



Козлов А.Н., Коновалов В.С.

Пульсирующие режимы  
течений ионизирующего газа  
в коаксиальных плазменных  
ускорителях

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Козлов А.Н., Коновалов В.С. Пульсирующие режимы течений ионизирующего газа в коаксиальных плазменных ускорителях // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 1. 28 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-1>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**А.Н. Козлов, В.С. Коновалов**

**Пульсирующие режимы  
течений ионизирующегося газа  
в коаксиальных плазменных  
ускорителях**

**Москва — 2014**

**Козлов А.Н., Коновалов В.С.**

Пульсирующие режимы течений ионизирующегося газа в коаксиальных плазменных ускорителях

Проведено исследование нестационарных пульсирующих режимов течения ионизирующегося газа в канале плазменного ускорителя с азимутальным магнитным полем. В основу модели положены МГД-уравнения, дополненные уравнением кинетики ионизации и рекомбинации в рамках модифицированного диффузионного приближения с учетом фотоионизации и фоторекомбинации. Представлены основные механизмы электропроводности и теплопередачи в трехкомпонентной среде, состоящей из атомов, ионов и электронов.

**Ключевые слова:** плазменный ускоритель, течения ионизирующегося газа, фронт ионизации, уравнения магнитной газодинамики

**Andrey Nikolaevich Kozlov, Venyamin Sergeevich Konovalov**

Pulsing modes of the ionizing gas flow in the coaxial plasma accelerators

Research of the non-stationary pulsing modes of the ionizing gas flow is carried out in the channel of the plasma accelerator with the azimuthal magnetic field. The MHD-equations added by the ionization and recombination kinetics equation within the framework of the modified diffusion approximation taking into account the photo ionization and photo recombination are put in a basis of model. The basic mechanisms of the electro conductivity and heat transfers in the three-component medium consisting of atoms, ions and electrons are presented.

**Keywords:** the plasma accelerator, ionizing gas flow, ionization front, equations of magnetogasdynamics

Работа выполнена при поддержке РАН и РФФИ (проекты № 13-01-12043-офи-м и № 12-02-90427-Укр\_a).

## Оглавление

В в е д е н и е.....	3
Постановка задачи о течении ионизирующегося газа .....	4
Кинетика заселения возбужденных состояний.....	7
Квазиодномерная модель течения.....	16
Результаты расчетов течений ионизирующегося газа.....	19
З а к л ю ч е н и е .....	25
Список литературы .....	26

## Введение

Исследования переходов между различными состояниями материи составляют одно из фундаментальных научных направлений, имеющих актуальные практические приложения. Процесс ионизации газа в канале квазистационарного плазменного ускорителя [1-3] относится к малоизученным явлениям, отвечающим неравновесным переходам от газообразного состояния к плазме. Данная работа продолжает цикл исследований течений ионизирующегося газа. Поскольку речь идет о достаточно плотной среде, переход от слабоионизованного газа к плазме рассматривается в рамках единой системы магнитогазодинамических уравнений. На начальных этапах исследований (см., например, [3-6]) использовалось предположение о скачкообразном изменении проводимости среды, а также предположение о локальном термодинамическом равновесии (см., например, [6-8]). В рамках данных моделей были получены неплохие результаты при сопоставлении расчетных и экспериментальных данных для вольт-амперных характеристик разряда, отвечающих зависимости максимального напряжения в канале от максимального значения разрядного тока в электрической цепи ускорителя. Кроме того, было установлено соответствие результатов расчетов экспериментальным данным для локальных параметров компрессионного потока плазмы на выходе из ускорителя.

Недостатком двух указанных моделей течений ионизирующегося газа в канале ускорителя является то обстоятельство, что фронт ионизации в расчетах оказался слишком размытым. Узкий фронт ионизации в соответствии с экспериментальными данными удалось получить в рамках численной модели [9], основанной на системе МГД-уравнений для трехкомпонентной среды, дополненной уравнением кинетики ионизации и рекомбинации в рамках модифицированного диффузионного приближения [10]. Это приближение учитывает структуру энергетических уровней атома. Оно позволило выявить неравновесную природу процессов на фронте ионизации, где наблюдается четко выраженное отклонение от ионизационно-рекомбинационного равновесия, что существенно изменило прежние представления. Исследование фундаментальных свойств потоков ионизирующегося газа проводилось главным образом на основе стационарных, точнее квазистационарных течений, рассчитанных методом установления. Для стационарных течений разработаны также основы теории процессов на фронте ионизации [11-12].

Исследование потоков ионизирующегося газа предполагает учет лучистого теплообмена (см., например, [13-16]). Влияние переноса излучения на процесс ионизации рассматривается с помощью моделей различного уровня сложности [17-18]. В простейшем случае используют лучистую теплопроводность, ответственную за лучистый теплоперенос в достаточно плотном слабоионизованном газе. Суммарный тепловой поток обусловлен также электронной и атомарной теплопроводностью. Приближение лучистой теплопроводности позволяет существенно упростить численное решение задачи, и оправдано тем, что среда является оптически непрозрачной для

излучения в линиях, которое вносит наибольший вклад в энергию суммарного поля излучения. Оценки (см., например, [5]) показывают, что в случае доплеровского уширения спектральных линий длина свободного пробега фотонов много меньше характерных масштабов неоднородностей в потоке ионизирующегося газа.

В настоящей работе представлены исследования нестационарного неравновесного процесса ионизации с учетом лучистой теплопроводности. Данная работа является необходимым этапом, который должен предшествовать изучению процесса ионизации на основе согласованного решения МГД-уравнений, уравнения переноса излучения с различными механизмами уширения спектральных линий [19,20] и решения задачи о населенности состояний в рамках системы уравнений поуровневой кинетики [10,21].

Моделирование потока ионизирующегося газа осуществляется при наличии единственной азимутальной компоненты магнитного поля. В простейших плазменных ускорителях азимутальное поле генерируется электрическим током, проходящим вдоль внутреннего электрода. В свою очередь радиальный ток в плазме и азимутальное магнитное поле обеспечивают резкое ускорение плазмы на фронте ионизации за счет силы Ампера  $\frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}$ , где  $\mathbf{j}$  - ток в плазме, протекающий от одного электрода к другому, а  $H_\varphi$  - азимутальное магнитное поле. Процесс ионизации и предварительного ускорения плазмы происходит, в частности, в первой ступени двухступенчатого квазистационарного сильноточного плазменного ускорителя (КСПУ) [2, 22-29], первая ступень которого состоит из нескольких небольших коаксиальных ускорителей.

## Постановка задачи о течении ионизирующегося газа

Канал плазменного ускорителя (рис. 1) схематично состоит из двух соосных коаксиальных электродов, подсоединенных к соответствующей электрической цепи. Между электродами подается нейтральный газ. При наличии напряжения между электродами происходит пробой нейтрального газа и образуется фронт ионизации. Моделирование самого пробоя выходит за рамки проведенного исследования.

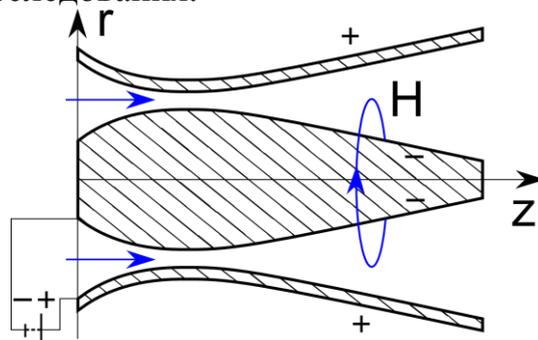


Рис. 1. Схема плазменного ускорителя

МГД-модель течения ионизирующегося газа основана на уравнениях переноса трехкомпонентной среды [30], состоящей из атомов, ионов и электронов, а также уравнении индукции магнитного поля, которое следует из уравнений Максвелла и обобщенного закона Ома в случае, если пренебречь инерцией электронов и током смещения.

Процесс ионизации исследуется для атомарного водорода. Соответственно массы атомов и ионов равны  $m_a = m_i = m$ . Согласно экспериментальным данным, на фронте ионизации температура возрастает до уровня  $1-3 \text{ эВ}$ . Концентрация газа, поступающего в канал, предполагается достаточно высокой  $n = 10^{16} - 10^{17} \text{ см}^{-3}$ . Учитывая параметры, среда является квазинейтральной  $n_i = n_e$ . При этом можно считать, что скорости компонент плазмы равны между собой  $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}_a = \mathbf{V}$ . Кроме того, ограничимся случаем однотемпературной смеси  $T_a = T_i = T_e = T$ .

В результате несложных преобразований исходных уравнений переноса трёхкомпонентной среды, уравнения индукции магнитного поля и с учетом сделанных выше предположений получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e \mathbf{V}) = n_a n_e \beta_{ioniz} - n_e^2 n_i \alpha_{recom}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad \rho \frac{d \mathbf{V}}{d t} + \nabla P = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{d \varepsilon}{d t} + P \text{div} \mathbf{V} = \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} - \text{div} \mathbf{q} - \text{div} \mathbf{W}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) - c \text{rot} \frac{\mathbf{j}}{\sigma}, \quad (4)$$

$$\mathbf{q} = -\kappa_{e \rightarrow a} \nabla T, \quad \mathbf{W} = -\kappa_{луч} \nabla T,$$

$$P = P_a + P_i + P_e = (1 + \alpha)(c_P - c_V) \rho T, \quad \varepsilon = (1 + \alpha) c_V T + \varepsilon_I,$$

$$\alpha = \frac{n_e}{n_a + n_i}, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{H}, \quad \frac{d}{d t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla).$$

Здесь  $\rho = mn_{tot}$  - плотность тяжелых частиц,  $n_{tot} = n_a + n_i$  - суммарная концентрация тяжелых частиц,  $\alpha$  - степень ионизации,  $\mathbf{q}$  - тепловой поток,  $\kappa_{e \rightarrow a}$  - электрон-атомарная теплопроводность,  $\mathbf{W}$  - поток энергии излучения,  $\kappa_{луч}$  - лучистая теплопроводность,  $P$  - суммарное давление,  $\mathbf{j}$  - ток в плазме. В уравнении для внутренней энергии (3) джоулев нагрев  $Q_{ei} = \mathbf{j}^2 / \sigma$  существенно превосходит тепло, выделяемое при трении с остальными компонентами. В понятие внутренней энергии на единицу массы  $\varepsilon$  включается дополнительное слагаемое  $\varepsilon_I = \zeta \frac{\alpha I}{m_i}$ , ответственное за потери энергии на ионизацию, где

$I = 13.6$  эВ - энергия ионизации атома водорода. Коэффициенты рекомбинации  $\alpha_{recom}$  и ионизации  $\beta_{ioniz}$  в уравнении (1) ответственны за образование и потери свободных электронов.

