



Шестаков С.А., [Иванов Д.С.](#)

Управление движением спутников в групповом полете с помощью переброса массы

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Шестаков С.А., Иванов Д.С. Управление движением спутников в групповом полете с помощью переброса массы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 81. 27 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-81>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**С.А. Шестаков, Д.С. Иванов**

**Управление движением спутников  
в групповом полете  
с помощью переброса массы**

**Москва — 2013**

**С.А. Шестаков, Д.С. Иванов**

Управление движением спутников в групповом полете с помощью переброса массы

Предлагается новый подход к управлению спутниками в групповом полете с помощью обмена массы между ними. Основная идея заключается в следующем. Спутник бросает массу в заданном направлении и заданной скоростью так, что она попадает в центр масс другого спутника. В результате переброса относительная траектория спутников меняется подобающим образом. В настоящей работе рассматривается возможность таких перебросов, исследуется изменение относительной траектории в зависимости от точки броска и времени переброса. Также приведены результаты применения переброса массы для поддержания заданной формации при действии возмущения со стороны сжатия Земли.

**Ключевые слова:** групповой полет спутников, относительное движение, переброс массы

**S.A. Shestakov, D.S. Ivanov**

Satellite Formation Flying Control by Mass Exchange

Formation flying relative motion control by mass exchange is proposed. The main idea of such a control approach is following. A certain mass is released at a given time and in given direction from one satellite. It should hit another one, leading to change relative trajectory that, in addition, should be closed after throwing over. The possibility of such a throwing over is shown in the paper. Relative trajectory changing is considered. Relative trajectory maintenance under  $J_2$  perturbation influence is demonstrated.

**Key words:** satellite formation flying, relative trajectory, mass exchange

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 12-01-33045, 13-01-00665) и Министерства образования и науки РФ (гранты № 14.132.21.1588 и 8182).

## Введение

Групповой полет спутников (формация) расширяет возможности наблюдений, экспериментов, решения прикладных задач в космосе. Основными преимуществами являются способность одновременного выполнения множества наблюдений и экспериментов и повышенная надежность — неисправность одного из спутников не приводит к утрате работоспособности всей группы. Однако для проведения исследований требуется возможность управлять относительным движением спутников в группе. В связи с увеличением роли малых спутников, имеющих ограничения по полезной нагрузке, наибольший интерес представляют алгоритмы управления относительным движением, не требующие расхода рабочего тела. Существуют методы, основанные на использовании аэродинамической силы сопротивления о верхние слои атмосферы, магнитных и электростатических сил. Рассмотрим их.

При использовании электростатических сил взаимодействия для управления предполагается, что каждый спутник в формации способен накапливать заряд необходимого знака. Как указано в [1], использование подобных концепций управления не требует никаких новых устройств и технологий. Система управления зарядом была предложена в 1979 году для аппарата SCATHA [2]. Вычисления показали [1], что для спутников с максимальным зарядом величиной в 4 мкКл, сила Кулона на расстоянии в 50-60 метров около 50 мкН. На настоящий момент известен ряд работ, посвященных динамике относительного движения спутников, взаимодействие которых осуществляется с помощью силы Кулона [1; 3; 4]. В частности, были изучены положения равновесия, исследована их устойчивость. Сложность исследования заключается в том, что все спутники одновременно взаимодействуют между собой. С другой стороны, это позволяет рассматривать такую формацию как твердое тело [4].

Известно, что на заряженные частицы, которые движутся в магнитном поле, действует сила Лоренца. Такая же сила действует на заряженный спутник, который движется в магнитном поле Земли. Эта сила зависит от положения спутника и геометрии орбиты. Направление силы всегда перпендикулярно скорости аппарата. В работах [5;6] проведено исследование динамики формации спутников под действием силы Лоренца и предложен алгоритм управления, удерживающий группу спутников в нужной конфигурации.

Для низкоорбитальных формаций, пожалуй, самым естественным является метод, основанный на дифференциальном эффекте торможения в атмосфере. Суть такого эффекта весьма проста: управляя соответствующим образом ориентацией каждого спутника в группе, можно добиться того, чтобы на разные спутники действовали разные силы атмосферного сопротивления. Это позволяет осуществлять необходимые изменения относительного движения спутников в группе. Впервые высказанная в 1986 году [7], идея использования дифференциального эффекта торможения в атмосфере нашла свое развитие в многочисленных исследовательских работах лишь спустя полтора-два десятилетия — с началом бурного развития концепции группового полета. Были детально про-

анализированы возможности применения этого подхода в задачах стыковки спутников [8; 9], предложены различные законы управления спутниковой формацией [10; 11].

