ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 93 за 2013 г.

Рябенький В.С., Утюжников С.В.

Алгоритм вычисления решения модельной разностной задачи с краевыми условиями на разрезе на базе потенциала с плотностью из пространства скачков

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Рябенький В.С., Утюжников С.В. Алгоритм вычисления решения модельной разностной задачи с краевыми условиями на разрезе на базе потенциала с плотностью из пространства скачков // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 93. 15 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-93**

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

В.С. Рябенький, С.В. Утюжников

Алгоритм вычисления решения модельной разностной задачи с краевыми условиями на разрезе на базе потенциала с плотностью из пространства скачков

Москва — 2013

Рябенький В.С., Утюжников С.В.

Алгоритм вычисления решения модельной разностной задачи с краевыми условиями на разрезе на базе потенциала с плотностью из пространства скачков.

Построен алгоритм вычисления решений разностного аналога задачи для уравнения Лапласа в области с разрезом и краевыми условиями на разрезе. В основе эффективности алгоритма лежит представление решений в виде разностного потенциала с плотностью из пространства скачков решения в точках разреза.

Ключевые слова: разностный потенциал, разрез, трещина

Ryaben'kii V.S., Utyuzhnikov S.V.

An algorithm of computing solution of the model difference problem with boundary conditions on the cut on the base of potential with the density from the space of jumps.

An algorithm of computing solution of difference analogue of problem for the Laplace equation in a domain with cut and boundary conditions on the cut is developed. The base of algorithm effectiveness is representation of the solutions in the form of difference potential with the density form the space of solution jumps at the nodes of cut.

Key words: method of difference potentials, cut, crack

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №110100114

Оглавление

§ 1. Дифференциальная постановка задачи

Пусть $D=\{(x,y)|\ |x|\le 1,\ |y|\le 1\}$ — квадрат на плоскости x0y. Пусть Г — разрез, задаваемый для определенности уравнением

$$y=x^2\ ,\ 0\le x\le \frac{1}{2}$$

и имеющий начало в точке $A(0,0)$ и конец в точке $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

Будем считать, что разрез Г имеет левый $\Gamma_{лев}$ и правый $\Gamma_{прав}$ берега, которые на плоскости x0y совпадают.

Зададим линейное пространство V_D достаточно гладких вне Г двузначных на Г функций v_D, определенных в $\bar{v}\cup\Gamma$ и обращающихся в нуль в точках границы ∂D квадрата D.

Поставим следующую задачу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\ ,\ \text{если}\ (x,y)\in\bar{D}\ (\partial D\cup\Gamma) \quad (1)$$

$$v|_{\partial D}=o|_{\partial D} \quad (2)$$

$$v|_{\Gamma_{лев}}=\varphi_{лев}(x)\ ,\ 0\le x\le\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$v|_{\Gamma_{прав}}=\varphi_{прав}(x)\ ,\ 0\le x\le\frac{1}{2} \quad (4)$$

Будем предполагать, что $\varphi_{лев}(x)$ и $\varphi_{прав}(x)$ заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования в концах разреза: $\varphi_{лев}(0)=\varphi_{прав}(0)$; $\varphi_{лев}\left(\frac{1}{2}\right)=\varphi_{прав}\left(\frac{1}{2}\right)$.

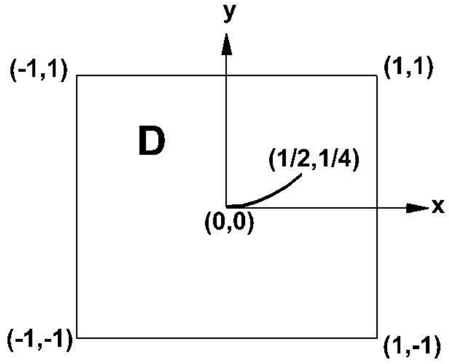

Рис.1. Область с разрезом.

§ 2. Разностный аналог дифференциальной задачи

Построим разностные аналоги дифференциального уравнения (1), условий (2) на границе ∂D квадрата D и условий (3), (4) на берегах разреза Г.

2.1. Сетки и сеточные множества

Обозначим h — шаг сетки, $h = 2^{-k}$, где k — натуральное число, параметр, $m = \left(m_x h, m_y h\right)$, $m_x, m_y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — точки сетки с координатами $m_x h$ и $m_y h$ на плоскости $x0y$.