Постановка задачи включает граничные условия на электродах, а также на входе и выходе из канала ускорителя.

**Электропроводность среды** равна  $\sigma = e^2 n_e / m_e \nu_e$ , где средняя частота столкновений электрона с другими частицами  $\nu_e$  складывается из частот столкновений с атомами и ионами:  $\nu_e = \nu_{ea} + \nu_{ei}$ ;  $\nu_{ea} = n_a \langle V_e \rangle S_{ea}$ ;  $\nu_{ei} = n_{ion} \langle V_e \rangle S_{ei}$ . В данном случае  $\langle V_e \rangle = \sqrt{2kT/m_e}$  - средняя тепловая скорость электронов, а  $S_{ea}$  и  $S_{ei}$  - эффективные сечения столкновений электронов с атомами и ионами [31].

**Основные механизмы теплопередачи.** При больших степенях ионизации заметную роль в суммарном теплопереносе может играть классическая электронная теплопроводность поперек магнитного поля:

$$\kappa_{\perp e} = \frac{1}{m_e} k^2 n_e T_e \tau_{ei} \gamma_0(\chi) \left[ \frac{\text{эрг}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}} \right],$$

где  $\gamma_0(\chi) = \frac{11.92 + 4.66\chi^2}{3.77 + 14.79\chi^2 + \chi^4}$  - функция [29], учитывающая влияние

замагниченности электронов  $\chi = \omega_e \tau_{ei}$ ,  $\tau_{ei} = \frac{3\sqrt{m_e} (kT_e)^{3/2}}{4\sqrt{2\pi} \Lambda e^4 Z^2 n_i}$  [сек] - время рассеяния электронов на ионах.

При малых степенях ионизации определенный вклад вносит атомарная теплопроводность:  $\kappa_a = 24 \cdot T_a^{3/4} \left[ \frac{\text{эрг}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}} \right]$ .

Коэффициент полной теплопроводности одноатомного газа можно представить следующим образом:

$$\kappa_{a \rightarrow e} = \kappa_{\perp e} \left( 1 + \sqrt{2} \frac{m_e}{m_i} \frac{\kappa_{\perp e}}{\kappa_a} \frac{\sigma_{ea}^*}{\sigma_{aa}^*} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{-1} + \kappa_a \left( 1 + \frac{\sigma_{ai}^*}{\sigma_{aa}^*} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{-1},$$

где  $\sigma_{ea}^* / \sigma_{aa}^* = 1.5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\sigma_{ai}^* / \sigma_{aa}^* = 1.44 \cdot T^{0.16}$  - соотношения между эффективными сечениями рассеяния частиц.

Учтем также, что при любых степенях ионизации  $\kappa_i / \kappa_e \cong \sqrt{m_e / m_i} \ll 1$ .

Лучистая теплопроводность равна  $\kappa_{луч} = \frac{16}{3} C L_{cp} T^3 \left[ \frac{\text{эрг}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}} \right]$ ,

где  $C = 5.67 \cdot 10^{-5} \text{ эрг} / \text{см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{град}^4$  - константа Стефана-Больцмана.

Средний пробег фотонов  $L_{cp} \approx \frac{m_e c}{\pi e^2} \frac{\Delta\omega}{n_k f_{kl}}$  ( $n_k = n_l \approx n_a$ ) определяется на

основе доплеровского уширения спектральных линий  $\Delta\omega = \omega_{kl} V / c$ , где  $\omega_{kl} = 2\pi c / \lambda_{kl}$  и  $f_{kl}$  - спектральная частота и сила осциллятора, например, для  $\alpha$ -линии Лаймана водородной плазмы. Оценки и расчеты показывают, что роль теплопроводности в целом незначительна.

## Кинетика заселения возбужденных состояний

Плазма является многокомпонентной средой, состоящей из атомов, ионов и электронов. Взаимодействуя друг с другом, с излучением плазмы и полями, компоненты могут менять энергетическое состояние, влияя на энергетический баланс среды, а также участвовать в образовании других компонент посредством процессов ионизации и рекомбинации. Поэтому при описании динамики плазмы возникает задача об определении состава среды.

В состоянии термодинамического равновесия состав плазмы определяется значениями термодинамических параметров, например температуры и давления. Низкотемпературная плазма описывается бoльцмановской статистикой. Атомы и ионы могут находиться в основном и возбужденных состояниях. Концентрации частиц в  $k$ -ом и  $m$ -ом состояниях связаны соотношением Больцмана  $n_k / n_m = g_k / g_m \cdot \exp(-\Delta E_{k,m} / T)$ , где  $g_k$  и  $g_m$  - статистические веса,  $\Delta E_{k,m} = E_m - E_k$  - разность энергий равновесных состояний. Населенность  $k$ -ого состояния может быть выражена через полную концентрацию атомов  $n_a$ . В приближении локального термодинамического равновесия (ЛТР) концентрации компонент плазмы, состоящей из электронов, ионов и атомов, связаны соотношением Саха

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = K_1 = 2 \frac{\sum_i}{\sum_a} \left( \frac{2\pi m_e T}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_1}{T}\right), \quad (5)$$

где  $E_1$  - энергия связи основного состояния, равная энергии ионизации атома,  $\sum_i$  и  $\sum_a$  - статистические суммы иона и атома, величина  $K_1$  - константа ионизационного равновесия. При условии квазинейтральности плазмы  $n_i = n_e$  соотношение (5) определяет состав плазмы. При этом в основе приближения ЛТР лежит предположение о прямой ионизации из основного состояния и обратном процессе тройной рекомбинации.

На самом деле, связанный электрон в атоме, прежде чем достигнуть континуума или, наоборот, основного состояния, может переходить с уровня на уровень по сложному пути (см. рис. 2).

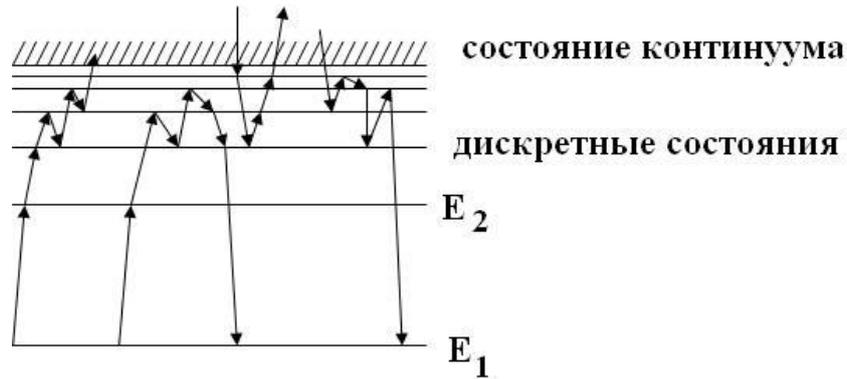


Рис. 2. Возможные переходы электрона в энергетическом пространстве атома

Система уравнений поуровневой кинетики, определяющих концентрацию возбужденных частиц в  $k$ -ом состоянии, имеет вид

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \text{div}(n_k \mathbf{V}_k) = \sum_{\substack{m,q \\ m \neq k}} (n_m W_{mk}^q - n_k W_{km}^q) + F_k - n_k G_k, \quad (6)$$

где  $n_k$  - населенность  $k$ -ого состояния атома,  $W_{mk}^q$  - вероятности перехода атома из состояния  $m$  в состояние  $k$  под воздействием элементарных процессов  $q$ . Суммирование в (6) проводится по всем дискретным состояниям и состоянию ионизационного континуума, отвечающего достаточно большому значению  $k = N$ . Величины  $F_k$  и  $G_k$  описывают источник образования атомов в состоянии  $k$  и гибель возбужденных состояний в результате процессов, в которых рассматриваемый атом или ион не участвуют. В качестве примера такого процесса может быть ассоциативная ионизация и диссоциативная рекомбинация. Учет дивергенции от потока  $n_k \mathbf{V}_k$  в (6) является обязательным элементом исследований течений ионизирующегося газа.

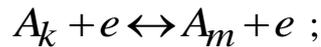
В состоянии ионизационного континуума, которому приписывается индекс  $e$ , имеем аналогичное уравнение

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e \mathbf{V}_e) = \sum_{\substack{m,q \\ m=1}}^{N-1} (n_m W_{me}^q - n_e n_i W_{em}^q) + F_e - n_e G_e. \quad (7)$$

Как правило, скорость изменения концентрации электронов вычисляется с помощью уравнения (1), в котором коэффициенты ионизации и рекомбинации имеют лишь формальное сходство с элементарными вероятностными процессами ионизации и рекомбинации. В действительности данные коэффициенты определяются совокупностью элементарных процессов и различных факторов.

**Основные процессы.** Наиболее существенны и вероятны в рассматриваемой задаче следующие процессы:

1) возбуждение электронным ударом и гашение:



2) ионизация электронным ударом и трех частичная рекомбинация:



3) поглощение (абсорбция) и спонтанное излучение (эмиссия):



4) радиационная рекомбинация и фотоионизация:



Другие реакции с участием возбужденных атомов не оказывают существенного влияния. К ним относятся, например, возбуждение и тушение при столкновении с атомом в основном состоянии  $A_k + A_1 \leftrightarrow A_m + A_1$ , ионизация в атом-атомных столкновениях  $A_k + A_1 \leftrightarrow A^+ + e + A_1$  и обратный процесс трехчастичной рекомбинации, ассоциативная ионизация и диссоциативная рекомбинация  $A_k + B \leftrightarrow AB^+ + e$ . Тормозное поглощение и излучение  $A^+ + e + \hbar\omega \leftrightarrow A^+ + e$  также можно не учитывать. Данный процесс не меняет состав плазмы, оказывая незначительное влияние на баланс энергии излучения в узкой спектральной области. На фоне основных процессов вклад указанных реакций незначителен.

