



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Батхин А.Б.**

Сеть семейств  
периодических орбит  
обобщенной задачи Хилла

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки***

Батхин А.Б. Сеть семейств периодических орбит обобщенной задачи Хилла // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 9. 28 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-9>

***Публикации по материалам препринта***

Батхин А.Б. Сеть семейств периодических орбит обобщенной задачи Хилла // ДАН. 2014. Т. 458, № 2. С. 131-137. ISSN 0869-5652.

Batkhin A.B. Web of Families of Periodic Orbits of the Generalized Hill Problem // Doklady Mathematics. 2014. Sept. Vol. 90, no. 2. Pp. 539-544. ISSN 1064-5624.

DOI: [10.1134/S1064562414060064](https://doi.org/10.1134/S1064562414060064)

URL: <http://link.springer.com/article/10.1134%2FS1064562414060064>

**О р д е н а   Л е н и н а**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В.КЕЛДЫША**  
**Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к**

**А. Б. Батхин**

**Сеть семейств периодических орбит  
обобщенной задачи Хилла**

**Москва — 2014**

УДК 517.913

**Александр Борисович Батхин**

Сеть семейств периодических орбит обобщенной задачи Хилла. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2014

Периодические решения задачи Хилла играют важную роль в понимании динамики движения спутника в окрестности меньшей из двух активных масс. Однако классификация и понимание структуры их семейств невозможны без рассмотрения периодических решений некоторой более общей задачи — обобщенной задачи Хилла. Численный анализ этой задачи показал, что все известные на сегодняшний день семейства периодических орбит обобщенной задачи Хилла формируют общую сеть в том смысле, что любая пара семейств прямо или опосредованно связаны друг с другом либо через предельные порождающие решения, либо через общие орбиты с целой локальной кратностью.

**Ключевые слова:** периодические решения, система Гамильтона, симметричное решение, задача Хилла.

**Alexander Borisovich Batkhin**

Web of families of periodic orbits of Generalized Hill's problem

Periodic solutions of Hill's problem play an important role in understanding the dynamics of motion of a satellite in the vicinity of the smaller of the two active mass. However, the classification and understanding of the structure of their families is impossible without consideration of periodic solutions of a more general problem — Generalized Hill's problem. Numerical analysis of this problem showed that all up-to-date known families of periodic orbits of Generalized Hill's problem form a common network in the sense that any pair of families directly or indirectly related to each other either through limiting generating solutions, either through common orbits with integer local multiplicity.

**Key words:** periodic solutions, Hamiltonian system, symmetric solution, Hill's problem.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-01-00023-а.

## 1. Введение

В недавней работе [1] автором было дано описание новых семейств периодических орбит плоской круговой задачи Хилла, имеющей многочисленные приложения в небесной механике и космодинамике. Эти решения были получены с помощью метода порождающих решений, предложенного еще А. Пуанкаре и развитого для исследования ограниченной задачи трех тел независимо А. Д. Брюно [2] и М. Эноном [3]. В работе [4] описана структура порождающих решений задачи Хилла, разработан алгоритм исследования семейств симметричных периодических орбит по их порождающим решениям. Найдено более 20 новых семейств периодических орбит, которые продолжаются до семейств периодических орбит ограниченной задачи трех тел и многие из которых могут быть использованы для проектирования перелетов в коллинеарные точки либрации  $L_1$  и  $L_2$ .

На сегодняшний день разными исследователями найдено более сотни семейств периодических орбит (см. [1; 5—11]), что позволяет в той или иной мере, провести, насколько это возможно для неинтегрируемой системы Гамильтона, каковой является задача Хилла, их классификацию. Однако, по нашему мнению, понимание структуры основных семейств периодических орбит задачи Хилла не представляется возможным без изучения периодических решений и их семейств некоторой более общей задачи, для которой задача Хилла является частным случаем. Это обобщение предполагает, что потенциал центрального тела может быть не только ньютоновым потенциалом притяжения, как в классическом варианте задачи, но также ньютоновым потенциалом отталкивания или же вовсе отсутствовать. Наверное, с точки зрения небесно-механических приложений такое обобщение выглядит не слишком естественным, но с математической точки зрения в регулярных переменных Леви–Чивита, функция Гамильтона такой обобщенной задачи Хилла является общей для всех вышеуказанных вариантов задачи.

В препринте автора [12] предложена следующая функция Гамильтона обобщенной плоской круговой задачи Хилла:

$$H(\mathbf{z}, \varepsilon) = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 + \frac{\sigma}{|\mathbf{x}|} + \varepsilon \left( -x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 \right), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}$  – вектор координат,  $\mathbf{y}$  – вектор импульсов,  $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  и два параметра  $\sigma \in \{-1, 0, +1\}$ ,  $\varepsilon \in [0; 1]$ .

Функция (1) связывает вместе гамильтонианы двух интегрируемых задач:

1) *синодической задачи Кеплера* при  $\varepsilon = 0$ ,  $\sigma = -1$ , которая описывает движение вблизи начала координат,

2) *задачи Энона* при  $\varepsilon = 1$  и  $\sigma = 0$ , которая описывает движение вдали от начала координат,

с гамильтонианом задачи Хилла при  $\varepsilon = 1$ ,  $\sigma = -1$ .

В данной работе рассматривается только случай  $\varepsilon = 1$  при трех различных значениях параметра  $\sigma$ :

- при  $\sigma = -1$  получаем гамильтониан классической задачи Хилла,
- при  $\sigma = 0$  получаем функцию Гамильтона интегрируемой задачи Энона,
- при  $\sigma = +1$  получаем гамильтониан задачи, которую будем называть задачей анти–Хилла, поскольку теперь потенциал притяжения центрального тела заменен потенциалом отталкивания.

Как показано в [13], задача Хилла неинтегрируема и обладает единственным первым интегралом — обобщенным интегралом энергии, который для небесно–механических задач принято записывать в форме интеграла Якоби:

$$J = 3x_1^2 - \frac{2\sigma}{|\mathbf{x}|} - \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 = C, \quad C = -2H(\mathbf{z}) = -2h, \quad (2)$$

где  $C$  — постоянная Якоби, а  $h$  — значение функции Гамильтона (1).

Результаты, представленные в этом препринте, докладывались на международных конференциях «Nonlinear Dynamics — 2013», ХНТУ «Харьковский политехнический институт», Севастополь, 18–23 июня 2013 года [14], CELMEC–VI, Viterbo, Italy, 1–7 September 2013, а также на семинаре им. В. В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости кафедры теоретической механики и механотроники Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова 9 октября 2013 года.

## 2. Обобщенная задача Хилла и ее свойства

В [15] предложен вариант функции Гамильтона задачи Хилла с дополнительным параметром  $\varepsilon$ , таким, что при  $\varepsilon = 0$  получается гамильтониан задачи Кеплера в синодической (равномерно вращающейся) системе координат, а при  $\varepsilon = 1$  — гамильтониан задачи Хилла. Там же предложено исследовать периодические решения задачи Хилла путем продолжения по параметру  $\varepsilon$  соответствующих периодических решений задачи Кеплера. Однако, эта схема была частично реализована лишь недавно в работе автора [12], где анонсированы результаты о продолжении двояко симметричных периодических решений. В процессе исследования выяснилось, что некоторые решения задачи Кеплера могут быть продолжены до соответствующих решений задачи Хилла лишь путем продолжения их в семейства задачи анти–Хилла с последующим переходом к семействам задачи Хилла через соответствующие порождающие решения. В связи с этим, а также с учетом того, что многие семейства периодических орбит задачи Хилла оказались связанными друг с другом через семейства периодических орбит задачи анти–Хилла, возникла потребность более подробно исследовать последние.

**2.1. Задача анти–Хилла.** Поскольку интерес к периодическим решениям задачи анти–Хилла вызван исключительно потребностью более полно понять структуру периодических решений исходной задачи Хилла, то опишем здесь только те свойства задачи анти–Хилла, которые облегчат это понимание.

Во-первых, в отличие от исходной задачи Хилла, канонические уравнения задачи анти–Хилла не имеют стационарных решений, а все полученные численно периодические решения представляют собой орбиты вокруг начала координат. Область возможных движений оказывается изолированной от начала координат при всех значениях константы Якоби  $C$ . При значениях  $C \ll 0$  граница этой области представляет собой в первом приближении окружность радиуса  $2/|C|$ . При стремлении  $C$  к нулю слева область запрещенного движения вокруг начала координат увеличивается и при  $C = 0$  делит плоскость  $(x_1, x_2)$  на две части. Описанные изменения области допустимых движений для значений  $C = -5, -1, 0$  показаны на рис. 1

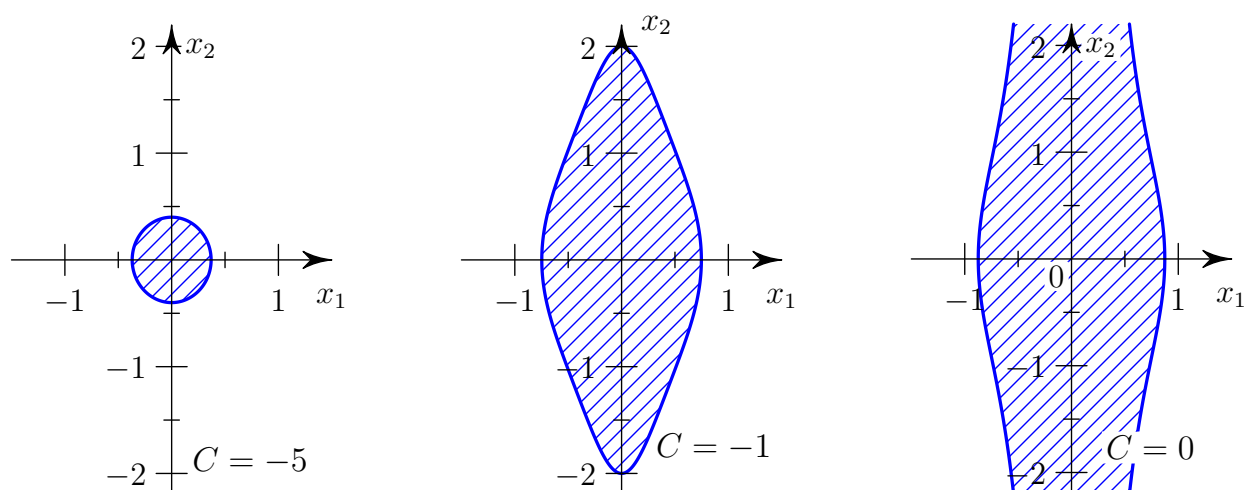


Рис. 1. Область допустимого движения для значений постоянной Якоби  $C = -5$ ,  $C = -1$  и  $C = 0$  (слева направо). Запрещенная для движения область показана штриховкой.

Таким образом, указанные выше свойства позволяют сделать следующие выводы о поведении периодических решений задачи анти–Хилла.

