ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 103 за 2014 г.

Аптекарев А.И., Боголюбский А.И.

Матричная задача Римана-Гильберта для аппроксимаций Паде по ортогональным разложениям

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Аптекарев А.И., Боголюбский А.И. Матричная задача Римана-Гильберта для аппроксимаций Паде по ортогональным разложениям // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 103. 16 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-103

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М. В. КЕЛДЫША

А.И. Аптекарев, А.И. Боголюбский

Матричная задача Римана-Гильберта для аппроксимаций Паде по ортогональным разложениям

МОСКВА, 2014 г.

Аптекарев А. И., Боголюбский А. И.

Матричная задача Римана-Гильберта для аппроксимаций Паде по ортогональным разложениям [1]

Аннотация. Рассматриваются марковские функции, генерируемые мерами, заданными на некотором отрезке. Для их разложений в ряды Фурье по ортогональным многочленам, заданным на другом отрезке, строятся рациональные аппроксимации Паде ортогональных разложений. Причем изучаются обе конструкции такого сорта аппроксимаций: аппроксимации Фробениуса-Паде (линейные) и аппроксимации Фурье-Паде (нелинейные). Основные новые результаты этой работы – получение полного набора соотношений ортогональности, характеризующих знаменатели аппроксимаций Фурье-Паде, а также эквивалентная переформулировка задач об аппроксимациях Фурье-Паде ортогональных разложений в виде матричных задач Римана-Гильберта.

Ключевые слова. Аппроксимации Паде-Чебышева, аппроксимации Паде по ортогональным разложениям, ортогональные многочлены, марковские функции, матричная задача Римана-Гильберта.

Aptekarev A. I., Bogolubsky A. I.

Matrix Riemann-Hilbert Problems for Pade Approximants of Orthogonal Expansions

Abstract The Markov-type functions generated by measures given on some interval are considered. We are constructing the Pade approximants of orthogonal expansions for their Fourier series expansion by orthogonal polynomials on some other interval. Besides, we are studying both types of such constructions: linear Frobenius-Pade approximants and nonlinear Fourier-Pade ones. We have obtained two main new results in this paper: complete set of orthogonality relations for Fourier-Pade approximants denominators, and also equivalent reformulation of the problems concerning Pade-Fourier approximants of orthogonal expansions in terms of matrix Riemann-Hilbert problems.

Key words. Pade-Chebyshev approximants, Pade approximants of orthogonal expansions, orthogonal polynomials, Markov-type functions, matrix Riemann-Hilbert problem.

[1]Работа частично поддержана грантом научных школ НШ–8033.2010.1, программой № 1 ОМН РАН, грантами РФФИ-14-01-00604, РФФИ-13-01-12430-офи-м.

1 Введение

Во многих численных методах удобно представлять функции, заданные на отрезках, в виде *рядов по многочленам Чебышёва*. Эти ряды сходятся в эллипсах, в которых функция имеет аналитическое (голоморфное) продолжение. Если же требуется вычислить функцию за границами максимального эллипса сходимости ряда по многочленам Чебышёва (или других ортогональных многочленов), то можно воспользоваться рациональной аппроксимацией ряда ортогональных разложений. Существуют две основные конструкции, позволяющие перенести понятие *рациональной аппроксимации Паде* на разложения функций по системам ортогональных многочленов. Одной из них, называемой также *„нелинейной“*, являются *аппроксимации Фурье-Паде*. Альтернативу им представляют т.н. *аппроксимации Фробениуса-Паде*. Оба типа аппроксимаций были подробно рассмотрены в работе Гончара, Рахманова и Суетина [2]; ее авторами были получены результаты, характеризующие скорость сходимости этих приближений. По сути, они дали "слабое“ (т.е. в терминах корня n-й степени) описание асимптотического поведения аппроксимаций.

В настоящей работе мы получаем переформулировку задач об аппроксимациях Фробениуса-Паде и Фурье-Паде в виде *матричных задач Римана-Гильберта*. Мотивированы мы последующим применением асимптотического метода матричной задачи Римана-Гильберта для получения сильной асимптотики этих аппроксимаций и, тем самым, возможностью исследовать их равномерную сходимость. Отметим, что ключевым моментом в изучении асимптотик обобщений аппроксимаций Паде и ортогональных многочленов (в частности, для их переформулировки в виде матричной задачи Римана-Гильберта) является нахождение систем соотношений ортогональности (зачастую, речь идет о нескольких системах), определяющих различные компоненты аппроксимационного процесса. В настоящей работе мы находим новую нетривиальную систему соотношений ортогональности, характеризующую нелинейные аппроксимации Фурье-Паде.

