac{\pi}{2}\right)=\Omega_3\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\,. \tag{1.2}$$

Краевая задача (1.1), (1.2) инвариантна относительно преобразования $h \to -h$, $\beta \to -\beta$, $\Omega_3 \to -\Omega_3$, поэтому можно ограничиться ее исследованием при $h \geq 0$. Примеры численного исследования этой задачи приведены в [1]. В частности, там найдены решения, в которых переменные системы (1.1) малы при достаточно больших значениях h, лежащих вне малых окрестностей корней уравнения $\sin(\pi h/2) = 0$. В окрестности этих корней имеет место ветвление решений задачи (1.2), обусловленное резонансами в системе (1.1). В нерезонансном случае найденные решения описывают малые колебания оси x_1 спутника в окрестности неизменного направления в абсолютном пространстве [1]. Их можно построить в виде рядов по целым отрицательным степеням h. Однако эти ряды не "чувствуют" указанных резонансов и, следовательно, являются формальными. Ниже дано строгое доказательство существования решений задачи (1.1), (1.2), определенных для достаточно больших нерезонансных значений h и имеющих амплитуды $O(h^{-1})$.

2. Вспомогательные преобразования и формулировка теоремы. Замена переменных $(\Omega_2, \Omega_3) \mapsto (z_1, z_2)$:

$$\Omega_2 = z_1 + \frac{3(1-\lambda)}{2h}\,\beta(1+\cos 2t)\,, \quad \Omega_3 = z_2 - \frac{3(1-\lambda)}{h}\,\delta\cos 2t$$

переводит систему (1.1) в систему

$$\dot{\delta} = z_1 + \frac{3(1-\lambda)}{2h}\,\beta(1+\cos 2t) + O\left(\beta^2|z_1| + \frac{|\beta|^3}{h}\right)\,,$$

$$\dot{\beta} = z_2 - \frac{3(1-\lambda)}{h}\,\delta\cos 2t\,,$$

$$\dot{z}_1 = -hz_2 + \frac{3(1-\lambda)}{2}\sin 2t + O\left(\frac{|z_2|+|\beta|}{h} + \frac{|\delta|}{h^2} + \delta^2 + \beta^2 + |\beta z_1 z_2|\right)\,,$$

$$\dot{z}_2 = hz_1 + O\left[\frac{|z_1|+|\delta|}{h} + \frac{|\beta|}{h^2} + |\beta|(|\delta| + \beta^2 + z_1^2)\right]\,.$$

Приведенные здесь оценки относятся к окрестности точки $\delta = \beta = z_1 = z_2 = h^{-1} = 0$.

В полученной системе сделаем замену переменных $(\delta, \beta) \mapsto (\xi_1, \xi_2)$:

$$\delta = \xi_1 + \frac{z_2}{h}\,, \quad \beta = \xi_2 - \frac{z_1}{h}\,.$$

В результате эта система перейдет в систему, которую для краткости запишем в векторном виде

$$\dot{\xi} = f(t,\xi,z,h)\,, \quad \dot{z} = hJz + g(t,\xi,z,h)\,, \tag{2.1}$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} \delta \\ \beta \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f^\circ(t,h) \equiv f(t,0,0,h) = O(h^{-1}), \quad g^\circ(t,h) \equiv g(t,0,0,h) = O(1),$$

$$f(t,\xi,z,h) - f^\circ(t,h) = O\left(\frac{\|\xi\| + \|z\|}{h} + \|\xi\|^2 + \|z\|^2\right),$$
$$g(t,\xi,z,h) - g^\circ(t,h) = O\left(\frac{\|\xi\| + \|z\|}{h} + \|\xi\|^2 + \|z\|^2\right),$$

$\|\cdot\|$ — евклидова норма. Выписанные оценки относятся к окрестности точки $\xi = z = h^{-1} = 0$ и несколько огрублены, но они достаточны для доказательства большинства формулируемых ниже утверждений. Однако доказательство некоторых из них потребует более детальной оценки

$$e_1^{\mathrm{T}} f(t,\xi,z,h) = \frac{3(1-\lambda)}{2h}(1+\cos 2t)\xi_2 +$$
$$+ O\left(\frac{\|\xi\| + \|z\|}{h^2} + \frac{\|\xi\|^2 + \|z\|^2}{h} + \|\xi\|^2(\|\xi\| + \|z\|)\right).$$

Здесь и ниже $e_1 = (1,0)^{\mathrm{T}}$, $e_2 = (0,1)^{\mathrm{T}}$.

Краевые условия (1.2) в результате сделанных преобразований переходят в краевые условия

$$\xi_1(0) = z_2(0) = \xi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = z_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{2.2}$$

Время входит в систему (2.1) периодически с периодом π, и эта система инвариантна относительно замены переменных $t \to -t$, $\xi_1 \to -\xi_1$, $z_2 \to -z_2$. В силу указанных свойств любое решение краевой задачи (2.1), (2.2) можно продолжить на всю действительную ось. Сначала оно продолжается на отрезок $-\pi/2 \le t \le 0$ с помощью соотношений $\xi_1(-t) = -\xi_1(t)$, $\xi_2(-t) = \xi_2(t)$, $z_1(-t) = z_1(t)$, $z_2(-t) = -z_2(t)$, а затем π-периодически на всю ось.