M^0 — множество всех точек $m = \left(m_x h, m_y h\right)$, которые лежат строго внутри единичного квадрата D, так что $|m_x h| < 1$, $|m_y h| < 1$.

Обозначим γ множество концов $\left(m_x h, m_y h\right)$ и $\left(m_x h, \left(m_y + 1\right) h\right)$ вертикальных звеньев сетки, пересекающих разрез Г и удовлетворяющих следующим условиям:

$$0 < m_x h < \frac{1}{2}$$

Множество γ будем называть разрезом сеточной области M^0.

Множество точек $m = \left(m_x h, m_y h\right)$, которые являются нижними концами звеньев сетки, пересекающих разрез Г, обозначим $\gamma_{прав}$ и будем называть правым берегом сеточного разреза γ. Аналогично, множество $\gamma_{лев} = \gamma \setminus \gamma_{прав}$ будем называть левым берегом разреза.

Введем вторые экземпляры множеств $\gamma_{лев}$ и $\gamma_{прав}$, обозначив их $M^{прав}$ и $M^{лев}$, соответственно.

Множества $m = \left(m_x h, m_y h\right)$ и $M^{лев}$ будем называть карнизами левого берега разреза над правым берегом и карнизом правого берега над левым, соответственно.

Итак, мы условились различать точку $m = \left(m_x h, m_y h\right) \in M^0 \cap \gamma$ на берегу разреза от точки m с теми же координатами, лежащую на карнизе $M^{карн} = M^{лев} \cup M^{прав}$.

Обозначим $M_{\partial D}$ множество точек m сетки, лежащих на сторонах ∂D квадрата D, кроме четырех угловых

Обозначим M объединение множеств

$$M = M^0 \cup M_{\partial D} \cup M^{прав} \cup M^{лев} .$$

2.2. Шаблоны N_m, $m \in M$

Каждой точке m, $m \in M$, сопоставим множество N_m, состоящее из пяти точек или из одной точки сетки. Множество N_m будет служить в дальнейшем шаблоном разностной схемы в точке $m \in M$.

Заметим, прежде всего, что для каждой точки $m \in M$ имеет место один и только один из следующих случаев

1) $m \in M^0 \setminus \left(\gamma \cup M^{лев} \cup M^{прав} \cup M_{\partial D}\right)$, т.е. точка $m \in M$ не лежит ни на разрезе γ, ни на карнизах $M^{лев}$ или $M^{прав}$, ни на границе $M_{\partial D}$ квадрата D;

2) $m \in M^0 \cap \gamma_{лев}$, т.е. точка m лежит на левом берегу;

3) $m \in M^0 \cap \gamma_{прав}$, т.е. точка m лежит на правом берегу;

4) $m \in M^{лев}$ — точка m лежит на карнизе левого берега над правым;

5) $m \in M^{прав}$, т.е. m на левом карнизе правого берега над левым;

6) $m \in \partial D$, т.е. m лежит на границе квадрата D.

В первом случае положим

$$N_m = \left\{ n = \left(m_x h, m_y h\right); n = \left(\left(m_x \pm 1\right)h, m_y h\right); n = \left(m_x h, \left(m_y \pm 1\right)h\right) \right\}$$

Все пять точек $n \in N_m$ принадлежат множеству $M^0 \cup M_{\partial D}$, но ни одна из них не принадлежит ни $M^{лев}$, ни $M^{прав}$, т.е. карнизам.

Во втором случае $m \in M^0 \cap \gamma_{лев}$ шаблон $N_m = N_m^{лев}$, как и в первом случае, состоит из пяти точек

$$N_m^{лев} = \left\{ n = \left(m_x h, m_y h\right); n = \left(\left(m_x \pm 1\right)h, m_y h\right); n = \left(m_x h, \left(m_y \pm 1\right)h\right) \right\}.$$

Точку $n = \left(m_x h, \left(m_y - 1\right)h\right)$ при этом будем считать точкой $m \in M^{лев}$, принадлежащей карнизу левого берега над правым берегом разреза, а остальные четыре точки шаблона N_m отнесем к M_0.