Остановимся на структуре статьи. Секция 2 посвящена определению основных понятий. В ней мы вводим Фурье-разложения по ортогональным многочленам, и аппроксимации Фробениуса-Паде и Фурье-Паде для функций марковского типа. Секция 3 посвящена системам соотношений ортогональности, которым удовлетворяют знаменатели аппроксимаций Паде ортогональных разложений. Здесь мы доказываем новую систему соотношений ортогональности. Это основной технический результат работы. Наконец, в секции 4 мы выводим искомые матричные задачи Римана-Гильберта.

2 Основные понятия и определения

2.1 Фурье-разложения по ортогональным многочленам

Введем необходимые обозначения. Пусть s является положительной борелевской мерой на отрезке $[a;\, b] \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию

$$s' = \frac{ds}{dx} > 0 \quad \text{почти всюду на } [a;\, b]\,, \tag{2.1}$$

а $p_k(x) = p_k(x;\, s)$, $k = 1, 2, \ldots$ – система нормированных, ортогональных по этой мере полиномов. Кроме того, пусть f – действительнозначная функция из класса $L_1(s)$, заданная своим Фурье-разложением по системе $\{p_k\}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, p_k(x), \quad c_k = c_k(f) = \int_a^b f\, p_k\, ds, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{2.2}$$

2.2 Аппроксимации Фробениуса-Паде

Пусть задана пара неотрицательных чисел L, M. Обозначим $\mathcal{R}_{L,M}$ класс всех рациональных функций вида $r = P/Q$, где P и Q – многочлены с действительными коэффициентами, $\deg(P) \le L$, $\deg(Q) \le M$, $Q \ne 0$ на $[a;\, b]$. Отметим, что функции из класса $\mathcal{R}_{L,M}$ задаются $L+M+1$ свободным параметром.

Рациональная функция $\Phi_{L,M} = P/Q \in \mathcal{R}_{L,M}$ называется *аппроксимацией Фробениуса-Паде индекса* $[L/M]$ *для ортогонального разложения* (2.2), если обращаются в нуль первые $(L + M + 1)$ коэффициентов Фурье линейной формы $(Q\,f - P)$

$$c_k(Q\,f - P) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, L + M. \tag{2.3}$$

Отметим, что аппроксимации Фробениуса-Паде всегда существуют, так как коэффициенты многочленов (P, Q) являются решением линейной системы алгебраических уравнений. Причем, их единственность эквивалентна условию $\deg(Q) = M$.

2.3 Определение и свойства аппроксимаций Фурье-Паде

Теперь приведем определение аппроксимаций Фурье-Паде. Рациональная функция $F_{L,M} \in \mathcal{R}_{L,M}$, Фурье-разложение которой по системе $\{p_k\}$ имеет вид

$$F_{L,M}(x) = c_0\, p_0(x) + c_1\, p_1(x) + \ldots + c_{L+M}\, p_{L+M}(x) + \ldots\,,$$

где $c_k = c_k(f)$, $k = 0, 1, \ldots, L + M$ называется *аппроксимацией Фурье-Паде индекса* $[L/M]$ *для ортогонального разложения (2.2) (или функции* f*).*

Таким образом, коэффициенты рациональной функции $F_{L,M} = P/Q$ определяются из системы нелинейных уравнений

$$c_k(F_{L,M}) \;=\; c_k(f), \quad k = 0, 1, \ldots, L + M. \tag{2.4}$$

Отметим, что для некоторых f эта система может и не иметь решения, т.е. существование аппроксимаций Фурье-Паде не гарантировано. С другой стороны, если $F_{L,M}$ существует, то она единственна. Действительно, пусть P_1/Q_1 и P_2/Q_2 – две аппроксимации Фурье-Паде типа $[L/M]$. Тогда

$$c_k(P_1/Q_1) \;=\; c_k(P_2/Q_2), \quad k = 0, 1, \ldots, L + M,$$

и, стало быть,

$$c_k\left(\frac{P_1\,Q_2 - P_2\,Q_1}{Q_1\,Q_2}\right) \;=\; 0, \quad k = 0, 1, \ldots, L + M.$$

Значит, полином $P_1\,Q_2 - P_2\,Q_1$ имеет по крайней мере $L + M + 1$ корень на интервале $(a; b)$, а т.к. его степень не превышает $L + M$, то он тожественно равен нулю; следовательно, $P_1/Q_1 \;=\; P_2/Q_2$.

2.4 Приближения марковских функций

Следуя работе [2], мы будем изучать аппроксимации Фурье-Паде и Фробениуса-Паде для т.н. марковских функций (для которых, как доказано в [2], существование нелинейных аппроксимаций Фурье-Паде гарантировано). Рассмотрим отрезок $[c; d] \subset \mathbb{R}$ (пусть для определенности $b < c$) и меру σ, такую, что $\operatorname{supp}\sigma \subset [c; d]$. Тогда функция вида

$$f(z) \;:=\; \hat{\sigma}(z) \;=\; \int_c^d \frac{d\sigma(t)}{t - z} \tag{2.5}$$

называется *марковской*. Она голоморфна в области $G \;=\; \overline{\mathbb{C}} \setminus [c; d]$, в частности, на отрезке $[a; b]$, где, кроме того, она является действительнозначной.