Для $\varepsilon \in (0,1)$ введем множество $I(\varepsilon) = \{h : h > 0,\ |\sin(\pi h/2)| > \varepsilon\}$.

Теорема 1. Существуют такие положительные числа C_1, C_2 и H, зависящие от ε, что при $h > H$, $h \in I(\varepsilon)$ краевая задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение $\xi_*(t,h)$, $z_*(t,h)$, удовлетворяющее условиям

$$\|\xi_*(t,h)\| \le \frac{C_1}{h}, \quad \|z_*(t,h)\| \le \frac{C_2}{h} \quad \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right). \tag{2.3}$$

Решениям задачи (2.1), (2.2), о которых говорится в этой теореме, отвечают решения задачи (1.1), (1.2) с амплитудами $O(h^{-1})$ (см. п. 1). Условие

$h \in I(\varepsilon)$ служит для исключения из проводимого анализа резонансных значений h.

Доказательство теоремы 1 сводится решению системы специальных интегральных уравнений. Метод доказательства был предложен Хёльдером [2] и развит впоследствии Льюисом [3], Хейлом [4] и др. Применение этого метода к гироскопическим системам с большим параметром описано в [5, 6].

3. Система интегральных уравнений. Сведение краевой задачи (2.1), (2.2) к системе интегральных уравнений выполним, используя функции Грина двух линейных краевых задач

$$\dot{\xi} = F(t)\,, \quad \xi_1(0) = \xi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,, \tag{3.1}$$

$$\dot{z} = hJz + Q(t)\,, \quad z_2(0) = z_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,, \tag{3.2}$$

заданных на отрезке $0 \le t \le \pi/2$. Функция Грина задачи (3.2) имеет вид

$$G(t,s,h) = \frac{1}{2\sin\frac{\pi h}{2}}\begin{bmatrix} G_{11}(t,s,h) & G_{12}(t,s,h) \\ G_{21}(t,s,h) & G_{22}(t,s,h)\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
G_{11}(t,s,h) &= \sin h\left(t+s-\frac{\pi}{2}\right) - \sin h\left(t-s\mp\frac{\pi}{2}\right),\\
G_{12}(t,s,h) &= -\cos h\left(t+s-\frac{\pi}{2}\right) - \cos h\left(t-s\mp\frac{\pi}{2}\right),\\
G_{21}(t,s,h) &= -\cos h\left(t+s-\frac{\pi}{2}\right) + \cos h\left(t-s\mp\frac{\pi}{2}\right),\\
G_{22}(t,s,h) &= -\sin h\left(t+s-\frac{\pi}{2}\right) - \sin h\left(t-s\mp\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

В выписанных формулах верхний знак берется при $s < t$, нижний — при $s > t$. При $\sin(\pi h/2) \neq 0$ решение задачи (3.2) существует для любой непрерывной функции $Q(t)$ и выражается формулой

$$z(t) = \int\limits_0^{\pi/2} G(t,s,h)Q(s)ds. \tag{3.3}$$

Норму произвольной векторной функции $z(t)$, $0 \le t \le \pi/2$ определим формулой

$$\nu(z) = \max_{0\le t\le \pi/2} \|z(t)\|.$$

Для нормы решения (3.3) справедлива оценка

$$\nu(z) \le \frac{\pi\,\nu(Q)}{2\left|\sin\frac{\pi h}{2}\right|}\,. \tag{3.4}$$

Если функция $Q(t) = [Q_1(t), Q_2(t)]^{\mathrm{T}}$ в (3.2) непрерывно дифференцируема и удовлетворяет соотношениям $Q_1(0) = Q_1(\pi/2) = 0$, в частности, $Q(t) = g^{\circ}(t,h)$, то, сделав в этой задаче замену переменной $z = y + h^{-1}JQ(t)$ и воспользовавшись формулой (3.3), получим

$$z(t) = \frac{1}{h}JQ(t) - \frac{1}{h}\int_0^{\pi/2} G(t,s,h)J\dot{Q}(s)ds.$$

Отсюда следует оценка

$$\nu(z) \le \frac{\nu(Q)}{h} + \frac{\pi\,\nu(\dot{Q})}{2h\left|\sin\frac{\pi h}{2}\right|}\,. \tag{3.5}$$

Рассмотрим краевую задачу (3.1). Она разрешима не при всех непрерывных $F(t)$, поскольку при $F(t) \equiv 0$ имеет нетривиальное решение $\xi = e_2$. Это решение единственно (с точностью до постоянного множителя). Следовательно, сопряженная краевая задача

$$\dot{\psi} = 0\,, \quad \psi = (\psi_1, \psi_2)\,, \quad \psi_2(0) = \psi_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

также имеет единственное решение, и это решение можно взять в виде $\psi = e_1^{\mathrm{T}}$. Как известно [7], задача (3.1) разрешима в том и только в том случае, когда выполнено условие

$$\int_0^{\pi/2} e_1^{\mathrm{T}}F(t)dt = 0\,.$$

Если это условие выполнено, то решение задачи (3.1) определено с точностью до слагаемого $\mathrm{const}\cdot e_2$.