Для удобства изложения методов решения системы уравнений (6)-(7) не будем рассматривать слагаемое  $\text{div}(n_k \mathbf{V}_k)$  с учетом последующего расщепления по физическим факторам в процессе численного решения итоговых уравнений. Исключая внешние процессы заселения и ухода электронов с уровней, величинами  $F_k$  и  $G_k$  можно пренебречь.

Введем понятие потока электронов в энергетическом пространстве атома

$$j_k = \sum_{m < k} \sum_{n \geq k} (n_m W_{mn}^q - n_n W_{nm}^q) .$$

Величина  $j_k$  показывает количество электронов, проходящих энергетический интервал между уровнями  $k-1$  и  $k$  в единицу времени. Тогда уравнение заселенности (6) можно переписать в виде

$$\frac{d n_k}{d t} = \Delta j_k , \quad (8)$$

где  $\Delta j_k = j_k - j_{k+1}$  - дивергенция потока. Для состояния ионизационного континуума  $e$ , являющегося последним в ряду рассматриваемых энергетических состояний, имеем

$$\frac{d n_e}{d t} = j_e , \quad (9)$$

где  $j_e$  соответствует сумме ряда по состояниям в правой части (7). Основное состояние является первым, и для него  $\Delta j_1 = -j_2$ . Кинетическое уравнение для атома в основном состоянии имеет вид

$$\frac{d n_1}{d t} = -j_2 . \quad (10)$$

Поиск решения системы (8)-(10) является нетривиальной задачей. Поэтому используют квазистационарное приближение, согласно которому в процессе ионизации и рекомбинации величины  $n_k$  успевают подстраиваться под такие сравнительно медленно меняющиеся параметры плазмы, как температура и концентрации  $n_1$ ,  $n_e$ . Квазистационарность распределения атомов по возбужденным состояниям следует из того, что характерное время перехода электрона между энергетическими уровнями атома, как правило, существенно меньше характерного времени изменения макроскопических параметров. Пренебрегая явной зависимостью  $n_k$  от времени в уравнениях (8)-(10), получим систему попарно зацепляющихся уравнений  $\Delta j_k = 0$  для различных значений  $k$ . Откуда следует, что  $j_k = j = const$ , и поток в энергетическом пространстве постоянен для всех состояний. Соответственно, в квазистационарном приближении не происходит накопления частиц, отвечающих каким-либо уровням, что вполне естественно.

Отклонение от равновесия рассматривается с помощью относительных населенностей для компонент

$$y_k = n_k / n_k^0 , \quad y_e = n_e / n_e^0 , \quad y_i = n_i / n_i^0 , \quad (11)$$

где  $n_k^0$ ,  $n_e^0$ ,  $n_i^0$  - равновесные значения соответствующих величин.

В квазистационарном приближении с учетом сделанных выше замечаний из уравнения (1), в частности, следует уравнение баланса частиц  $n_a n_e \beta_{ioniz} - n_e^2 n_i \alpha_{recom} = 0$ . Используя соотношения (11), получим

$$\frac{y_1}{y_e y_i} = \frac{\alpha_{recom} n_e^0 n_i^0}{\beta_{ioniz} n_1^0} . \quad (12)$$

Если коэффициенты ионизации и рекомбинации определяются только столкновениями с электронами, то они связаны соотношением, вытекающим из

принципа детального равновесия:  $n_1^o \beta_{ioniz} - n_e^o n_i^o \alpha_{recom} = 0$ . С учетом этого из (12) следует, что  $y_1 = y_e y_i$ . Известно также, что высоко возбужденные уровни также находятся в относительном равновесии между собой и электронами даже при наличии излучения. Поэтому, начиная с некоторого уровня  $l$ , имеем  $y_l \cong y_{l+1} \cong y_{l+2} \cong \dots \cong y_e y_i$ .

**Диффузионное приближение.** Существует несколько подходов для приближенного аналитического расчета населенностей уровней. Согласно одному из таких подходов осуществляется размазывание дискретного энергетического спектра. В рамках соответствующего диффузионного приближения система уравнений баланса сводится к кинетическому уравнению для населенностей  $n(E)$ , как непрерывной функции энергии. Данный подход оправдан для высоковозбужденных состояний, разделенных малыми энергетическими промежутками. Квазинепрерывное перемещение в пространстве энергии характеризуется потоком  $j(E)$ , который определяется плотностью частиц и наличием градиента плотности. В этом случае поток можно представить в виде разложения в ряд

$$j(E) = B(E)n(E) + D(E) \frac{d n(E)}{d E}, \quad (13)$$

где  $B(E)$  - коэффициент динамического трения,  $D(E)$  - коэффициент диффузии. Последнее слагаемое в (13) определяет диффузионный поток.

Исходя из представления о непрерывности течения, изменение концентрации частиц с энергией  $E$  определяется дивергенцией потока частиц этой энергии или уравнением Фоккера-Планка

$$\frac{\partial n(E)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial E} \left( B(E)n(E) + D(E) \frac{d n(E)}{d E} \right). \quad (14)$$

Уравнение (14) используется для нахождения коэффициента рекомбинации. С его помощью можно найти неравновесные распределения населенностей.

В случае равновесного распределения с концентрацией  $n_o(E)$  имеем  $j(E) = 0$ , и из (13) следует связь между коэффициентами  $B(E)$  и  $D(E)$ :

$$B(E)n_o(E) = -D(E) \frac{d n_o(E)}{d E}. \quad (15)$$

Введем относительные заселенности по аналогии с дискретными уровнями  $y(E) = n(E)/n_o(E)$ . Тогда выражение для потока (13) с учетом (15) можно переписать в виде  $j(E) = D(E)n_o(E) \frac{d y}{d E}$ .

Рассмотрим уравнение (14) при условии квазистационарности, когда  $\partial n / \partial t = 0$  и  $j = const$ . Предположим, что граничные значения  $y(E_1) = y_1$  и  $y(0) = y_e y_i$  известны. Решение с данными граничными условиями имеет вид

$$y(E) = \frac{y_1 R(0, E) + y_e y_i R(E, E_1)}{R(0, E_1)}, \quad j = \frac{y_1 - y_e y_i}{R(0, E_1)}, \quad (16)$$

где величину  $R(E', E'') = \int_{E'}^{E''} \frac{d\tilde{E}}{n_o(\tilde{E})D(\tilde{E})}$  можно рассматривать в качестве

сопротивления по аналогии с законом Ома для тока  $j$  в (16), протекающего по участку цепи с разностью потенциалов  $y_1 - y_e y_i$ . При столкновении слабосвязанного электрона со свободными согласно [32,10] имеем

$$D(E) = \frac{4\sqrt{2\pi} \Lambda e^4 n_e E}{3\sqrt{m_e k_B T_e}}. \quad \text{Здесь } \Lambda - \text{ кулоновский логарифм состояния с}$$

энергией связи  $E$ . По формуле Саха для высоковозбужденных водородоподобных состояний определяем величину

$$n_o(E) = \frac{n_e^o n_i^o g(E) h^3}{2(2\pi m_e k_B T_e)^{3/2}} \exp(E/k_B T_e), \quad \text{где статвес } g(E) = \frac{Z^3 R_y^{3/2}}{E^{5/2}}.$$

Подставляя эту формулу в интеграл для сопротивления, получим

$$R(0, E_1) = \frac{(2\pi m_e k_B T_e)^{3/2} E_1}{n_e^o n_i^o h^3} \int_0^{E_1} \frac{\exp(-\tilde{E}/k_B T_e) d\tilde{E}}{g(\tilde{E})D(\tilde{E})}. \quad (17)$$

Формулу для тока в (16) можно переписать, используя в явном виде  $n_1$  и  $n_e n_i$ ,

$$j = \frac{n_1 n_e}{n_1^o n_e R(0, E_1)} - \frac{n_e^2 n_i}{n_i^o n_e^o n_e R(0, E_1)}. \quad (18)$$

Сопоставляя (7), (9) с (1), видим, что

$$j_e = n_1 n_e \beta_{ioniz} - n_e^2 n_i \alpha_{recom}. \quad (19)$$

Сравнивая соотношения (19) и (18), найдем коэффициенты ионизации и рекомбинации

$$\beta_{ioniz} = \left( n_1^o n_e R(0, E_1) \right)^{-1}, \quad \alpha_{recom} = \left( n_i^o n_e^o n_e R(0, E_1) \right)^{-1}. \quad (20)$$

Из этих формул следует, в частности, что  $\beta_{ioniz} = K_1 \alpha_{recom}$ , где

$K_1 = n_e^o n_i^o / n_1^o$  - константа ионизационного равновесия относительно

основного состояния. Вычисление интеграла (17) приводит к следующему выражению для коэффициента рекомбинации [33,13,10] в случае  $T_e \ll E_1$ :

$$\alpha_{recom} = \frac{4\pi\sqrt{2\pi} e^{10} \bar{\Lambda}}{9\sqrt{m_e} (k_B T_e)^{9/2}}, \quad (21)$$

где среднее значение кулоновского логарифма  $\bar{\Lambda} \cong 0.2$ . Если в (21) температуру  $T_e$  выразить в эВ, то приходим к простому соотношению для коэффициента

тройной рекомбинации  $\alpha_{recom} = 5.4 \cdot 10^{-27} T_e^{-9/2} (см^6 / с)$ . Последняя формула справедлива при условии  $T_e < E_2$ , где  $E_2$  - энергия связи в первом возбужденном состоянии.