Итак, мы будем исследовать диагональные аппроксимации Фурье-Паде и Фробениуса-Паде $F_n; = F_{n-1,n}$, $\Phi_n; = \Phi_{n-1,n}$ к разложениям марковских функций вида (2.5) по системе ортогональных полиномов $\{p_k\}$. Общим свойством этих аппроксимаций является то, что на отрезке $[a; b]$ рациональная функция $r_n := F_n,\ \Phi_n; \quad r_n \in \mathcal{R}_{L,M}$, интерполирует (см. [2]) функцию f в $2n$ точках:

$$\exists\, x_1, \ldots\, x_{2n} \quad \text{такие, что} \quad f(x_k) \;=\; r_n(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Определим полином, связанный с *таблицей интерполяции*, соответствующей *многоточечной аппроксимации Паде:*

$$\omega_{2n}(x) := (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{2n}).$$

По определению, диагональная *многоточечная аппроксимация Паде* $r_n = p/q$ функции f удовлетворяет следующим свойствам:

$$r_n \in \mathcal{R}_{n-1,n}, \qquad (qf-p)/\omega_{2n} \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus [c,d]) \,. \tag{2.6}$$

Отсюда (см. [3]) с помощью теоремы Коши и определения f в (2.5) можно извлечь соотношения ортогональности для знаменателей многоточечной аппроксимации Паде

$$\int\limits_c^d q(t)\, t^j\, \omega_{2n}^{-1}(t)\, d\sigma(t) = 0, \quad j = 0,1,\dots,n-1 \,, \tag{2.7}$$

что, в частности, даёт $\deg q = n$. Для определённости многочлен q считаем со старшим единичным коэффициентом $q(t) = t^n + \dots$. Наконец, соотношения (2.7), (2.6) и, опять же, интегральная формула Коши, дают аналог формулы Эрмита для многоточечных аппроксимаций Паде.

$$(f-r_n)(z) = \left(\frac{\omega_{2n}}{q_n^2}\right)(z) \int\limits_c^d \left(\frac{q_n^2}{\omega_{2n}}\right)(t)\, \frac{d\sigma(t)}{t-z}\,, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [c,d] \,. \tag{2.8}$$

3 Соотношения ортогональности

3.1 Соотношения ортогональности в случае Фробениуса-Паде

Для диагональных аппроксимаций Фробениуса-Паде $\Phi_n \in \mathfrak{R}_{n-1,n}$, марковских функций $f = \widehat{\sigma}$ (см. (2.5)) из определения (2.2), (2.3) следуют соотношения ортогональности

$$\Phi_n = \frac{P_{n-1}}{Q_n} \;:\; \int\limits_a^b (Q_n f - P_{n-1})(t)\, t^j\, ds(t) = 0, \quad j = 0,1,\dots,2n-1 \,. \tag{3.1}$$

Отсюда заключаем, что линейная форма $(Q_n f - P_{n-1})$ имеет $2n$ нулей на $[a,b]$ и, если обозначить ω_{2n} многочлен с этими нулями, то для аппроксимаций Фробениуса-Паде, ввиду (2.6) и (2.7), имеем (полученные ранее в [2]) системы соотношений ортогональности

$$\int_c^d Q_n(t)\, t^j\, \omega_{2n}^{-1}(t)\, d\sigma(t) = 0, \quad j = 0,1,\dots n-1 \tag{3.2}$$

и, подставляя (2.8) в (3.1),

$$\int_a^b \omega_{2n}(t)\, t^j \left(Q_n^{-1}(t) \int_c^d \left(\frac{Q_n^2}{\omega_{2n}}\right)(\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{\tau - t} \right) ds(t) \;=\; 0, \tag{3.3}$$
$$j = 0, 1, \dots m + n.$$

Мы должны отметить, что системы соотношений ортогональности (3.2) и (3.3) аналогичны соотношениям ортогональности, возникающим в теории *аппроксимаций Эрмита-Паде* для *систем Никишина* см. [7], [8], [9]. Причем, используя общую теорему из [8] о сильной асимптотике многочленов, удовлетворяющих таким системам ортогональности, как следствие можно получить сильную асимптотику аппроксимаций Фробениуса-Паде марковских функций (2.5).