1) Отсутствуют орбиты столкновения, поскольку начало координат не принадлежит области допустимых движений. Следовательно, глобальная кратность орбит вдоль семейства периодических решений является инвариантом.

2) Периодические решения вокруг начала координат возможны лишь при значениях константы Якоби  $C < 0$ .

3) Ввиду отсутствия точек либрации каждое семейство периодических орбит при продолжении достигает своего наибольшего значения  $C < 0$ , а затем

либо заканчивается на семействе периодических орбит первого рода по Пуанкаре (см. стр. 17), либо продолжается по  $C$  до значения  $-\infty$ , стремясь в пределе к порождающему решению.

**2.2. Регуляризация обобщенной задачи.** Гамильтониан обобщенной задачи Хилла имеет единственную особенность в начале координат, которая устраняется с помощью процедуры регуляризации. Регуляризация функции Гамильтона обычно проводится в два этапа, но в силу некоторых особенностей здесь применяется дополнительный этап. Опишем эти этапы подробнее.

**Этап 1.** Вводятся переменные Леви–Чивита

$$\mathbf{x} = \Lambda(\mathbf{q})\mathbf{q}, \quad \mathbf{y} = \frac{2}{|\mathbf{q}|^2}\Lambda(\mathbf{q})\mathbf{p}, \quad (3)$$

где  $\Lambda(\mathbf{q})$  – матрица Леви-Чивита

$$\Lambda(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix}.$$

Это преобразование есть каноническое преобразование с валентностью 4. Отметим, что в работе М. Л. Лидова [16] было предложено унивалентное преобразование с производящей функцией  $S(\mathbf{y}, \mathbf{q}) = \mathbf{y}^T \Lambda(\mathbf{q})\mathbf{q}$ , но в дальнейшем оказалось, что вариант преобразования (3) приводит в итоге к выражению с целыми коэффициентами, в отличие от варианта преобразования Лидова.

**Этап 2.** Вводится новая независимая переменная  $\nu$  с помощью уравнения

$$\frac{dt}{d\nu} = \frac{|\mathbf{x}|}{4} = \frac{|\mathbf{q}|^2}{4} \quad (4)$$

и осуществляется переход к новому гамильтониану

$$\tilde{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{|\mathbf{q}|^2}{4} \left( H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \tilde{h} \right),$$

где константа  $\tilde{h}$  выбирается так, чтобы выражение  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \tilde{h} = 0$ , т. е.  $\tilde{h} = -H(\mathbf{z}) = -h$ . В силу соотношения между  $h$  и  $C$  в формуле (2) имеем, что константы  $\tilde{h}$  и  $C$  суть одного знака.

После этого этапа функция Гамильтона обобщенной задачи Хилла принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tilde{h}) = & \frac{\tilde{h}}{4} (q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) (q_2 p_1 - q_1 p_2) - \\ & - \frac{1}{4} (q_1^2 + q_2^2) (q_1^4 - 4q_1^2 q_2^2 + q_2^4) + \frac{\sigma}{4} \equiv 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Функция (5) есть многочлен от фазовых переменных и параметра  $\tilde{h}$ , что позволяет выполнить следующий шаг упрощения с применением алгоритмов степенной геометрии (см. [17, Гл. 4]). Если построить носитель  $\mathbf{S}$  функции  $\tilde{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tilde{h})$  в пространстве  $\mathbb{R}^5$  показателей степеней переменных, а затем выполнить проектирование на трехмерное пространство по правилу

$$\Pi : (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) \rightarrow (r_1 + r_2, r_3 + r_4, r_5),$$

то получим проекцию  $\mathbf{S}''$  носителя  $\mathbf{S}$ , состоящую из четырех точек

$$\mathbf{S}'' = \{(2,0,1), (0,2,0), (3,1,0), (6,0,0)\},$$

которые соответствуют своим слагаемым в выражении функции  $\tilde{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tilde{h})$  (5). Эти точки лежат на плоскости с нормалью  $\mathbf{N} = (1,3,4)$ . Значит, гамильтониан (5) является квазиоднородным многочленом, и, следовательно, с помощью степенного преобразования можно уменьшить число его переменных на единицу.

**Этап 3.** Вектор нормали  $\mathbf{N}$  определяет следующее степенное каноническое преобразование

$$\mathbf{q} = 2^{3/4} |\tilde{h}|^{1/4} \mathbf{Q}, \quad \mathbf{p} = 2^{1/4} |\tilde{h}|^{3/4} \mathbf{P}, \quad \nu = \sqrt{2/|\tilde{h}|} \tau, \quad (6)$$

которое после применения к функции (5) приводит к гамильтониану

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = & \frac{\delta}{2} (Q_1^2 + Q_2^2) + \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2) + 2 (Q_1^2 + Q_2^2) (Q_2 P_1 - Q_1 P_2) - \\ & - 4 (Q_1^2 + Q_2^2) (Q_1^4 - 4 Q_1^2 Q_2^2 + Q_2^4) + 2^{-5/2} |\tilde{h}|^{-3/2} \sigma \equiv 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\delta = \pm 1$ . При этом  $\delta = +1$  выбирается при  $\tilde{h} > 0$ , т. е. при  $C > 0$ , а  $\delta = -1$  выбирается при  $\tilde{h} < 0$ , т. е. при  $C < 0$ . При  $\tilde{h} = 0$  преобразование (6) имеет особенность и неприменимо. Преобразование (6) было предложено в [7].

Таким образом, в переменных  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  гамильтонианы задач Хилла и анти-Хилла отличаются лишь значением постоянного члена

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-5/2} |\tilde{h}|^{-3/2} \sigma \equiv \sigma |C|^{-3/2} / 2.$$

Случай  $\Delta = 0$  соответствует гамильтониану задачи Энона, поскольку последнее слагаемое в выражении (7) соответствует слагаемому  $\sigma/|\mathbf{x}|$  в (1).

**Замечание 1.** Несмотря на то что задача Энона интегрируема, поскольку обладает дополнительным первым интегралом  $\mathcal{F} = x_1 + y_2$  (см. [4; 18]), в регулярных переменных  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  ее гамильтониан уже неинтегрируемый. Это связано с тем, что преобразование времени (4) не сохраняет указанный выше интеграл  $\mathcal{F}$ .



В регулярных переменных начало координат  $O$  становится положением равновесия, при  $C > 0$  устойчивым, а при  $C < 0$  — неустойчивым. При  $C = -\infty$  этой точке соответствует нулевое значение функции (7), следовательно, фазовая скорость при движении по любой траектории, проходящей через нее, становится в ней равной нулю.

Преобразование Леви–Чивита (3) представляет собой двулистное накрытие координатного пространства  $(x_1, x_2)$ . Любой объект в исходных координатах будет представлен на плоскости  $(Q_1, Q_2)$  дважды. Оси  $Ox_1$  соответствуют две координатные оси  $OQ_1$  и  $OQ_2$ , а оси  $Ox_2$  — биссектрисы квадрантов.

### 3. Структура порождающих решений задачи анти–Хилла

Идея порождающих решений, предложенная А. Пуанкаре [19], оказалась очень плодотворной при исследовании периодических решений ограниченной задачи (см. [2; 3]).

**3.1. Порождающие решения задачи Хилла.** Задача Энона, являясь предельным случаем задачи Хилла при  $C \rightarrow -\infty$ , позволяет явно описать те ее решения, которые могут быть порождающими. Аналитически это сделано в [5] в исходных переменных  $(x, y)$ . Как следует из замечания 1, получить их представление в регулярных переменных  $(Q, P)$  не представляется возможным в силу неинтегрируемости задачи Энона в этих переменных.

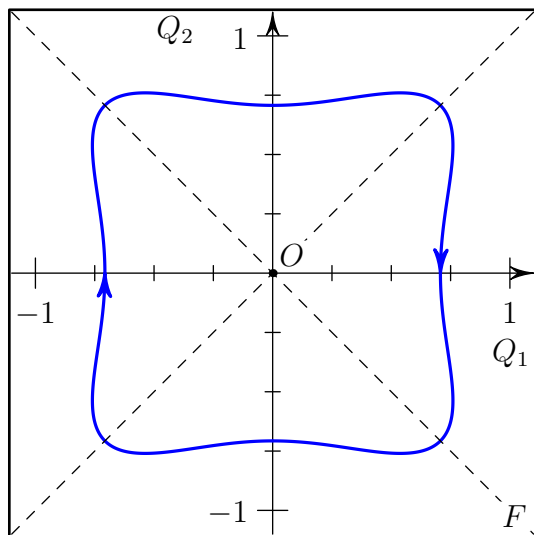


Рис. 2. Орбита регулярного порождающего решения  $F$  в координатах  $(Q_1, Q_2)$ .

В силу двулистного накрытия преобразования Леви–Чивита один оборот орбиты в регулярных координатах соответствует двум оборотам в физических.

В [4] показано, что в задаче Хилла единственным регулярным порождающим решением является однообратное обратное двояко симметричное решение с периодом  $T = 2\pi$ , представляющее собой эллипс с центром в начале координат и отношением полуосей  $1 : 2$ . Обозначим это порождающее решение символом  $F$ , поскольку оно задает семейство обратных спутниковых орбит  $f$  и является продолжением семейства  $E_{11}^+$  симметричных орбит ограниченной задачи [3; 8]. Орбита порождающего решения в регулярных координатах показана на рис. 2. В силу двулистного накрытия преобразования Леви–Чивита один оборот орбиты в регулярных координатах соответствует двум оборотам в физических.

В статье М. Энона [8] было сформулировано утверждение о структуре порождающих решений семейств периодических орбит второго вида. Это утверждение использовало результаты о структуре порождающих решений ограниченной задачи трех тел, изложенные в книге [3].

В работе автора [4] было показано, что все порождающие решения периодических орбит второго вида задачи Хилла представляют собой последовательности, составленные из дуг двух типов, каждая из которых проходит по крайней мере дважды через начало координат.

I. Дуги первого типа — это эпициклоиды, симметричные относительно оси абсцисс, обозначаемые символами  $\pm j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Эпициклоида с номером  $j$  дважды проходит через начало координат через интервал времени  $2\tau_j$ , где  $\tau_j$  —  $j$ -й положительный корень трансцендентного уравнения

$$4 \sin t = 3t \cos t. \quad (8)$$

II. Дуги второго типа — это два эллипса, симметричные относительно оси ординат, обозначаемые символами  $i$  и  $e$ . Период движения по эллипсу равен  $2\pi$ .