Решение задачи (3.1) удобно выразить с помощью с обобщенной функции Грина [3, 8]. Эта функция, обозначим ее $G_0(t,s)$ $(t,s \in [0,\pi/2])$, является квадратной матрицей второго порядка и единственным образом определяется следующими условиями: соотношениями (3.1) для каждого столбца, условием скачка $G_0(s+0,s) - G_0(s-0,s) = \mathrm{diag}\,(1,1)$ и соотношениями

$$\frac{\partial G_0(t,s)}{\partial t} = -\frac{2}{\pi}e_1e_1^{\mathrm{T}}\,, \quad \int_0^{\pi/2} e_2^{\mathrm{T}}G_0(t,s)dt = 0.$$

Явный вид обобщенной функции Грина

$$G_0(t,s) = \mathrm{diag}\left(\frac{1\pm 1}{2} - \frac{2t}{\pi}, -\frac{1\mp 1}{2} + \frac{2s}{\pi}\right),$$

где верхний знак берется при $s < t$, нижний — при $s > t$. Выражение

$$\xi(t) = \int\limits_0^{\pi/2} G_0(t,s)F(s)ds \tag{3.6}$$

удовлетворяет краевым условиям (3.1) и соотношениям

$$\dot{\xi}(t) = F(t) - pe_1\,, \quad p = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} e_1^{\mathrm{T}} F(t)dt\,, \quad \int\limits_0^{\pi/2} e_2^{\mathrm{T}}\xi(t)dt = 0\,.$$

При $p = 0$ формула (3.6) дает частное решение краевой задачи (3.1). Для нормы функции $\xi(t)$ в (3.6) имеет место оценка

$$\nu(\xi) \leq \frac{\pi}{2}\nu(F)\,. \tag{3.7}$$

Искомая система интегральных уравнений имеет вид

$$\xi(t) = a\mathrm{e}_2 + \int\limits_0^{\pi/2} G_0(t,s)f[s,\xi(s),z(s),h]ds \equiv L_\xi(\xi,z), \tag{3.8}$$

$$z(t) = \int\limits_0^{\pi/2} G(t,s,h)g[s,\xi(s),z(s),h]ds \equiv L_z(\xi,z).$$

Здесь a — параметр. Систему (3.8) будем рассматривать при $h \in I(\varepsilon)$. Пусть $\xi(t,a,h)$, $z(t,a,h)$ — решение этой системы. Оно непрерывно дифференцируемо по t, удовлетворяет краевым условиям (2.2), второму уравнению (2.1) и соотношениям

$$\dot{\xi}(t,a,h) = f[t,\xi(t,a,h),z(t,a,h),h] - p(a,h)e_1\,,$$

$$p(a,h) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} e_1^{\mathrm{T}} f[t,\xi(t,a,h),z(t,a,h),h]dt\,, \quad \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} e_2^{\mathrm{T}}\xi(t,a,h)dt = a\,.$$

Предположим, что рассматриваемое решение системы (3.8) определено в некоторой области изменения параметров a и h, и в этой области так называемое бифуркационное уравнение

$$p(a,h) = 0 \tag{3.9}$$

имеет корень $a(h)$. Тогда $\xi[t,a(h),h]$, $z[t,a(h),h]$ — решение краевой задачи (2.1), (2.2). При определенных условиях, которые будут оговорены ниже и которые выполнены в исследуемой ситуации, справедливо и обратное утверждение. Решения задачи (2.1), (2.2), о которых идет речь в теореме 1, выражаются через решение системы (3.8) при подходящем корне бифуркационного уравнения (3.9).

Доказательство существования решения системы (3.8) и корня уравнения (3.9) существенно использует свойства функций f и g в уравнениях (2.1). Эти свойства следуют из аналитичности этих функций и их оценок, приведенных в п. 2. Свойства состоят в следующем. Существуют такие положительные числа Δ, H_1 и K, что при всех t, ξ, ξ', z, z' и h, удовлетворяющих условиям $t \in [0,\pi/2]$, $\max\big(\,\|\xi\|,\|\xi'\|,\|z\|,\|z'\|\,\big) \le \Delta$ и $h \ge H_1$, имеют место соотношения:

$$\|f^\circ(t,h)\| \le Kh^{-1}, \quad \|\dot g^\circ(t,h)\| \le K, \quad \|g^\circ(t,h)\| \le K\,; \tag{3.10}$$

$$\left.\begin{aligned} &\|f(t,\xi,z,h)-f^\circ(t,h)\| \le K\left(\frac{\|\xi\|+\|z\|}{h}+\|\xi\|^2+\|z\|^2\right),\\ &\|g(t,\xi,z,h)-g^\circ(t,h)\| \le K\left(\frac{\|\xi\|+\|z\|}{h}+\|\xi\|^2+\|z\|^2\right)\,; \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