3.2 Соотношения ортогональности случай Фурье-Паде

Для нелинейных диагональных аппроксимаций Фурье-Паде $F_n \in \mathfrak{R}_{n-1,n}$, марковских функций $f = \widehat{\sigma}$ (см. (2.5)) из определения (2.2), (2.4) следуют соотношения ортогональности

$$F_n = \frac{P_{n-1}}{Q_n} \;:\quad \int\limits_a^b \left(f - \frac{P_{n-1}}{Q_n} \right)(t)\, t^j\, ds(t) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 2n-1\;. \tag{3.4}$$

Отсюда заключаем, что диагональные аппроксимации Фурье-Паде F_n являются многоточечными аппроксимациями Паде, интерполирующими марковскую функцию f в $2n$ точках на $[a, b]$, и если обозначить ω_{2n} многочлен с нулями в этих точках интерполяции, то для аппроксимаций Фурье-Паде, ввиду (2.6) и (2.7), имеем (полученные ранее в [2]) системы соотношений ортогональности

$$\int\limits_c^d Q_n(t)\, t^j\, \omega_n^{-1}(t)\, d\sigma(t) \;=\; 0, \quad j = 0, 1, \dots n-1 \tag{3.5}$$

и, подставляя (2.8) в (3.4), имеем для $\quad j = 0, 1, \dots 2n-1$

$$\int\limits_a^b \omega_{2n}(t)\, t^j \left(\frac{1}{Q_n^2(t)} \int\limits_c^d \left(\frac{Q_n^2}{\omega_{2n}}\right)(\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{\tau - t} \right) ds(t) \;=\; 0. \tag{3.6}$$

Отметим, что системы (3.5) и (3.6) уже не аналогичны соотношениям ортогональности для системы Никишина из двух функций. Мешает в (3.6) двойка в показателе стоящего в знаменателе многочлена Q_n.

Однако, если системы (3.5) и (3.6) дополнить еще одной системой ортогональности для многочлена Q_n, то желаемая аналогия с системой Никишина из трех функций снова появляется. Мотивация поиска третьей системы соотношений ортогональности также основывается на анализе теоретико-потенциальной задачи из [2] для слабой асимптотики Q_n. Решение этой задачи можно представить с помощью некоторой алгебраической функции 4-го порядка, как и в случае аппроксимаций Эрмита-Паде для трех функций.

Займемся выводом третьей системы соотношений ортогональности. Введём в рассмотрение дискретную меру σ_n, сосредоточенную в нулях многочлена Q_n

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} m_{k,n}\, \delta(t - t_{k,n}), \quad Q_n(t) = \prod_{k=1}^{n}(t - t_{k,n}) \ , \tag{3.7}$$

с массами, равными

$$m_{k,n} = \operatorname*{res}_{t=t_{k,n}} \left(\frac{P_{n-1}}{Q_n}\right)(t) \ .$$

Из доказанных в [2] теорем сходимости (аналогов теоремы Маркова [1]) и слабой асимптотики многочленов Q_n следует, что на компактах в $\overline{\mathbb{C}}\backslash[c,d]$

$$\widehat{\sigma}_n(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} \quad \rightrightarrows \quad \widehat{\sigma}(z) = f(z) = \int\limits_c^d \frac{d\sigma(t)}{t-z} \ , \tag{3.8}$$

при $n \to \infty$, а также

$$\sigma_n \ \stackrel{*}{\to} \ \sigma \ . \tag{3.9}$$

Теорема 3.1 *Систему соотношений ортогональности (3.5) и (3.6) для аппроксимаций Фурье-Паде можно дополнить следующими соотношениями:*

$$\int_c^d \frac{Q_n(z)}{\omega_{2n}(z)}\, z^j \left[\int_a^b \frac{\omega_{2n}^2(t)}{Q_n(t) Q_n(t)} \left(\int_c^d \left(\frac{Q_n^2}{\omega_{2n}}\right)(\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{\tau - t}\right) \frac{ds(t)}{t-z}\right] d\sigma_n(z) = \ 0, \tag{3.10}$$

$$j = 0, 1, \ldots n-1.$$

Доказательство. Так как из (3.6) имеем

$$\int\limits_a^b \frac{\omega_{2n}(t)\,(\omega_{2n}(t) - \omega_{2n}(z))}{Q_n^2(t)\,(t-z)} \int\limits_c^d \left(\frac{Q_n^2}{\omega_{2n}}\right)(\tau)\, \frac{d\sigma(\tau)}{\tau - t}\, ds(t) = 0 \ ,$$

то (3.10) можно переписать в виде

$$\int_c^d Q_n(z)\, z^j \left[\int_a^b \frac{\omega_{2n}(t)}{Q_n(t)Q_n(t)} \left(\int_c^d \left(\frac{Q_n^2}{\omega_{2n}}\right)(\tau)\frac{d\sigma(\tau)}{\tau-t}\right)\frac{ds(t)}{t-z}\right] d\sigma_n(z) = 0,$$

$$j = 0, 1, \ldots n-1.$$

Опять же (3.6) даёт для $j = 0, \ldots, n-1$

$$\int\limits_a^b \frac{\omega_{2n}(t)\,(z^j - t^j)}{Q_n^2(t)\,(t-z)} \int\limits_c^d \left(\frac{Q_n^2}{\omega_{2n}}\right)(\tau)\,\frac{d\sigma(\tau)}{\tau-t}\,ds(t) = 0\ ,$$