В случае $m \in M^0 \cap \gamma_{прав}$ шаблон N_m также состоит из пяти точек

$$N_m^{прав} = \left\{ n = \left(m_x h, m_y h\right); n = \left(\left(m_x \pm 1\right)h, m_y h\right); n = \left(m_x h, \left(m_y \pm 1\right)h\right) \right\}.$$

При этом точку $n = \left(m_x h, \left(m_y + 1\right)h\right)$ отнесем к карнизу $M^{прав}$ правого берега над левым берегом разреза, а остальные четыре точки отнесем к M^0.

В четвертом, пятом и шестом случаях, когда $m \in M^{лев}$, $m \in M^{прав}$ или $m \in M_{\partial D}$, шаблоны N_m состоят каждый из одной точки, совпадающей с самой точкой m,

$$N_m = \left\{ n = \left(m_x h, m_y h \right) \right\}.$$

2.3. Сеточные функции

Для аппроксимации решения v_D дифференциальной задачи (1-4) будем использовать сеточные функции v_N , определенные на сеточном множестве $N = \cup N_m$, $m \in M$.

Заметим срезу же, что в рассматриваемом случае сетки N и M совпадают.

Линейное пространство всех функций v_N, обращающихся в нуль в точках $n \in \partial D$ границы квадрата, обозначим V_N. Значения функций v_N, $v_N \in V_N$, в точках $n \in N$ будем обозначать

$$v_N\big|_n = \begin{cases} v_n, \text{ если } n \in M^0 \cup M_{\partial D} \\ v_n^{кар}, \text{ если } n \in M^{лев} \cup M^{прав} \end{cases}.$$

Напомним, что каждая точка m, $m \in \gamma$, является двойной. Один экземпляр этой точки принадлежит M^0, а второй принадлежит $M^{лев}$ или $M^{прав}$.

2.4. Разностные уравнения

Каждой точке $m \in M^0 \cup M_{\partial D}$ сопоставим однородное разностное уравнение вида

$$L_{MN}\, v_N\big|_m = \sum_{n \in N_m} a_{mn} v_n = 0 \ , \ m \in M^0 \cup M_{\partial D} \qquad (5)$$

Коэффициенты a_{mn} в случае $m \in M^0$ определим так, чтобы уравнение (5) в точке $m \in M^0$ было разностным аналогом уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ в точке $(x, y) = \left(m_x h, m_y h \right)$. Для этого положим $a_{mn} = -\frac{4}{h^2}$, если $n = m$; $a_{mn} = \frac{1}{h^2}$, если $n = \left(m_x h, \left(m_y \pm 1 \right) h \right)$.

В случае $m \in M_{\partial D}$ уравнение (5) принимает вид

$$u_n = 0 \text{ , если } n = m \in M_{\partial D}.$$

Условия (3), (4) на берегах разреза Г аппроксимируем одним из следующих двух способов.

Первый вариант аппроксимации.

$$v_n^{кар} = \begin{cases} \varphi_{лев}\left(m_x h\right), \text{ если } n \in M^{лев} \\ \varphi_{прав}\left(m_x h\right), \text{ если } n \in M^{прав} \end{cases} \tag{6}$$

$$0 < m_x h < \frac{1}{2} .$$

В этом варианте аппроксимация условий на разрезе Г реализуется переносом значения $\varphi_{лев}\left(x\right)$ или $\varphi_{прав}\left(x\right)$ вдоль вертикального звена сетки в точку $m \in M^{лев}$ или $m \in M^{прав}$ соответственно. Формальный порядок аппроксимации при $h \to 0$ есть $O\left(h\right)^1$, т.е. первый.

Второй вариант аппроксимации условий (3), (4) суть следующие разностные условия

$$\alpha_{m_x} v_{m_x,m_y}^{карн} + \left(1-\alpha_m\right) v_{m_x,m_{y+1}} = \varphi_{лев}\left(m_x h\right) \tag{7}$$

$$\left(1-\alpha_m\right) v_{m_x,m_y} + \alpha_m v_{m_x,m_{y+1}}^{карн} = \varphi_{прав}\left(m_x h\right) \tag{8}$$

Коэффициенты α_{m_x} и $\left(1-\alpha_{m_x}\right)$ суть коэффициенты линейной интерполяции функции v_N в точку $\left(m_x h, \left(m_x h\right)^2\right)$ на разрезе Г. При этом учитывается, что

$$v_N\big|_n = \begin{pmatrix} v_n^{карн} \\ v_n \end{pmatrix}, \text{ если } n \in M^{лев} \text{ или } n \in M^{прав}.$$

В условии (7) считается, что $\left(m_x h, m_y h\right) \in M^{прав}$, $\left(m_x h, \left(m_y+1\right)h\right) \in M^0 \cap \gamma^{лев}$.