$$\left.\begin{aligned} &\|f(t,\xi,z,h)-f(t,\xi',z',h)\| \le K\zeta\big(\,\|\xi-\xi'\|+\|z-z'\|\,\big),\\ &\|g(t,\xi,z,h)-g(t,\xi',z',h)\| \le K\zeta\big(\,\|\xi-\xi'\|+\|z-z'\|\,\big),\\ &\qquad \zeta = h^{-1}+\|\xi\|+\|\xi'\|+\|z\|+\|z'\|\,; \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} &\left| e_1^{\mathrm T} f(t,\xi,z,h) - \frac{3(1-\lambda)}{2h}(1+\cos 2t)\xi_2\right| \le \\ &\le K\left(\frac{\|\xi\|+\|z\|}{h^2}+\frac{\|\xi\|^2+\|z\|^2}{h}+\|\xi\|^2(\|\xi\|+\|z\|)\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Теорема 2. Для любых $\varepsilon \in (0,1)$ и $A > 0$ существуют такие числа $H = H(\varepsilon, A)$, $C_1 = C_1(\varepsilon, A)$ и $C_2 = C_2(\varepsilon, A)$, что при $h > H$, $h \in I(\varepsilon)$ и $|\,a\,| \le Ah^{-1}$ система (3.8) имеет единственное решение $\xi_*(t,a,h)$, $z_*(t,a,h)$, удовлетворяющее условиям

$$\|\xi_*(t,a,h)\| \le \frac{C_1}{h}, \quad \|z_*(t,a,h)\| \le \frac{C_2}{h} \quad \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right). \tag{3.14}$$

Для этого решения левая часть бифуркационного уравнения (3.9) допускает оценку

$$\left| p(a,h) - \frac{3(1-\lambda)}{2h}\,[\,a+b(h)]\right| \le \frac{C_3}{h^3}\,, \tag{3.15}$$

где $C_3 = C_3(\varepsilon, A)$, $|b(h)| \le C_4 h^{-1}$, причем C_4 не зависит от ε и A.

4. Доказательство теоремы 2. Ниже для сокращения записи в списке аргументов рассматриваемых функций, как правило, не будем указывать a и h. На отрезке $0 \le t \le \pi/2$ построим последовательности функций $\xi_k(t)$, $z_k(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, положив $\xi_0(t) \equiv z_0(t) \equiv 0$ и

$$\xi_{k+1} = L_\xi(\xi_k, z_k)\,, \quad z_{k+1} = L_z(\xi_k, z_k)\,. \tag{4.1}$$

Здесь и далее индекс k в обозначениях ξ_k, z_k указывает номер итерации, определившей векторные функции ξ и z, а не номер векторной компоненты. Докажем, что при достаточно большом $h \in I(\varepsilon)$ и ограниченном $|\,ah\,|$ эти последовательности сходятся к решению системы (3.8). Сначала докажем, что при указанных условиях

$$\nu(\xi_k) \le \frac{C_1}{h} \le \Delta\,, \quad \nu(z_k) \le \frac{C_2}{h} \le \Delta\,, \tag{4.2}$$

где C_1, C_2 — положительные числа.

Поскольку

$$\xi_1(t) = ae_2 + \int\limits_0^{\pi/2} G_0(t,s) f^\circ(s) ds\,, \quad z_1(t) = \int\limits_0^{\pi/2} G(t,s) g^\circ(s) ds\,, \tag{4.3}$$

соотношения (11) при $k \ge 1$ можно представить в виде

$$\xi_{k+1}(t) = \xi_1(t) + \int\limits_0^{\pi/2} G_0(t,s)\{f[s, \xi_k(s), z_k(s)] - f^\circ(s)\} ds\,,$$

$$z_{k+1}(t) = z_1(t) + \int\limits_0^{\pi/2} G(t,s)\{g[s, \xi_k(s), z_k(s)] - g^\circ(s)\} ds\,.$$

Предположим, что $\nu(\xi_k) \le \Delta$, $\nu(z_k) \le \Delta$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда в силу неравенств (3.4), (3.7) и (3.11) будем иметь

$$\nu(\xi_{k+1}) \le \nu(\xi_1) + \frac{\pi K}{2}\left[\frac{\nu(\xi_k) + \nu(z_k)}{h} + \nu^2(\xi_k) + \nu^2(z_k)\right]\,, \tag{4.4}$$

$$\nu(z_{k+1}) \le \nu(z_1) + \frac{\pi K}{2\varepsilon}\left[\frac{\nu(\xi_k) + \nu(z_k)}{h} + \nu^2(\xi_k) + \nu^2(z_k)\right]\,.$$

Применив к выражениям (4.3) неравенства (3.5), (3.7) и (3.10), получим

$$\nu(\xi_1) \le |\,a\,| + \frac{\pi K}{2h}\,, \quad \nu(z_1) \le \frac{K}{h}\left(1 + \frac{\pi}{2\varepsilon}\right)\,.$$

Возьмем произвольное положительное число A и обозначим

$$B_1 = A + \frac{\pi K}{2}, \quad B_2 = K\left(1 + \frac{\pi}{2\varepsilon}\right).$$