поэтому (3.10) переписывается как

$$\int_c^d Q_n(z) \left[\int_a^b \frac{t^j\,\omega_{2n}(t)}{Q_n(t)Q_n(t)} \left(\int_c^d \left(\frac{Q_n^2}{\omega_{2n}}\right)(\tau)\frac{d\sigma(\tau)}{\tau-t}\right)\frac{ds(t)}{t-z}\right] d\sigma_n(z) = 0,$$

$$j = 0, 1, \ldots n-1.$$

Наконец, снова обращаясь к (3.6), имеем для $j = 0, \ldots, n-1$

$$\int\limits_a^b \frac{\omega_{2n}(t)\,t^j\,(Q_n(t) - Q_n(z))}{Q_n^2(t)\,(t-z)} \int\limits_c^d \left(\frac{Q_n^2}{\omega_{2n}}\right)(\tau)\,\frac{d\sigma(\tau)}{\tau-t}\,ds(t) = 0\ ,$$

что приводит (3.10) к виду

$$\int_a^b \frac{t^j\,\omega_{2n}(t)}{Q_n(t)} \left[\int_c^d \left(\frac{Q_n^2}{\omega_{2n}}\right)(\tau)\frac{d\sigma(\tau)}{\tau-t}\right] \widehat{\sigma}_n(t)\,ds(t) = 0,$$

$$j = 0, 1, \ldots n-1.$$

Обращаясь к интерполяционной формуле Эрмита для аппроксимаций Фурье-Паде

$$(\widehat{\sigma} - F_n)(z) = \left(\frac{\omega_{2n}}{Q_n^2}\right)(z) \int\limits_c^d \left(\frac{Q_n^2}{\omega_{2n}}\right)(t)\,\frac{d\sigma(t)}{t-z}\ ,$$

получаем представление (3.10) в виде

$$\int\limits_a^b t^j (Q_n\widehat{\sigma} - P_{n-1})(t)\,\widehat{\sigma}_n(t)\,ds(t) = \int\limits_a^b t^j\,P_{n-1}(t)\,(\widehat{\sigma} - F_n)(t)\,ds(t)\ , \qquad (3.11)$$

что ввиду (3.4) равно нулю для $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Теорема доказана. ■

Отметим, что (3.11) вместе со следствием из (3.4) образуют систему совместных соотношений ортогональности

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b t^j (Q_n\widehat{\sigma} - P_{n-1})(t)\,\widehat{\sigma}_n(t)\,ds(t) &= 0 \\ \displaystyle\int_a^b \; t^j \;\; (Q_n\widehat{\sigma} - P_{n-1})(t) \;\; ds(t) &= 0 \end{cases}, \quad j = 0, 1, \dots n-1, \tag{3.12}$$

для линейных форм относительно никишинской системы мер $ds(t)$ и $\widehat{\sigma}_n(t)\,ds(t)$ на интервале $[a, b]$.

Наряду с системой соотношений ортогональности (3.10) с дискретной мерой $d\sigma_n$ мы будем рассматривать такую же систему с предельной (см. (3.8), (3.9)) непрерывной мерой $d\sigma$

$$\int_c^d \frac{Q_n(z)}{\omega_{2n}(z)}\, z^j \left[\int_a^b \frac{\omega_{2n}^2(t)}{Q_n^2(t)} \left(\int_c^d \left(\frac{Q_n^2}{\omega_{2n}}\right)(\tau)\frac{d\sigma(\tau)}{\tau - t}\right) \frac{ds(t)}{t - z}\right] d\sigma(z) = 0, \tag{3.13}$$
$$j = 0, 1, \dots n-1.$$

Непосредственно доказать совместность системы (3.13) с (3.5) и (3.6) нам не удалось. Возможно, это связано с нелинейностью задачи, и здесь уместно вспомнить, что даже для доказательства существования аппроксимаций Фурье-Паде в [2] привлекались неконструктивные принципы (неподвижной точки). Однако план доказательства совместности системы (3.5), (3.6) и (3.13) у нас следующий. В следующей секции (см. пункт 4.2) мы докажем эквивалентность системы (3.5), (3.6) и (3.13) некоторой матричной задаче Римана-Гильберта, про которую известно, что если она имеет решение, то это решение единственно. Затем в отдельной работе мы планируем исследовать эту задачу Римана-Гильберта при $n \to \infty$ и доказать существование решения для достаточно больших n, что повлечет совместность системы соотношений ортогональности (3.5), (3.6) и (3.13). Такой прием распространен при использовании метода матричной задачи Римана-Гильберта для комплексной (неэрмитовой) ортогональности, когда существование решений (нормальность задачи) заранее не известно.