**Одноквантовое приближение.** Рассмотрим движение электрона в энергетическом пространстве атома при наличии дискретности энергетических уровней. Вероятность ударных переходов зависит от разности энергии уровней следующим образом:  $W_{km} \sim (E_k - E_m)^{-4}$ . Поэтому наиболее вероятны переходы между соседними уровнями. В одноквантовом приближении в результате столкновительных процессов для потока электронов между уровнями  $k-1$  и  $k$  имеем

$$j = n_k W_{k,k+1} - n_{k+1} W_{k+1,k} = n_k W_{k,k+1} (y_k - y_{k+1}). \quad (22)$$

Аналогичное соотношение можно записать для потока между уровнями  $k$  и  $k-1$ . Соответственно,  $y_k$  можно выразить через  $y_{k-1}$ . Далее  $y_{k-1}$  выразим через  $y_{k-2}$  и т.д., пока не дойдем до  $y_1$ . Двигаясь в обратном направлении,  $y_{k+1}$  можно выразить через  $y_k$ ,  $y_{k+2}$  - через  $y_{k+1}$  и т.д. Населенность последнего состояния свяжем с величиной  $y_e$ . После преобразований поток  $j$  и относительная населенность уровней  $y_k$  могут быть представлены в виде

$$y_k = \frac{y_1 R_{ke} + y_e y_i R_{1k}}{R_{1e}}, \quad j = \frac{y_1 - y_e y_i}{R_{1e}}, \quad (23)$$

где  $R_{nm} = \sum_{k=n}^{m-1} R_{k,k+1}$  и  $R_{k,k+1} = \left( n_k^o W_{k,k+1} \right)^{-1}$ . Соотношение (23) аналогично выражению (16), отвечающему диффузионному приближению, но в отличие от него одноквантовое приближение учитывает дискретность атомного спектра. Недостаток одноквантового приближения связан с учетом переходов только между соседними уровнями. Этот недостаток устраняется в рамках МДП.

**Модифицированное диффузионное приближение (МДП).** Данное приближение также учитывает дискретность энергетических уровней атома, а перемещение связанного электрона в результате столкновительных процессов рассматривается как диффузия в дискретном пространстве. При этом выводится уравнение Фоккера-Планка в конечных разностях [10], которое в предельном случае сливающихся уровней переходит в дифференциальное уравнение (14). Конечно-разностному уравнению Фоккера-Планка соответствует столкновительный поток, который по форме совпадает с выражением для потока в одноквантовом приближении (22) и имеет вид

$$j = n_k Z_{k,k+1} - n_{k+1} Z_{k+1,k}, \quad (24)$$

$$Z_{k,k+1} = B_k / \left[ (E_k - E_{k+1})(E_{k-1} - E_{k+1}) \right], \quad B_k = \sum_n W_{kn} (E_n - E_{k-1})(E_n - E_k).$$

Здесь  $Z_{k,k+1}$  - эффективные вероятности одноквантовых переходов [10], в которых суммируются вклады различных ударных переходов. Если при

вычислении  $B_k$  ограничиться учетом переходов  $k \rightarrow k+1$ , то  $Z_{k,k+1} \equiv W_{k,k+1}$  и потоки в (22), (24) совпадают.

Используя квантовомеханическое правило сумм для вероятностей переходов, можно вычислить эффективные вероятности переходов и усреднить их по максвелловскому распределению свободных электронов. В результате приходим к следующему соотношению при  $k > 1$ :

$$Z_{k,k+1} = \frac{4\sqrt{2\pi} \Lambda_k e^4 n_e E_{k-1}}{\sqrt{m_e k_B T_e} (E_{k-1} - E_{k+1})(E_k - E_{k+1})} \cdot \exp\left(-\frac{E_k - E_{k+1}}{k_B T_e}\right), \quad (25)$$

где  $\Lambda_k$  - кулоновский логарифм связанного электрона, учитывающий особенности структуры атомов. Для эффективных вероятностей переходов  $Z_{k,k+1}$  и  $Z_{k+1,k}$  справедлив принцип детального равновесия  $n_k^0 Z_{k,k+1} = n_{k+1}^0 Z_{k+1,k}$ . Для перехода в МДП следует во всех выражениях, отвечающих одноквантовому приближению, заменить вероятности переходов  $W_{k,k+1}$  их эффективными значениями  $Z_{k,k+1}$ .

Вместо использованных выше скоростей одноквантовых переходов и величин  $Z_{k,k+1}$  можно использовать формулу Ван Режемортера для скоростей столкновительного возбуждения [20]:

$$C_{k,k+1}^{ex} = n_e \cdot 4.63 \cdot 10^{-6} f_{k,k+1} \frac{\exp(-\Delta E_k / T)}{\Delta E_k \sqrt{T}} p(T / \Delta E_k), \quad (26)$$

где  $f_{k,k+1}$  - сила осцилляторов перехода  $k \rightarrow k+1$ ,  $\Delta E_k = E_k - E_{k+1}$ , а  $p(T / \Delta E_k)$  - полуэмпирическая табулированная функция, которую можно приближенно аппроксимировать формулой  $p(x) = 0.3 \cdot \ln(1.017 + 0.462 \cdot x)$ . График функции  $p(T / \Delta E_k)$  представлен на рис. 3. Энергия и температура в формуле (26) измеряются в эВ, концентрация - в  $\text{см}^{-3}$ . Рассмотрим соотношения (25) и (26) при больших  $k$ . Для сил осцилляторов в (26)

используем приближение Крамерса:  $f_{n,k} \approx \frac{32}{3\pi\sqrt{3}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)^{-3} \frac{1}{k^3 n^5}$ , из

которого при  $k \rightarrow \infty$  следует, что  $f_{k,k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1.96}{8} k \approx \frac{1}{4} k$ . В то же время

для водородных уровней в (25) при больших  $k$  имеем  $\frac{E_{k-1}}{(E_{k-1} - E_{k+1})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4} k$ . Сравнивая итоговые соотношения, можно

убедиться в том, что кулоновский логарифм связанного электрона  $\Lambda_k$  в формуле (25), изображенный на рис. 4, и фактор  $p(x)$  в (26) дают близкие значения. Поэтому для вычисления  $\Lambda_k$  в формуле (25) можно использовать соотношение  $\Lambda_k \approx 0.3 \cdot \ln(1.017 + 0.462 \cdot k_B T_e / (E_k - E_{k+1}))$ .

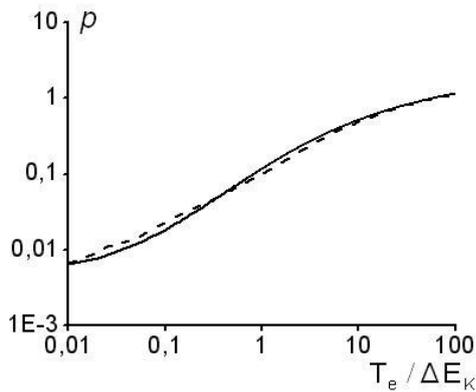


Рис. 3. Зависимость  $\rho(T_e / \Delta E_k)$ :  
штрихованная линия –  
экспериментальные данные [33],  
сплошная линия –  
аппроксимационная формула

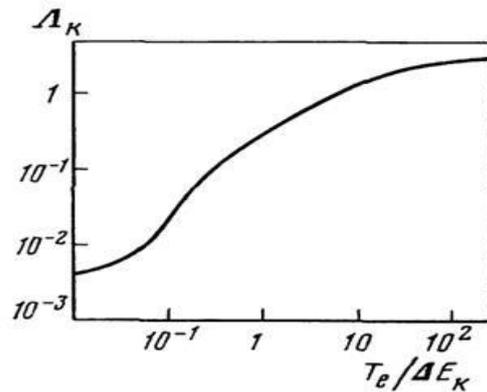


Рис. 4. Кулоновский логарифм  
связанного электрона [10]

Для нахождения в явном виде коэффициентов ионизации  $\beta_{ioniz}$  и рекомбинации  $\alpha_{recom}$  в уравнении (1) воспользуемся выражением (23) для потока  $j$ , в котором сопротивление  $R_{1e}$  определяется через эффективные вероятности переходов  $Z_{k,k+1}$  вместо вероятности переходов  $W_{k,k+1}$ . Сопоставляя (23) с формулой (19), находим

$$\beta_{ioniz} = \left( n_1^o n_e R_{1e} \right)^{-1}, \quad \alpha_{recom} = \left( n_i^o n_e^o n_e R_{1e} \right)^{-1}. \quad (27)$$

Для сопротивления  $R_{1e}$  в (23) используем выражение  $R_{1e} = \sum_{k \geq 1} R_{k,k+1}$ .

Отношение  $n_e^o n_i^o / n_k^o$  выразим с помощью формулы Саха для  $k$ -ого уровня

$$\frac{n_e^o n_i^o}{n_k^o} = \frac{g_e g_i}{g_k} \exp(-E_k / k_B T), \quad \text{где } g_e = 2 \left( \frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} - \text{статвес свободных}$$

электронов,  $g_i \equiv \sum_i = 1$  и  $g_k \equiv \sum_a = 2k^2$  - статистические веса иона и атома в  $k$ -ом возбужденном состоянии соответственно. Применяя эти соотношения, из (27) получим коэффициент ступенчатой рекомбинации в виде:

$$\alpha_{cm}^{-1} = 2 \sum_i n_e \frac{(2\pi m_e k_B T_e)^{3/2}}{h^3} \sum_{k \geq 1} \frac{\exp(-E_k / k_B T_e)}{g_k Z_{k,k+1}}. \quad (28)$$

В данном выражении эффективные вероятности переходов  $Z_{k,k+1}$  определяются формулой (25). В свою очередь соотношения (27) позволяют установить связь между коэффициентами ступенчатой ионизации  $\beta_{cm}$  и рекомбинации  $\alpha_{cm}$ :

$$\beta_{cm} = K_1 \alpha_{cm}, \quad (29)$$

где  $K_1 = n_e^0 n_i^0 / n_1^0$  - константа ионизационного равновесия относительно основного состояния, вычисляемая с помощью формулы (5). Учет радиационных процессов приводит к появлению в формулах (27)-(29) соответствующего фактора, который зависит от отношения эффективностей радиационных и ударных процессов [10].

Величины  $\beta_{ст}$  и  $\alpha_{ст}$ , определяемые формулами (28) и (29), позволяют вычислить скорости ступенчатых процессов ионизации и рекомбинации. К ним следует добавить коэффициенты прямой ионизации и рекомбинации, которые стандартным образом учитываются в окончательных выражениях.

