



Галанин М.П., Крылов М.К.,
Лотоцкий А.П., Родин А.С.

Исследование
применимости различных
математических и
численных моделей для
описания ускорения и
торможения лайнера в
магнитном компрессоре

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Исследование применимости различных математических и численных моделей для описания ускорения и торможения лайнера в магнитном компрессоре / М.П.Галанин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 108. 28 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-108>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

М.П.Галанин, М.К.Крылов,
А.П.Лотоцкий, А.С.Родин

**Исследование применимости различных
математических и численных моделей
для описания ускорения и торможения
лайнера в магнитном компрессоре**

Москва — 2014

Галанин М.П., Крылов М.К., Лотоцкий А.П., Родин А.С.

Исследование применимости различных математических и численных моделей для описания ускорения и торможения лайнера в магнитном компрессоре

Предложен метод численного моделирования движения плоского лайнера в магнитном компрессоре, основанный на комбинации поперечной и продольной двумерных моделей. Метод позволяет моделировать взаимодействие ленты лайнера с твердой опорой при кинематических характеристиках лайнера, близких к экспериментальным. Для обоснования выбора математической модели упругопластического тела, подходящей для решения подобных задач, рассмотрено три различных модели. Проведена серия расчетов, выполнен анализ полученных результатов и применимости каждой модели. Проведено численное исследование точности вычисления поля напряжений в лайнере в зависимости от типа использованных конечных элементов.

Ключевые слова: лайнер, упругопластическое тело, большие деформации, контактная задача

Mikhail Pavlovich Galanin, Mikhail Konstantinovich Krylov, Alexey Pavlovich Lotockiy, Aleksandr Sergeevich Rodin

Investigation of acceptability of different mathematical and numerical models for description of liner acceleration and braking in magnetic compressor

The method of numerical simulation of flat liner movement is proposed. This method makes it possible to model the interaction between liner strip and solid support at kinematic characteristics corresponding to experimental characteristics. Three different models are considered to justify the choice of elasto-plastic model which is adequate for solution of problems of this sort. A number of calculations are carried out, the analysis of obtained results and the acceptability of each model is made. The numerical research of dependence of stress calculation accuracy from finite element type is performed.

Key words: liner, elasto-plastic body, large deformation, contact problem

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00109, № 14-01-31496).

1. Постановка задачи

В предыдущих работах авторов [1-7] достаточно подробно рассмотрены математические и численные модели, применяемые для описания функционирования магнитного компрессора (МК), в котором магнитное поле сжимается плоским алюминиевым лайнером, ускоренным электродинамическими силами до скорости 0.8 км/с.

Движение ленты лайнера в указанных работах исследуется в различных двумерных приближениях: поперечная модель соответствует поперечному сечению МК (плоскостью $z=\text{const}$), а продольная модель – продольному сечению МК (плоскостью $y=\text{const}$).

В настоящее время поставлена задача экспериментального и численного исследования поведения материала лайнера при его соударении с наклонной призмой при скорости до 1.3 км/с. Для проведения экспериментов в ГНЦ РФ ТРИНИТИ создается установка, в состав которой входит виток ускорителя и алюминиевый плоский лайнер. На рис. 1 приведены характерные схемы продольного и поперечного сечения устройства (красным цветом выделена лента лайнера). В системе будет использован емкостный источник питания, соединенный последовательно с одним плечом витка ускорителя и лайнером в одну электрическую цепь. В отличие от рассмотренного ранее варианта МК [6-7] данная конструкция не предполагает сжатия магнитного потока и вывода энергии магнитного поля во внешнюю цепь.

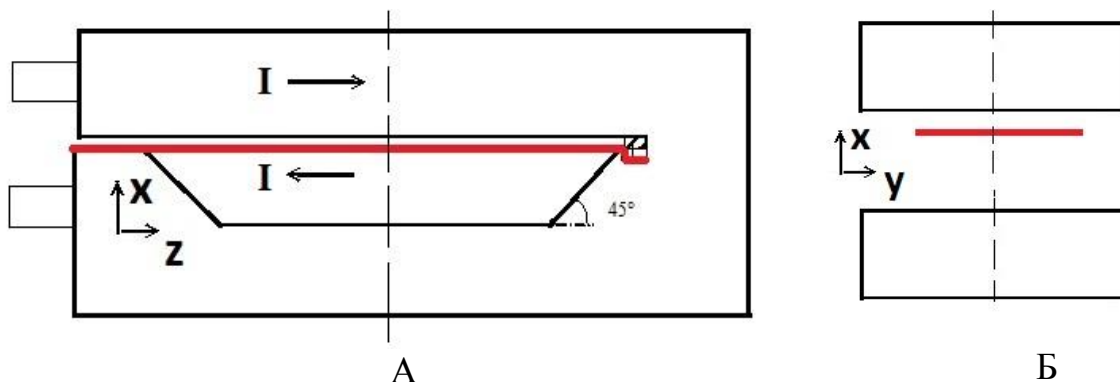


Рис. 1. А – продольное сечение устройства (указаны направления текущих токов), Б – поперечное сечение устройства

В данной работе применены разработанные ранее математические модели электромагнитных процессов и движения лайнера. Необходимые изменения в схемах расчета и алгоритмах вычислений будут определены в дальнейшем при сравнении с экспериментальными данными.

Каждая из используемых двумерных моделей обладает своими достоинствами и недостатками. В частности, поперечная модель позволяет достаточно точно рассчитать основную конфигурацию магнитного поля ускорителя, но в силу заложенных предположений данная модель не позволяет

описать взаимодействие ленты лайнера с наклонной призмой, расположенной в торцевых частях МК. Продольная модель позволяет описать удар лайнера о призму, но получающиеся в расчете магнитные поля значительно отличаются от наблюдаемых в эксперименте.

Поскольку проведение трехмерных расчетов является достаточно сложной и трудоемкой задачей, то на данном этапе исследований целесообразно использовать комбинацию двумерных моделей, позволяющую рассчитать удар ленты лайнера с кинематическими характеристиками, близкими к экспериментальным.

В качестве одного из вариантов такой комбинации можно предложить следующий метод: поскольку в поперечной модели удастся с удовлетворительной точностью рассчитать конфигурацию магнитного поля и распределение плотности тока в ленте, то по итогам соответствующего расчета можно получить временную зависимость интегральной силы Лоренца, действующей на лайнер. После этого, используя данную зависимость и предполагая, что объемная сила распределена по ленте равномерно, можно ограничиться одной кинематической частью продольной модели (не учитывая электромагнитную часть, поскольку сила уже определена) для нахождения положения лайнера.

Ниже будут приведены результаты расчетов, демонстрирующие жизнеспособность предложенного метода.

Поскольку на втором этапе моделирования выполняется расчет только движения лайнера под действием заданной силы, то данная работа будет в основном посвящена исследованию применимости различных математических и численных моделей механики деформируемого твердого тела для описания движения ленты с учетом ее взаимодействия с твердой преградой.

В качестве расчетной области берется половина продольного сечения (рис. 1.А), т.е. моделируется движение половины ленты лайнера и ее столкновение с одной опорой, которая считается абсолютно твердым телом.

2. Математические модели движения упругопластического тела

В предыдущих работах [1-7] уже исследовались различные модели механики деформируемого твердого тела для описания движения ленты лайнера. После сравнения экспериментальных данных и результатов расчетов, в которых применялись модели жидкого, упругого или упругопластического лайнера, сделан вывод [5], что модель упругопластического тела позволяет получить наиболее адекватную картину деформирования ленты в процессе движения. Поскольку из эксперимента известно, что в лайнере возникают большие деформации, то использовалась соответствующая модель, позволяющая описать произвольные деформации.

В то же время непосредственное сравнение различных моделей упругопластического тела позволит обоснованность применимость более сложной и соответственно более затратной по времени модели для решения подобных задач. В рамках данной работы рассмотрены 3 различных механических модели, для каждой из которых ниже будут приведены результаты расчетов. Более подробно использованные модели описаны в [1, 8].

Для представления моделей, следуя [8], рассмотрим двумерное евклидово пространство, в котором введена прямоугольная декартова система с базисными векторами $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$. Наряду с декартовой системой координат рассмотрим систему координат Θ_i , являющуюся системой отсчета для описания движения некоторого тела A (в данном случае лайнера). В общем случае система отсчета может быть криволинейной, но в данной работе она является декартовой системой координат (Θ_i всегда совпадает с $\mathbf{k}_i$).

Согласно терминологии, принятой в [8], область 0G , ограниченную замкнутой границей ${}^0\Gamma$, которую занимает тело в начальный момент времени $t=0$, назовем начальной конфигурацией, а области t_0G , tG , ограниченные замкнутыми поверхностями ${}^t_0\Gamma$, ${}^t\Gamma$ в некоторый отсчетный и текущий моменты времени t_0 , t , - отсчетной и текущей конфигурациями соответственно (рис. 2 [8]).

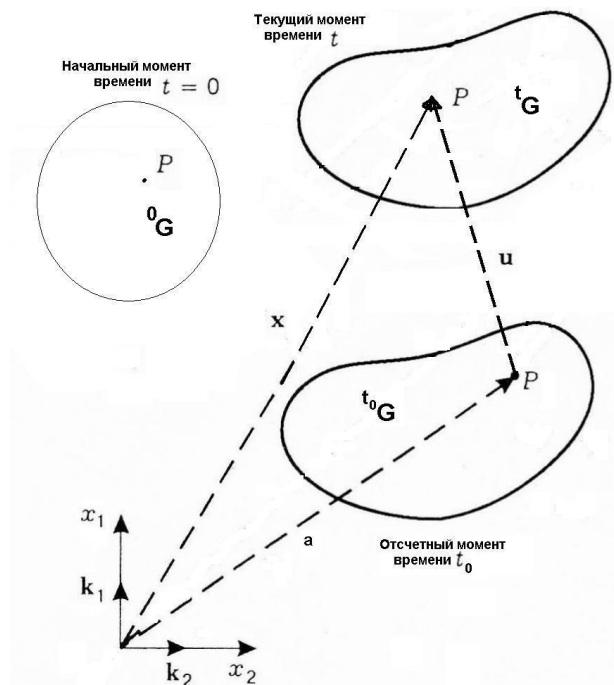


Рис. 2. Начальная и деформированные конфигурации тела

Рассмотрим некоторую материальную точку P , вектор положения (радиус-вектор) которой в отсчетный момент времени представляется в виде

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{k}_i,$$

а в текущем состоянии в момент времени t вектор положения этой же материальной точки P записывается в виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x_i \mathbf{k}_i, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{a} + \mathbf{u},\end{aligned}$$

где $\mathbf{u}$ - вектор перемещений (с компонентами u_i).

Кроме неподвижной системы отсчета определим также подвижную систему координат $\hat{\Theta}_i$, которая «вморожена» в движущееся тело (в отсчетный момент времени $\hat{\Theta}_i$ совпадает с Θ_i). Система координат Θ_i называется эйлеровой (x_i - эйлеровы переменные), а система координат $\hat{\Theta}_i$ - лагранжевой (a_i - лагранжевы переменные).

В данной работе используются 2 варианта лагранжева подхода для описания движения твердого тела [8]:

1. общий лагранжев или TL (total Lagrangian) подход соответствует использованию начальной конфигурации в качестве отсчетной: $t_0 = 0$;
2. текущий лагранжев или UL (updated Lagrangian) подход соответствует использованию текущей конфигурации в качестве отсчетной: $t_0 = t$.