4 Матричная задача Римана-Гильберта

В этой секции мы сформулируем матричные задачи Римана-Гильберта, связанные с аппроксимациями Паде по ортогональным многочленам. Обозначим область $U = \overline{\mathbb{C}} \setminus ([a;\, b] \cup [c;\, d])$. Введем, на весовые функции (2.1), (2.5) ограничения, упрощающие некоторые детали задачи. Пусть

$$\begin{cases} s'(x) \;=\; \dfrac{s_0(x)}{\sqrt{(a-x)(x-b)}} \\ s_0, 1/s_0 \in H([a,b]) \end{cases}, \qquad \begin{cases} \sigma'(x) \;=\; \dfrac{s_0(x)}{\sqrt{(a-x)(x-b)}} \\ \sigma_0, 1/\sigma_0 \in H([a,b]) \end{cases}. \tag{4.1}$$

4.1 Матричная задача в случае аппроксимаций Фробениуса-Паде

Знаменатели аппроксимаций Фробениуса-Паде (3.1) могут быть выражены через решения следующей 3×3 матричной задачи Римана-Гильберта.

Найти матричнозначную аналитическую функцию $Y : U \to \mathbb{C}^{3\times 3}$, такую, что

1. $Y \in H(U)$;
2. $\exists$ непрерывные $Y_\pm(x),\ x \in (a,b)\cup(c,d)$, такие, что:

$$Y_+(x) \;=\; Y_-(x)\begin{pmatrix} 1 & \sigma' & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in (c,d), \tag{4.2}$$

$$Y_+(x) \;=\; Y_-(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in (a,b); \tag{4.3}$$

3. Y имеет асимптотику на бесконечности при $z \to \infty$

$$Y(z) \;=\; \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)\begin{pmatrix} z^n & 0 & 0 \\ 0 & z^{n-5} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-2n+5} \end{pmatrix}, \quad I := \mathrm{diag}\{\,1,\,1,\,1\,\}, \tag{4.4}$$

   где O-символ относится к каждому элементу матрицы.

4. Y имеет асимптотику при подходе к концам отрезков (c,d) и (a,b)

$$Y(z) \;=\; \begin{pmatrix} O(1) & O(|z-\alpha|^{-1/2}) & O(1) \\ O(1) & O(|z-\alpha|^{-1/2}) & O(1) \\ O(1) & O(|z-\alpha|^{-1/2}) & O(1) \end{pmatrix}, \quad z \to \alpha \in \{c,\,d\},$$

$$Y(z) \;=\; \begin{pmatrix} O(1) & O(1) & O(|z-\beta|^{-1/2}) \\ O(1) & O(1) & O(|z-\beta|^{-1/2}) \\ O(1) & O(1) & O(|z-\beta|^{-1/2}) \end{pmatrix}, \quad z \to \beta \in \{a,\,b\}.$$

Справедлива

Теорема 4.1 *Существует единственное решение сформулированной задачи Римана-Гильберта. Это решение записывается с помощью аппроксимаций Фробениуса-Паде* (3.1) *следующим образом*

$$Y_n(z) \;=\; \begin{pmatrix} \Psi_n^{(0)}(z) & \Psi_n^{(1)}(z) & \Psi_n^{(2)}(z) \\ c_n\,\Psi_{n-4}^{(0)}(z) & c_n\,\Psi_{n-4}^{(1)}(z) & c_n\,\Psi_{n-4}^{(2)}(z) \\ d_n\,\Psi_{n-3}^{(0)}(z) & d_n\,\Psi_{n-3}^{(1)}(z) & d_n\,\Psi_{n-3}^{(2)}(z) \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

где $\Psi_n^{(0)}(z) \;:=\; Q_n(z)$, *и*

$$\Psi_n^{(1)}(z) = \frac{\omega_{2n}(z)}{Q_n(z)}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c^d \frac{Q_n(t)}{\omega_{2n}(t)}\,\frac{\Psi_n^{(0)}(t)}{z-t}\,d\sigma(t), \tag{4.6}$$

$$\Psi_n^{(2)}(z)) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b \frac{\Psi_n^{(1)}(t)}{z-t}\,ds(t), \tag{4.7}$$

а c_n, d_n *– некоторые нормирующие решение в бесконечности множители.*

Доказательство. Применяем стандартную схему см. [4], [5], [6], [10]. Отметим основные моменты, отражающие специфику задачи.

Формулы Сохоцкого для интегралов Коши в (4.6) и (4.7) дают

$$\Psi_{n-}^{(1)} - \Psi_{n+}^{(1)} \;=\; \Psi^{(0)}\,\sigma\prime \quad \text{на} \quad [c,d] \quad \text{и} \quad \Psi_{n-}^{(2)} - \Psi_{n+}^{(2)} \;=\; \Psi^{(1)}\,s\prime \quad \text{на} \quad [a,\,b],$$

что обеспечивает краевые условия (4.2), (4.3).