### Квазиодномерная модель течения

В потоках ионизирующегося газа основной интерес представляет зависимость параметров течения от продольной координаты канала ускорителя. Изменение переменных в поперечном или радиальном направлениях несущественно, и им можно пренебречь. В этом случае можно ограничиться квазиодномерным приближением (см., например, [3,6,8-9,34]) и рассмотреть течение в узкой цилиндрической трубке или канале заданного сечения. При этом искомые функции усредняются по поперечному сечению канала и удовлетворяют уравнениям, которые содержат две независимые переменные: время  $t$  и пространственную координату  $z$  вдоль канала. Будем считать, что средний характерный радиус канала  $r = r_0$  является постоянной величиной. В уравнениях участвует площадь поперечного сечения канала, равная  $f(z) = 2\pi r_0 \Delta r(z)$ , где  $\Delta r(z)$  - зазор между электродами.

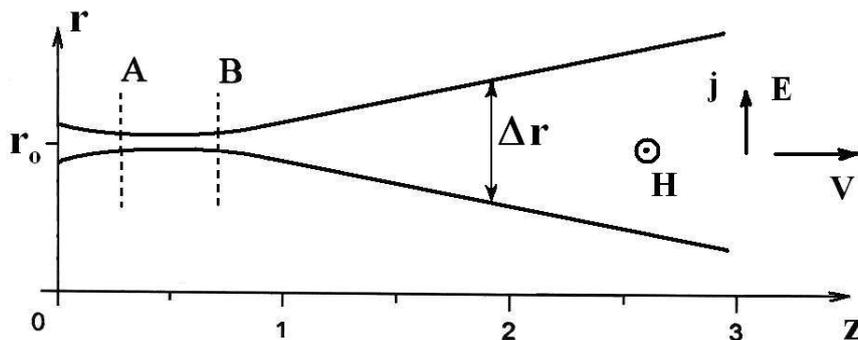


Рис. 5. Форма канала плазменного ускорителя в квазиодномерном приближении

Площадь поперечного сечения канала зададим следующим образом:  $f(z) = 0.3 - 0.8z(1-z)$ , если  $z \leq 1$ , и  $f(z) = 0.8z - 0.5$ , если  $1 \leq z \leq z_{out} = 3$ . Канал представляет собой сопло единичной длины, надстроенное справа линейно расширяющимся раструбом (рис. 5).

Рассмотрим течение ионизирующегося газа в канале коаксиального плазменного ускорителя. На рис. 5 изображена проекция коаксиальных электродов на плоскость  $(r, z)$ . Допустим, внешний электрод является катодом,

а внутренний - анодом. Соответствующие направления тока, электрического поля и азимутального магнитного поля указаны на рисунке. Магнитное поле ортогонально направлению электрического тока, потоку и плоскости рисунка. На входе в канал плазменного ускорителя осуществляется подача газа. В наиболее узкой части канала (см. промежуток АВ на рис. 5) происходит ионизация газа с образованием узкого фронта. За фронтом ионизации плазма ускоряется вдоль оси канала за счет силы Ампера.

В квазиодномерном приближении процесс ионизации описывается с помощью модифицированных МГД-уравнений [9,11,12], которые можно представить в безразмерной форме. Введем обозначения  $V = V_z$  и  $H = H_\varphi$ . С учетом уравнения кинетики ионизации и рекомбинации имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e f}{\partial t} + \frac{\partial n_e V f}{\partial z} &= f \tilde{\Gamma}_e; & \tilde{\Gamma}_e &= n_a n_e \tilde{\beta}_{ion} - n_e^2 n_i \tilde{\alpha}_{rec} + \tilde{\beta}_\omega n_a - n_e n_i \tilde{\alpha}_\omega; \\ \frac{\partial \rho f}{\partial t} + \frac{\partial \rho V f}{\partial z} &= 0; & \rho &= n_a + n_i; \\ \frac{\partial \rho V f}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V f) V}{\partial z} &= -f \frac{\partial}{\partial z} \left( P + \frac{H^2}{2} \right); & P &= \frac{\beta}{2} (1 + \alpha) \rho T; \\ \frac{\partial \rho \varepsilon f}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \varepsilon f) V}{\partial z} &= -P \frac{\partial V f}{\partial z} + f v \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial f q}{\partial z}; & & (30) \\ \frac{\partial H f}{\partial t} + \frac{\partial H V f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( v f \frac{\partial H}{\partial z} \right); \\ \varepsilon &= \frac{\beta (1 + \alpha) T}{2(\gamma - 1)} + \frac{\beta}{2} \zeta \alpha T^*; & n_e &= n_i; & \alpha &= \frac{n_e}{\rho}; & n_a &= (1 - \alpha) \rho; & q &= -\tilde{\kappa} \frac{\partial T}{\partial z}; \\ v &= 1/\sigma_o = 1/\sigma_1 + 1/\sigma_2; & \sigma_1 &= \alpha \sigma_{10} / (1 - \alpha) \sqrt{T}; & \sigma_2 &= \sigma_{20} T^{3/2}; \\ z=0 &: & \rho &= 1; & T &= 1; & H &= 1; & \alpha &= \alpha_{in}. \end{aligned}$$

На выходе из ускорителя  $z = z_{out}$  граничные условия отвечают свободному вытеканию. В качестве единиц измерения возьмем размерные константы:  $n_o$  ( $\rho_o = m n_o$ ),  $T_o$ ,  $H_o$ , а также  $L$  - длину канала либо его части. Характерное магнитное поле  $H_o = 2 J_p / c r_o$  определяется разрядным током в системе  $J_p$ , неизменным в процессе расчетов. С помощью перечисленных величин формируются единицы: давления -  $H_o^2 / 4\pi$ , скорости -  $V_o = H_o / \sqrt{4\pi \rho_o}$ , времени -  $L / V_o$  и электрического поля -  $E_o = H_o V_o / c$ . Безразмерные параметры в (30) имеют вид:  $\beta = 8\pi P_o / H_o^2$  ( $P_o = k_B n_o T_o$ ),  $v = c^2 / 4\pi L V_o \sigma$ ,  $T^* = I / k_B T$ ,  $\tilde{\beta}_{ion} = (L n_o / V_o) \beta_{ion}$ ,  $\tilde{\alpha}_{rec} = (L n_o^2 / V_o) \alpha_{rec}$ .

Магнитная вязкость  $\nu$  и безразмерная проводимость  $\sigma_o = \text{Re}_m$  (магнитное число Рейнольдса) содержат величины  $\sigma_{10}$  и  $\sigma_{20}$ , которые выражаются через исходные размерные параметры и физические константы.

Первое из приведенных уравнений является уравнением кинетики ионизации и рекомбинации, которое определяет скорость рождения электронов с учетом различных процессов, описываемых правой частью данного уравнения.

Вместо уравнения для внутренней энергии используется также уравнение для энтропии, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial(f \rho S)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} [(f \rho S) V] = \frac{2(\gamma-1)}{\beta(1+\alpha)T} \left( f \nu \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial z} (f q) - \frac{\beta}{2} f \zeta T^* \tilde{\Gamma}_e \right),$$

где  $S = \ln \frac{P}{\rho^\gamma}$ ;  $P = \rho^\gamma e^S = \frac{\beta}{2} (1+\alpha) \rho T$ ;  $T = \frac{2 \rho^{\gamma-1} e^S}{\beta(1+\alpha)}$ .

Теплопроводность в уравнении для внутренней энергии в (30) или для энтропии  $S$  равна сумме электрон-атомарной и лучистой теплопроводности, которые определяются соотношениями, приведенными выше.

В численной модели для расчета гиперболической части уравнений используется схема SHASTA-FCT с коррекцией потоков [35]. Данная разностная схема хорошо зарекомендовала себя и неоднократно тестировалась на разных задачах. Магнитная вязкость в уравнении диффузии магнитного поля и теплопроводность учитывается с помощью метода потоковой прогонки [36], предложенного Дегтяревым Л.М. и Фаворским А.П. Поиск стационарных течений осуществлялся методом установления.

**Коэффициенты ионизации и рекомбинации.** Оценки вероятностей различных процессов показывают, что основным фактором, приводящим к ионизации и рекомбинации в рассматриваемом случае достаточно плотной низкотемпературной плазмы, является взаимодействие электронов с атомами и ионами, отвечающее следующим элементарным прямым и обратным процессам:  $A_k + e \leftrightarrow A_m + e$  - возбуждение и тушение (гашение),  $A_k + e \leftrightarrow A^+ + e + e$  - ионизация электронным ударом и тройная рекомбинация. К этим процессам можно добавить фотоионизацию и фоторекомбинацию  $A_k + \hbar\omega \leftrightarrow A^+ + e$ .

В рамках модифицированного диффузионного приближения [10], в котором диффузия связанного электрона рассматривается в энергетическом пространстве атома с учетом дискретности его уровней, в соответствии с (25) и (28) коэффициент ступенчатой рекомбинации  $\alpha_{cm}$  для атомов водорода определяется соотношением

$$\alpha_{cm} = \frac{h^3 e^4}{2\pi (m_e k_B T_e)^2 \Sigma_i E_1} \left[ \sum_{k \geq 1} \frac{(2k+1) \exp(-E_{k+1}/k_B T_e)}{k^3 (k+1)^4 \Lambda_k} \right]^{-1}, \quad (31)$$

где  $E_k = E_1 / k^2$ ,  $E_1 = I = 13.6 \text{ эВ} = 2.16 \cdot 10^{-11} \text{ эрг}$ . Коэффициенты ступенчатой рекомбинации  $\alpha_{cm}$  и ионизации  $\beta_{cm}$  связаны между собой через константу ионизационного равновесия относительно основного состояния согласно (25).

Суммарные коэффициенты ионизации и рекомбинации включают прямой процесс ионизации из основного состояния при столкновении электронов с атомами и обратный процесс рекомбинации:

$$\beta_{ion} = \beta_{cm} + \beta_{np}, \quad \alpha_{rec} = \alpha_{cm} + \alpha_{np},$$

где  $\alpha_{np} = (W_{e,1} + A_{e1})/n_e$  и  $\beta_{np} = W_{1,e}/n_e$ . Здесь коэффициент Эйнштейна  $A_{e1}$  определяет вероятность соответствующего спонтанного излучения. Основной вклад в процессы ионизации и рекомбинации вносят ступенчатые процессы.