Так как в каждый фиксированный момент времени для UL подхода предполагается $\hat{\Theta}_i = \Theta_i$, разница между текущим лагранжевым и эйлеровыми подходами проявляется в использовании разных определений скорости рассматриваемых величин (см. [8]). Непрерывное изменение отсчетной конфигурации для UL-подхода используется только в теоретических исследованиях. На практике отсчетная конфигурация пересчитывается только для дискретных значений времени.

2.1. Модель упругопластического тела для малых деформаций

Рассмотрим сначала классическую модель упругопластического тела для случая малых деформаций [8, 9] (малыми считаются деформации, не превышающие уровень 4-5 %). Для данной модели используется TL-подход. Уравнение движения имеет следующий вид:

$${}^0\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla_a \cdot \boldsymbol{\sigma} + {}^0\rho / \rho \mathbf{f}. \quad (2.1)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ - тензор истинных напряжений Коши, $\nabla_a = \frac{\partial}{\partial a_j} \mathbf{k}_j$ - оператор дифференцирования по лагранжевым координатам (TL), $\mathbf{u} = (u_x, u_z)$ - вектор перемещений, $\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ - вектор ускорения, ${}^0\rho$ - начальная плотность вещества,

ρ - текущая плотность вещества, $\mathbf{f}$ - вектор объемных сил, действующих на тело. Объемная сила в уравнении (2.1) отнесена к текущей конфигурации, поскольку в исходной постановке в качестве объемной силы выступает сила Лоренца, которая действует именно в текущей конфигурации.

Поставим следующие граничные условия (на участке границы Γ_u заданы кинематические граничные условия, на Γ_T заданы поверхностные силы):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_T} &= \mathbf{f}^*, \\ \mathbf{u}|_{\Gamma_u} &= \mathbf{u}^*.\end{aligned}\quad (2.2)$$

В данной задаче на всей границе лайнера поставлены условия свободной границы ($\mathbf{f}^* = 0$), но так как рассматривается половина области, то на линии симметрии (правая граница расчетной области) выбрано условие $u_z = 0$. На поверхности контакта лайнера и призмы поставлено условие прилипания (по обоим компонентам).

В качестве тензора деформации применяется линейный тензор деформации, компоненты которого заданы равенствами:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right). \quad (2.3)$$

Используем далее теорию пластического течения, которая основана на следующих предположениях [8, 9, 12]:

- производную по времени тензора деформаций $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ можно представить в виде суммы упругой $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ и пластической $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ составляющих:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p; \quad (2.4)$$

- материал предполагается пластически несжимаемым: $\dot{\varepsilon}_{ii}^p = 0$;

- определяющее соотношение (закон Гука) имеет вид:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^E : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \mathbf{C}^E : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p). \quad (2.5)$$

- производная тензора пластических деформаций $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ определяется по ассоциативному закону пластического течения:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f_y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda \boldsymbol{\sigma}'. \quad (2.6)$$

Здесь $\mathbf{C}^E$ - тензор коэффициентов упругости, $\boldsymbol{\sigma}'$ - девиатор тензора напряжений ($\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$), параметр λ имеет смысл множителя Лагранжа, f_y - функция текучести Мизеса [8], δ_{ij} - символ Кронекера, «:» - операция двойной свертки.

Для изотропного материала компоненты тензора коэффициентов упругости задаются формулами [9]:

$$C_{ijkl}^E = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

где E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона.

Для материала с изотропным упрочнением в качестве функции текучести можно выбрать следующую функцию

$$f_y(\boldsymbol{\sigma}', \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = 3J_2(\boldsymbol{\sigma}') - \sigma_y^2(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p), \quad (2.7)$$

где $J_2(\boldsymbol{\sigma}') = \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}$ - второй инвариант девиатора тензора напряжений, σ_y - предел текучести материала, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ - эффективная пластическая деформация, которая вычисляется по формуле

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} dt. \quad (2.8)$$

В [8] отмечается, что даже в задачах, в которых деформации в теле остаются малыми, но части тела подвергаются значительным перемещениям и поворотам, рассматриваемая модель может приводить к нефизическим результатам. Это связано с тем, что тензоры $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ не являются объективными, т.е. они изменяются при переходе от рассматриваемой системы координат к новым системам координат при преобразованиях, соответствующих идеально жесткому движению тела.

2.2. Модель упругопластического тела с использованием тензора деформации Грина

В данной модели также используется TL-подход, но вместо тензора линейной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ применяется тензор конечной деформации Грина $\mathbf{E}$, а вместо тензора истинных напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ применяется второй тензор условных напряжений Пиолы-Кирхгоффа $\mathbf{S}$, компоненты которых заданы равенствами [8]:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right),$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} \frac{\partial x_i}{\partial a_k} S_{kl} \frac{\partial x_j}{\partial a_l}, \quad (2.9)$$

где $J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right|$ - якобиан соответствующего преобразования координат.

Отметим, что тензоры $\mathbf{E}$ и $\mathbf{S}$ являются объективными.

Уравнение движения принимает следующий вид [8]:

$${}^0\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla_a \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla_a \mathbf{u}) + {}^0\rho / \rho \mathbf{f}, \quad (2.10)$$

с граничными условиями

$$(\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla_a \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_T} = \mathbf{f}^*,$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{u}^*. \quad (2.11)$$

Формальное обобщение (самый простой и напрашивающийся шаг) соотношений теории пластического течения (2.4)-(2.7) на случай больших деформаций получается заменой материальных производных $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ объективными производными некоторых тензоров деформации и напряжений. В частности, в качестве таких производных можно взять $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{S}}$ (тензоры $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ заменяются на $\mathbf{E}$ и $\mathbf{S}$).

В [8] исследована область применимости подобных соотношений. Поскольку, исходя из физических соображений, критерий появления пластических деформаций должен выполняться в пространстве компонент тензора истинных напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, а не условных напряжений $\mathbf{S}$, то построенная модель является адекватной для задач, в которых возникают большие перемещения и повороты тел, но образуются только малые пластические деформации.

Согласно принятой классификации [8], описанная модель относится к моделям на основе соотношений гиперупругости (к гиперупругим материалам относятся материалы, для которых удельная внутренняя энергия представляет собой аналитическую функцию составляющих тензора деформации Грина [13]).

2.3. Модель упругопластического тела с использованием производной Трусделла тензора напряжений

В настоящее время для описания больших деформаций активно применяются модели, основанные на следующем варианте закона Гука для упругого тела:

$$\boldsymbol{\sigma}^\nabla = \mathbf{C}^E : \mathbf{d}, \quad (2.12)$$

в котором в качестве производной тензора напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}^\nabla$ фигурирует производная Яуманна, Трусделла, Хилла или одна из других конвективных производных [8].

Здесь $\mathbf{d}$ - тензор скорости деформации, компоненты которого задаются равенствами

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.12)$$

Обычно для моделей подобного рода используют текущие лагранжевы координаты. Уравнение движения лайнера в момент времени t имеет следующий вид [8]:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla_{\tilde{\mathbf{a}}} \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{a}}} \mathbf{u}) + \mathbf{f}, \quad (2.13)$$

где $\nabla_{\tilde{\mathbf{a}}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{a}_j} \mathbf{k}_j$ - оператор дифференцирования по текущим лагранжевым координатам (UL). Граничные условия записываются аналогично (2.11).

В данной работе в качестве производной в определяющем соотношении будем использовать производную Трусделла $\boldsymbol{\sigma}^{Tr}$ [8]:

$$\boldsymbol{\sigma}^{Tr} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{l}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l} + \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr}(\mathbf{d}), \quad (2.14)$$

где $\mathbf{l}$ - тензор градиента скоростей ($l_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$), $\mathbf{l}^T$ - транспонированный тензор, $\operatorname{tr}(\mathbf{d}) = d_{kk}$.

Тогда основные соотношения теории пластического течения для случая больших деформаций формулируются следующим образом [8]:

- тензор скорости деформации $\mathbf{d}$ можно представить в виде суммы упругой $\mathbf{d}^e$ и пластической $\mathbf{d}^p$ составляющих:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p; \quad (2.15)$$

- определяющее соотношение задано формулой:

$$\boldsymbol{\sigma}^{Tr} = \mathbf{C}^E : \mathbf{d}^e = \mathbf{C}^E : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p); \quad (2.16)$$

- пластическая составляющая тензора скорости деформации определяется по ассоциативному закону пластического течения:

$$\mathbf{d}^p = \lambda \frac{\partial f_y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda \boldsymbol{\sigma}', \quad (2.17)$$

Согласно принятой классификации [8], описанная модель относится к моделям на основе соотношений гипотупругости (к гипотупругим материалам относятся материалы, для которых изменение напряжений зависит только от бесконечно малых вращения и деформации, но не зависит от скорости, с которой совершаются данные вращения и деформация [13]).

Отметим, что для UL-подхода выполнены равенства [8]

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{d}, \quad \dot{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\sigma}^{Tr},$$

которые позволяют вычислять соответствующие величины не переходя к эйлеровым координатам.

3. Результаты численного моделирования

Для численной реализации приведенных выше математических моделей движения упругопластического тела использован метод конечных элементов (МКЭ) [8, 10, 11]. Достаточно подробно численная модель описана в предыдущих работах авторов [1-4], поэтому здесь ограничимся кратким обзором основных особенностей алгоритма. Для разрешения нелинейности, связанной с наличием пластических деформаций, применен метод дополнительных деформаций [12]; для учета геометрической нелинейности в касательную матрицу системы включены дополнительные слагаемые, соответствующие квадратичным членам в тензоре деформации Грина [8, 11]; для вычисления значений приращений пластической деформации и тензора напряжений Коши использован алгоритм вычисления функции эффективного напряжения [8, 11].

Ниже приведены результаты нескольких расчетов со следующими размерами ленты лайнера: толщина - 1 мм, ширина - 20 мм, длина - 280 мм. Т.к. расчетная область имеет плоскость симметрии (с некоторыми допущениями), то моделирование проводилось для половины ленты. Для расчета контактного взаимодействия ленты с опорой поставлено условие прилипания лайнера к призме.

Для моделирования пластических свойств алюминия использована модель идеального упругопластического тела с пределом текучести $\sigma_y = 60$ МПа. На рис. 3 приведена характерная кривая деформирования для алюминия. Подобные кривые обычно строятся для случая одноосного растяжения (сжатия) образца материала и представляют собой зависимость напряжения σ от

деформации ε . Для случая больших деформаций по оси абсцисс откладывается значение не самой деформации ε , а логарифмической деформации $\ln(1 + \varepsilon)$ [11]. Для сложного нагружения делается предположение об отождествлении одноосной кривой деформирования и зависимости интенсивности напряжений от эффективной деформации [8, 11]. Поскольку в рассматриваемой задаче основные эффекты проявляются при значительных деформациях, то из вида кривой следует, что подобное приближение является вполне обоснованным. В расчетах применялись следующие характеристики алюминия: плотность $\rho = 2540 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга $E = 70.5 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.31$.

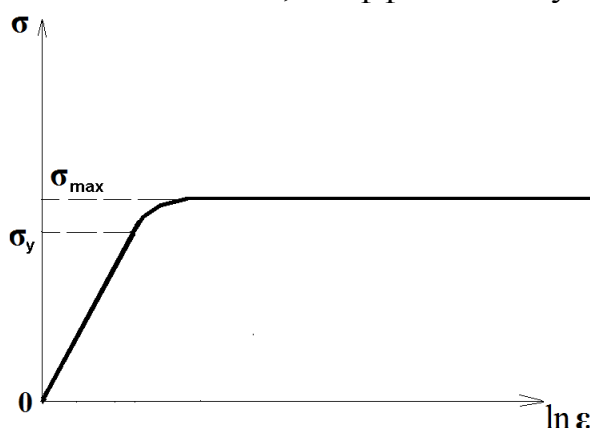


Рис. 3. Характерный вид кривой деформирования алюминия

В дальнейшем для краткости приведенные выше математические модели упругопластического тела будут обозначаться номерами: модель 1 (описана в параграфе 2.1), модель 2 (описана в параграфе 2.2) и модель 3 (описана в параграфе 2.3).