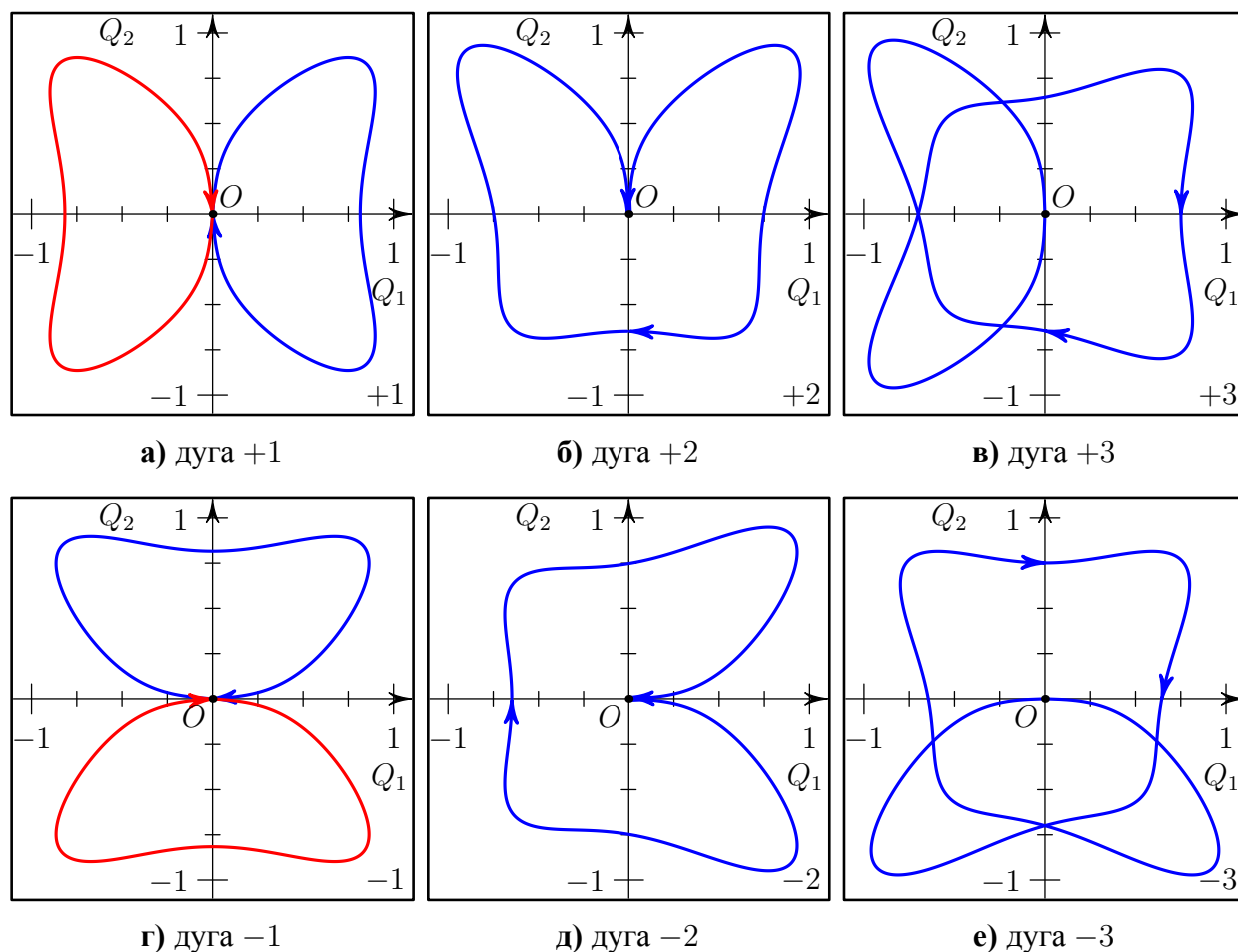


Рис. 3. Дуги первого типа в координатах  $(Q_1, Q_2)$ .

В физических координатах изображения дуг приведены в [3—5]. Здесь даны их изображения в регулярных координатах. На рисунках 3 а), г) и 4 показана сама дуга (синим) и ее «двойник» (красным).

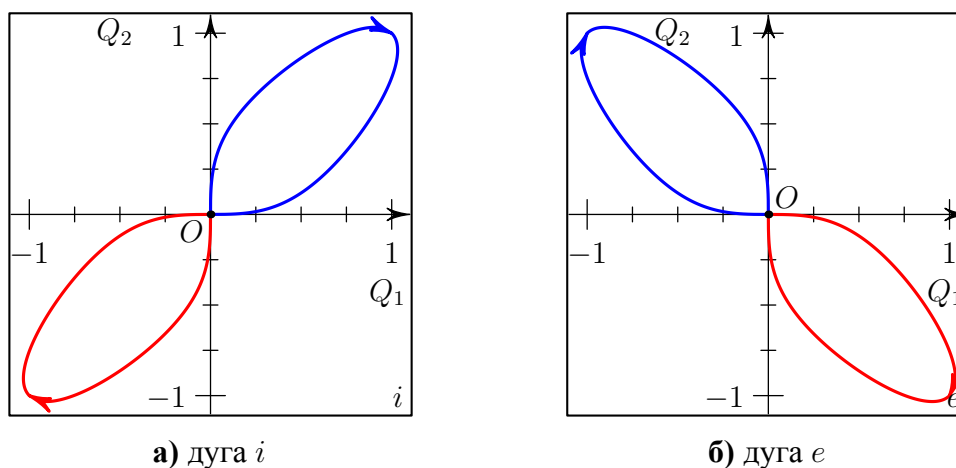


Рис. 4. Дуги второго типа в координатах  $(Q_1, Q_2)$ .

Эти дуги вблизи начала координат соединяются друг с другом согласующими гиперболическими траекториями двух видов, каждая из которых есть решение задачи Кеплера. Для различных пар дуг двух типов были предложены оценки параметров согласующих гипербол: эксцентриситет  $e$  и аргумент перигея  $\varpi$ .

**Утверждение 1.** *Последовательность, составленная из дуг  $\pm j$ ,  $i$  и  $e$ , в которой нет двух подряд идущих дуг  $ii$  или  $ee$ , является порождающим решением для семейства периодических орбит задачи Хилла. Такую последовательность будем называть порождающей.*

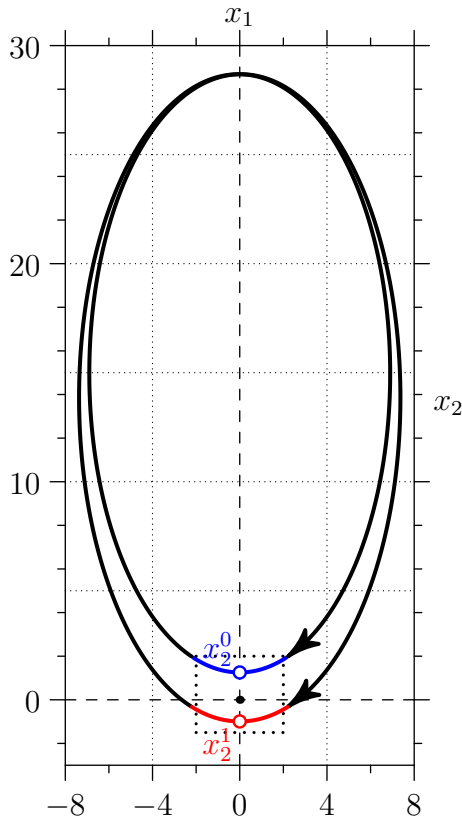
Строгому доказательству этого утверждения, по-видимому, посвящена книга [20], хотя некоторые эвристические соображения о правильности утверждения 1 можно найти в [3, Гл. 4].

**3.2. Порождающие решения задачи анти–Хилла.** Для выяснения структуры порождающих решений задачи анти–Хилла автором был проделан вычислительный эксперимент, который показал, что ограничений утверждения 1 на отсутствие в порождающей последовательности двух дуг  $ii$  или  $ee$  в этом случае нет.

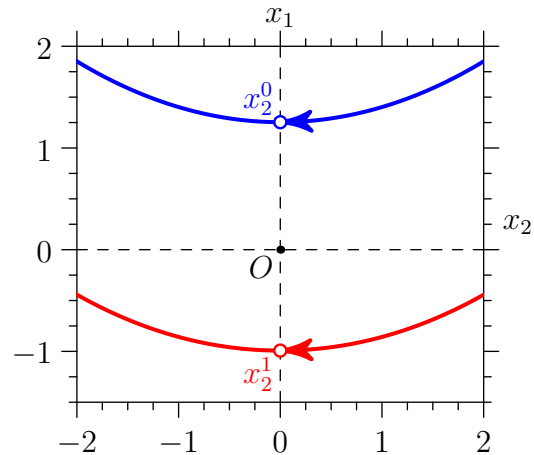
В задаче анти–Хилла для пары дуг первого типа, либо первого и второго типов, либо двух разных дуг второго типа можно построить в первом приближении согласующие гиперболы так, как это было сделано для задачи Хилла в [4].

Оценки эксцентриситетов  $e$  и аргументов перицентра  $\varpi$  согласующих гипербола получаютя такими же, как и для задачи Хилла. Так, для  $\Sigma_1$ –симметричной гиперболы, «сшивающей» дугу  $\pm j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , эксцентриситет  $e_j = \sqrt{1 + \frac{4}{9\tau_j^2}}$ , аргумент перицентра  $\varpi = \pi$  или  $0$ . Для  $\Sigma_2$ –симметричной гиперболы, «сшивающей» две дуги  $\pm j$  и  $\mp j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , эксцентриситет  $e_j = \sqrt{1 + \frac{9\tau_j^2}{4}}$ , аргумент перицентра  $\varpi = \pm \frac{\pi}{2}$ . При этом расстояние до начала координат  $r_{per} = (e_j + 1)/|C| > 2/|C|$ . Здесь  $\tau_j$  —  $j$ -й положительный корень уравнения (8).

Однако, принципиальное отличие задачи анти–Хилла состоит в том, что для пары дуг  $ii$  (или  $ee$ , соответственно) можно построить две разных согласующих траектории.



а) Дуга участка  $i^+i$  показана синим, дуга участка  $i^-i$  — красным цветом



б) Увеличенная часть орбиты вблизи начала координат

Рис. 5. Орбита семейства задачи анти–Хилла, задаваемого последовательностью  $\{ii\}$ , при значении  $C \approx -50$ .

В качестве примера рассмотрим орбиты семейства задачи анти–Хилла, ко-

торое в пределе стремится к последовательности  $\{i, i\}$ . Орбиты этого семейства симметричны относительно оси  $Ox_2$  и, следовательно, дважды ортогонально пересекают ее через половину периода. На рисунке 5а) видно, что орбита состоит из двух эллипсов с полуосями находящимися в отношении 1 : 2. Верхний эллипс вблизи начала координат ортогонально пересекает ось  $Ox_2$  в точке  $x_2^0$  с положительной координатой (показана синим цветом), нижний эллипс — в точке  $x_2^1$  с отрицательной ординатой (показана красным цветом). При продолжении семейства по  $C \rightarrow -\infty$  точки ортогонального пересечения стремятся к началу координат, период стремится к значению  $4\pi$ , следовательно, в пределе получается орбита, состоящая из двух дуг  $i$ .