Кроме того, можно учесть процессы, связанные с фотоионизацией и фоторекомбинацией (см., например, [13]). При использовании спектральной плотности равновесного излучения или функции Планка соответствующие коэффициенты вычисляются с помощью следующих соотношений:

$$\beta_{\omega} = \frac{8\pi I^2 k_B T}{c^2 h^3} \sigma_{\omega}^o \exp\left(-\frac{I}{k_B T}\right), \quad \alpha_{\omega} = \frac{\beta_{\omega} n_a}{n_e n_i},$$

где  $\sigma_{\omega}^o = 7.9 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2$  - эффективное сечение фотоионизации водорода.

## Результаты расчетов течений ионизирующегося газа

На рис. 6 представлен характерный пример установившегося (квазистационарного) течения ионизирующегося газа, отвечающий следующему набору исходных размерных и безразмерных параметров задачи:  $T_o = 500^\circ \text{K}$ ,  $n_o = 2.5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $L = 20 \text{ см}$ ,  $J_p = 85 \text{ кА}$ ,  $\alpha_{in} = 10^{-10}$ ,  $r_o = L/3$ ,  $\beta = 0.07$ ,  $T^* = 313$ ,  $\sigma_{01} = 1191$ ,  $\sigma_{02} = 0.03$ ,  $V_o = 1.1 \cdot 10^6 \text{ см/с}$ . Данные значения концентрации, температуры и давления на входе в канал перед фронтом ионизации соответствуют рабочему диапазону параметров, используемых в КСПУ. Предполагаем, что на входе в канал подается равновесный слабоионизованный газ. При этом степень ионизации на входе  $\alpha_{in}$  при  $z=0$  определяется с помощью соотношения Саха, отвечающего приближению локального термодинамического равновесия.

Течение ионизирующегося газа характеризуется, с одной стороны, резким возрастанием температуры, скорости и степени ионизации, с другой стороны, резким падением плотности и магнитного поля на фронте ионизации, расположенном в окрестности наиболее узкой соплообразной части канала.

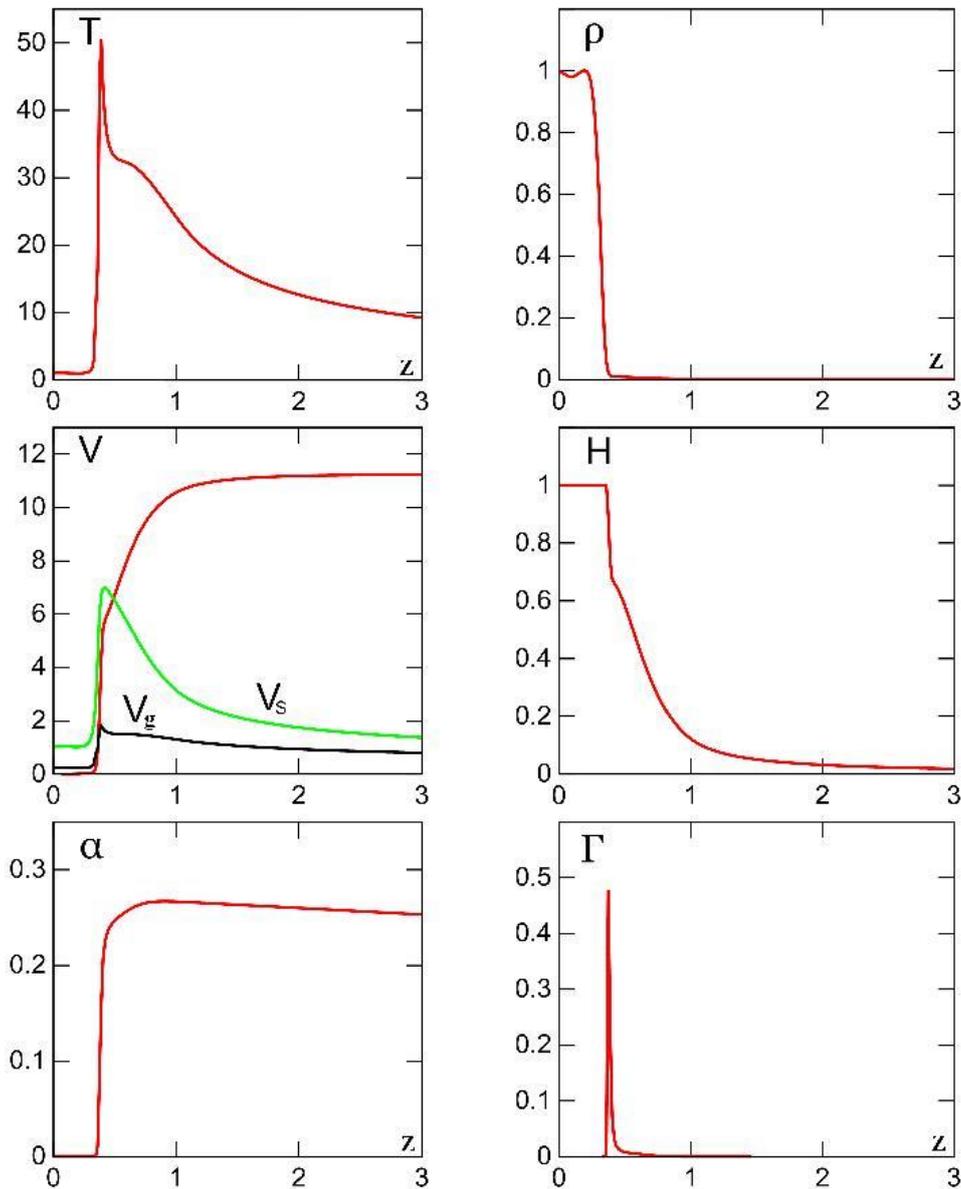


Рис. 6. Распределение параметров в стационарном потоке ионизирующего газа в канале плазменного ускорителя. Значения параметров на входе:

$$n_0 = 2.5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}, T_0 = 500^\circ \text{ K} \text{ и } J_p = 85 \text{ kA}$$

В отличие от первоначальных моделей в рамках кинетики ионизации и рекомбинации неравновесной плазмы имеем существенно более резкие зависимости всех переменных на фронте ионизации. Это обстоятельство указывает на более адекватное описание процесса ионизации с точки зрения имеющихся экспериментальных данных. В экспериментах на плазменных ускорителях (см., например, [1,2, 22-28]) толщина фронта ионизации составляет несколько миллиметров. Кроме того, в узкой области фронта наблюдается четко выраженное отклонение процесса ионизации от равновесия, о чем свидетельствует наличие пика функции  $\Gamma = \tilde{\Gamma}_e(z)$  согласно первому уравнению в системе (30). В случае локального термодинамического равновесия  $\tilde{\Gamma}_e \equiv 0$ .

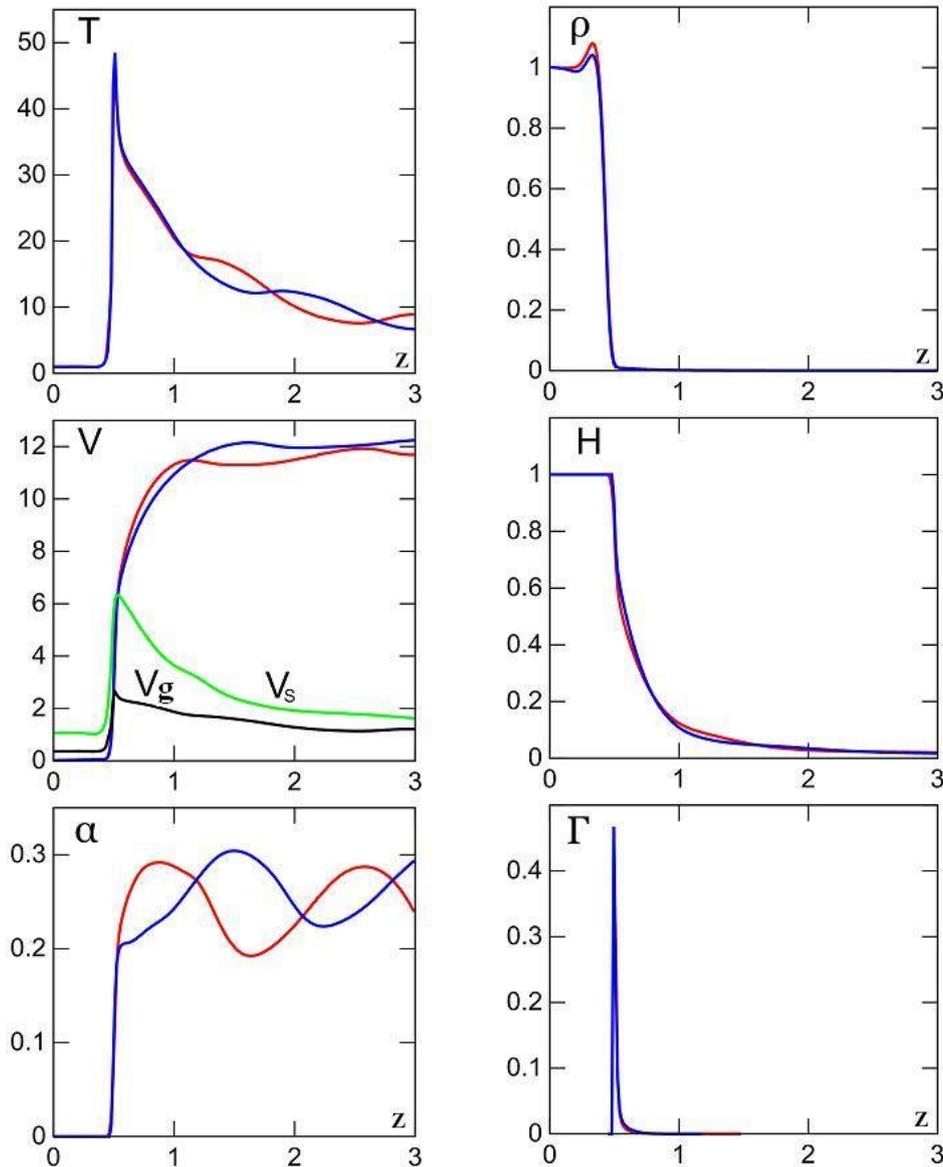


Рис. 7. Распределение параметров в пульсирующем потоке ионизирующегося газа в различные моменты времени. Значения параметров на входе:

$$n_o = 2.5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}, T_o = 500^\circ \text{K} \text{ и } J_p = 55 \text{ kA}$$

В экспериментах на коаксиальных плазменных ускорителях, а также в рамках простейших моделей процесса ионизации [1-8] наблюдались стационарные и пульсирующие режимы течения в зависимости от параметров, включая разрядный ток и расход газа. В представленной модели также реализуются два режима течения. В частности, при уменьшении разрядного тока происходит переход от стационарного процесса ионизации к периодическому пульсирующему режиму течения. На рис. 7 представлены распределения МГД-переменных в пульсирующем потоке в разные моменты времени  $t_1 = 8.8$  (синие кривые) и  $t_2 = 8.85$  (красные кривые), отвечающие  $n_o = 2.5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_o = 500^\circ \text{K}$ ,  $J_p = 55 \text{ kA}$ ,  $\beta = 0.16$ ,  $V_o = 0.7 \cdot 10^6 \text{ см/с}$ .