Тогда при $h \in I(\varepsilon)$, $h \geq H_2 = \max(H_1, B_1\Delta^{-1}, B_2\Delta^{-1})$ и $|\,a| \leq Ah^{-1}$ имеем

$$\nu(\xi_1) \leq \frac{B_1}{h} \leq \Delta\,, \quad \nu(z_1) \leq \frac{B_2}{h} \leq \Delta\,.$$

Выберем числа C_1, C_2 из условий $C_1 > B_1$, $C_2 > B_2$ и возьмем

$$h \geq H_3 = \max\left[1,\, H_2,\, \frac{C_1}{\Delta},\, \frac{C_2}{\Delta},\, \frac{K_1}{C_1 - B_1},\, \frac{K_1}{\varepsilon(C_2 - B_2)}\right],$$

$$K_1 = \frac{\pi K}{2}(C_1 + C_2 + C_1^2 + C_2^2)\,.$$

Будем считать также, что $|\,a| \leq Ah^{-1}$. Тогда, если для некоторого k неравенства (4.2) выполнены, то в силу (4.4) будем иметь

$$\nu(\xi_{k+1}) \leq \frac{B_1}{h} + \frac{K_1}{h^2} \leq \frac{C_1}{h} \leq \Delta\,, \quad \nu(z_{k+1}) \leq \frac{B_2}{h} + \frac{K_1}{\varepsilon h^2} \leq \frac{C_2}{h} \leq \Delta\,.$$

Поскольку при $k = 1$ неравенства (4.2) выполнены, отсюда следует их справедливость при всех k.

Докажем сходимость последовательных приближений (4.1). Рассмотрим неотрицательные последовательности $b_k = \nu(\xi_k - \xi_{k-1})$, $c_k = \nu(z_k - z_{k-1})$, $d_k = \nu(\xi_k) + \nu(\xi_{k-1}) + \nu(z_k) + \nu(z_{k-1}) + h^{-1}$. При $h \in I(\varepsilon)$, $h \geq H_3$, $|\,a| \leq Ah^{-1}$ в силу неравенств (3.4), (3.7), (3.12) и (3.19) имеем

$$b_{k+1} \leq \frac{\pi K}{2}\, d_k(b_k + c_k)\,, \quad c_{k+1} \leq \frac{\pi K}{2\varepsilon}\, d_k(b_k + c_k)\,, \quad d_k \leq \frac{2C_1 + 2C_2 + 1}{h}\,.$$

Отсюда получаем

$$b_{k+1} + c_{k+1} \leq \frac{D}{h}\,(b_k + c_k)\,, \quad D = \frac{\pi K}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)(2C_1 + 2C_2 + 1)\,.$$

Возьмем $q \in (0, 1)$ и дополнительно потребуем $h \geq H = \max(H_3, Dq^{-1})$. Тогда последовательность $b_k + c_k$ допускает оценку $b_{k+1} + c_{k+1} \leq q(b_k + c_k)$ и, следовательно, сходится к нулю не медленнее, чем геометрическая прогрессия. Используя этот факт, можно доказать, что последовательности $\xi_k(t)$ и $z_k(t)$ сходятся равномерно на множестве

$$\{(t, a, h) :\ 0 \leq t \leq \pi/2, |\,a| \leq Ah^{-1}, h \geq H, h \in I(\varepsilon)\} \tag{4.5}$$

к некоторым непрерывным функциям $\xi_*(t,a,h)$ и $z_*(t,a,h)$, удовлетворяющим неравенствам (ср. (3.14)) $\nu(\xi_*) \le C_1 h^{-1}$, $\nu(z_*) \le C_2 h^{-1}$.

Переходя в соотношениях (4.1) к пределу при $k \to +\infty$, находим, что ξ_*, z_* — искомое решение системы (3.8), причем эти функции непрерывно дифференцируемы по t. Стандартным способом доказывается единственность этого решения на множестве (4.5).

Докажем теперь утверждение теоремы 2 о правой части уравнения (3.9). Левую часть этого уравнения на решении $\xi_*(t,a,h)$ и $z_*(t,a,h)$ обозначим $p_*(a,h)$. Ее можно представить в виде

$$\begin{aligned} p_*(a,h) = \frac{3(1-\lambda)}{\pi h} \int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2t) e_2^{\mathrm{T}} \xi_1(t) dt + \\ + \frac{3(1-\lambda)}{\pi h} \int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2t) e_2^{\mathrm{T}} [\xi_*(t) - \xi_1(t)] dt + \qquad (4.6) \\ + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \left\{ e_1^{\mathrm{T}} f[t, \xi_*(t), z_*(t)] - \frac{3(1-\lambda)}{2h} (1+\cos 2t) e_2^{\mathrm{T}} \xi_*(t) \right\} dt\,. \end{aligned}$$

Здесь функция $\xi_1(t)$ определена первой формулой (4.3). Первый член в правой части выписанного выражения для $p_*(a,h)$ можно записать как

$$\frac{3(1-\lambda)}{2h}\,[\,a + b(h)]\,, \quad \text{где} \quad b(h) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)[e_2^{\mathrm{T}} \xi_1(t) - a] dt\,.$$

Из первой формулы (4.3) с учетом неравенства (3.7) и первого неравенства (3.10) можно получить оценки

$$\nu\big(e_2^{\mathrm{T}} \xi_1 - a\big) \le \nu(\xi_1 - a e_2) \le \frac{\pi K}{2h}\,.$$

Отсюда $|\,b(h)| \le \pi K/h$.