Поскольку пара дуг  $ii$  (или  $ee$ ) может быть согласована двумя разными дугами, то порождающая последовательность, содержащая такую пару, задает два семейства периодических орбит задачи анти–Хилла. Будем обозначать пару дуг  $ii$ , соединяющихся в точке с ординатой  $x_2 > 0$ , через  $i^+i$  (или  $e^+e$  для пары дуг  $ee$ ), а пару дуг  $ii$ , соединяющихся в точке с ординатой  $x_2 < 0$ , через  $i^-i$  (или  $e^-e$  соответственно) (см. рис. 5б).

**Утверждение 2.** *Последовательность, составленная из дуг  $\pm j, i, e$  следующих в произвольном порядке за исключением последовательностей  $\{i\}$  и  $\{e\}$ , является порождающим решением для семейства периодических орбит задачи анти–Хилла.*

Из утверждения 2 следует, что множество порождающих последовательностей задачи Хилла есть собственное подмножество множества порождающих последовательностей задачи Хилла, т.е. любое семейство периодических орбит второго вида задачи Хилла может быть продолжено до семейства периодических орбит задачи анти–Хилла. Порождающая последовательность задачи Хилла задает два семейства: одно для задачи Хилла, другое для задачи анти–Хилла. Если порождающая последовательность задачи анти–Хилла содержит  $N$  пар дуг  $ii$  или  $ee$ , то она задает  $2^N$  семейств задачи анти–Хилла. Порождающие последовательности, задающие более двух различных семейств, следуя Энону (см. [3, Гл. 6]), называются *бифуркационными*. Например, последовательность  $\{i, i, e, e\}$  задает четыре семейства периодических орбит: два семейства из них являются двойко симметричными, а два — однократно симметричными.

**3.3. Симметрии порождающих последовательностей.** В статье автора [1] сформулированы, а в препринте [21] доказаны утверждения, позволяющие по порождающей последовательности задачи Хилла определять тип симметрии и глобальную кратность  $M$  орбит соответствующего семейства. Аналогичные утверждения могут быть сформулированы для порождающих последовательностей задачи анти–Хилла.

Напомним, что уравнения обобщенной задачи Хилла инвариантны относительно конечной группы  $\mathcal{G}$  четвертого порядка преобразований симметрии с двумя образующими, обозначаемыми  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , а их действие на расширенном фазовом пространстве определяется соотношениями

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &: (t, x_1, x_2, y_1, y_2) \rightarrow (-t, x_1, -x_2, -y_1, y_2), \\ \Sigma_2 &: (t, x_1, x_2, y_1, y_2) \rightarrow (-t, -x_1, x_2, y_1, -y_2).\end{aligned}$$

Композицию преобразований  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  обозначим  $\Sigma_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_1 \circ \Sigma_2 = \Sigma_2 \circ \Sigma_1$ .

Все периодические решения задачи Хилла могут быть разделены на 3 группы в зависимости от того, как они меняются под действием указанных преобразований:

**несимметричные** решения, которые под действием любого из указанных преобразований переходят в другое решение;

**$\Sigma_1$ - или  $\Sigma_2$ -симметричные** решения, которые под действием одного из указанных преобразований переходят сами в себя, при этом другие преобразования позволяют получить еще одно новое решение;

**центрально симметричные** решения, инвариантные лишь относительно преобразования  $\Sigma_{12}$ ;

**двукратно симметричные** решения, инвариантные относительно любого из указанных преобразований.

Основные свойства порождающих последовательностей задачи Хилла по отношению к группе преобразований  $\mathcal{G}$  были указаны в [1], однако для обобщенной задачи сохраняются лишь два следующих.

**Свойство 1.** *Порождающая последовательность определяется с точностью до циклической перестановки входящих в нее дуг.*

**Свойство 2.** *Порождающая последовательность под действием одного из преобразований  $\Sigma_1$  или  $\Sigma_2$  переходит в последовательность, в которой дуги исходной последовательности заменены согласно таблице 1а) и записаны в обратном порядке. Преобразование  $\Sigma_{12} \equiv \Sigma_1 \circ \Sigma_2$  меняет дуги в последовательности согласно таблице 1а), но не меняет их порядка.*

Для определения симметрии порождающей последовательности расширим таблицу I из [8], добавив в нее преобразование пар дуг  $ii$  и  $ee$ .

**Определение 1.** Порождающая последовательность называется  $\Sigma_i$ -палиндромной, если она инвариантна относительно преобразования  $\Sigma_i$ ,  $i = 1, 2$ , т. е. при записи ее элементов в обратном порядке с соответствующей заменой их согласно таблице 1а) она не меняется. Также будем называть  $\Sigma_i$ -палиндромной и такую порождающую последовательность, которую можно сделать с помощью циклической перестановки палиндромной.

Таблица 1. Вспомогательные таблицы

а) Преобразование дуг

| Дуга   | $\Sigma_1$ | $\Sigma_2$ | $\Sigma_{12}$ |
|--------|------------|------------|---------------|
| $+j$   | $+j$       | $-j$       | $-j$          |
| $-j$   | $-j$       | $+j$       | $+j$          |
| $i$    | $e$        | $i$        | $e$           |
| $e$    | $i$        | $e$        | $i$           |
| $i^+i$ | $e^-e$     | $i^+i$     | $e^-e$        |
| $i^-i$ | $e^+e$     | $i^-i$     | $e^+e$        |
| $t$    | $-t$       | $-t$       | $t$           |

б) Знаки ординат входящей и выходящей дуг

| Дуга | Начало | Конец |
|------|--------|-------|
| $+j$ | $+$    | $-$   |
| $-j$ | $-$    | $+$   |
| $i$  | $+$    | $+$   |
| $e$  | $-$    | $-$   |

**Утверждение 3.** Перечисленные ниже условия выделяют порождающие последовательности с соответствующим типом симметрии.

- Порождающая последовательность  $\Sigma_1-$  ( $\Sigma_2-$ )симметричная, если она либо  $\Sigma_1-(\Sigma_2-)$  палиндромная, либо может быть разбита на две  $\Sigma_1-(\Sigma_2-)$  палиндромных подпоследовательности.

- Порождающая последовательность двояко симметричная, если она может быть разбита на две таких  $\Sigma_1-(\Sigma_2-)$  палиндромных подпоследовательности, которые будут взаимно  $\Sigma_2-$  ( $\Sigma_1-$ )симметричны.

- Порождающая последовательность центрально симметрична, если она может быть разбита на две взаимно  $\Sigma_{12}$ -симметричных подпоследовательности.

**Пример 1.** Рассмотрим порождающую последовательность  $\{i, i, e, e\}$ . В силу утверждения 2 она есть порождающее решения для семейств периодических орбит задачи анти-Хилла, и, поскольку эта последовательность содержит две пары  $ii$  и  $ee$ , следовательно, она задает четыре семейства периодических орбит. Два семейства будут состоять из двояко симметричных орбит. Соответствующие им ветви описываются последовательностями  $\{i^+i, e^-e\}$  и  $\{i^-i, e^+e\}$ . Действительно, например, под действием преобразования  $\Sigma_1$  первая последовательность согласно свойству 2 и таблице 1а) перейдет в последовательность  $\{e^-e, i^+i\}$ , которая по свойству 1 совпадает с исходной последовательностью. Два семейства будут состоять из  $\Sigma_2$ -симметричных орбит. Соответствующие им ветви описываются последовательностями  $\{i^+i, e^+e\}$  и  $\{i^-i, e^-e\}$ . Эти последовательности согласно утверждению 3 являются  $\Sigma_2-$ , но не  $\Sigma_1$ -симметричными.

**3.4. Глобальные кратности порождающих последовательностей.** Глобальная кратность периодической орбиты играет значительную роль в понимании

связей между различными семействами периодических решений.

**Определение 2.** Число оборотов  $M$  периодической орбиты вокруг начала координат называется глобальной кратностью орбиты. Величина  $M$  берется со знаком «+» при движении по часовой стрелке, «–» — при движении против часовой.

Глобальная кратность  $M$  не является инвариантом семейства периодических орбит, поскольку может меняться при наличии у семейства орбиты столкновения, но является полезной характеристикой для классификации семейств.

Правило вычисления глобальной кратности  $M$  орбит той части семейства, которая непосредственно задается порождающей последовательностью для случая задачи Хилла сформулировано и обосновано в [1]. При этом использовалась методика, предложенная М. Эноном в [8], основанная на его монографии [3].

**Правило 1.** Для вычисления глобальной кратности  $M$  орбит семейства, задаваемого порождающей последовательностью  $\{j_1, \dots, j_k, j_{k+1}, \dots, j_n\}$  задачи Хилла, следует найти сумму

- числа «внешних» пересечений с осью  $Ox_1$ , равную  $2j_k - 1$  для каждой дуги  $j_k$  первого типа и равную нулю для каждой дуги второго типа;
- числа «внутренних» пересечений с осью  $Ox_1$  согласующих гипербол, равную  $+2$  для каждой пары дуг  $(j_k, j_{k+1})$ , если знаки ординат конечной точки дуги  $j_k$  и начальной точки дуги  $j_{k+1}$  равны, и равную  $-1$ , если эти знаки различны;
- и разделить полученную сумму на 2.

Для задачи анти–Хилла это правило пришлось переработать в связи с тем, что теперь порождающая последовательность может быть бифуркационной и, тем самым, задает несколько семейств периодических орбит.

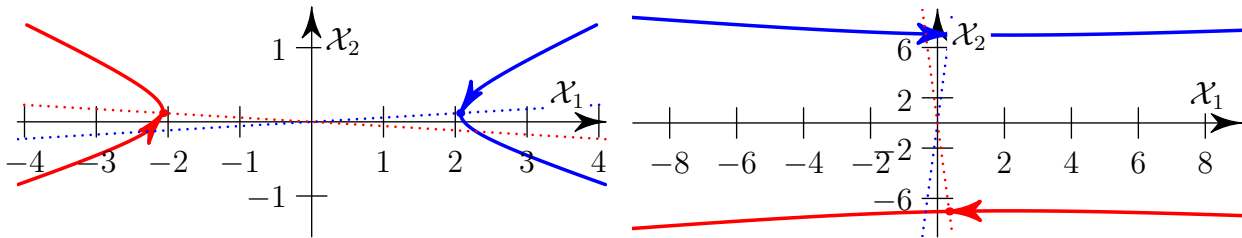
**Правило 2.** Для вычисления глобальной кратности  $M$  орбит семейства, задаваемого порождающей последовательностью  $\{j_1, \dots, j_k, j_{k+1}, \dots, j_n\}$  задачи анти–Хилла, следует найти сумму

- числа «внешних» пересечений с осью  $Ox_1$ , равную  $2j_k - 1$  для каждой дуги  $j_k$  первого типа и равную нулю для каждой дуги второго типа;
- числа «внутренних» пересечений с осью  $Ox_1$  согласующих гипербол, равную 0 для каждой пары дуг  $(j_k, j_{k+1})$ , если знаки ординат конечной точки дуги  $j_k$  и начальной точки дуги  $j_{k+1}$  равны, и равную  $+1$ , если эти знаки различны;
- если в порождающую последовательность входит подпоследовательность  $ii$  (или  $ee$ ), то следует рассмотреть два случая:
  - для пары  $i^+i$  ( $e^-e$  соответственно) число «внутренних» пересечений с осью  $Ox_1$  равно 0,
  - для пары  $i^-i$  ( $e^+e$  соответственно) «внутренних» пересечений с осью  $Ox_1$  равно  $+2$ ;



- и разделить полученную сумму на 2.