В условии (8) считается, что $\left(m_x h, m_y h\right) \in M^{прав}$, $\left(m_x h, \left(m_y+1\right)h\right) \in M^0 \cap \gamma^{прав}$.

Заметим, что разностное уравнение (5) связывает все значения функции $v_N \in V_N$. Число неизвестных скалярных компонент функции v_N равно сумме чисел $\left|M^0\right| + \left|M_{\partial D}\right| + \left|M^{лев}\right| + \left|M^{прав}\right|$ точек составляющих множество *M*.

Число скалярных уравнений, составляющих (5), есть $\left|M^0\right| + \left|M_{\partial D}\right|$, то есть меньше на количество точек, лежащих на карнизах $M^{лев}$ и $M^{прав}$, то есть на число $\left|\gamma\right|$ точек разреза γ.

Если систему (5) восполнить любым из двух введенных вариантов разностных условий на разрезе Г, то число скалярных уравнений станет равно числу скалярных значений искомой сеточной функции v_N.

Теорема 1. Разностная схема (5), (6) имеет одно и только одно решение при любых функциях $\varphi_{лев}(x)$ и $\varphi_{прав}(x)$.

Доказательство. Разностное уравнение (5) в точках $m \in M^0 \cup M_{\partial D}$ есть обычный пятиточечный аналог уравнения Лапласа. Поэтому наибольшее по модулю значение любой функции v_N, удовлетворяющей однородному уравнению (5) достигается хотя бы в одной точке $m \in M^{лев} \cup M^{прав}$, лежащей на карнизе. Но тогда в случае, если $\varphi_{лев}(x)$ и $\varphi_{прав}(x)$ тождественно равны нулю, то система (5), (6) имеет только тривиальное решение, тождественно равное нулю. Поскольку порядок линейной системы разностных уравнений относительно v_N совпадает с числом значений функции v_N, это доказывает теорему.

§ 3. Алгоритм решения разностных краевых задач

Мы конкретизируем схему решения разностных краевых задач общего вида с помощью разностных потенциалов [3] для случая рассматриваемых разностных краевых задач [5], [6] и [5], [7], [8]. В результате вычисление решений этих разностных краевых задач в сеточной области N с разрезом γ будет редуцировано к вычислению решений задач в сеточном квадрате $M^0 \cup M_{\partial D}$ без разреза.

Для удобства читателя изложение ведется независимо от [3].

3.1. Разностные потенциалы

Введем пространство $V_N \to \Xi_\gamma$ однозначных функций ξ_γ, определенных в точках $n \in \gamma \subset M^0$ разреза γ.

Пусть $T_{r_{\gamma N}}$: $V_N \to \Xi_\gamma$ — некоторый линейный оператор, отображающий линейное пространство V_N на Ξ_γ.

Элемент $\xi_\gamma = T_{r_{\gamma N}} v_N$, $\xi_\gamma \in \Xi_\gamma$, будем называть следом функции v_N, $v_N \in V_N$, в пространстве следов Ξ_γ, а $T_{r_{\gamma w}}$ будем называть оператором взятия следа.

Пусть U_N какое-нибудь линейное подпространство пространства V_N, причем такое, что уравнение

$$L_{MN} u_N = f_M \ , \tag{9}$$

имеет одно и только одно решение $u_N \in U_N$ при любой $f_M \in F_M$. Заметим, что уравнение (5), дополненное условием (6), есть пример задачи (9). Введем оператор $\mathrm{P}_{N\gamma} : \Xi_\gamma \to V_N$, положив для каждого $\xi_\gamma \in \Xi_\gamma$