Каждая серия расчетов состояла из двух этапов. На первом этапе выполнялся расчет для поперечного сечения. В результате определились интегральные характеристики движения лайнера в зависимости от времени: скорость центра масс, интегральная сила Лоренца и т.д. На этом этапе решалась и электромагнитная и механическая задачи (более подробно задача описана в [1-7]), причем для расчета движения лайнера всегда использовалась модель 3. Все расчеты проводились на треугольной сетке с конечными элементами (КЭ) первого порядка.

Затем на втором этапе решалась только механическая задача расчета движения лайнера в продольном сечении под действием заданных объемных сил (равномерно распределенных по ленте и соответствующих интегральной силе Лоренца, полученной на первом этапе). Для данной задачи проводились расчеты с применением различных математических моделей и различных сеток. Если не оговорено особо, то в расчетах использовалась базовая сетка из КЭ второго порядка на четырехугольниках. Сетка состояла из 2560 элементов и 8969 узлов. Все расчеты проводились с шагом по времени 0.1 мкс.

3.1. Расчеты с максимальной скоростью лайнера 0.7 км/с

В первой серии расчетов моделировался эксперимент, в котором конденсатор заряжен до напряжения 10 кВ, ток в системе достигал 0.4 МА.

На рис.4.А показан график зависимости от времени плотности объемной силы, действующей на лайнер в продольном сечении. На рис. 4.Б показаны графики временной зависимости центра масс лайнера для расчетов в поперечном сечении (без маркера) и в продольном сечении с моделью 3 (скорость рассчитывалась только для участка ленты, который не контактирует с призмой). Здесь и далее на графиках и рисунках время нормировано на величину 1 мс, а скорость – на величину 100 м/с, плотность объемной силы – на величину 1 МН/м³.

Как видно из рис. 4.Б, предложенный алгоритм учета разных двумерных моделей позволяет получить хорошее соответствие интегральных кинематических характеристик лайнера. Максимальная скорость лайнера, полученная в продольной модели, составила 700 м/с.

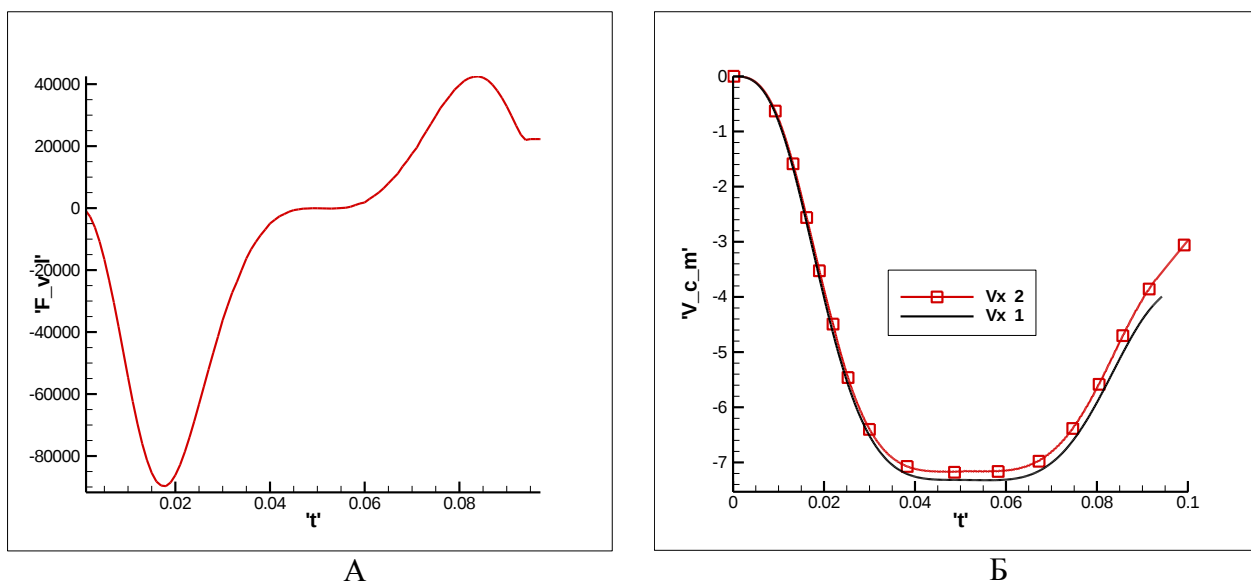


Рис. 4. Зависимости от времени: А – плотность объемной силы, Б – скорость центра масс лайнера для двух моделей

Для более детального изучения сильных и слабых мест указанных выше моделей сначала приведем результаты расчетов, в которых использовано приближение упругого лайнера (для достижения данного эффекта предел текучести материала увеличивался в 1000 раз). Такое приближение применялось для всех моделей. Они обозначены как упругая модель 1, 2, 3 соответственно.

На рис. 5 показана форма участка ленты лайнера (вблизи опоры) в момент времени 30 мкс в расчете с моделью 1. Видно, что в указанной области наблюдается явно нефизическое утолщение ленты. Это объясняется тем, что

данная часть ленты подвергается значительному повороту, а модель 1, как уже упоминалось выше, не позволяет адекватно описать подобные явления.

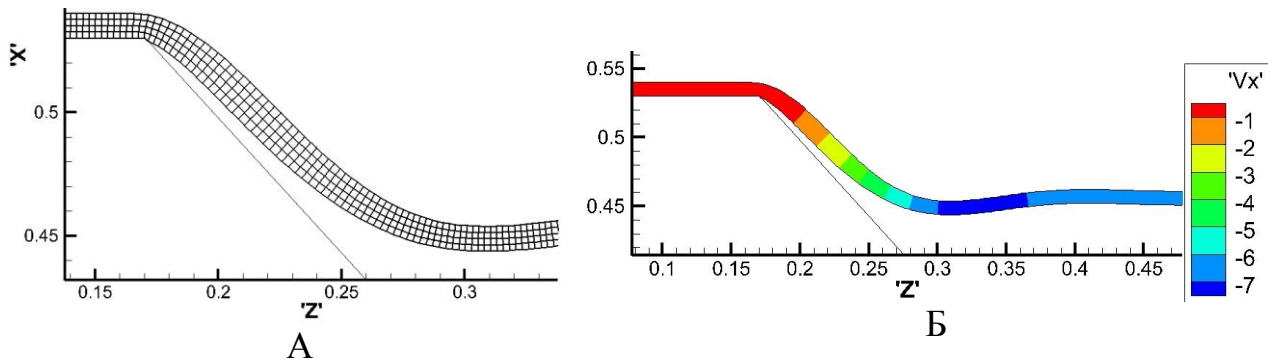


Рис. 5. Лайнер в момент времени $t=30$ мкс (модель 1, упругое приближение): А – деформированная сетка, Б – распределение скорости V_x

На рис. 6 показаны формы ленты лайнера на момент времени 30 мкс в расчетах с моделями 2 и 3 (цветом показано распределение скорости V_x). На рис. 7 показаны формы ленты лайнера на момент времени 80 мкс в расчетах с моделями 2 и 3 (цветом показана интенсивность напряжений, нормированная на 1 МПа). Из рисунков видно, что указанные модели дают достаточно близкие результаты (с точностью до величины, равной половине толщины ленты), причем, в отличие от рис. 5, никаких нефизических утолщений ленты не наблюдается. В расчетах с упругим лайнером контакта ленты с призмой не происходит, по лайнеру бегут упругие волны возмущения. Таким образом, для упругого приближения указанные модели позволяют решать подобные динамические задачи (с большими перемещениями и поворотами тела).

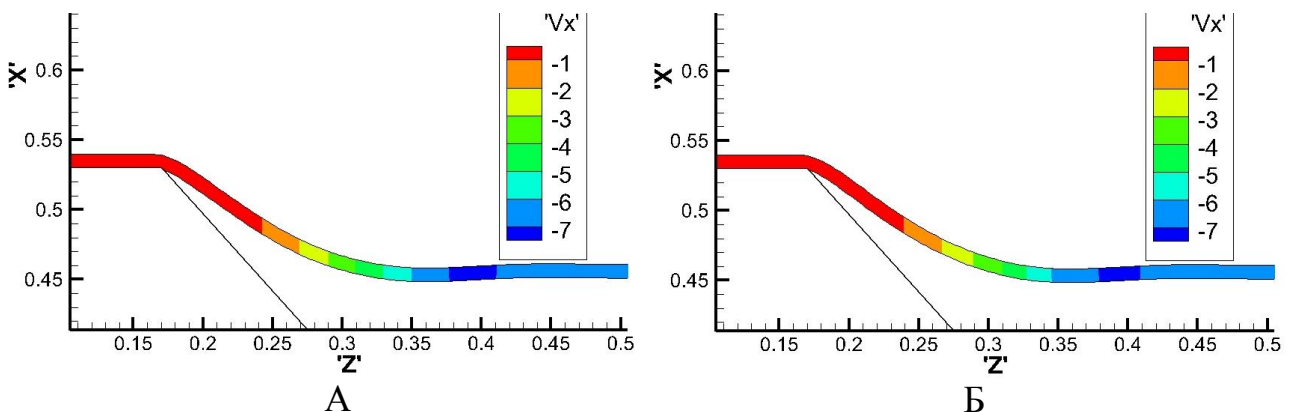


Рис. 6. Распределение скорости V_x в лайнере в момент времени $t=30$ мкс (упругое приближение): А – модель 2, Б – модель 3

В то же время уровень возникающих напряжений (интенсивность до 7000 МПа) еще раз подчеркивает необходимость использования моделей упругопластического тела, поэтому все последующие расчеты проводились для выбранной кривой деформирования (с пределом текучести 60 МПа).

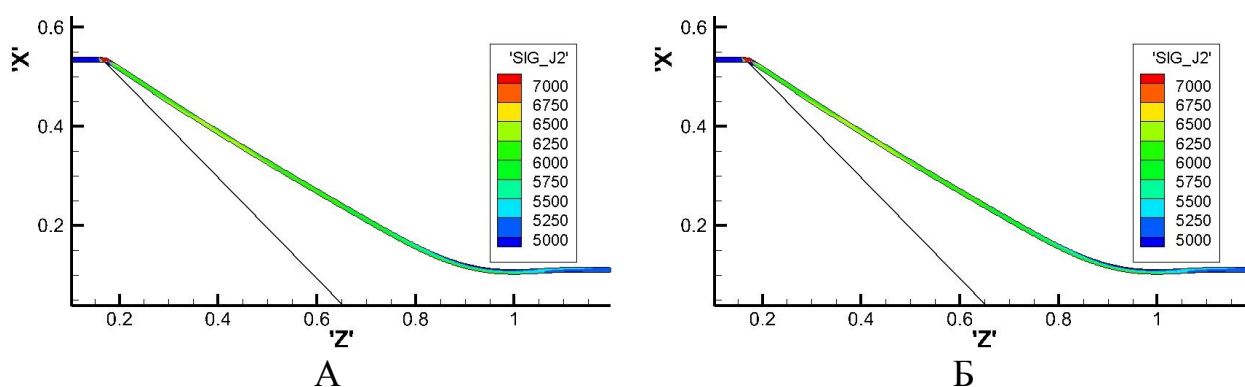


Рис. 7. Распределение интенсивности напряжений в лайнере в момент времени $t=80$ мкс (упругое приближение): А – модель 2, Б – модель 3

На рис. 8 показана форма участка ленты лайнера (вблизи опоры) в момент времени 30 мкс в расчете с упругопластической моделью 1. Видно, что, как и для упругого случая, наблюдается явно нефизическое утолщение ленты в области контакта с призмой. Таким образом, упругопластическая модель для малых деформаций не применима в рассматриваемых задачах в случае возникновения больших поворотов и деформаций.