Обоснование правила 2 получается таким же способом, как это было сделано для правила 1, если учесть, что для любой пары дуг в порождающей последовательности, отличной от  $ii$  или  $ee$ , согласующая гипербола есть решение задачи движения точки в поле центральной силы с потенциалом отталкивания. Получаем два варианта гипербол. В первом случае это гиперболы с эксцентриситетом, близким к единице, и аргументом перицентра, близким к значению 0 или  $\pi$ , которые обходят начало координат по часовой стрелке и пересекают ось абсцисс однократно. Они показаны на рис. 6а). Во втором случае это гиперболы с эксцентриситетом  $e \gg 1$  и аргументом перицентра  $\varpi = \pm\pi/2$ , которые огибают начало координат против часовой стрелки, но при этом не пересекают оси абсцисс. Они показаны на рис. 6б). Так же ведут себя и дуги для пар  $i^+i$  и  $e^-e$ . Дуга пары  $i^+i$  показана на рис. 5б) синим цветом, дуга пары  $e^-e$  симметрична ей относительно оси абсцисс. А вот дуги для пар  $i^-i$  и  $e^+e$  устроены так, как гиперболы с перицентром  $\varpi = \pm\pi/2$  задачи Хилла. Дуга пары  $i^-i$  показана на рис. 5б) красным цветом, дуга пары  $e^+e$  симметрична ей относительно оси абсцисс.



а) Гиперболы с параметрами  $e = 1.07$ ,  $\varpi \approx 0$  (синим),  $\varpi \approx \pi$  (красным).

б) Гиперболы с параметрами  $e = 6$ ,  $\varpi \approx \pi/2$  (синим),  $\varpi \approx -\pi/2$  (красным).

Рис. 6. Согласующие гиперболы задачи анти–Хилла. Случай малых эксцентриситетов показан слева, больших — справа.

Правила 1 и 2 позволяют сформулировать следующие утверждения.

- 1) Порождающие последовательности семейств с прямыми орбитами в задаче Хилла должны включать в себя дуги второго типа, поскольку только они позволят в итоге получить значение  $M < 0$ .
- 2) Семейства задачи анти–Хилла, задаваемые порождающими последовательностями, состоят только из обратных орбит.
- 3) Глобальная кратность  $M$  является инвариантом семейства периодических орбит задачи анти–Хилла, поскольку в этой задаче нет орбит столкновения и величина  $M$  не может измениться вдоль семейства.

**Пример 2.** Для всех ветвей порождающей последовательности  $\{i, i, e, e\}$  (см. пример 1) вычислим глобальную кратность периодических орбит. Поскольку последовательность состоит только из дуг второго типа, то число «внешних» пересечений равно нулю. Для ветви, что задается последовательностью  $\{i^+i, e^-e\}$  пары дуг  $i^+i$  и  $e^-e$ , дают число «внутренних» пересечений, равное нулю, а пары  $i, e$  и  $e, i$  — равное  $+1$ . Следовательно, для этой ветви  $M = +1$ . Аналогично, для последовательности  $\{i^-i, e^+e\}$  получаем  $M = +3$ . Взаимно  $\Sigma_1$ –симметричные последовательности  $\{i^+i, e^+e\}$  и  $\{i^-i, e^-e\}$  задают семейства  $\Sigma_2$ –симметричных орбит с глобальной кратностью  $M = +2$ .

Помимо глобальной кратности  $M$  периодического решения иногда удобно рассматривать его локальную кратность по отношению к другому периодическому решению. Рассмотрим два семейства периодических орбит и обозначим через  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  параметры этих семейств. Тогда такие параметры периодического решения, как вектор начальных условий  $\mathbf{z}^0$ , период  $T$  и индекс устойчивости  $S$ , суть гладкие функции от параметра семейства  $\lambda$ . Пусть два семейства имеют общее решение. Тогда, в соответствии с теорией Пуанкаре о периодических решениях первого и второго рода (см. [22, Гл. XXXIII]), должна существовать пара значений параметров  $\lambda_1^*$  и  $\lambda_2^*$ , таких, что

$$z_2^0(\lambda_2^*) = z_1^0(\lambda_1^*), \quad T_2(\lambda_2^*) = qT_1(\lambda_1^*), \quad S_2(\lambda_2^*) = \cos \frac{2\pi p}{q}, \quad S_1(\lambda_1^*) = 1,$$

где  $p, q \in \mathbb{N}$ . Дробь  $p/q$  будем называть *локальной кратностью* периодического решения второго семейства по отношению к первому. Первое периодическое решение с периодом  $T$  называется решением *первого рода*, а второе — с периодом  $qT$  — решением *второго рода*. Отметим, что знаменатель  $q = M_2/M_1$ , где  $M_i$  — глобальная кратность  $i$ -го семейства.

Будем различать следующие критические значения индекса устойчивости  $S_1$  периодического решения первого рода.

- Если  $S_1 = +1$  и при этом гамильтониан  $H$  не достигает экстремума, тогда семейство первого рода меняет устойчивость и появляется пара семейств второго рода.

- Если  $S_1 = -1$ , то семейство первого рода меняет устойчивость и появляется двояко периодическое решение второго рода.

В [23] показано, что если решение первого рода однократно симметричное, то решение второго рода также всегда симметрично, кроме случая, когда  $S_1 = +1$ , когда происходит бифуркация потери симметрии. Для двояко симметричного решения первого рода ситуация несколько иная.

**Утверждение 4.** Пусть двояко симметричное периодическое решение первого рода имеет индекс устойчивости  $S = \cos 2\pi \frac{p}{q}$ , тогда

*I* если числа  $p = q = 1$  и функция Гамильтона не достигает экстремума, то имеется пара однократно симметричных периодических решений второго рода. Эти решения имеют локальную кратность 1 и взаимно симметричны относительно потерянной ими симметрии;

*II* если числа  $p$  и  $q$  нечетные, то имеется одно двойко симметричное периодическое решение второго рода с локальной кратностью  $q$ ;

*III* если хотя бы одно из чисел  $p$  или  $q$  четно, то имеется четыре однократно симметричных периодических решения второго рода с локальной кратностью  $q$ . Эти решения формируют пары и в каждой паре они взаимно симметричны. Таким образом, для двойко симметричного решения бифуркация удвоения периода всегда сопровождается бифуркацией потери симметрии.

## 4. Результаты исследования семейств периодических орбит

**Определение 3.** Будем называть два семейства периодических орбит — одно семейство задачи Хилла, другое семейство задачи анти–Хилла — *связанными*, если они имеют одну и ту же порождающую последовательность.

Если рассматривать связанные семейства в рамках регуляризованной задачи, то они представляют собой участки (ветви) одного семейства периодических орбит.

Для обозначения семейств задачи анти–Хилла, связанных с соответствующими семействами задачи Хилла, используем имена последних со значком  $\sim$ . Многие семейства задачи Хилла второго вида имеют в пределе две разных порождающих последовательности. В этом случае соответствующие ветви различаем, указывая верхний индекс  $A$  или  $B$ . Например, семейство  $f_3$  имеет две ветви, обозначаемые нами  $f_3^A$  и  $f_3^B$  соответственно. Первая ветвь задается порождающей последовательностью  $\{+1, i, -1, e\}$ , а вторая ветвь — порождающей последовательностью  $\{+1, -1\}$ . Тогда семейство задачи анти–Хилла, задаваемое первой порождающей последовательностью, обозначается  $\tilde{f}_3^A$ , а семейство, задаваемое второй последовательностью, —  $\tilde{f}_3^B$ .

Рассмотрим в этом разделе связь между семействами обобщенной задачи, ограничившись при этом списком следующих семейств задачи Хилла:

- «классические» семейства  $g, f, a, c, g', f_3$  из статей Энона [5; 6];
- некоторые семейства из статьи Энона [8];
- некоторые новые семейства из статьи автора [1].

**4.1. Семейства  $g$  и  $f$ .** Эти семейства начинаются при  $C \rightarrow +\infty$  прямыми и, соответственно, обратными круговыми орбитами вокруг начала координат. При стремлении  $C \rightarrow -\infty$  семейство  $g$  стремится к своей порождающей последовательности  $\{i, e\}$ . Эта последовательность для задачи анти–Хилла задает семейство обратных орбит с кратностью  $M = +1$ . Семейство  $f$  в пределе при

$C \rightarrow -\infty$  стремится к порождающему решению первого вида  $F$ . В задаче анти-Хилла связанные с  $g$  и  $f$  семейства являются двумя ветвями одного семейства  $\widetilde{gf}$  обратных двояко симметричных однооборотных орбит. Таким образом, семейства  $g$  и  $f$  задачи Хилла оказываются связанными друг с другом семейством  $\widetilde{gf}$  задачи анти-Хилла. Схематически расположение указанных семейств показано на рис. 7.

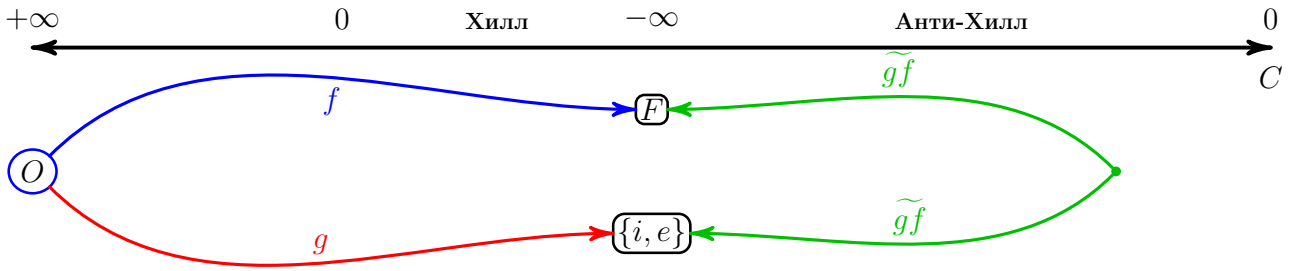


Рис. 7. Диаграмма связи между семействами  $g$ ,  $f$  задачи Хилла и семейства  $\widetilde{gf}$  задачи анти-Хилла.