Разложение интеграла Коши (4.6) в бесконечности и соотношения ортогональности (3.2) дают

$$\Psi_n^{(1)}(z) = \frac{\omega_{2n}(z)}{Q_n(z)}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c^d \frac{Q_n^2(t)}{\omega_{2n}(t)}\,\frac{d\sigma(t)}{z-t} \;=\; O(z^{n-1}).$$

Аналогично для (4.7) соотношения ортогональности (3.3) дают

$$\Psi_n^{(2)}(z) = \frac{1}{\omega_{2n}(z)}\,\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\omega_{2n}^2(t)}{Q_n(t)}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_c^d \frac{Q_n^2(\tau)}{\omega_{2n}(\tau)}\frac{d\sigma(\tau)}{t-\tau}\right)\frac{ds(t)}{z-t} \;=\; O(z^{-2n-1}).$$

Эти асимптотики вместе с $\Psi_n^{(0)}(z) \;:=\; Q_n(z) \;=\; z^n + \ldots$ обеспечивают выполнение условия (4.4) для (4.5). Отметим, что выбор нижних индексов элементов матрицы (4.5) (как и констант c_n, d_n) обусловлен выполнением ключевого условия: равенства единице определителя главного члена асимптотики (4.4). Последнее обстоятельство стандартными рассуждениями приводит к $\det Y(z) = 1$ для $z \in \overline{\mathbb{C}}$ и к единственности решения сформулированной выше матричной задачи Римана-Гильберта. Теорема доказана. ■

4.2 Матричная задача в случае аппроксимаций Фурье-Паде

Сформулируем матричную задачу Римана-Гильберта, эквивалентную системе (3.5), (3.6) и (3.13).

Найти матричнозначную аналитическую функцию $W : U \to \mathbb{C}^{4\times 4}$, такую, что

1. $W \in H(U)$;
2. $\exists$ непрерывные $W_{\pm}(x)$, $x \in (a,b) \cup (c,d)$, такие, что:

$$W_+(x) = W_-(x) \begin{pmatrix} 1 & \sigma' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sigma' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in (c;d), \tag{4.8}$$

$$W_+(x) = W_-(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s' & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in (a;b); \tag{4.9}$$

3. W имеет следующее асимптотическое поведение:

$$W(z) = \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) \begin{pmatrix} z^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-n+3} \end{pmatrix}, \quad z \to \infty; \tag{4.10}$$

4. W имеет асимптотику при подходе к концам отрезков (c,d) и (a,b)

$$W(z) = \begin{pmatrix} O(1) & O(|z-\alpha|^{-1/2}) & O(1) & O(|z-\alpha|^{-1/2}) \\ O(1) & O(|z-\alpha|^{-1/2}) & O(1) & O(|z-\alpha|^{-1/2}) \\ O(1) & O(|z-\alpha|^{-1/2}) & O(1) & O(|z-\alpha|^{-1/2}) \\ O(1) & O(|z-\alpha|^{-1/2}) & O(1) & O(|z-\alpha|^{-1/2}) \end{pmatrix}, \quad z \to \alpha \in \{c,\, d\},$$

$$W(z) = \begin{pmatrix} O(1) & O(1) & O(|z-\beta|^{-1/2}) & O(1) \\ O(1) & O(1) & O(|z-\beta|^{-1/2}) & O(1) \\ O(1) & O(1) & O(|z-\beta|^{-1/2}) & O(1) \\ O(1) & O(1) & O(|z-\beta|^{-1/2}) & O(1) \end{pmatrix}, \quad z \to \beta \in \{a,\, b\}.$$

Справедлива

Теорема 4.2 *Сформулированная матричная задача Римана-Гильберта эквивалентна системе из соотношений ортогональности* (3.5), (3.6), *определяющих аппроксимации Фурье-Паде* (3.4), *и соотношений ортогональности* (3.13). *Причем если решение этой матричной задачи существует, то оно единственно и оно записывается с помощью аппроксимаций Фурье-Паде* (3.4) *следующим образом:*

$$W_n(z) = \begin{pmatrix} \Psi_n^{(0)}(z) & \Psi_n^{(1)}(z) & \Psi_n^{(2)}(z) & \Psi_n^{(3)}(z) \\ c_n\,\Psi_{n-2}^{(0)}(z) & c_n\,\Psi_{n-2}^{(1)}(z) & c_n\,\Psi_{n-2}^{(2)}(z) & c_n\,\Psi_{n-2}^{(3)}(z) \\ d_n\,\Psi_{n-1}^{(0)}(z) & d_n\,\Psi_{n-1}^{(1)}(z) & d_n\,\Psi_{n-1}^{(2)}(z) & d_n\,\Psi_{n-1}^{(3)}(z) \\ e_n\,\Psi_{n-4}^{(0)}(z) & e_n\,\Psi_{n-4}^{(1)}(z) & e_n\,\Psi_{n-4}^{(2)}(z) & e_n\,\Psi_{n-4}^{(3)}(z) \end{pmatrix}, \qquad (4.11)$$