$$w_N = \mathrm{P}_{N\gamma}\xi_\gamma \equiv v_N - u_N \ , \qquad (10)$$

где u_N есть решение задачи

$$L_{MN}u_N = L_{MN}v_N \qquad (11)$$

$$u_N \in U_N .$$

Определение. Будем говорить, что при сделанном выборе V_N, и подпространства U_N, $U_N \subset V_N$, пространство Ξ_γ есть пространство четких следов, а оператор $T_{r_{\gamma N}}$ (есть оператор взятия четкого следа, если для любых двух функций $v'_N \in V_N$ и $v''_N \in V_\gamma$, следы которых $\xi'_\gamma = T_{r_{\gamma N}}v'_N$ и $\xi''_\gamma = T_{r_{\gamma N}}v''_N$ совпадают, функции $w'_N = \mathrm{P}_{N\gamma}\xi'_\gamma$ и $w''_N = \mathrm{P}_{N\gamma}\xi''_\gamma$ также совпадают: $w'_N = w''_N$, если $T_{r_{\gamma N}}v'_N = T_{r_{\gamma N}}v''_N$.

Обозначим W_N линейное пространство функций вида (10).

Определение. Пусть U_N, V_N, Ξ_γ и $T_{r_{\gamma N}}$ согласованы так, что Ξ_γ и $T_{r_{\gamma N}}$ образуют четкий след пространства V_N в пространстве Ξ_γ. В этом случае оператор $\mathrm{P}_{N\gamma} : \Xi_\gamma \to W_N$, $W_N \to V_N$ будем называть оператором потенциала, а функцию

$$w_N = \mathrm{P}_{N\gamma}\xi_\gamma \qquad (12)$$

будем называть разностным потенциалом с плотностью ξ_γ из пространства Ξ_γ четких следов.

Критерий четкого следа. Пара $\left(\Xi_\gamma, T_{r_{\gamma N}}\right)$ есть пространство четких следов и оператор взятия четкого следа в том и только в том случае, если каждая функция v_N, след которой равен нулю, принадлежит U_N.

Доказательство критерия. Докажем достаточность вычисления критерия, для того, чтобы было выполнено определение четкого следа, т.е. чтобы из равенства $T_r v'_N = T_r v''_N$ следовало $w'_N = w''_N$, где $w'_N = \mathrm{P}v'_N$, $w''_N = \mathrm{P}v''_N$.

Пусть критерий выполнен, т.е. каждая $v_N \in V_N$, имеющая нулевой след $T_{r_{\gamma N}}v_N = o_\gamma \in \Xi_\gamma$, принадлежит подпространству U_N. Вычтем почленно из равенства

$$w'_N = \mathrm{P}_N v'_N = v'_N - u'_N$$

равенство

$$w''_N = \mathrm{P}_N v''_N = v''_N - u''_N .$$

Получим

$$w'_N - w''_N = \left(v'_N - v''_N\right) - \left(u'_N - u''_N\right),$$

или

$$w_N = v_N - u_N ,$$

где

$$w_N = w'_N - w''_N;\ v_N = v'_N - v''_N;\ u_N = u'_N - u''_N.$$

Очевидно, что ввиду линейности оператора $T_{r_{\gamma N}}$ выполнено

$$T_{r_{\gamma N}} v_N = T_{r_{\gamma N}} v'_N - T_{r_{\gamma N}} v''_N = o_\gamma .$$

Поэтому в силу предположения, что критерий выполнен, имеется включение $v_N \in U_N$.

Функция $u_N = u'_N - u''_N$ есть решение задачи

$$L_{MN} u_N = L_{MN} v_N \tag{13}$$

$$u_N \in U_N .$$

Очевидно, что в виду включения $v_N \in U_N$ функция v_N является решением этой задачи.

Ввиду единственности решения функция v_N совпадает с решением u_N. Поэтому $w_N = v_N - u_N = u_N - u_N = o_N$ и $w'_N = w''_N$. Достаточность критерия четкого следа доказана.

Докажем необходимость. Пусть критерий не выполнен. Тогда существует v'_N, которая имеет след o_γ , $T_{r_{\gamma N}} v'_N = o_\gamma$, но $v'_N \notin V_N$.

Но тогда для этой v_N имеем

$$w'_N = \mathrm{P}_N v'_N = v'_N - u'_N \tag{14}$$

где u_N решение системы (11). Функция w'_N отлична от o_N, $w_N \neq o_N$, так как в формуле (14) уменьшаемое $v_N \in U_N$, а вычитаемое $u_N \in U_N$.