**4.2. Семейство  $f_3$  двояко симметричных орбит.** Это семейство было впервые анонсировано в [6] под именем  $g_3$ , затем более полно описано в [8; 10]. Семейство имеет две ветви, обозначаемые здесь  $f_3^A$  и  $f_3^B$ , которые начинаются при  $C \approx 3.806201$ . Ветвь  $f_3^A$  состоит из прямых орбит с кратностью  $M = -1$  и стремится в пределе к последовательности  $\{+1, i, -1, e\}$ , которая в задаче анти-Хилла задает семейство  $\tilde{f}_3^A$  орбит с кратностью  $M = +3$ . Семейство  $\tilde{f}_3^A$  имеет общую орбиту с локальной кратностью 3 с семейством  $\widetilde{gf}$  и стремится в пределе к последовательности  $\{i^-i, e^+e\}$ . Ветвь  $f_3^B$  содержит орбиту столкновения, после прохождения которой глобальная кратность  $M$  становится равной  $+3$ . Затем она (ветвь) дважды пересекается с семейством  $f$  и в пределе стремится к последовательности  $\{+1, -1\}$ , которая в задаче анти-Хилла задает семейство  $\tilde{f}_3^B$  орбит с кратностью  $M = +1$ . Семейство  $\tilde{f}_3^B$  при продолжении достигает экстремума по  $C$ , и его вторая ветвь в пределе стремится к последовательности  $i^+i, e^-e$ . Таким образом, две ветви  $f_3^A$  и  $f_3^B$  семейства  $f_3$  задачи Хилла переходят одна в другую через соответствующие ветви семейств задачи анти-Хилла.

Оказалось, что в некотором смысле описанные выше двояко симметричные семейства образуют в определенном смысле каркас сети периодических решений, поскольку многие другие семейства пересекаются с этими семействами, разделяя общие орбиты с различными целыми локальными кратностями.

**4.3. Семейства ляпуновских либрационных орбит  $a$  и  $c$ .** Семейства  $a$  и  $c$  начинаются при  $C = 3^{4/3}$  бесконечно малыми периодическими орбитами вокруг

точек либрации  $L_1$  и  $L_2$ , соответственно. Семейства продолжаютс и стремятся в пределе к порождающим последовательностям  $\{+1\}$  и  $\{-1\}$ . Эти последовательности в задаче анти–Хилла дают две ветви  $\tilde{a}$  и  $\tilde{c}$ , которые пересекаются с семейством  $\tilde{g}f$  по критической орбите, соответствующей бифуркации потери симметрии семейства двойко симметричных периодических орбит. Если рассмотреть орбиты пар семейств  $a$ ,  $\tilde{a}$  и  $c$ ,  $\tilde{c}$ , а также предельные дуги  $+1$ ,  $-1$  в регулярных координатах, то получим такую картину. Предельная дуга  $+1$  представляет собой по форме возмущенную восьмерку с точкой самопересечения в начале координат и осью симметрии  $OQ_1$ . Движение по ней происходит с бесконечно большим периодом в силу преобразования времени (4). На рис. 8а) показана орбита семейства  $a$  (синим цветом), которая располагается практически внутри петель этой восьмерки (показана красным цветом точечной линией), а орбита семейства  $\tilde{a}$  — снаружи восьмерки (зеленым цветом). Можно рассматривать процесс продолжения семейства  $a$  задачи Хилла через предельную последовательность  $\{+1\}$  к семейству  $\tilde{a}$  как переход периодического движения через сепаратрису. При продолжении семейства  $c$  через порождающее решение  $\{-1\}$  в семейство  $\tilde{c}$  имеет такую же картину с точностью до симметрии относительно биссектрисы I и III квадрантов (см. рис. 8б).

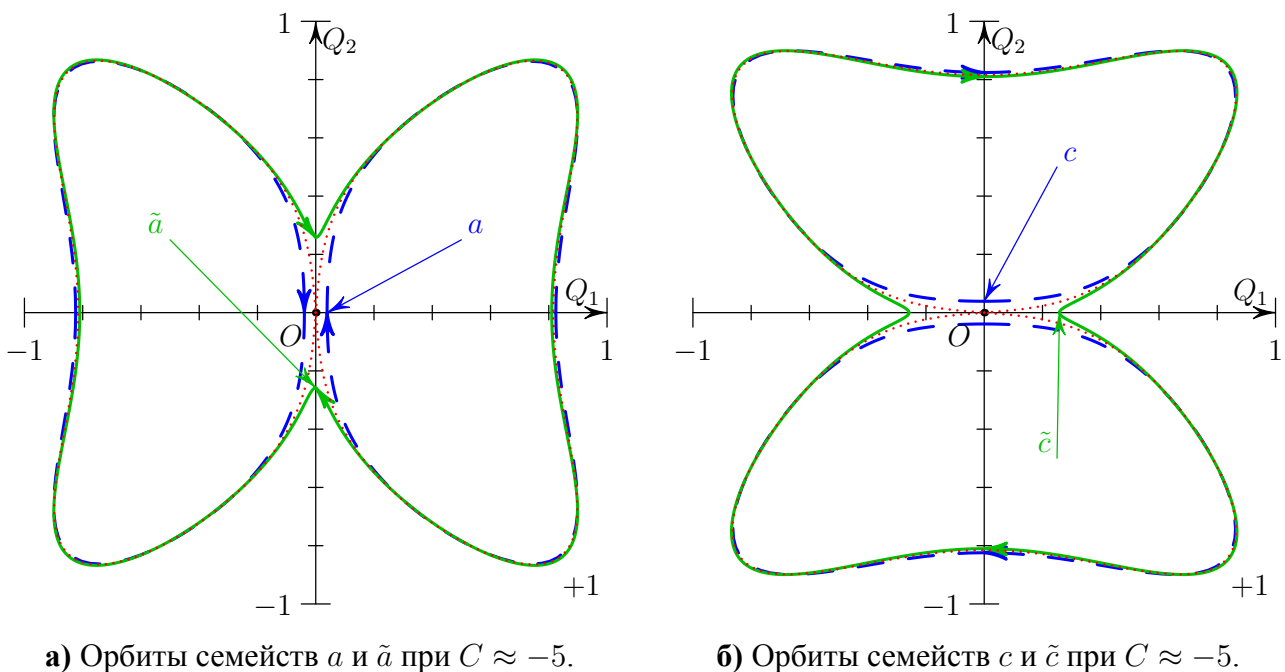


Рис. 8. Орбиты семейств  $a$  (синий пунктир),  $\tilde{a}$  (зеленым) и  $c$  (синий пунктир),  $\tilde{c}$  (зеленым) в регулярных координатах. Красными точками показано положение предельной дуги  $+1$  (слева) и  $-1$  (справа).

**4.4. Семейство  $\Sigma_1$ –симметричных орбит  $g'$ .** Семейство начинается с прямой однооборотной критической орбиты семейства  $g$  двумя ветвями, которые были обозначены М. Эноном символами  $g'_+$  и  $g'_-$  в [5]. Каждая из этих ветвей стремится к своей порождающей последовательности  $\{+2\}$  и  $\{-2\}$ , соответственно, проходя при  $C \approx -4.6$  орбиту столкновения и меняя глобальную кратность  $M$  на значение  $+1$ . В задаче анти–Хилла эти последовательности задают семейства  $\tilde{g}'_+$  и  $\tilde{g}'_-$ , соответственно, периодических орбит с кратностью  $+2$ . Каждое из них достигает общей с семействами  $\tilde{a}$  и  $\tilde{c}$ , соответственно, критической орбиты с локальной кратностью 2.

Схематически описанные в пп. 4.1–4.4 результаты представлены на рис. 9. Центральный столбец содержит порождающие последовательности, точки  $O$ ,  $L_1$  и  $L_2$  обозначают начало координат и точки либрации. Связанные семейства задач Хилла и анти–Хилла показаны одним цветом. Общие орбиты для двух различных семейств показаны кружком, а орбиты, на которых семейство достигает экстремума по константе Якоби  $C$  — точкой соответствующего цвета.

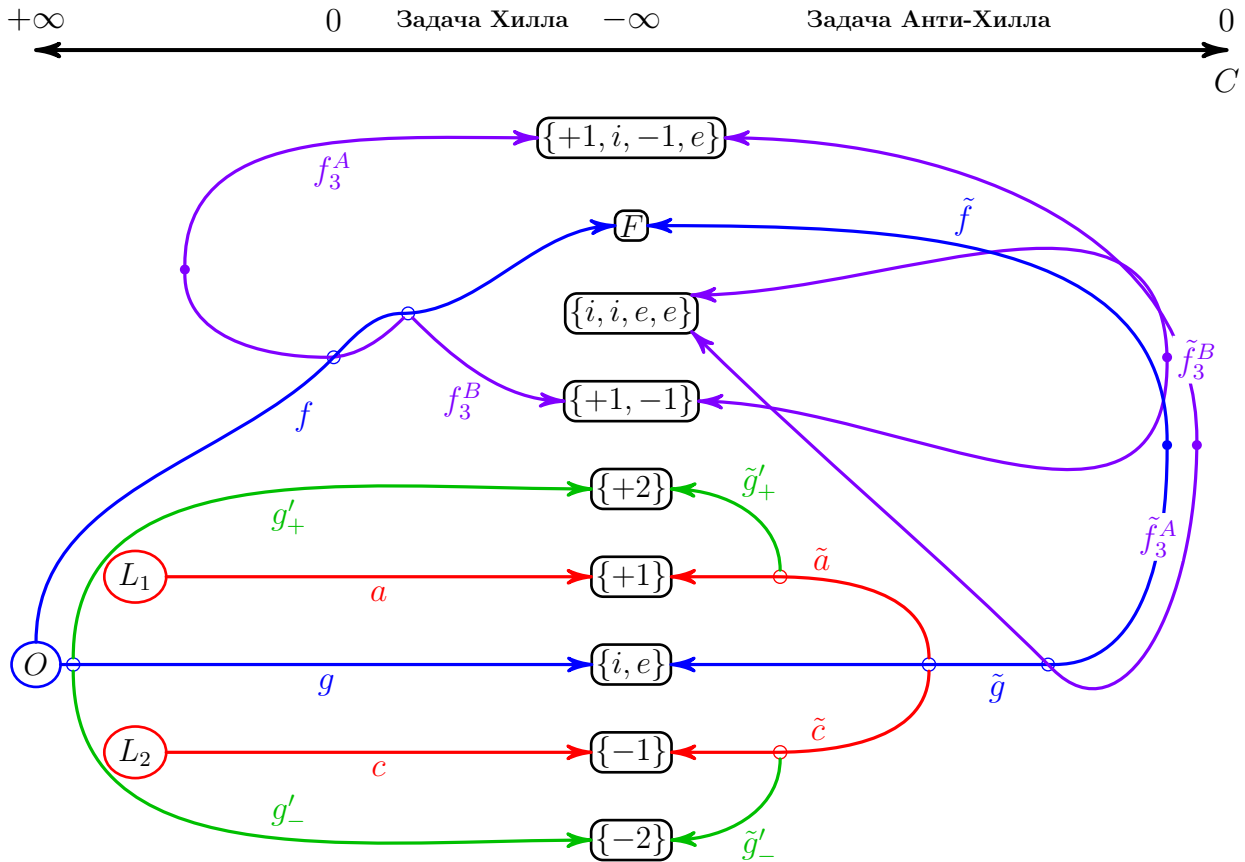


Рис. 9. Диаграмма связей между «классическими» семействами задачи Хилла и их антихилловскими продолжениями.