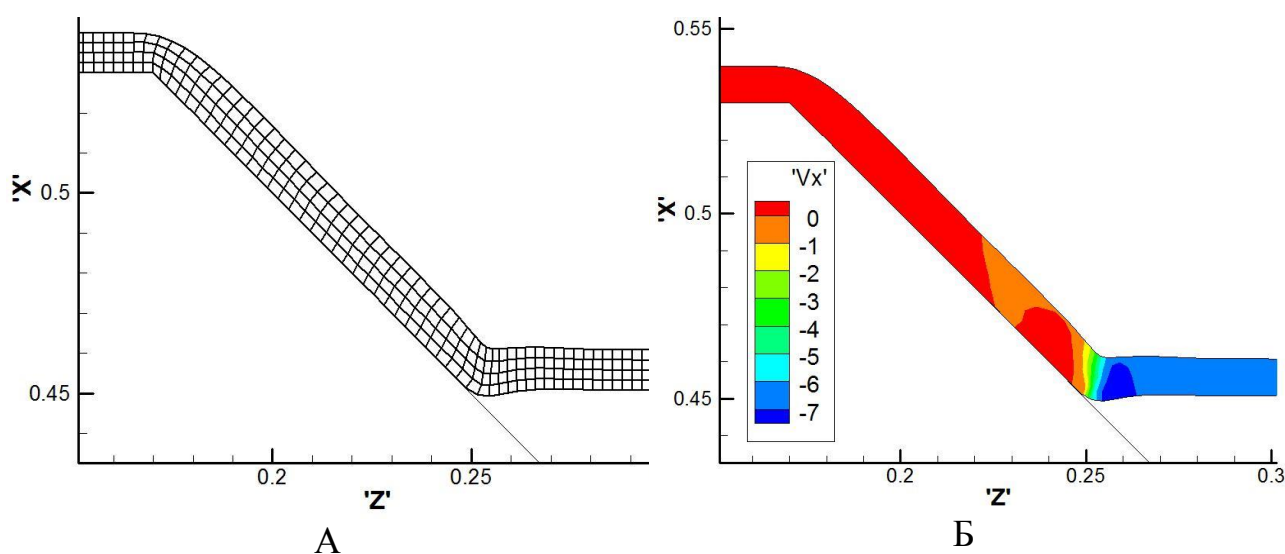


Рис. 8. Лента лайнера в момент времени $t=30$ мкс (модель 1): А – деформированная сетка, Б – распределение скорости V_x

На рис. 9 показаны деформированные сетки в расчетах с моделью 2. Из рисунка видно, что уже к моменту времени 25 мкс происходит разрушение расчетной сетки (перехлест ячеек). Таким образом, можно утверждать, что, как и предполагалось выше, модель 2 не позволяет адекватно описывать возникновение больших пластических деформаций. Область применимости модели 2 ограничена задачами с произвольными перемещениями и поворотами, но малыми пластическими деформациями.

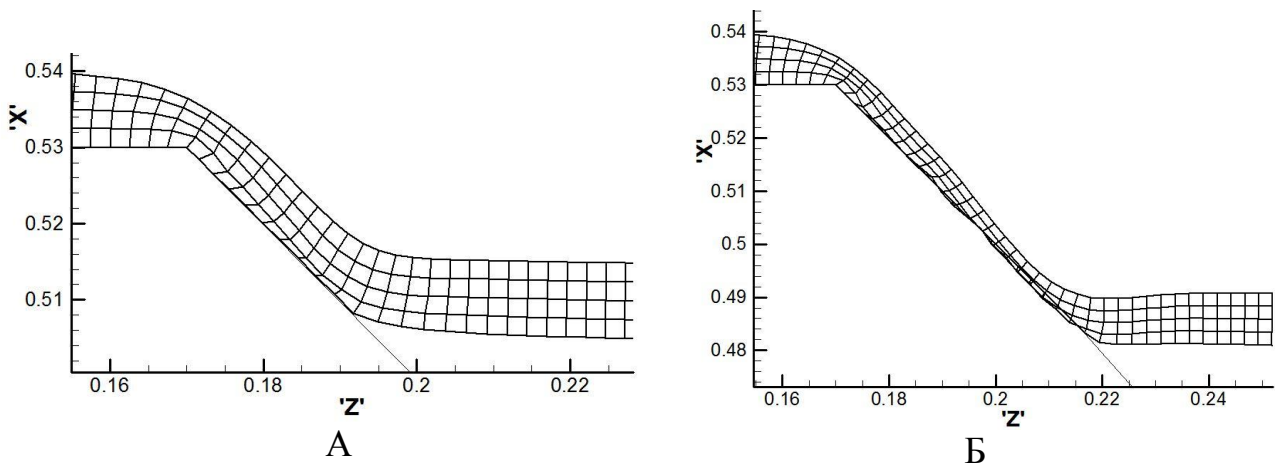


Рис. 9. Деформированная сетка в лайнере (модель 2): А – $t=20$ мкс, Б – $t=25$ мкс

На рис. 10-12 показана форма участка ленты лайнера (вблизи опоры) в расчете с моделью 3 в моменты времени 30, 70 и 100 мкс. В отличие от расчетов с упругим телом, упругопластический лайнер в процессе движения ложится на призму, при этом центральная часть ленты совершает практически плоскопараллельное движение, что наблюдалось и в экспериментах с аналогичными установками [2].

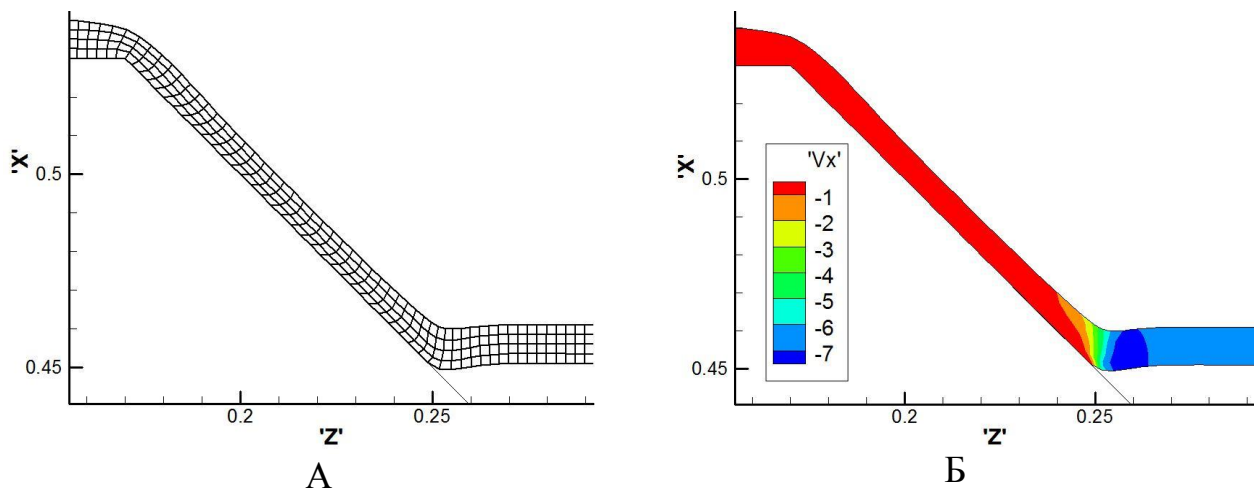


Рис. 10. Лента лайнера в момент времени $t=30$ мкс (модель 3):
А – деформированная сетка, Б – распределение скорости V_x

Нужно обратить внимание, что в момент времени 70 мкс вблизи движущейся границы контакта ленты и призмы наблюдается небольшое утолщение, которое можно интерпретировать как образование складки в лайнере в результате сгибания ленты. Показанные изображения деформированной сетки позволяют судить о том, как происходит процесс деформирования алюминия на разной толщине. В начале расчета сетка состоит из квадратных ячеек. В процессе движения лайнера происходит значительное

сдавливание и вытягивание ячеек сетки, расположенных в области контакта с призмой. Причем если в момент времени 30 мкс верхний и нижний слои сетки деформировались похожим образом, а больше всего сдвигались центральные слои, то в момент времени 70 мкс нижний слой сетки продеформирован значительно сильнее других слоев, а наибольший сдвиг наблюдается у верхних слоев.

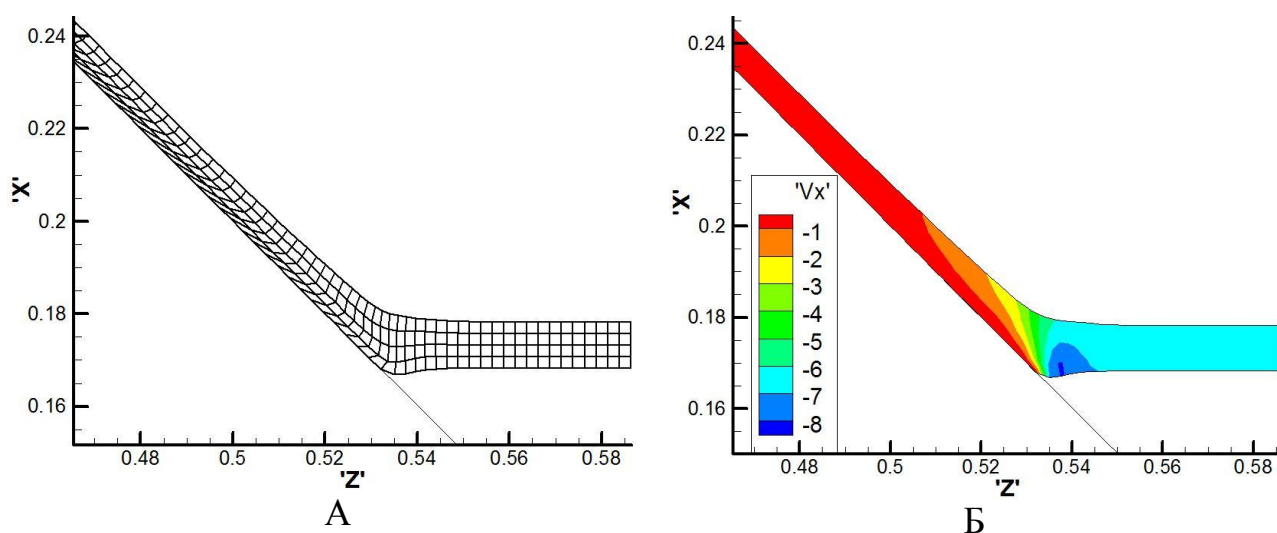


Рис. 11. Лента лайнера в момент времени $t=70$ мкс (модель 3):
А – деформированная сетка, Б – распределение скорости V_x