Из доказательства существования решения ξ_*, z_* следуют соотношения

$$\xi_*(t) - \xi_1(t) = \int\limits_0^{\pi/2} G_0(t,s)\{f[s, \xi_*(s), z_*(s)] - f^{\circ}(s)\} ds\,, \quad \nu(\xi_* - \xi_1) \le \frac{K_1}{h^2}\,.$$

В силу последнего из них модуль второго члена в правой части формулы (4.6) не превосходит $\mathrm{const} \cdot h^{-3}$. В силу неравенств (3.13), (3.14) такая же оценка справедлива и для модуля последнего члена этой формулы. Комбинируя полученные соотношения и оценки, получаем доказательство неравенства (3.15). В частности, можно принять $C_4 = \pi K$. Эта постоянная не зависит от ε и A.

5. Исследование бифуркационного уравнения. Чтобы установить существование решения краевой задачи (2.1), (2.2), необходимо решить уравнение (3.9). Согласно теореме 2 левая часть этого уравнения определена на множестве $\{(a,h) : |a| \le Ah^{-1}, h \ge H, h \in I(\varepsilon)\}$ и является на нем непрерывной функцией. Используя одно лишь свойство непрерывности, можно доказать только существование корня уравнения (3.9). Доказательство единственности потребует дополнительных усилий. В этом пункте докажем существование. Не ограничивая общности, полагаем $\lambda < 1$. Случай $\lambda > 1$ рассматривается аналогично.

Поскольку число A в теореме 2 можно выбирать произвольно, возьмем $A = 3C_4$. Рассмотрим выражения $a_1(h) = -2C_4h^{-1}$, $a_2(h) = 2C_4h^{-1}$. Согласно (3.15) и оценке функции $b(h)$ имеем

$$p_*[\,a_1(h),h\,] \le \frac{3(1-\lambda)}{2h}\,[\,a_1(h)+b(h)] + \frac{C_3}{h^3} \le -\frac{3(1-\lambda)C_4}{2h^2} + \frac{C_3}{h^3}\,,$$

$$p_*[\,a_2(h),h\,] \ge \frac{3(1-\lambda)}{2h}\,[\,a_2(h)+b(h)] - \frac{C_3}{h^3} \ge \frac{3(1-\lambda)C_4}{2h^2} - \frac{C_3}{h^3}\,.$$

При

$$h > H_4 = \max\left[H, \frac{2C_3}{3(1-\lambda)C_4}\right]$$

справедливы неравенства $p_*[\,a_1(h),h\,] < 0$, $p_*[\,a_2(h),h\,] > 0$. Следовательно, по известной теореме из анализа уравнение (3.9), рассматриваемое как уравнение относительно a, на отрезке $a_1(h) \le a \le a_2(h)$ имеет по крайней мере один корень. Один из таких корней обозначим $a_*(h)$. Функция $a_*(h)$ определена на множестве $\{h :\ h > H_4,\ h \in I(\varepsilon)\}$ и оценивается неравенством $|\,a_*(h)| < 2C_4h^{-1}$. Однако ее свойства непрерывности неизвестны. Решение краевой задачи (2.1), (2.2) $\xi_*[\,t, a_*(h), h]$, $z_*[\,t, a_*(h), h]$ является тем решением, о котором говорится в теореме 1, но его единственность не установлена.

6. Дополнение доказательства теоремы 2. Чтобы доказать единственность найденного решения задачи (2.1), (2.2), вернемся к доказательству теоремы 2. В дополнение к обозначениям п.4 введем обозначения $\Delta_a = |\,a' - a|$, $\xi'_* = \xi_*(t, a', h)$, $\xi'_k = \xi_k(t, a', h)$ и т. п. Докажем, что найденное в п. 5 решение системы (3.8) при достаточно большом $h \in I(\varepsilon)$ и $|\,a| \le Ah^{-1}$, $|\,a'| \le Ah^{-1}$ удовлетворяет неравенствам

$$\nu(\xi'_* - \xi_*) \le \left(1 + \frac{D_1}{h}\right)\Delta_a\,, \quad \nu(z'_* - z_*) \le \frac{D_2}{h}\,\Delta_a\,, \tag{6.1}$$

где $D_1 = D_1(\varepsilon, A)$, $D_2 = D_2(\varepsilon, A)$. Рассмотрим последовательные приближения (4.1). С учетом соотношений (4.3) имеем

$$\xi'_{k+1}(t)-\xi_{k+1}(t) = (a'-a)e_2+\int\limits_0^{\pi/2} G_0(t,s)\{f[s,\xi'_k(s),z'_k(s)]-f[s,\xi_k(s),z_k(s)]\}ds\,,$$

$$z'_{k+1}(t) - z_{k+1}(t) = \int\limits_0^{\pi/2} G(t,s)\{g[s,\xi'_k(s),z'_k(s)] - g[s,\xi_k(s),z_k(s)]\}ds\,.$$