**4.5. Семейства  $\Sigma_1$ –симметричных орбит  $Hb$  и  $He$ .** Эти семейства были найдены М. Эноном и описаны в [8]. Поскольку, и  $Hb$ , и  $He$  суть семейства  $\Sigma_1$ –периодических орбит, то существуют семейства  $Hb'$  и  $He'$ , которые совпадают в результате преобразования  $\Sigma_2$  с соответствующими исходными семействами. Все эти семейства не имеют общих орбит ни с одним из семейств задачи Хилла, но оказываются связанными с почти всеми описанными выше семействами задачи анти–Хилла, за исключением семейства  $\tilde{g}'$ . Начнем описание с семейства, названного М. Эноном  $Hb'$ . Оно имеет две ветви:  $Hb'^A$  и  $Hb'^B$ . Ветвь  $Hb'^A$  продолжается до своей порождающей последовательности  $\{+1, i, e\}$ , затем при переходе через  $C = -\infty$  меняет кратность с  $M = -1$  на  $M = +2$  и пересекается с семейством  $\tilde{gf}$  в критической орбите с  $S = -1$ . Таким образом, семейство  $\tilde{Hb}'^A$  является семейством периодических решений второго рода по отношению к решениям семейства  $\tilde{gf}$ . Поскольку семейство  $\tilde{gf}$  двояко симметричное, то, как следует из пункта III утверждения 4, с ним должно пересекаться еще одно семейство  $\Sigma_1$ –симметричных орбит, а также пара семейств  $\Sigma_2$ –симметричных орбит.

Другая ветвь  $Hb'_B$  содержит орбиту столкновения, и при продолжении через нее глобальная кратность меняется со значения  $M = -1$  на значение  $M = +1$ , а затем стремится к предельной последовательности  $\{+1, +2\}$ . Эта последовательность в задаче анти–Хилла задает семейство  $\tilde{Hb}'_B$ , которое имеет общую орбиту локальной кратности 3 с семейством  $\tilde{a}$ . Достигая экстремума по  $C$  семейство  $\tilde{Hb}'_B$  стремится к порождающей последовательности  $\{+3\}$ , которая в задаче Хилла является порождающей для семейства  $He$ . Это семейство достигает экстремума при  $C \approx 8.9$ , а затем стремится к своей второй предельной последовательности  $\{+1, e, i\}$ . Эта последовательность в задаче анти–Хилла задает семейство  $\tilde{He}^A$ , которое пересекается с семейством  $\tilde{f}_3^B$  в критической орбите при  $S = +1$ . Согласно пункту I утверждения 4 должно быть еще одно семейство  $\Sigma_1$ –симметричных решений, которое обозначим  $\tilde{He}'_A$ . Двигаясь вдоль него, мы пройдем последовательно вдоль соответствующих ветвей семейств  $\tilde{Hb}$ ,  $\tilde{He}'$  задачи анти–Хилла и ветвей семейств  $Hb$ ,  $He'$  задачи Хилла в обратном порядке, пересечем семейство  $\tilde{c}$  и вновь придем к семейству  $\tilde{gf}$ .

Для лучшего понимания связей между указанными семействами предлагается рис. 10, на котором отмечены только те из семейств: которые упоминались выше.

**4.6. Другие семейства.** Ниже дано описание тех семейств периодических орбит задачи Хилла, которые пока исследованы лишь частично, но представляют определенный интерес.

В [1] дано описание новых семейств, задаваемых порождающими последо-

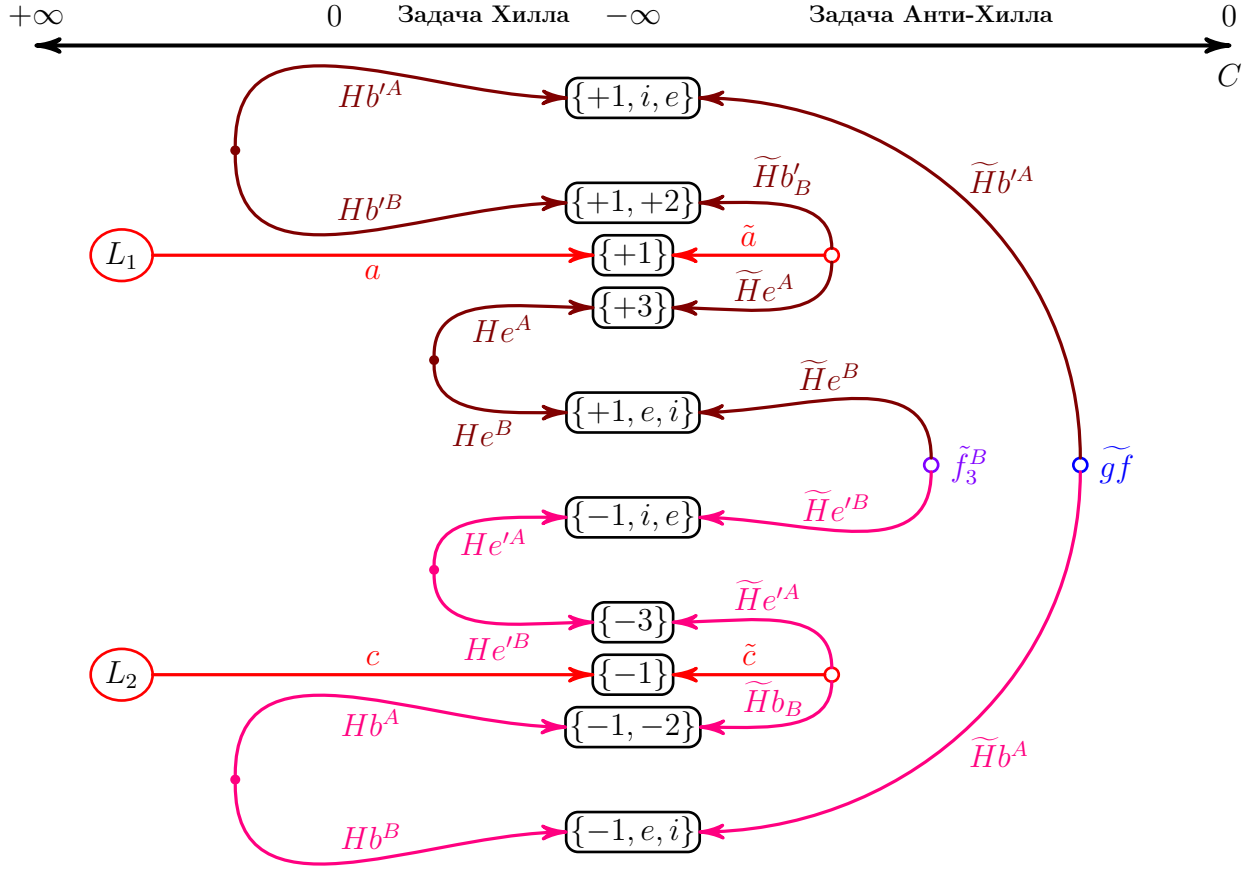


Рис. 10. Диаграмма связей между семействами  $Nb$ ,  $Nb'$ ,  $He$ ,  $He'$  и их антихилловскими продолжениями. Показаны лишь общие орбиты с семействами  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{c}$ ,  $\tilde{g}f$  и  $\tilde{f}_3^B$ .

вательностями  $\{+j\}$ ,  $j = 4, \dots, 7$ , которые демонстрировали общее поведение, отличающееся лишь значениями константы  $C$ . Оказалось, что и продолжения этих семейств в задачу анти-Хилла демонстрируют сходное поведение. Так же, как и семейства  $\tilde{g}'$  и  $\tilde{He}$ , которые пересекаются с семейством  $\tilde{a}$  по орбитам с локальной кратностью 2 и 3 соответственно, все семейства, задаваемые дугами  $\{+j\}$ ,  $j \geq 4$ , пересекаются с семейством  $\tilde{a}$  по соответствующим орбитам с локальной кратностью  $j$ . В точке пересечения эти семейства достигают экстремума по  $C$  и при дальнейшем продолжении стремятся к порождающей последовательности вида  $\{+1, +(j-1)\}$ . Были исследованы два семейства задачи Хилла, задаваемые последовательностями  $\{+1, +3\}$  и  $\{+1, +4\}$ . Они продемонстрировали сходное поведение, а именно:

- 1) не содержали орбит столкновения;
- 2) достигали экстремума при  $C < 0$ ;
- 3) вторая ветвь семейства стремилась к порождающей последовательности вида  $\{+1, i, +(j-2), e\}$ .

Результаты численного исследования позволяют сформулировать следующие



щее предположение о структуре таких семейств периодических орбит.

**Гипотеза 1.** Все семейства периодических орбит, задаваемые порождающей последовательностью вида  $\{+j\}$ , при  $j \geq 3$  устроены следующим образом.

- Семейства задачи Хилла состоят из орбит с глобальной кратностью  $M = +(j - 1)$ , достигают экстремума при  $C_j < 0$  и стремятся ко второй порождающей последовательности вида  $\{+(j - 2), e, i\}$ .

- Семейства задачи анти–Хилла состоят из орбит с глобальной кратностью  $M = +j$ , достигают экстремума при пересечении с семейством  $\tilde{a}$  и стремятся ко второй порождающей последовательности вида  $\{+1, +(j - 1)\}$ .

Ранее было отмечено, что семейства двояко симметричных периодических орбит в задаче Хилла играют особую роль, формируя, в некотором смысле, «скелет» сети периодических решений. Поэтому были исследованы семейства, задаваемые простейшими двояко симметричными последовательностями вида  $\{+j, -j\}$ ,  $j = 2, \dots, 4$ . Семейства задачи Хилла с такими порождающими последовательностями описаны в [10, п. 4.3.6], где высказана гипотеза, что все они суть семейства периодических решений второго рода для орбит семейства  $f$  с локальной кратностью  $2j + 1$ . Там же рассмотрены семейства с порождающими последовательностями вида  $\{+j, -(j-1)\}$ ,  $\{-j, +(j-1)\}$ ,  $j \geq 2$ , которые оказались семействами периодических решений второго рода для орбит семейства  $f$  с локальной кратностью  $2j$ . Исследование семейств, задаваемых такими порождающими последовательностями в задаче анти–Хилла, позволяет сформулировать следующее предположение.

**Гипотеза 2.** • Каждое из семейств задачи анти–Хилла с порождающей последовательностью вида  $\{+j, -j\}$ ,  $j \geq 2$  задает семейство двояко симметричных орбит с глобальной кратностью  $M = 2j - 1$ . При продолжении по  $C$  оно стремится к порождающей последовательности вида  $\{(+1)^j, (-1)^j\}^1$ .