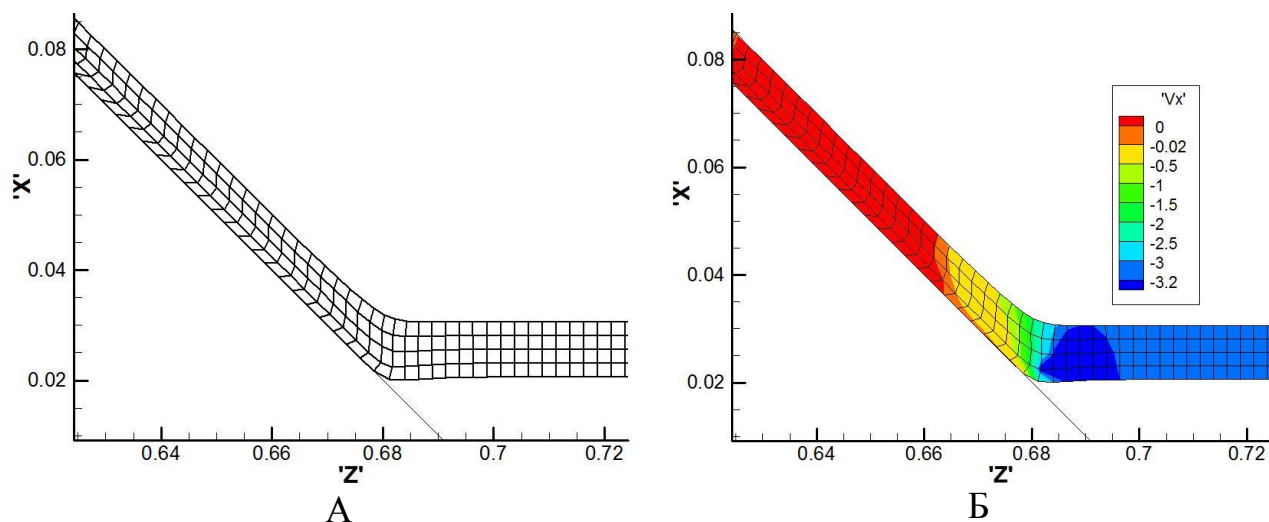


Рис. 12. Лента лайнера в момент времени $t=100$ мкс (модель 3):
А – деформированная сетка, Б – распределение скорости V_x

К моменту времени 100 мкс уже происходит торможение лайнера до скорости 300 м/с, поэтому степень деформирования разных слоев сетки опять близка, а наибольший сдвиг снова наблюдается у центральных слоев.

На рис. 13-15 приведены данные о напряжениях и деформациях лайнера на момент времени 60 мкс (для модели 3).

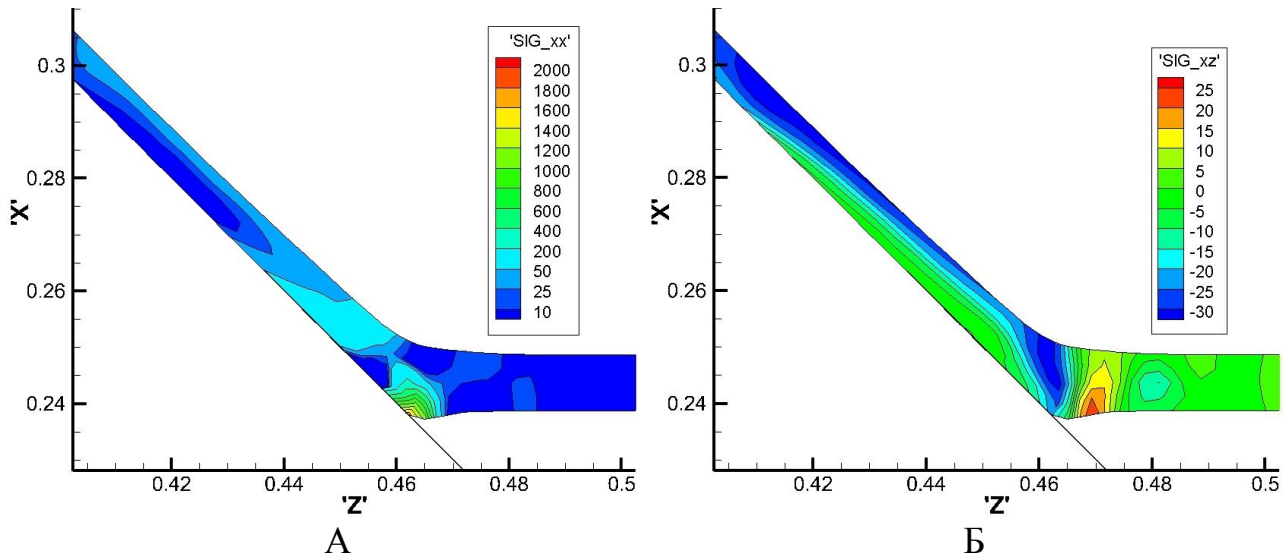


Рис. 13. Распределение напряжений в ленте лайнера ($t=60 \mu\text{s}$): А – σ_{xx} , Б – σ_{xz}

На рис. 13 показаны распределения нормальной (σ_{xx}) и касательной (σ_{xz}) компонент тензора напряжений на участке лайнера. Из рисунка видно, что на границе контакта ленты и призмы возникают огромные напряжения (до 2000 МПа). Вопрос о том, способен ли алюминий выдерживать такие нагрузки, не разрушаясь, пока остается до конца не исследованным в связи с недостатком данных о свойствах металла при таких скоростях нагружения.

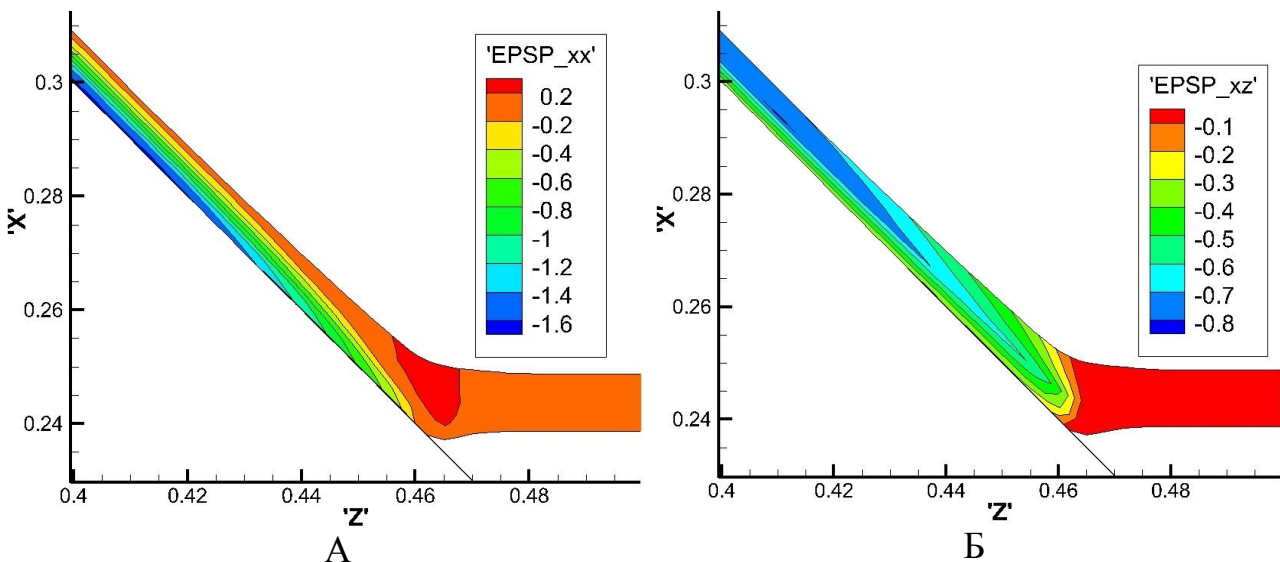


Рис. 14. Распределение пластических деформаций в ленте лайнера ($t=60 \mu\text{s}$):
А – ϵ^p_{xx} , Б – ϵ^p_{xz}

На рис. 14 показаны распределения различных компонент тензора пластических деформаций. Из рисунка видно, что пластические деформации образуются только на участке ленты, растянутом по поверхности призмы, и небольшой переходной зоны. В центральной части ленты пластичность не проявляется. Как уже объяснялось ранее [2, 6], это связано с тем, что скорость движения лайнера превышает скорость волны пластического течения, поэтому зона пластичности оказывается фактически прикрепленной к движущейся границе контакта.

На рис. 15.А показано распределение интенсивности напряжений. Видно, что на относительно небольшом участке, примыкающем к границе контакта, значение интенсивности совпадает с пределом текучести материала (60 МПа), т.е. в этой зоне продолжается рост пластических деформаций. На других участках ленты лайнера интенсивность меньше предела текучести, т.е. на данных участках пластические деформации (если они есть) остаются неизменными. На рис. 15.Б показано распределение эффективной пластической деформации $\bar{\varepsilon}^P$. Видно, что в нижних слоях ленты, контактирующих с опорой, деформации достигают очень значительной величины. Даже если перейти к логарифмической деформации $\ln(1 + \bar{\varepsilon}^P)$, то максимум деформации превышает 100 %. Для статических испытаний на растяжение алюминия получен предельный уровень растягивающих деформаций порядка 40 %. Для динамического случая и с учетом наличия опоры этот предел будет больше, но скорее всего на значительных участках лайнера нижние слои при рассчитанных деформациях будут разрушаться. Разрушение ленты (возможно, обусловленное и рядом других причин) наблюдалось и в экспериментах в аналогичных установках при похожем уровне скоростей лайнера.

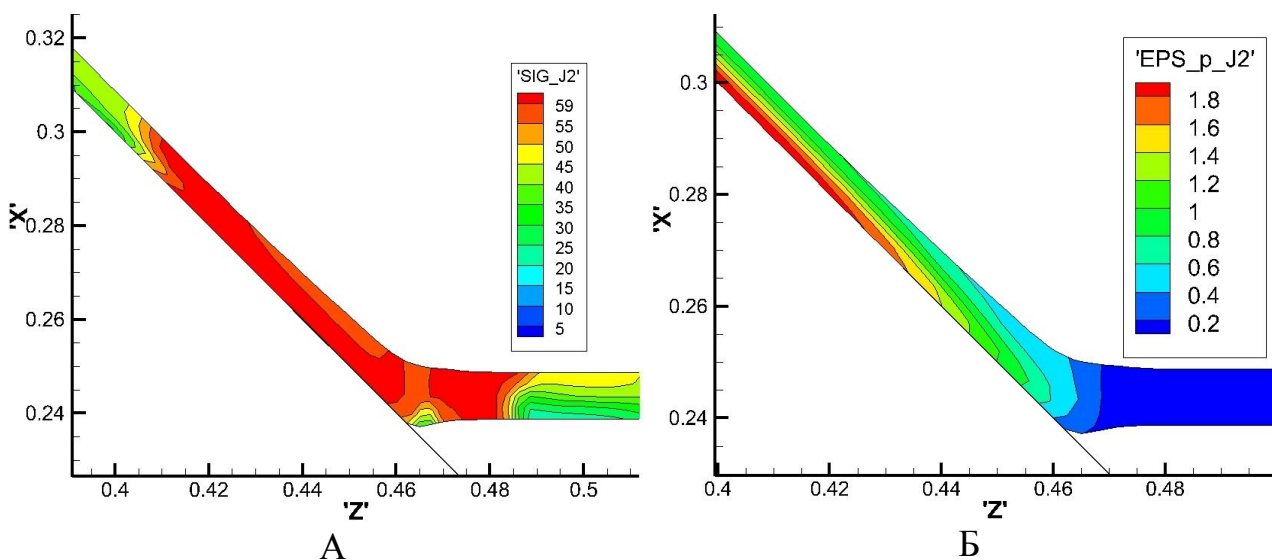


Рис. 15. Распределение величин в ленте лайнера ($t=60$ мкс): А – интенсивность напряжений, Б – эффективная пластическая деформация

В результате анализа приведенных результатов можно сделать вывод, что модель 3 позволяет достаточно адекватно описать образование больших деформаций в подобных задачах, но ряд эффектов, связанных с разрушением материала, остается неучтенным и требует дальнейшего развития данной модели.