Отсюда в силу неравенств (3.4), (3.7) и (3.12) имеем

$$\nu(\xi'_{k+1} - \xi_{k+1}) \le \Delta_a + \frac{\pi K}{2}\rho_k[\nu(\xi'_k - \xi_k) + \nu(z'_k - z_k)]\,,$$

$$\nu(z'_{k+1} - z_{k+1}) \le \frac{\pi K}{2\varepsilon}\rho_k[\nu(\xi'_k - \xi_k) + \nu(z'_k - z_k)]\,,$$
$$\rho_k = \nu(\xi'_k) + \nu(\xi_k) + \nu(z'_k) + \nu(z_k) + h^{-1}\,.$$

Учитывая неравенства (3.14), получаем

$$\nu(\xi'_{k+1} - \xi_{k+1}) \le \Delta_a + \frac{K_2}{h}[\nu(\xi'_k - \xi_k) + \nu(z'_k - z_k)]\,,$$

$$\nu(z'_{k+1} - z_{k+1}) \le \frac{K_2}{\varepsilon h}[\nu(\xi'_k - \xi_k) + \nu(z'_k - z_k)]\,, \tag{6.2}$$

$$K_2 = \frac{\pi K}{2}(2C_1 + 2C_2 + 1)\,.$$

Положим $D_1 > K_2$, $D_2 > K_2/\varepsilon$. Докажем, что при $h \in I(\varepsilon)$,

$$h \ge H_5 = \max\left[H_3, \frac{K_2(D_1 + D_2)}{D_1 - K_2}, \frac{K_2(D_1 + D_2)}{\varepsilon D_2 - K_2}\right]$$

имеют место неравенства

$$\nu(\xi'_k - \xi_k) \le \left(1 + \frac{D_1}{h}\right)\Delta_a\,, \quad \nu(z'_k - z_k) \le \frac{D_2}{h}\,\Delta_a \quad (k = 1, 2, \ldots)\,. \tag{6.3}$$

Воспользуемся методом математической индукции. При $k = 1$ последние неравенства выполнены. Пусть они выполнены для некоторого k. Тогда из (6.2) следует

$$\nu(\xi'_{k+1} - \xi_{k+1}) \le \left[1 + \frac{K_2}{h} + \frac{K_2(D_1 + D_2)}{h^2}\right]\Delta_a \le \left(1 + \frac{D_1}{h}\right)\Delta_a\,,$$

$$\nu(z'_{k+1} - z_{k+1}) \le \left[\frac{K_2}{\varepsilon h} + \frac{K_2(D_1 + D_2)}{\varepsilon h^2}\right] \Delta_a \le \frac{D_2}{h}\, \Delta_a\,.$$

Неравенства (6.3) доказаны. Переходя в этих неравенствах к пределу при $k \to +\infty$, получаем неравенства (6.1). Несколько изменив проделанные рассуждения, можно получить оценку (напомним, $h > 1$)

$$\nu[\xi'_* - \xi_* - (a' - a)e_2] \le \frac{K_2}{h}\left(1 + \frac{D_1 + D_2}{h}\right) \le \tag{6.4}$$

$$\le \frac{K_2(D_1 + D_2 + 1)}{h}\, \Delta_a\,.$$

7. Доказательство единственности. Теперь уточним зависимость функции $p_*(a, h)$ от a. Учитывая гладкость функции $f(t, \xi, z, h)$ и соотношение (3.13), можно считать, что

$$\left| e_1^{\mathrm{T}} f(t, \xi, z, h) - e_1^{\mathrm{T}} f(t, \xi', z', h) - \frac{3(1-\lambda)}{2h}(1 + \cos 2t) e_2^{\mathrm{T}}(\xi - \xi') \right| \le \tag{7.1}$$

$$\le K\eta\big(\, \|\xi - \xi'\| + \|z - z'\|\, \big),$$

$$\eta = \frac{1}{h^2} + \frac{\|\xi\| + \|\xi'\| + \|z\| + \|z'\|}{h} + \|\xi\|^2 + \|\xi'\|^2 + \|z\|^2 + \|z'\|^2\,.$$

Вернемся к формуле (4.6). Запишем ее в виде

$$p_*(a, h) = \frac{3(1-\lambda)}{2h}\,[\, a + b(h)] + \Phi_1(a, h) + \Phi_2(a, h)\,.$$

Здесь $\Phi_1(a, h)$ и $\Phi_2(a, h)$ — обозначения второго и третьего интегральных членов в правой части (4.6). В конце п.4 была получена оценка $|\Phi_1(a, h)| + |\Phi_2(a, h)| \le C_3 h^{-3}$.