- Каждое из семейств задачи анти–Хилла с порождающей последовательностью вида  $\{+j, -(j-1)\}$  или  $\{-j, +(j-1)\}$ ,  $j \geq 2$  задает семейство  $\Sigma_1$ –симметричных орбит с глобальной кратностью  $M = 2j - 2$ . При продолжении по  $C$  оно стремится к порождающей последовательности вида  $\{(+1)^j, (-1)^{(j-1)}\}$  или  $\{(-1)^j, (+1)^{(j-1)}\}$ .

Двояко симметричные семейства, задаваемые порождающими последовательностями вида  $\{+j, -j\}$ ,  $j \geq 2$  имеют вторую ветвь, которая в пределе стремится к последовательности вида  $\{+(j-1), e, -(j-1), i\}$ . Были исследованы соответствующие семейства задачи анти–Хилла, однако оказалось, что при их продолжении по  $C$  они стремятся к последовательностям, которые содержат

<sup>1</sup>Здесь запись  $(+1)^j$  означает повторение  $j$  раз дуги  $+1$  в порождающей последовательности.

две подряд идущих дуги  $i$  и/или  $e$ . В силу утверждения 1 такие последовательности не могут быть порождающими для семейств периодических орбит задачи Хилла.

В [1] описаны новые семейства симметричных периодических орбит, задаваемых порождающими последовательностями вида  $\{(+1)^n, (+2)^m\}$  или  $\{(-1)^n, (-2)^m\}$ , где  $n, m \in \mathbb{N}$ . Все найденные семейства демонстрировали ряд общих свойств, главным из которых было то, что вторая ветвь этих семейств, которая в пределе стремилась к последовательности  $\{(+1)^n, (i, e)^m\}$  ( $\{(-1)^n, (e, i)^m\}$  соответственно), содержала орбиты, совершающие облет точки либрации  $L_1$  или  $L_2$ . При этом каждой дуге  $+1$  ( $-1$ ) в порождающей последовательности семейства соответствует один виток вокруг точки  $L_1$  ( $L_2$ ), а каждой дуге  $+2$  ( $-2$ ) — один участок, соединяющий окрестность точки либрации и окрестность начала координат. В указанный выше класс семейств входят семейства ранее найденные М. Эноном в [8] (описанное выше семейство  $Hb$ , семейство  $Hd$  с порождающими последовательностями  $\{+1, (+2)^2\}$  и  $\{+1, (i, e)^2\}$ , семейство  $Hf$  с порождающими последовательностями  $\{(+1)^2, +2\}$  и  $\{(+1)^2, i, e\}$ ) и автором в [21; 24] (два семейства с порождающими последовательностями вида  $\{(+1)^k, +2\}$  и  $\{(+1)^k, i, e\}$  для  $k = 3, 4$ ). Все эти семейства в задаче Хилла являются изолированными.

Автор провел анализ антихилловских продолжений некоторых семейств с порождающими последовательностями вида  $\{(+1)^n, (+2)^m\}$  или  $\{(+1)^n, (i, e)^m\}$ . В частности, порождающая последовательность  $\{+1, (i, e)^2\}$  в задаче анти-Хилла задает семейство однократно симметричных орбит с глобальной кратностью  $M = +3$ , которое пересекается с семейством  $\widetilde{gf}$  по орбите с локальной кратностью  $2/3$ . Другая последовательность  $\{+1, (+2)^2\}$  задает семейство с кратностью  $M = +5$ , которое пересекается с семейством  $\tilde{a}$  по орбите с локальной кратностью  $2/5$ . Порождающая последовательность  $\{(+1)^2, +2\}$  задает семейство орбит с кратностью  $M = +4$ , которое пересекается с семейством  $\tilde{g}'$  по критической орбите с локальной кратностью  $1/2$ . По-видимому, и другие семейства, задаваемые последовательностями вида  $\{(+1)^n, (+2)^m\}$  или  $\{(+1)^n, (i, e)^m\}$ , пересекаются либо с семейством  $\widetilde{gf}$ , либо с одним из семейств, связанным с ним орбитами второго рода.

## 5. Заключение

Задача Хилла, как и любая другая неинтегрируемая задача с инвариантной относительно фазового потока ограниченной областью фазового пространства, обладает бесконечным множеством периодических решений, сгруппированных в соответствующие семейства. Многие из этих семейств могут быть описаны в терминах порождающих последовательностей, однако являются изолированными в том смысле, что формируют свой набор семейств периодических ре-

шений второго рода по Пуанкаре, который не пересекается ни с каким другим семейством периодических решений задачи. Если рассматривать предложенное обобщение задачи Хилла, то проведенный численный анализ подавляющего большинства известных на сегодняшний день семейств, позволяет сформулировать следующую гипотезу.

**Гипотеза 3.** Все семейства симметричных периодических орбит обобщенной задачи Хилла связаны друг с другом, формируя общую сеть семейств. Эта связь реализуется либо через общие порождающие последовательности, соединяющие семейства задач Хилла и анти-Хилла, либо через общие орбиты с целой локальной кратностью.

Следовательно, начиная с произвольной орбиты некоторого семейства можно путем продолжения вдоль него перейти к любой другой периодической орбите. Более того, некоторые свойства обобщенной задачи позволяют предсказать характеристики периодических орбит связанных друг с другом семейств.

## Благодарности

Автор благодарит профессора А. Д. Брюно за поддержку и плодотворное обсуждение результатов работы.

## Список литературы

1. Батхин А. Б. Симметричные периодические решения задачи Хилла. II // Космические исследования. — 2013. — Т. 51, № 6. — С. 497—510.
2. Брюно А. Д. Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. — М.: Наука, 1990.
3. Hénon M. Generating Families in the Restricted Three-Body Problem. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1997. — (Lecture Note in Physics. Monographs ; 52).
4. Батхин А. Б. Симметричные периодические решения задачи Хилла. I // Космические исследования. — 2013. — Т. 51, № 4. — С. 308—322.
5. Hénon M. Numerical Exploration of the Restricted Problem. V. Hill's Case: Periodic Orbits and Their Stability // Astron. & Astrophys. — 1969. — Т. 1. — С. 223—238.
6. Hénon M. Numerical exploration of the restricted problem. Hill's case: non-periodic orbits // Astron. & Astr. — 1970. — № 9. — С. 24—36.
7. Simó C., Stuchi T. J. Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem // Physica D. — 2000. — Т. 140. — С. 1—32.

8. *Hénon M.* New families of periodic orbits in Hill's problem of three bodies // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. — 2003. — Т. 85. — С. 223—246.
9. *Hénon M.* Families of asymmetric periodic orbits in Hill's problem of three bodies // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* — 2005. — Т. 93. — С. 87—100.
10. *Батхин А. Б., Батхина Н. В.* Задача Хилла. — Волгоград: Волгоградское научное издательство, 2009.
11. *Tsirogiannis G. A., Perdios E. A., Markellos V. V.* Improved grid search method: an efficient tool for global computation of periodic orbits. Application to Hill's problem // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* — 2009. — № 103. — С. 49—78.
12. *Batkhin A. B.* Families of symmetric periodic solutions of the Generalized Hill's Problem. — Moscow, Russia: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2013. — (Preprint No 60). — URL: [http://www.keldysh.ru/papers/2013/prep2013\\_60\\_eng.pdf](http://www.keldysh.ru/papers/2013/prep2013_60_eng.pdf).
13. *Morales-Ruiz J., Simó C., Simon S.* Algebraic proof of the non-integrability of Hill's Problem // *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. — 2005. — Т. 25, № 4. — С. 1237—1256.
14. *Batkhin A. B.* Network of families of periodic solutions of generalized Hill's problem // *Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Dynamics* (June 19–23, 2013, Sevastopol). — Khar'kiv Polytechnical Institute. Khar'kiv: "Tochka", 2013. — С. 17—22.
15. *Брюно А. Д.* Нулькратные и обратные периодические решения ограниченной задачи трех тел. — ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 1996. — (Препринт № 93).
16. *Лидов М. Л.* Метод построения семейств пространственных периодических орбит в задаче Хилла // *Космические исследования*. — 1982. — Т. XX, № 6. — С. 787—807.
17. *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Наука, 1998.
18. *Батхин А. Б.* Символическая динамика и порождающие решения плоских периодических орбит задачи Хилла. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2011. — (Препринт № 34). — URL: [http://www.keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011\\_34.pdf](http://www.keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011_34.pdf).
19. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Т. 1. — М.: Наука, 1971.

20. *Hénon M.* Generating Families in the Restricted Three-Body Problem. II. Quantitative Study of Bifurcations. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. — (Lecture Note in Physics. Monographs ; 65).
21. *Батхин А. Б.* Симметричные периодические решения задачи Хилла. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2012. — (Препринт № 52). — URL: [http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012\\_52.pdf](http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_52.pdf).
22. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Т. 2. — М.: Наука, 1972.
23. *Брюно А. Д.* Периодические решения системы Гамильтона // Космические исследования. — 2006. — Т. 44, № 3. — С. 258—271.
24. *Батхин А. Б.* Использование порождающих решений для конструирования перелетов в окрестность коллинеарной точки либрации // Труды XXXIV академических чтений по космонавтике. — М.: Комиссия РАН, 2010. — С. 122—123.

## Содержание

|     |                                                                |    |
|-----|----------------------------------------------------------------|----|
| 1   | Введение . . . . .                                             | 3  |
| 2   | Обобщенная задача Хилла и ее свойства . . . . .                | 4  |
| 2.1 | Задача анти-Хилла . . . . .                                    | 5  |
| 2.2 | Регуляризация обобщенной задачи . . . . .                      | 6  |
| 3   | Структура порождающих решений задачи анти-Хилла . . . . .      | 8  |
| 3.1 | Порождающие решения задачи Хилла . . . . .                     | 8  |
| 3.2 | Порождающие решения задачи анти-Хилла . . . . .                | 10 |
| 3.3 | Симметрии порождающих последовательностей . . . . .            | 12 |
| 3.4 | Глобальные кратности порождающих последовательностей . . . . . | 14 |
| 4   | Результаты исследования семейств периодических орбит . . . . . | 18 |
| 4.1 | Семейства $g$ и $f$ . . . . .                                  | 18 |
| 4.2 | Семейство $f_3$ двояко симметричных орбит . . . . .            | 19 |
| 4.3 | Семейства ляпуновских либрационных орбит $a$ и $c$ . . . . .   | 19 |
| 4.4 | Семейство однократно симметричных орбит $g'$ . . . . .         | 20 |
| 4.5 | Семейства однократно симметричных орбит $Hb$ и $He$ . . . . .  | 22 |
| 4.6 | Другие семейства . . . . .                                     | 22 |
| 5   | Заключение . . . . .                                           | 25 |
|     | Список литературы . . . . .                                    | 26 |