3.2. Расчеты с максимальной скоростью лайнера 1.3 км/с

Во второй серии расчетов моделировался эксперимент, в котором конденсатор заряжен до напряжения 18 кВ.

На рис.16.А показан график зависимости от времени объемной силы, действующей на лайнер в продольном сечении. На рис. 16.Б показаны графики временной зависимости центра масс лайнера для расчетов в поперечном сечении (без маркера) и в продольном сечении с моделью 3 (скорость рассчитывалась только для участка ленты, который не контактирует с призмой). Как и в первой серии расчетов, наблюдается достаточно неплохое соответствие интегральных кинематических характеристик лайнера для разных сечений. Максимальная скорость лайнера, полученная в продольной модели, составила 1300 м/с.

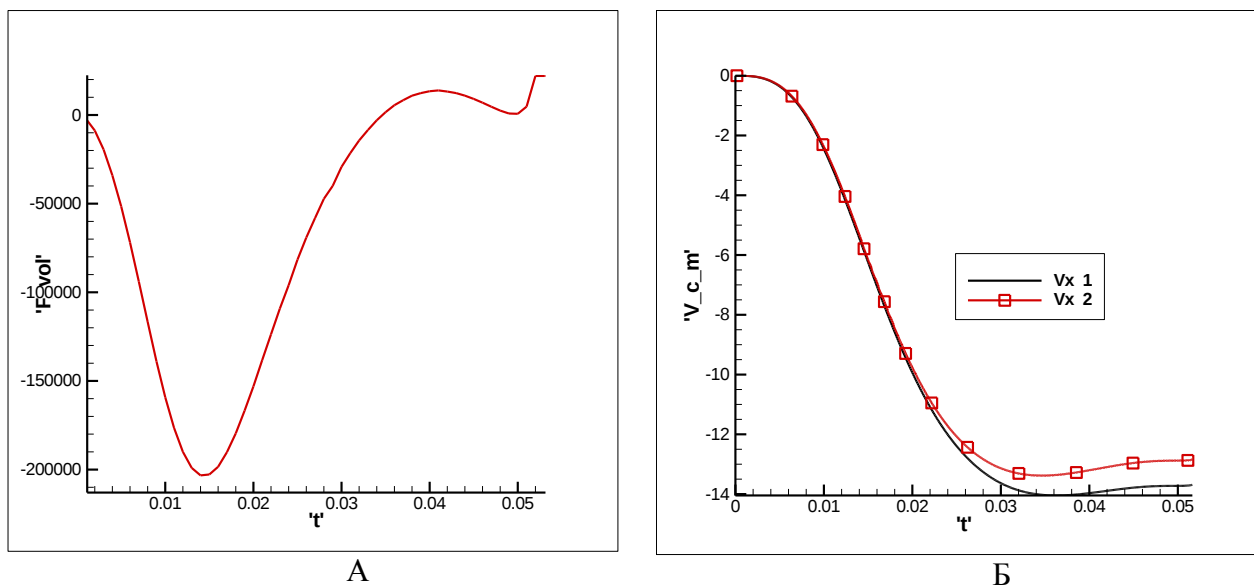


Рис. 16. Зависимости от времени: А – плотность объемной силы, Б – скорость центра масс лайнера для двух моделей

Поскольку результаты, приведенные в предыдущем параграфе, еще раз продемонстрировали неприменимость моделей 1 и 2, то во второй серии расчетов использовалась только модель 3.

На рис. 17-19 показана форма участков ленты лайнера (вблизи опоры) в моменты времени 20, 40 и 55 мкс. Центральная часть ленты по-прежнему совершает практически плоскопараллельное движение. По сравнению с

предыдущими расчетами еще более заметным стало утолщение ленты в месте сгиба.

Анализ деформированной сетки позволяет сделать вывод, что при больших скоростях участок ленты, вступивший в контакт с призмой, растягивается сильнее, чем в первой серии расчетов, особенно нижние слои сетки. Во все рассмотренные моменты времени верхние слои сетки значительно сдвигаются относительно прилипшего нижнего слоя.

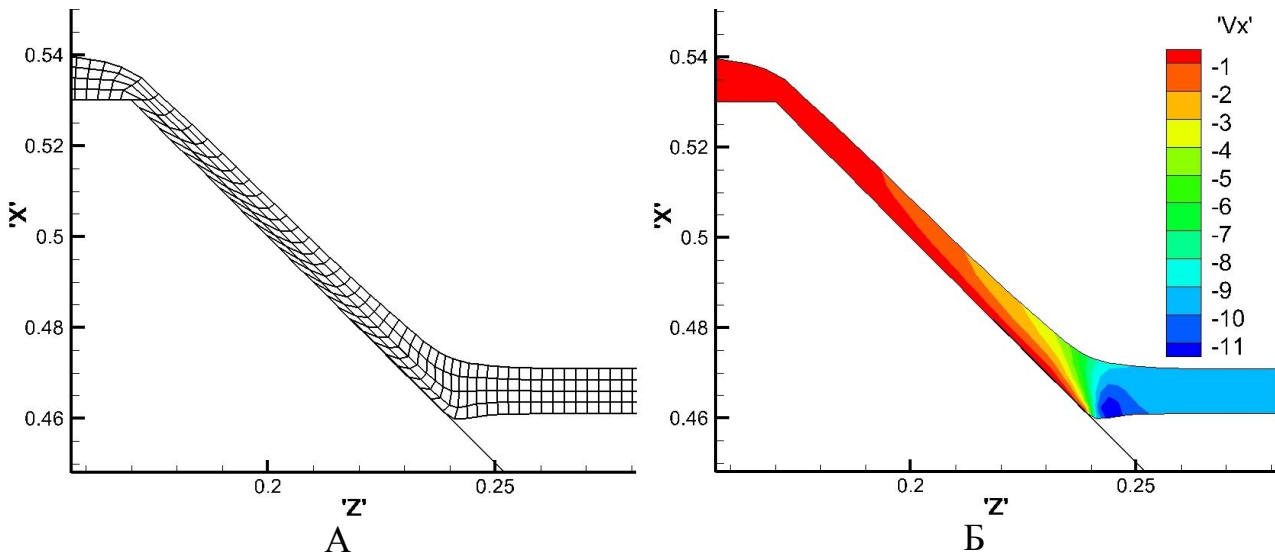


Рис. 17. Лента лайнера в момент времени $t=20 \mu\text{s}$ (модель 3):
А – деформированная сетка, Б – распределение скорости V_x

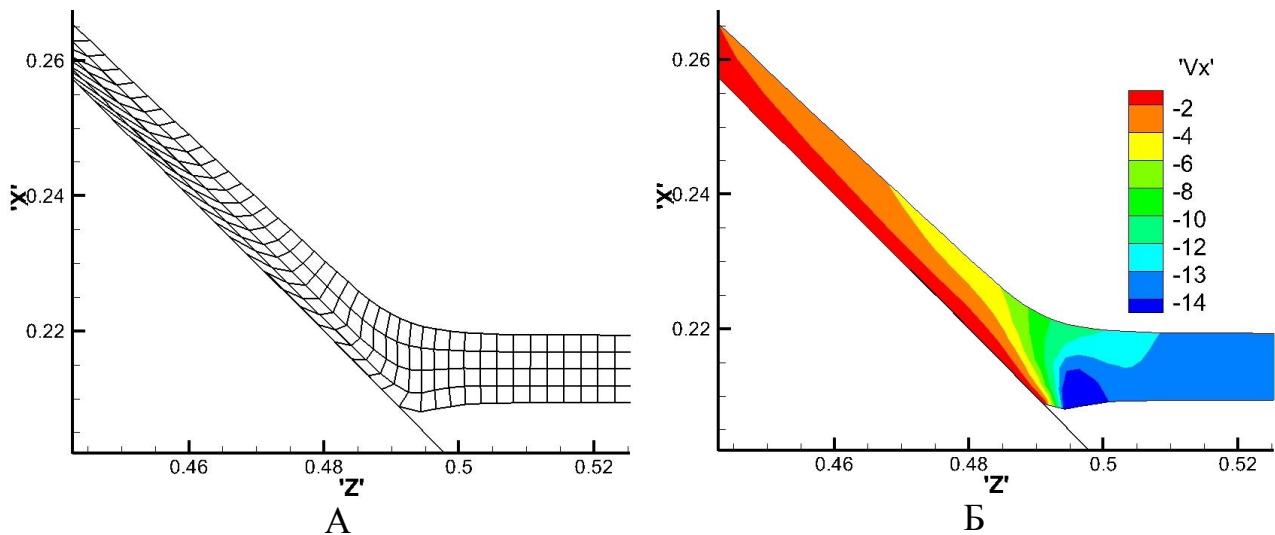


Рис. 18. Лента лайнера в момент времени $t=40 \mu\text{s}$ (модель 3):
А – деформированная сетка, Б – распределение скорости V_x

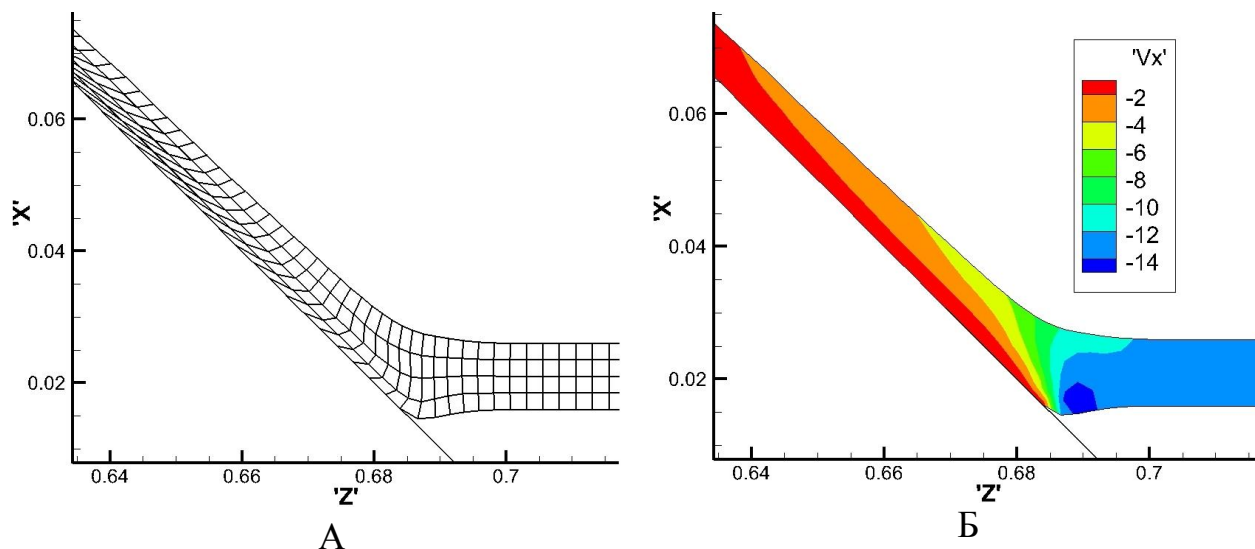


Рис. 19. Лента лайнера в момент времени $t = 55 \mu\text{s}$ (модель 3):
А – деформированная сетка, Б – распределение скорости V_x

На рис. 20-22 приведены данные о напряжениях и деформациях в лайнере на момент времени 40 мкс.