С другой стороны существует другая функция $v''_N \in V_N$, имеющая тот же след $T_{r_{\gamma N}} v''_N = o_\gamma$, что и функция v'_N, но для которой функция $w''_N = \mathrm{P}_N v''_N = o_N - o_N = o_N$ равна нулю, и отличается поэтому от w'_N.

Таким образом, определение четкого следа не выполнено.

Теорема 2. Разностный потенциал $w_N = \mathrm{P}_{N\gamma}\xi_\gamma$ с плотностью из пространства четких следов принадлежит линейному пространству всех решений однородного уравнения (5).

Для каждого $w_N \in W_N$ существует хотя бы один элемент ξ_γ , $\xi_\gamma \in \Xi_\gamma$, такой что w_N является разностным потенциалом $w_N = \mathrm{P}_{N\gamma}\xi_\gamma$ с этой плотностью.

Доказательство. Первое утверждение докажем прямой проверкой, используя при этом (11):

$$L_{MN} w_N = L_{MN} v_N - L_{MN} u_N = o_M .$$

Докажем второе утверждение, использовав для представления w_N в форме $w_N = \mathrm{P}_{N\gamma}\xi_\gamma = v_N - u_N$ функцию v_N, совпадающую с самой заданной функцией w_N, $v_N = w_N$. Такое представление возможно, поскольку для функций $v_N = w_N \in W_N$ система (11) имеет, очевидно, решение $u_N = o_N$.

3.2. Редукция краевых задач к уравнениям относительно плотности $\xi\gamma$ разностного потенциала

Вычисление решения w_N задачи (5) удовлетворяющей краевым условиям (6) или (7) и (8) на сеточном разрезе γ , сводится к отысканию $\xi\gamma$ при котором функция $w_N = \mathrm{P}_{N\gamma}\xi_\gamma$ удовлетворяет краевому условию (6) или (7) и (8). Очевидно, сказанное означает, что плотность $\xi\gamma = \{\xi_n\}$, $n \in \gamma$ должна удовлетворять системе возникающих при подстановке $w_N = \mathrm{P}_{N\gamma}\xi_\gamma$ в краевые условия (6) или (7) и (8) линейных уравнений. Число этих уравнений в обоих случаях (6) или (7) и (8) равно числу $|\gamma|$ точек сеточного разреза γ . В рассматриваемом примере, когда концы разреза Г имеют координаты $(0,0)$ и $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$, причем шаг $h = 2^{-k}$ справедливо равенство

$$|\gamma| = |\gamma_{лев}| + |\gamma_{прав}| = 2^{2л-2} - 2.$$

Число компонент ξ_n , $n \in \gamma$, плотности ξ_γ , $\xi_\gamma \in \Xi_\gamma$, также $|\gamma|$. Таким образом, система уравнений относительно плотности ξ_γ в случае краевых условий (3) заведомо имеет одно и только одно решение в силу теоремы 1.

В случае краевых условий (7) и (8) мы не будем доказывать существование решения. В случае проведения вычислений это можно установить экспериментально.

3.3. Конструкция разностного потенциала.

Пространства V_N и Ξ_γ мы уже задали. Конкретизируем выбор пространства U_N оператора $T_{r_{\gamma N}}$: $V_N \to \Xi_\gamma$, чтобы конструктивно построить разностный потенциал $w_N = \mathrm{P}_{N\gamma} = v_N - u_N$, $T_{r_{\gamma N}} v_N = \xi\gamma$, которым будем пользоваться для вычислений.

Определим U_N как линейное подпространство $U_N \subset V_N$ всех тех функций $v_N \subset V_N$, для которых имеют место равенства

$$v_n^{кар} = v_n \ , \ n \in \gamma \tag{15}$$

Заметим, что подпространство U_N, $U_N \subset V_N$ можно интерпретировать как пространство всех однозначных функций, определенных на подмножестве $M^0 \cup M_{\partial D}$ множества M. Уравнение (5) можно интерпретировать как следующую разностную схему

$$L_{M^0,N} u_N\big|_m = f_m,\ m \in M^0 \tag{16}$$

$$u_N\big|_{n \in M_{\partial D}} = 0,\ m \in M_{\partial D}$$

Задача (16) при сделанном выборе пространства U_N совпадает с пятиточечным разностным аналогом уравнения Пуассона с нулевыми условиями на границе $M_{\partial D}$ сеточного квадрата:

$$L_{M^0,N} u_N\big|_m = \frac{u_{m_x+1,m_y} - 2u_{m_x,m_y} + u_{m_x-1,m_y}}{h^2} + \frac{u_{m_x,m_y+1} - 2u_{m_x,m_y} + u_{m_x,m_y-1}}{h^2} = f_m, \tag{17}$$

если $m \in M^0$.

$$u_{m_x,m_y} = 0, \text{ если } m \in M_{\partial D}.$$

Хорошо известно, что задача (17) имеет решение при любом f_{M^0}, причем известен быстрый вариант метода Фурье для вычисления этого решения.