где $\Psi_n^{(0)}(z) := Q_n(z)$, $\Psi_n^{(1)}(z)$ *определяется по формуле* (4.6), *и*

$$\Psi_n^{(2)}(z) = \frac{Q_n(z)}{\omega_{2n}(z)}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b \frac{\omega_{2n}(t)}{Q_n(t)}\,\frac{\Psi_n^{(1)}(t)}{z-t}\,ds(t), \qquad (4.12)$$

$$\Psi_n^{(3)}(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c^d \frac{\Psi_n^{(2)}(t)}{z-t}\,d\sigma(t), \qquad (4.13)$$

а c_n, d_n, e_n *– некоторые нормирующие множители.*

Доказательство. Повторяем стандартную схему. Как и ранее, граничные свойства интегралы Коши в (4.6), (4.12) и (4.6) обеспечивают для (4.11) справедливость (4.8) и (4.9).

Проверим для (4.11) асимптотику в бесконечности (4.10). Так как соотношения ортогональности (3.2) и (3.5) одинаковы, то для $\Psi_n^{(1)}$, как и ранее, имеем

$$\Psi_n^{(1)}(z) = O(z^{n-1}).$$

Для $\Psi_n^{(2)}$ соотношения ортогональности (3.6) дают

$$\Psi_n^{(2)}(z) = \frac{Q_n(z)}{\omega_{2n}(z)}\,\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\omega_{2n}^2(t)}{Q_n^2(t)}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_c^d \left(\frac{Q_n^2}{\omega_{2n}}\right)(\tau)\frac{d\sigma(\tau)}{\tau-t}\right)\frac{ds(t)}{t-z} = O(z^{-n-1}).$$

Наконец, для $\Psi_n^{(3)}$ соотношения ортогональности (3.13) дают

$$\Psi_n^{(3)}(z) = \frac{1}{8\pi^3 Q_n(z)}\int_c^d \frac{Q_n^2(\zeta)}{\omega_{2n}(\zeta)}\left[\int_a^b \frac{\omega_{2n}^2(t)}{Q_n^2(t)}\left(\int_c^d \left(\frac{Q_n^2(\tau)}{\omega_{2n}(\tau)}\right)\frac{d\sigma(\tau)}{\tau-t}\right)\frac{ds(t)}{t-\zeta}\right]\frac{d\sigma(\zeta)}{\zeta-z},$$

что влечет

$$\Psi_n^{(3)}(z) = O(z^{-n-1}).$$

Теорема доказана. ■

Список литературы

[1] A. A. Markov, *Deux demonstrations de la convergence de certaines fractions continues*, Acta Math. **19** (1895), 93–104.

[2] A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, *On the Rate of Convergence of Pade Approximants of Orthogonal Expansions*, Progress in Approximation Theory (A. A. Gonchar and E. B. Saff, eds.), Springer-Verlag (1992), 169-190.

[3] А. А. Гончар, Г. Лопес Лагомасино, *О теореме Маркова для многоточечных аппроксимаций Паде*, Матем. сб., **105(147)**:4 (1978), 512–524; English transl. in Math. USSR-Sb., **34**:4 (1978), 449–459.

[4] А. Р. Итс, А. В. Китаев, А. С. Фокас, *Изомонодромный подход в теории двумерной квантовой гравитации*, УМН, **45**:6(276) (1990), 135–136 ; English transl. in Russian Math. Surveys **45** (1990), no. 6, 155–157.

[5] A. S. Fokas, A. R. Its, and A. V. Kitaev, *The isomonodromy approach to matrix models in 2D quantum gravity*, Comm. Math. Phys. **147** (1992), no. 2, 395–430.

[6] P. Deift, *Orthogonal Polynomials and Random Matrices: a Riemann-Hilbert approach*, Courant Lecture Notes in Mathematics, Vol. 3, New York; Amer. Math. Soc., Providence RI, 1999.

[7] E. M. Nikishin, *Совместные аппроксимации Паде*, Матем. сб.,**113** (155) (1980), 449–519 (in Russian); Math. USSR Sbornik **41** (1982), 409–425.

[8] А. И. Аптекарев, *Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина*, Матем. сб., **190**:5 (1999), 3—44; English transl. in Sbornik Math. **190**, no. 5 (1999), 631–669.

[9] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, *Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде*, Матем. сб., **201**:2 (2010), 29—78; English transl. in Sb. Math., **201**:2 (2010), 183–234

[10] W. Van Assche, J. S. Geronimo and A. B. J. Kuijlaars, *Riemann-Hilbert problems for multiple orthogonal polynomials*, in ‘Special Functions 2000: Current Perspective and Future Directions’ (J. Bustoz et al., eds.), NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry Vol. **30**, Kluwer, Dordrecht, 2001, pp. 23–59.

Содержание