На рис. 20 показаны распределения нормальной (σ_{xx}) и касательной (σ_{xz}) компонент тензора напряжений на участке лайнера. Огромные напряжения, возникающие на границе контакта ленты и призмы, по сравнению с данными на рис. 13 увеличились более чем в 2 раза до уровня 5000 МПа. Вопрос о разрушении материала в этой зоне пока остается открытым.

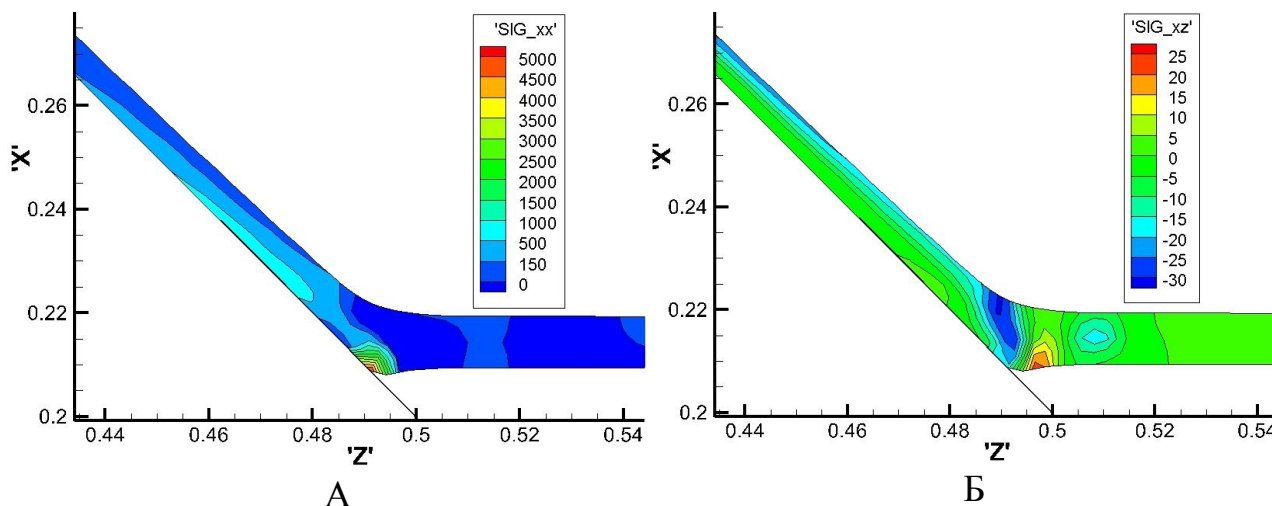


Рис. 20. Распределение напряжений в ленте лайнера ($t = 40 \mu\text{s}$): А – σ_{xx} , Б – σ_{xz}

На рис. 21 показаны распределения различных компонент тензора пластических деформаций. На рис. 22.А показано распределение интенсивности напряжений. При сравнении с рис. 15.А видно, что примыкающий к границе контакта участок, на котором продолжается рост пластических деформаций, стал заметно длиннее. Это связано с большей

скоростью движения лайнера. На рис. 22.Б показано распределение эффективной пластической деформации. Деформация $\bar{\varepsilon}^p$ в нижних слоях достигает 400 % (для логарифмической деформации $\ln(1+\bar{\varepsilon}^p)$ – 160 %). Причем есть участок ленты, для которого логарифмическая деформация по всей толщине превышает 100 %. Очевидно, что для данного случая разрушение ленты, обусловленное превышением предельно допустимого растяжения, будет значительно более масштабным, чем в первой серии расчетов. Вопрос о степени соответствия полученных численных результатов реальной картине деформирования лайнера требует дальнейших исследований и сравнений с экспериментальными данными.

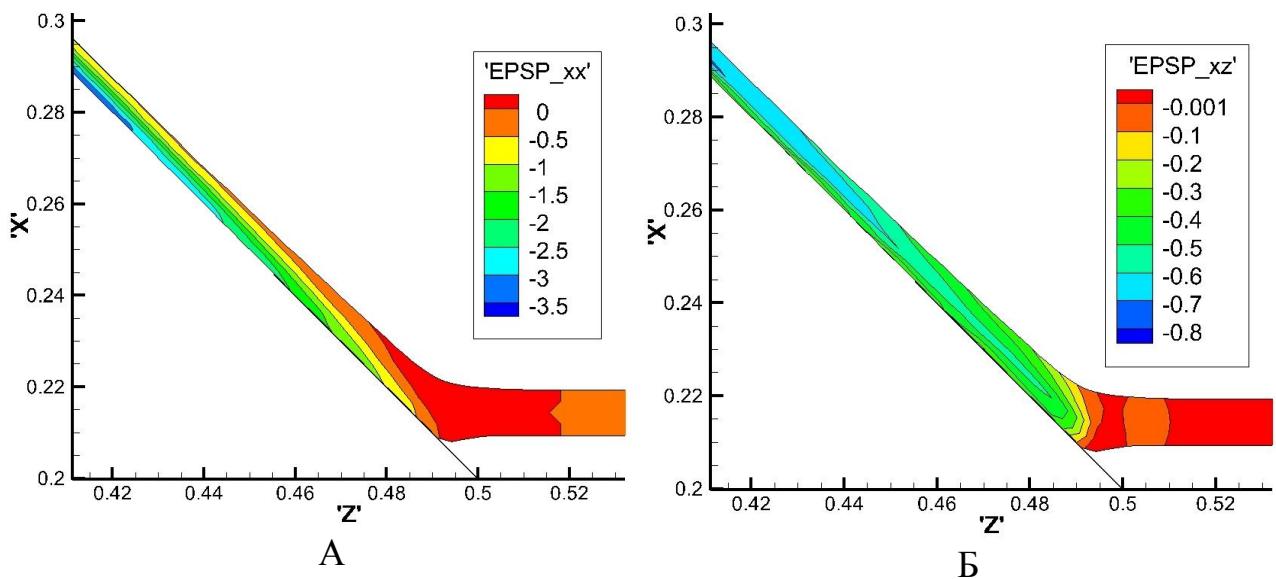


Рис. 21. Распределение пластических деформаций в ленте лайнера ($t=40$ мкс):
А – ε^p_{xx} , Б – ε^p_{xz}

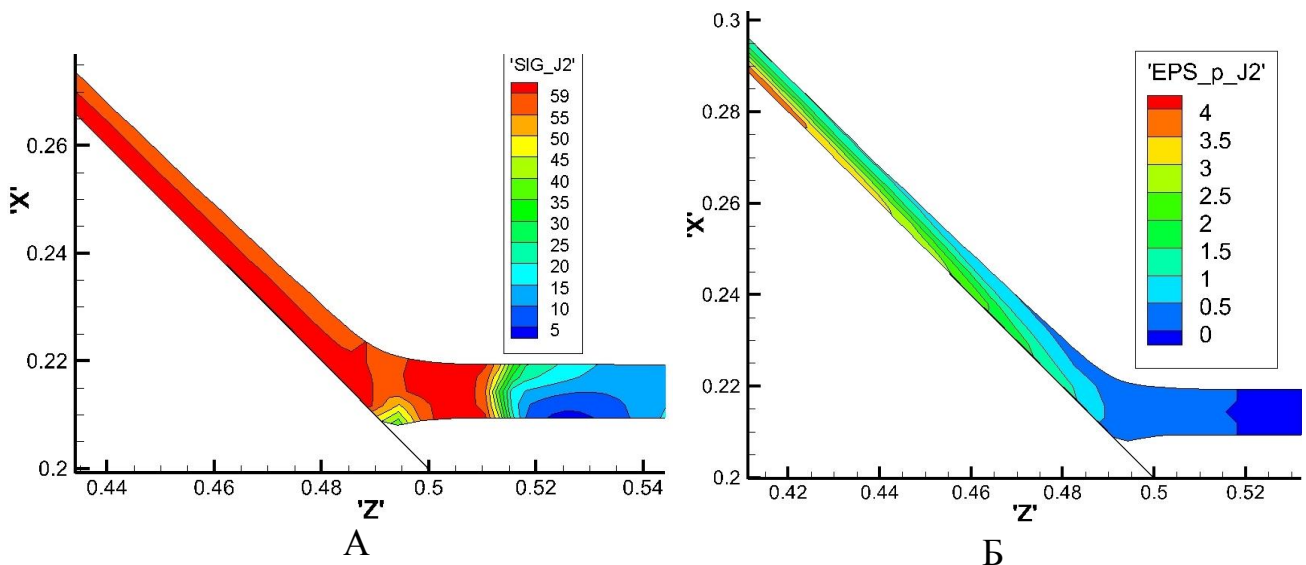


Рис. 22. Распределение величин в ленте лайнера ($t=40$ мкс): А – интенсивность напряжений, Б – эффективная пластическая деформация

Во всех описанных выше расчетах применялись КЭ второго порядка на четырехугольной сетке. Ниже приведены результаты расчетов, полученные при использовании других сеток, на момент времени 40 мкс. Кроме сетки все другие параметры расчета оставались неизменными.

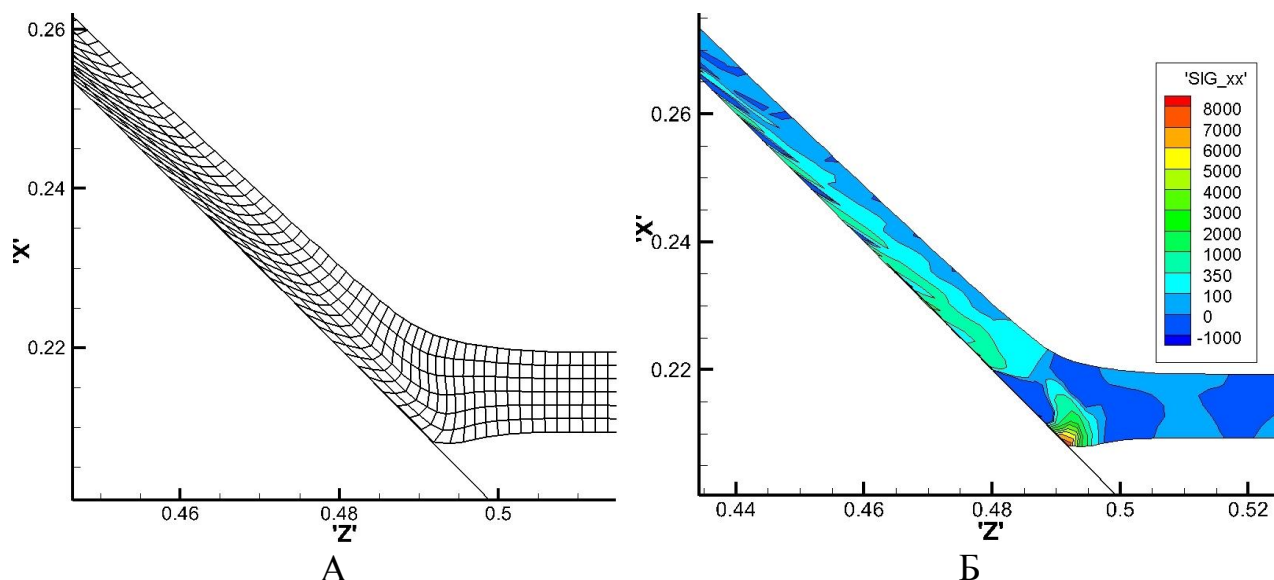


Рис. 23. Результаты расчета с четырехугольными КЭ первого порядка ($t=40$ мкс): А – деформированная сетка, Б – распределение напряжений σ_{xx}

На рис. 23 показаны результаты расчета с четырехугольными КЭ первого порядка. Сетка состояла из 6000 элементов и 7007 узлов. Большая часть результатов, в том числе распределение касательных напряжений, достаточно хорошо совпадает с результатами базового расчета. В то же время распределение нормальных компонент тензора напряжений, как видно из рис. 23.Б, значительно отличается от рис. 20.А. Поле напряжений имеет «рваный» характер, в нем наблюдаются немонотонности. Данный численный эффект связан с тем, что элементы первого порядка не всегда хорошо передают структуру поля напряженности, потому что перемещения внутри КЭ являются билинейными функциями. Для вычисления напряжений требуются производные, что и приводит к большим ошибкам.