Докажем, что функции $\Phi_1(a, h)$ и $\Phi_2(a, h)$ удовлетворяют условию Липшица. Оценим величины $|\Phi_1(a', h) - \Phi_1(a, h)|$ и $|\Phi_2(a', h) - \Phi_2(a, h)|$. Поскольку $(\xi'_* - \xi'_1) - (\xi_* - \xi_1) = \xi'_* - \xi_* - (a' - a)e_2$, с помощью (6.4) найдем

$$|\Phi_1(a', h) - \Phi_1(a, h)| \le \frac{3K_2(1-\lambda)(D_1 + D_2 + 1)}{h^2}\, \Delta_a\,.$$

С помощью (7.1) получим

$$|\Phi_2(a', h) - \Phi_2(a, h)| \le \frac{2K(D_1^2 + D_2^2 + D_1 + D_2 + 1/2)(D_1 + D_2 + 1)}{h^2}\, \Delta_a\,.$$

Следовательно, существует постоянная $C_5 = C_5(\varepsilon, A)$, такая, что

$$|\Phi_1(a', h) + \Phi_2(a', h) - \Phi_1(a, h) - \Phi_2(a, h)| \leq \frac{C_5}{h^2}\,\Delta_a\,.$$

Уравнение (3.9) преобразуем к виду (полагаем $\lambda \neq 1$)

$$a = -b(h) - \frac{2h}{3(1-\lambda)}[\Phi_1(a, h) + \Phi_2(a, h)] \equiv \Phi(a, h)\,. \tag{7.2}$$

Функция $\Phi(a, h)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\Phi(a', h) - \Phi(a, h)| \leq L\Delta_a\,, \quad L = \frac{2C_5}{3h|1-\lambda|}\,,$$

причем $L \to 0$ при $h \to +\infty$. Уравнение (7.2) будем решать методом простой итерации:

$$a_0 = -b(h)\,, \quad a_{k+1} = \Phi(a_k, h) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

При $A = 3C_4$ и достаточно большом $h \in I(\varepsilon)$ эти итерации принадлежат отрезку $|\,a| \leq Ah^{-1}$ и сходятся к корню $a_*(h)$. Этот корень — единственный. Можно доказать, что $a_*(h)$ — непрерывная функция h. Следовательно, решение, о котором говорится в теореме 1, также непрерывная функция h.

Единственность корня бифуркационного уравнения (3.9) еще не означает единственности решения краевой задачи (2.1), (2.2), удовлетворяющего неравенствам (2.3). Возможно, такие решения могут быть найдены другим методом. Докажем, что использованный метод дает все решения. Пусть $\hat{\xi}(t, h)$, $\hat{z}(t, h)$ — решение задачи (2.1), (2.2), удовлетворяющее неравенствам (2.3). Поскольку краевая задача (3.1) при $F(t) = f[t, \hat{\xi}(t, h), \hat{z}(t, h)]$ имеет решение $\xi = \hat{\xi}(t, h)$, выполнено равенство

$$\int_0^{\pi/2} e_1^{\mathrm{T}} f[t, \hat{\xi}(t, h), \hat{z}(t, h)]dt = 0\,. \tag{7.3}$$

Введем функцию

$$\hat{a}(h) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} e_2^{\mathrm{T}}\hat{\xi}(t, h)dt\,.$$

В силу первого неравенства (2.3) $|\,\hat{a}(h)| \leq C_1 h^{-1}$. Возьмем числа $\varepsilon \in (0, 1)$, $A > C_1$ и рассмотрим систему (3.8) на множестве $\{(a, h) :\ h \in I(\varepsilon), |\,a| \leq Ah^{-1}\}$. При достаточно большом h и $a = \hat{a}(h)$ она имеет два решения: $\hat{\xi}(t, h)$, $\hat{z}(t, h)$ и $\xi_*[t, \hat{a}(h), h]$ и $z_*[t, \hat{a}(h), h]$. В силу единственности решения системы (3.8) эти решения совпадают, и согласно (7.3) $p_*[\hat{a}(h), h] \equiv 0$. Теорема 1 доказана.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00423).

Литература

[1] Сазонов В.В. Периодические движения спутника-гиростата относительно центра масс под действием гравитационного момента // Космические исследования. 2013. Т. 51. № 2. С. 145-158.

[2] Holder E. Mathematische Untersuchungen zur Himmelsmechanik // Mathematische Zeitschrift. 1929. B.31. S.197-257.

[3] Lewis D.C. On the Role of First Integrals in the Perturbation of Periodic Solutions // Annals of Mathematics. 1956. Vol. 63. P. 535-548.

[4] Hale J.K. Ordinary Differential Equations. New-York: Wiley-Interscience, 1969.

[5] Воронин А.А., Сазонов В.В. Периодические движения гироскопических систем // Прикладная математика и механика. 1988, Т. 52. № 5. С. 719-729.

[6] Воронин А.А., Сазонов В.В. Периодические колебания спутника гиростата с большим собственным кинетическим моментом // Изветия АН СССР. Механика твердого тела. 1989. № 1. С. 3-12.

[7] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.

[8] Reid W.T. Generalized Green's matrices for compatible system of differential equations // American Journal of Mathematics. 1931. V. 53. No.2. P. 443-459.