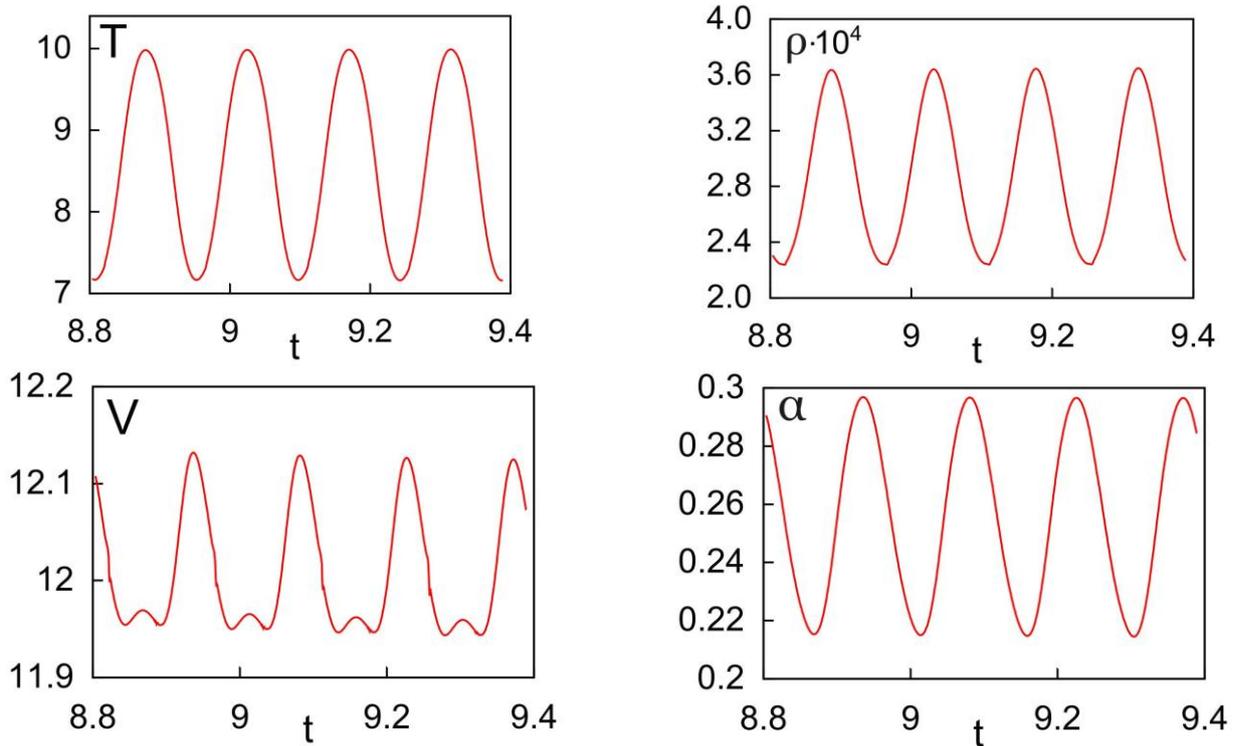


Рис. 8. Изменение МГД-переменных с течением времени в пульсирующем потоке ионизирующегося газа

Пульсирующие течения ионизирующегося газа сопровождаются колебаниями всех величин. На рис. 8 изображены графики зависимости температуры, плотности, скорости и степени ионизации от времени для варианта пульсирующего течения, представленного на рис. 7. Значения величин взяты на выходе из канала плазменного ускорителя при  $z = z_{out}$ .

В процессе ионизации в окрестности узкого фронта ионизации происходит последовательный переход скорости потока сначала через газодинамическую скорость звука  $C_g = \sqrt{\gamma P / \rho}$  (черные кривые на рис. 6 и 7), а потом и магнитогазодинамическую скорость  $C_s = \sqrt{C_g^2 + H^2 / \rho}$  (зеленые кривые на рис. 6 и 7) или скорость сигнала [1,2] при наличии единственной компоненты  $H_\varphi$ . В стационарных течениях ионизирующегося газа (см, например, рис. 6) переход через  $C_g$  происходит в сужающейся части канала ( $z < 0.5$ ), а через  $C_s$  в наиболее узкой части канала, отвечающей значению  $z = 0.5$ . В то же время в нестационарных потоках переход через  $C_g$  и  $C_s$  происходит в расширяющейся части канала при  $z > 0.5$  (см. рис. 7). Это, в частности, объясняет возникновение пульсирующих режимов, но не дает исчерпывающего ответа на вопрос о природе нестационарных течений, возникновение которых может быть связано также с процессами в электрической цепи, неустойчивым положением фронта в канале постоянного сечения и другими факторами.

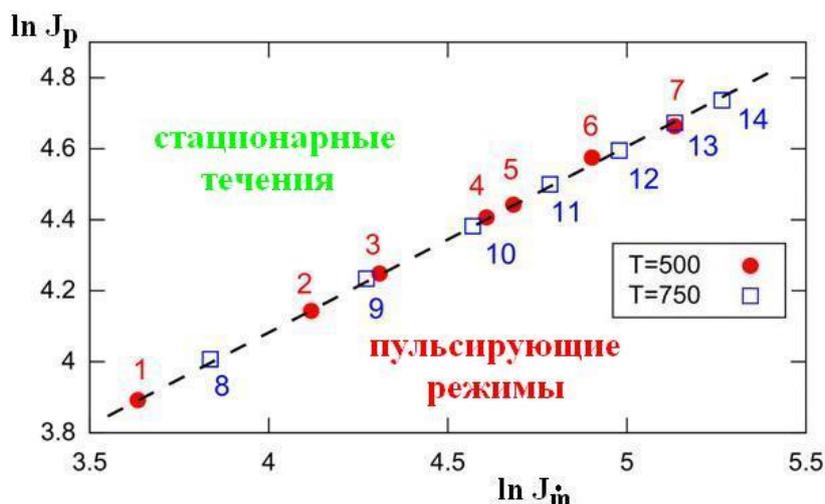


Рис. 9. Граница между стационарными и пульсирующими течениями ионизирующего газа

В результате серии численных экспериментов определена граница перехода от пульсирующих режимов к стационарным течениям ионизирующего газа. Эта граница отмечена штриховой линией на рис. 9 в плоскости переменных  $(\ln J_{in}, \ln J_p)$ , где  $J_{in} = \frac{e}{m_i} \dot{m}$  (kA) - расход, выраженный в токовых единицах. Разные маркеры на рис. 9 отвечают двум значениям  $T_0$ . Номера маркеров вдоль границы соответствуют вариантам квазистационарных течений, которые рассчитаны для параметров  $J_p$ ,  $n_0$  и  $T_0$ , указанных в таблице 1. Здесь же приведены значения расхода  $\dot{m}$  (г/с) и параметра  $\beta$ .

Таблица 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$n_0 \cdot 10^{17}, \text{см}^{-3}$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
$T_0, ^\circ K$	500	500	500	500	500	500	500	750	750	750	750	750	750	750
$J_p, \text{kA}$	49	63	70	82	85	97	106	56	69	80	90	99	107	114
$\dot{m} \cdot 10, \text{г/с}$	3.9	6.4	7.8	10	11	14	18	4.8	7.5	10	12	15	18	20
$\beta \cdot 10^2$	8.0	7.3	7.9	7.2	8.0	7.2	6.9	9.2	9.1	9.0	8.9	8.8	8.8	8.9

Штриховая линия на рис. 9 описывается формулой  $\ln J_p = \lambda \cdot \ln J_{in} + b$ , где  $\lambda \approx 0.5$ . Условие стационарности течений ионизирующего газа может быть формализовано с помощью следующего неравенства:

$$J_p^2 / J_{in} > K, \quad (31)$$

где константа  $K$  в общем случае зависит от геометрии канала ускорителя. Соответственно выше штриховой линией, при больших значениях разрядного тока, имеем стационарные течения ионизирующегося газа. Ниже данной линии, при меньших значениях разрядного тока, наблюдаются нестационарные пульсирующие течения.

Аналогичное условие стационарности течений ионизирующегося газа было получено ранее эмпирическим путем в рамках упрощенной модели, основанной на приближении локального термодинамического равновесия [6]. Можно предположить, что выявленная зависимость (31) является универсальной и следует, например, из законов подобия.

**Условие стационарности и критерии подобия.** Физическая картина процессов определяется не абсолютными значениями параметров, например,  $J_p$ ,  $n_o$ ,  $T_o$  и  $L$ , а безразмерными параметрами, т.е. отвечает критериям подобия. При этом одним и тем же безразмерным параметрам могут соответствовать различные наборы исходных размерных параметров. Для рассматриваемого класса течений имеем два основных безразмерных параметра:  $\nu = 1/\text{Re}_m = c^2/4\pi LV_o\sigma$  и  $\beta = 8\pi k_B n_o T_o / H_o^2$ , где  $H_o = 2J_p/cr_o$  и  $V_o = H_o/\sqrt{4\pi m_i n_o}$ . Согласно данным таблицы 1, для набора течений с одинаковым значением  $T_o$ , отвечающим границе стационарности, оказывается, что безразмерный параметр  $\beta$  мало меняется. Будем считать, что  $\beta \approx \text{const}$ . Аналогичные выводы можно сделать относительно магнитной вязкости  $\nu$  или магнитного числа Рейнольдса  $\text{Re}_m$ . Изменение величины  $\text{Re}_m$  вдоль канала представлено на рис.10 для вариантов таблицы с первого по шестой. Видно, что распределения и локальные значения  $\text{Re}_m$  практически одни те же для течений, отвечающих границе стационарности.