На рис. 24 показаны результаты расчета с треугольными КЭ второго порядка. Сетка состояла из 5936 элементов и 12949 узлов. Полученные результаты, в том числе и распределения напряжений, достаточно хорошо совпадают с результатами базового расчета. В то же время использование неструктурированной сетки для данной задачи и данной геометрии в известной степени затрудняет анализ деформирования ленты (по сравнению с тем, как это делалось для четырехугольной сетки).

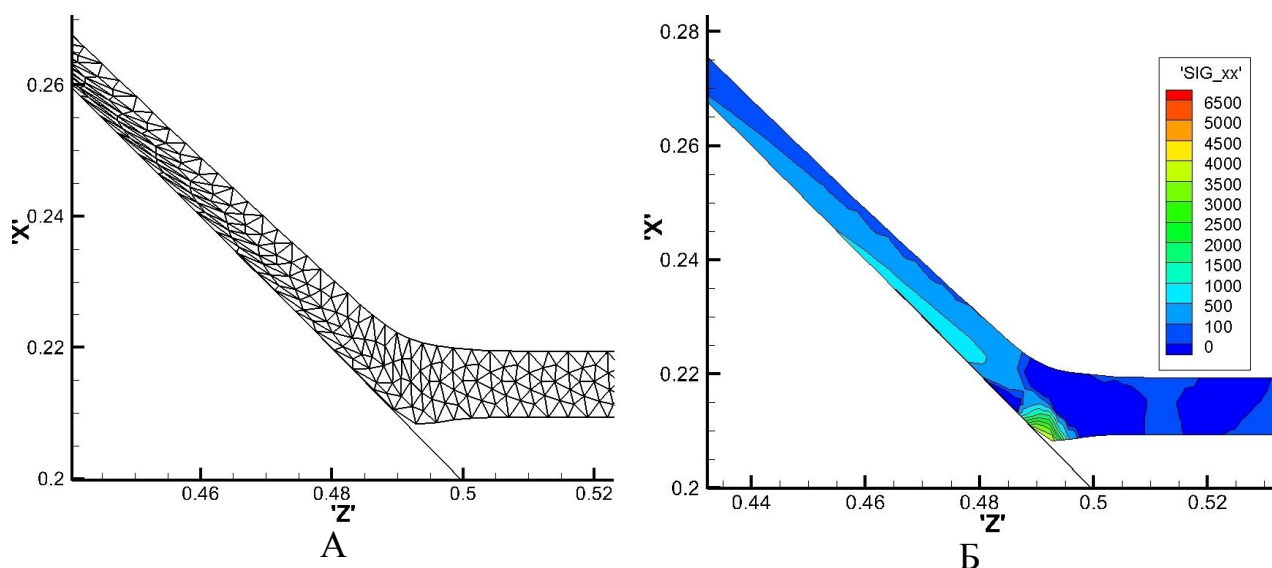


Рис. 24. Результаты расчета с треугольными КЭ второго порядка ($t=40 \mu s$):
А – деформированная сетка, Б – распределение напряжений σ_{xx}

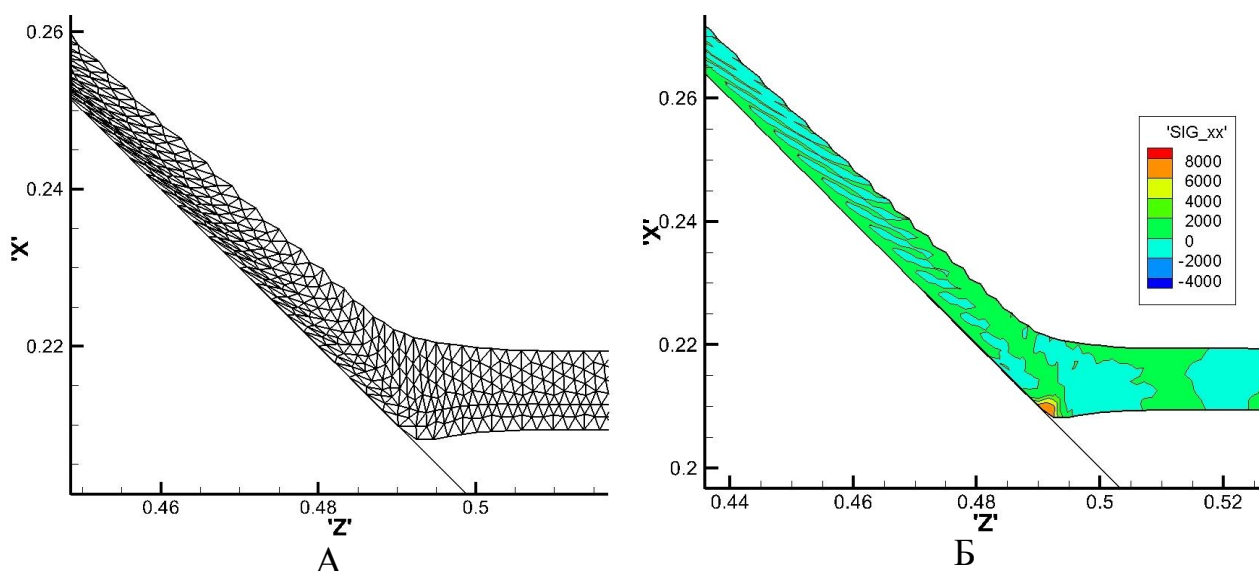


Рис. 25. Результаты расчета с треугольными КЭ первого порядка ($t=40 \mu s$):
А – деформированная сетка, Б – распределение напряжений σ_{xx}

На рис. 25 показаны результаты расчета с треугольными КЭ первого порядка. Сетка состояла из 13658 элементов и 7637 узлов. Как видно из рис. 25.Б, распределение нормальных компонент тензора напряжений явно не соответствует действительности. В данной численной модели перемещения внутри КЭ являются линейными функциями, их производные постоянны в пределах элемента, что не позволяет рассчитать напряжения с достаточной точностью. Более того, в указанном расчете ошибки в вычислении напряжений и, следовательно, пластических деформаций привели к заметной немонотонности на внешней поверхности участка лайнера, растянутого по призме. При использовании более грубых сеток подобные немонотонности

приводили к появлению численных артефактов, препятствующих нормальному продолжению расчета.

Приведенные результаты показывают, что поскольку для вычисления пластических деформаций точный расчет напряжений является критически важным, то следует использовать КЭ высокого порядка.

Необходимо отметить, что в указанном диапазоне скоростей (>1 км/с) ленточного лайнера и соответствующих плотностей протекающих токов необходимо учитывать тепловое действие тока, влияющего на свойства алюминиевой ленты. Поэтому при дальнейшем развитии модели 3 нужно рассматривать термопластический материал и решать задачу теплопроводности с заданными источниками тепла (джоулев нагрев).

Заключение

Проведенное исследование является продолжением цикла работ [1-7], посвященных математическому и численному моделированию ускорения и торможения плоского лайнера в магнитном компрессоре. В данной работе основное внимание уделено расчету взаимодействия ленты лайнера с твердой опорой при скоростях порядка 1.3 км/с. Для этой цели предложен метод моделирования, основанный на комбинации поперечной и продольной двумерных моделей. Показано, что с его помощью можно получить кинематические характеристики лайнера в продольной модели, сопоставимые с характеристиками лайнера в поперечной модели. Для обоснования применения модели упругопластического тела, учитывающей большие деформации, в работах [1-7] рассмотрены две другие, более простые модели. Анализ результатов проведенной серии расчетов позволил оценить адекватность каждой из указанных моделей при решении динамических задач подобного рода. Проведено численное исследование точности вычислений поля напряжений в лайнере в зависимости от типа использованных конечных элементов. Показано, что для конечных элементов первого порядка напряжение может вычисляться некорректно, что приводит к нефизическим результатам.

Список литературы

- [1] Родин А.С. Модель движения пластического лайнера в магнитном компрессоре и ее применение // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2009. № 50. 32 с. URL: http://keldysh.ru/papers/2009/prep50/prep2009_50.pdf.
- [2] Галанин М.П., Лотоцкий А.П., Родин А.С. Математическое моделирование движения лайнера в продольном сечении магнитного компрессора // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2009. № 57. 31 с. URL: http://keldysh.ru/papers/2009/prep57/prep2009_57.pdf.
- [3] Галанин М.П., Лотоцкий А.П., Родин А.С., Щеглов И.А. Движение лайнера в поперечном сечении магнитного компрессора // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2010. №2. С. 65-84.
- [4] Галанин М.П., Лотоцкий А.П., Родин А.С. Математическое моделирование движения лайнера в различных сечениях магнитного компрессора // Математическое моделирование. 2010. Т 22, № 10. С. 35-55.
- [5] Галанин М.П., Крылов М.К., Лотоцкий А.П., Родин А.С., Математическое моделирование работы магнитного компрессора // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2011. № 5. 30 с. URL: http://keldysh.ru/papers/2011/prep05/prep2011_05.pdf.
- [6] Экспериментальные и расчетные исследования магнитного компрессора потока с лайнером полоскового типа при питании от емкостного накопителя. Е.В. Грабовский [и др.] // Ядерная физика и инжиниринг. НИЯУ МИФИ. 2013. Т.4. №2. С. 136-145.
- [7] Исследования работы импульсного магнитного компрессора с электродинамическим разгоном лайнера. Е.В. Грабовский [и др.] // Журнал технической физики. 2014. Т. 84. № 7. С. 126-135.
- [8] Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Издательство СО РАН. 2000. 262 с.
- [9] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2008. 512 с.
- [10] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир. 1975. 540 с.
- [11] Kojic M., Bathe K.-J. Inelastic Analysis of Solids and structures. New-York: Springer-Verlag. 2005. 414 p.
- [12] Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение. 1975. 400 с.
- [13] Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М.: Издательство иностранной литературы. 1963. 312 с.

Оглавление

1. Постановка задачи.....	3
2. Математические модели движения упругопластического тела	4
2.1. Модель упругопластического тела для малых деформаций	6
2.2. Модель упругопластического тела с использованием тензора деформации Грина	8
2.3. Модель упругопластического тела с использованием производной Трусделла тензора напряжений	9
3. Результаты численного моделирования.....	11
3.1. Расчеты с максимальной скоростью лайнера 0.7 км/с	13
3.2. Расчеты с максимальной скоростью лайнера 1.3 км/с	20
Заключение.....	26
Список литературы.....	27