Выберем теперь оператор
$T_{r_{\gamma N}} : V_N \to \Xi_\gamma$, положив

$$T_{r_{\gamma N}} v_N\big|_{n\in\gamma} = \xi_\gamma\big|_{n\in\gamma} = v_n^{кар} - v_n\big|_{n\in\gamma} \tag{18}$$

При сделанном выборе пространств V_N, U_N, Ξ_γ и оператора $T_{r_{\gamma N}}$ выполнен критерий четкого следа. В самом деле, из (18) видно, что функция v_N, имеющая нулевой след, $T_{r_{\gamma N}} v_N = o_\gamma$, принадлежит U_N.

Поскольку критерий четкого следа выполнен, можно утверждать, что оператор $\mathrm{P}: V_N \to W_N$, задаваемый формулой

$$w_N = v_N - u_N\ , \tag{19}$$

где u_N решение задачи (17), есть разностный потенциал

$$w_N = \mathrm{P}_{N\xi}\xi_\gamma\ ,\ \xi_\gamma = T_{r_{\gamma N}} v_N \in \Xi_\gamma \tag{20}$$

Вычисление функции w_N , записанной в форме (20), можно осуществить по формуле (19), причем в качестве v_N в формуле (19) можно взять любую функцию $v_N \in V_N$, след которой совпадает с ξ_γ, $T_{r_{\gamma N}} v_N \in \xi_\gamma$.

Заметим, что функция

$$v_N\big|_n = \begin{cases} \xi_n, \text{ если } n \in M^{лев} \cup M^{прав} = N^{карн} \\ 0, \text{ если } n \in M^0 \cup M_{\partial D} \end{cases} \tag{21}$$

является одной из таких функций. Условимся при вычислениях потенциала $w_N = \mathrm{P}_{N\xi}\xi_\gamma$ по формуле (19) использовать в качестве v_N функцию, задаваемую формулой (21).

Итак, мы сконструировали потенциал (20) и указали алгоритм его вычисления при заданной плотности $\xi_\gamma \in \Xi_\gamma$.

Укажем теперь алгоритм для вычисления того частного решения w_N, $w_N \in W_N$, которое удовлетворяет краевым условиям (6).

Проведем подготовительные построения. Перенумеруем точки n, принадлежащие разрезу γ, номерами $\gamma = 1,2,...,|\gamma|$, где $|\gamma| = 2^{2k-2} - 2$ число точек разреза.

Обозначим $\xi_\gamma^{(j)}$ плотность $\xi_\gamma^j \in \Xi_\gamma$, заданную формулой

$$\xi_\gamma^j\big|_n = \begin{cases} 1, \text{ если точка } n \in \gamma \text{ имеет номер } j \\ 0, \text{ если номер точки } n \in \gamma \text{ не есть } j \end{cases} \tag{22}$$

Очевидно, что система функций (22) при $j = 1,2,...,2^k - 2$ образует базис в пространстве Ξ_γ .

Очевидно, что любые частные решения уравнения (5), т.е. что любой элемент $w_N = \mathrm{P}_{N\xi}\xi_\gamma$ может быть получен в виде

$$w_N = \mathrm{P}_{N\xi}\xi_\gamma = \mathrm{P}_{N\xi}\left(\sum_{j=1}^{|\gamma|} c_j \xi_\gamma^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{|\gamma|} c_j w_N^{(j)} \tag{23}$$

где

$$w_N^{(j)} = \mathrm{P}_{N\gamma}\xi_\gamma^{(j)} \ , \ j = 1,2,...,|\gamma| \tag{24}$$

Для получения того частного решения уравнения (5), которое удовлетворяет условию (6), надо определить числа c_j , $j = 1,2,...,|\gamma|$ таким образом, чтобы потенциал в точках карниза $N^{карн} = M^{лев} \cup M^{прав}$ принимал заданные равенствами (6) значения.