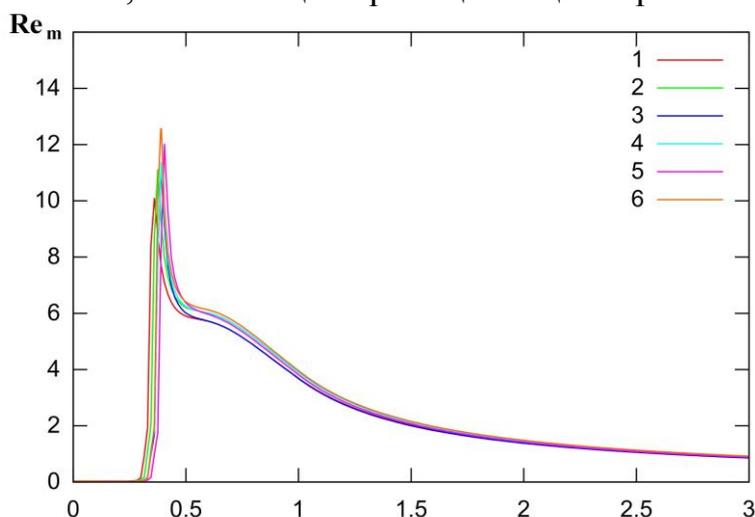


Рис. 10. Изменение магнитного числа Рейнольдса вдоль канала для вариантов 1 – 6 таблицы 1, отвечающих границе стационарности течений ионизирующегося газа

Таким образом, течения на границе раздела между пульсирующими и стационарными режимами являются подобными относительно двух безразмерных параметров. Для таких течений безразмерные параметры  $\beta$  и  $\nu$  имеют практически одни и те же значения. С учетом определения величин  $\beta$  и  $\nu$  получим, что  $V_o \approx const$  на границе раздела, по крайней мере, для течений с одинаковым значением температуры  $T_o$  на входе в канал. Используя систему уравнений для стационарных течений плазмы в приближении узкого канала в отсутствие диссипаций, можно показать (см., например, [1-2]), что максимальная скорость истечения из канала ускорителя  $V_{max} = \sqrt{2} V_o$ . Учитывая постоянство значений МГД-переменных перед фронтом ионизации согласно рис. 6 и 7, данную оценку можно использовать для рассматриваемых течений ионизирующегося газа. Одновременно воспользуемся еще одной оценкой для максимальной скорости истечения плазмы  $V_{max} \sim J_p^2 / \dot{m}$  через разрядный ток  $J_p$  и расход  $\dot{m}$  (см. [2], стр. 187). В результате на границе стационарных течений имеем  $J_p^2 / \dot{m} \sim V_o \approx const$ , что соответствует эмпирическому описанию границы между пульсирующими и стационарными режимами.

**Стабилизация течений ионизирующегося газа СВЧ нагревом.** В результате серии расчетов для различных значений температуры газа  $T_o$  на входе в канал и при условии постоянства значения  $P_o = k_B n_o T_o$  установлено, что при увеличении характерной начальной температуры происходит установление пульсирующих течений ионизирующегося газа. Колебательные или пульсирующие режимы исчезают при  $T_o \geq 1500^{\circ}K$ . Данный результат приводит к практическому выводу о том, что использование сверхвысокочастотных технологий и предварительный СВЧ нагрев поступающего газа позволяет стабилизировать нестационарные течения ионизирующегося газа и сделать устойчивым процесс ионизации газа в канале плазменного ускорителя.

## З а к л ю ч е н и е

Исследование нестационарных пульсирующих течений ионизирующегося газа в канале традиционного коаксиального плазменного ускорителя с азимутальным магнитным полем проведено на основе системы МГД-уравнений в квазиодномерном приближении. Модель включает уравнение кинетики ионизации и рекомбинации в рамках модифицированного диффузионного приближения. В результате серии расчетов найдено эмпирическое условие стационарности течений ионизирующегося газа. Установлено, что при увеличении характерной начальной температуры газа на входе в канал ускорителя происходит установление пульсирующих течений.

## Список литературы

1. Морозов А.И. Физические основы космических электрореактивных двигателей. М.: Атомиздат, 1978. 326 с.
2. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2008. 613 с.
3. Брушлинский К.В., Морозов А.И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах // Вопросы теории плазмы. Под ред. М.А. Леонтовича, М.: Атомиздат, 1974, вып. 8. С. 88-163.
4. Козлов А.Н. Двумерный характер неустойчивости течений ионизирующегося газа в канале плазменного ускорителя // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 2. С. 187-189.
5. Козлов А.Н. Моделирование двумерных течений ионизирующегося газа и плазмы в коаксиальном ускорителе с учетом теплопроводности, излучения и процессов в электрической цепи // Препринт № 186. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 1985. 23 с.
6. Брушлинский К.В., Калугин Г.А., Козлов А.Н. Численное моделирование течения ионизирующегося газа в канале // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1982. № 50. 28 с.
7. Козлов А.Н. Численное исследование двумерных течений ионизирующегося газа в приближении ЛТР //Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша,№174, 1986.20 с.
8. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009. 200 с.
9. Козлов А.Н. Кинетика ионизации и рекомбинации в канале плазменного ускорителя. // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 5. С. 181-188.
10. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1982. 375 с.
11. Бармин А.А., Козлов А.Н. Исследование структуры фронта ионизации в квазистационарном плазменном ускорителе // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 47. 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-47>
12. Бармин А.А., Козлов А.Н. Структура стационарного фронта ионизации в канале плазменного ускорителя // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 4. С. 155-167.
13. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
14. Михалас Д. Звездные атмосферы (1 часть). М.: Мир, 1982. 352 с.
15. Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985. 304 с.
16. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1992. 536 с.
17. Козлов А.Н., Коновалов В.С., Новиков В.Г. Сравнительный анализ трех методов расчета переноса излучения на фронте ионизации в квазистационарных плазменных ускорителях // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 50. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-50>

18. Kozlov A.N., Garkusha I.E., Konovalov V.S., Novikov V.G. The radiation intensity of the Lyman alpha line at ionization front in the quasi-steady plasma accelerator.// Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics. 2013, No.1. P.128-130.
19. Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы. М.: Физматлит, 2000. 399 с.
20. Вайнштейн Л.А., Собельман И.И., Юков Е.А. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. М.: Наука. 1979. 319 с.
21. Козлов А.Н., Коновалов В.С., Новиков В.Г. Перенос излучения в потоке ионизирующегося газа // В сб. "Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики." Материалы конференции. Киев, Электр. изд.: НПВК «ТРИАКОН», 2007. С. 1-15.
22. Волошко А.Ю., Гаркуша И.Е., Морозов А.И., Соляков Д.Г., Терешин В.И., Царенко А.В., Чеботарев В.В. Исследование локальной картины течения плазмы в двухступенчатом КСПУ // Физика плазмы. 1990. Т.16, № 2. С.168-175.
23. Tereshin V.I., Vandura A.N., Byrka O.V., Chebotarev V.V., Garkusha I.E., Landman I., Makhraj V.A., Neklyudov I.M., Solyakov D.G., Tsarenko A.V. Application of powerful quasi-steady-state plasma accelerators for simulation of ITER transient heat loads on divertor surfaces // Plasma Phys. Contr. Fusion. 2007. V. 49. P. A231-A239.
24. Белан В.Г., Золотарев С.П., Левашов В.Ф., Майнашев В.С., Морозов А.И., Подковыров В.Л., Скворцов Ю.В. Экспериментальное исследование квазистационарного плазменного ускорителя, питаемого от индуктивного и емкостного накопителей // Физика плазмы. 1990. Т.16, № 2. С. 176-185.
25. Klimov N., Podkovyrov V., Zhitlukhin A., Kovalenko D., Bazylev B., Landman I., Pestchanyi S., Janeschitz G., Federici G., Merola M., Loarte A., Linke J., Hirai T., Compan J. Experimental study of PFCs erosion under ITER-like transient loads at plasma gun facility QSPA // Journal of Nuclear Materials. 2009. V. 390-391. P. 721-726.
26. Ананин С.И., Асташинский В.М., Баканович Г.И., Костюкевич Е.А., Кузмицкий А.М., Маньковский А.А., Минько Л.Я., Морозов А.И. Исследование процессов формирования плазменных потоков в квазистационарном сильноточном плазменном ускорителе (КСПУ) // Физика плазмы. 1990. Т.16, № 2. С. 186-196.
27. Astashynski V.M., Ananin S.I., Askerko V. V., Kostyukevich E.A., Kuzmitski A.M., Uglov V.V., Anishchik V.M., Astashynski V.V., Kvasov N.T., Danilyuk L.A. Materials surface modification using quasi-stationary plasma accelerators // J. Surface and Coating Technology. 2004. V. 180-181. P. 392-395.
28. Дьяконов Г.А., Тихонов В.Б. Экспериментальное исследование влияния геометрии ускорительного канала и внешнего магнитного поля на режимы течения плазмы в коаксиальном квазистационарном плазменном ускорителе (КСПУ) типа П-50А // Физика плазмы. 1994. Т. 20, № 6. С. 533-540.

29. Брушлинский К.В., Заборов А.М., Козлов А.Н., Морозов А.И., Савельев В.В. Численное моделирование течений плазмы в КСПУ // Физика плазмы. 1990. Т. 16, № 2. С. 147-157.
30. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. // Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963, вып. 1. С. 183-272.
31. Грановский В.Л. Электрический ток в газе. М.: Наука, 1971. 543 с.
32. Гуревич А.В. Структура возмущенной зоны в окрестности малого заряженного тела в плазме // Геомагнетизм и аэронавигация. 1964. Т.4, №1. С. 3-16.
33. Гуревич А.В., Питаевский Л.П. Коэффициент рекомбинации в плотной низкотемпературной плазме // ЖЭТФ. 1964. Т. 46, № 4. С. 1281-1284.
34. Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Регирер С.А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Физматлит, 1970. 672 с.
35. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990. 661 с.
36. Дегтярев Л.М., Фаворский А.П. Поточковый вариант метода прогонки для разностных задач с сильно меняющимися коэффициентами // ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9, № 1. С. 211-218.