Это значит, должны выполняться равенства

$$\sum_{j=1}^{|\gamma|} c_j w_{N^{карн}}^j = w_{N^{карн}} \tag{25}$$

где $w_{N^{карн}}^j$ задана равенствами (24).

Правая часть $w_{N^{карн}}$ в силу (6) задается равенствами

$$w_{N^{карн}} = \begin{cases} \varphi_{лев}\left(n_x h\right), \text{ если } n \in M^{лев} \\ \varphi_{пр}\left(n_x h\right), \text{ если } n \in M^{прав} \end{cases}$$

$n_x = 1, 2, ..., 2^{k-1} - 1$.

Равенство функций (24) можно записать в виде следующей системы скалярных линейных уравнений относительно системы чисел c_j, $j = 1, 2, ..., |\gamma|$

$$\sum_{j=1}^{|\gamma|} b_{ij} c_j = w_{N^{карн}}\Big|_i, \; i = 1, 2, ..., |\gamma| \tag{26}$$

Коэффициенты b_{ij} суть числа

$$b_{ij} = w_{N^{карн}}^{(j)}\Big|_{n_i}, \; i = 1, 2, ..., |\gamma|,$$

где $w_{N^{карн}}^{(j)}\Big|_{n_i}$ есть значение функции $w_{N^{карн}}^{j}$ в той точке $n_i \in N^{карн}$, которая при нумерации точек карниза получила номер i .

После того, как решение $c = \left\{c_j\right\}$, $j = 1, 2, ..., |\gamma|$ системы (26) будет вычислено, станет известна плотность $\xi_\gamma = \sum_{j=1}^{|\gamma|} c_j \xi_\gamma^j$, при которой разностный потенциал $w_N = \mathrm{P}_{N\xi} \xi_\gamma$ совпадает с искомым решением v_N задачи (5), (6). Алгоритм вычисления разностного потенциала $\mathrm{P}_{N\xi} \xi_\gamma$ при заданной плотности по формуле $w_N = \mathrm{P}_{N\xi} \xi_\gamma = v_N - u_N$ был описан выше.

Добавим, что система (26) всегда имеет решение, $\det\left\|b_{ij}\right\| \neq 0$ в силу теоремы 1.

Конструктивный алгоритм вычисления решения задачи (5), (6) построен.

Замечание. Обратим внимание на то, что в случае вычисления решений серий задач (5), (6) с различным заданием функций $\varphi_{лев}\left(x\right)$ и $\varphi_{прав}\left(x\right)$ в системе (26) будут меняться только правые части. Поэтому матрица

$$B = \left\|b_{ij}\right\| \; i, j = 1, 2, ..., |\gamma|$$

может рассматриваться как математическое обеспечение серии этих задач.

Возможно включить в это математическое обеспечение также матрицу B^{-1}. Тогда решение $c = \left\{c_j\right\}$ системы (26) будет вычисляться по явной формуле

$$C = B^{-1} w_{N^{карн}} \; .$$

Однократные затраты на вычисление и запоминание матрицы B^{-1} как части математического обеспечения решения серий задач вида (5), (6) будут целесообразны.

Алгоритм решения задачи (5), (7), (8) на базе того же разностного потенциала строится аналогично тому, как это сделано выше для задачи (5), (6).

Библиографические комментарии

Разностные потенциалы с плотностью из пространства четких следов предложены в [1].

Вариант применения разностного потенциала с плотностью из пространства четких следов к вычислению решения разностного аналога рассмотренной задачи в области с разрезом составляет часть содержания работы [2]. В настоящей работе построен более простой и эффективный алгоритм за счет переноса трудностей на выбор варианта используемого разностного потенциала.

Литература

[1] В.С.Рябенький. Обобщенные проекторы Кальдерона и граничные уравнения на основе концепции четкого следа // ДАН СССР, 1983, т. 270, № 2, с. 288-292.

[2] В.С.Рябенький, Д.С.Каменецкий. Решение краевых задач для уравнения Лапласа в области с разрезом методом разностных потенциалов. Препринт ИПМ, Москва, 1990, № 33.

[3] В.С.Рябенький. Метод разностных потенциалов и его применения, М., Наука, 2010.