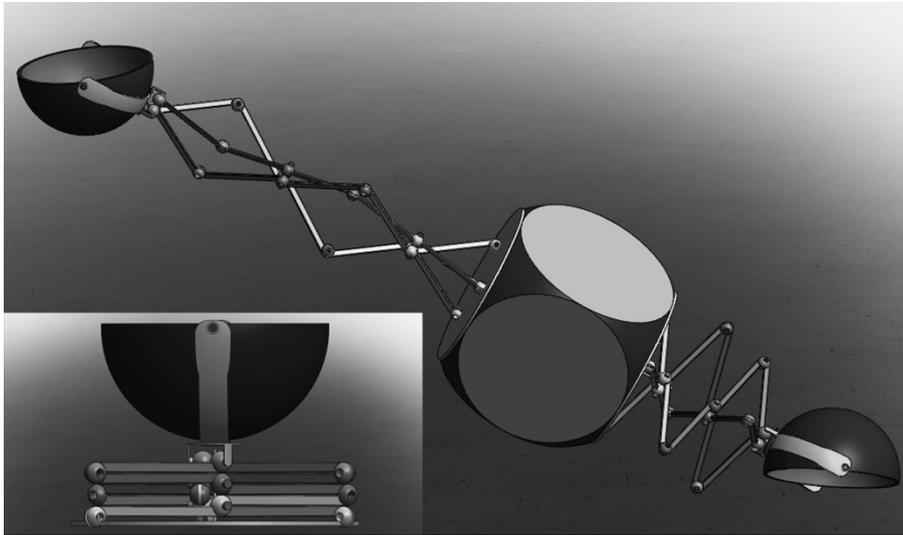
В настоящей работе исследуется новый способ управления относительным движением, основанный на перебросе дополнительной массы между спутниками в группе. Рассматривается группа из двух спутников, один из которых состоит из двух частей – собственно спутник и отделяемая массивная часть, которая также может быть независимым спутником. По команде масса отделяется от спутника в заданном направлении с некоторой скоростью. При этом спутник получает некоторый импульс согласно закону сохранения импульса. Считается, что импульс приложен точно к центру масс спутника и не влияет на угловое движение. Перебрасываемая масса перелетает ко второму спутнику и сталкивается с ним абсолютно неупруго. Второй спутник также получает импульс, приложенный к его центру масс. Таким образом, в результате переброса массы относительная траектория двух спутников изменилась некоторым образом. Массивное тело, столкнувшееся со вторым спутником, вновь может быть использовано для совершения маневра с помощью переброса, число которых не ограничено.

Рассматривается возможность управления относительным движением спутников с помощью переброса массы с математической точки зрения. Практические аспекты реализации такого подхода управления не рассматриваются. Однако, заметим, что отделение массы от спутника с заданной скоростью может быть реализовано, например, с помощью сжатой пружины или электромагнитной силы, а захват массы ловящим спутником может быть осуществлен, например, манипулятором, установленным на борту. Примером такого манипулятора может являться манипулятор проектируемой миссии «Space Sweeper with Sling-Sat» (рис. 1).

Заметим, что управление с помощью переброса массы не обеспечивает полной управляемости системы. В общем случае один переброс массы не позволяет достичь любой требуемой траектории. Это является следствием краевой задачи, решаемой при перебросе массы. Перебрасываемая масса должна иметь заданную скорость при отделении, чтобы столкнуться со вторым спутником. Более того, конечная относительная траектория спутников после переброса зависит от точки начальной траектории, в которой отделяется масса. Тем не менее, требуемую относительную траекторию можно попытаться получить путем серии перебросов массы.

В настоящей работе рассматривается управление с помощью переброса массы применительно к широкому спектру задач реконфигурации группового полета. Прежде всего, с помощью переброса массы рассматривается возможность остановки относительного дрейфа между спутниками. Если спутники имеют замкнутую траекторию, то с помощью переброса можно изменить её размеры, а также сместить по трансверсали. Если рассмотреть влияние возмущений, например, со стороны второй гармоники  $J_2$  разложения гравитацион-

ного потенциала Земли, с помощью переброса можно поддерживать заданную относительную орбиту аппаратов. В настоящей работе рассмотрены все эти задачи управления группой спутников и проиллюстрированы на примерах.



**Рис. 1.** Модель манипулятора для миссии «Space Sweeper with Sling-Sat»

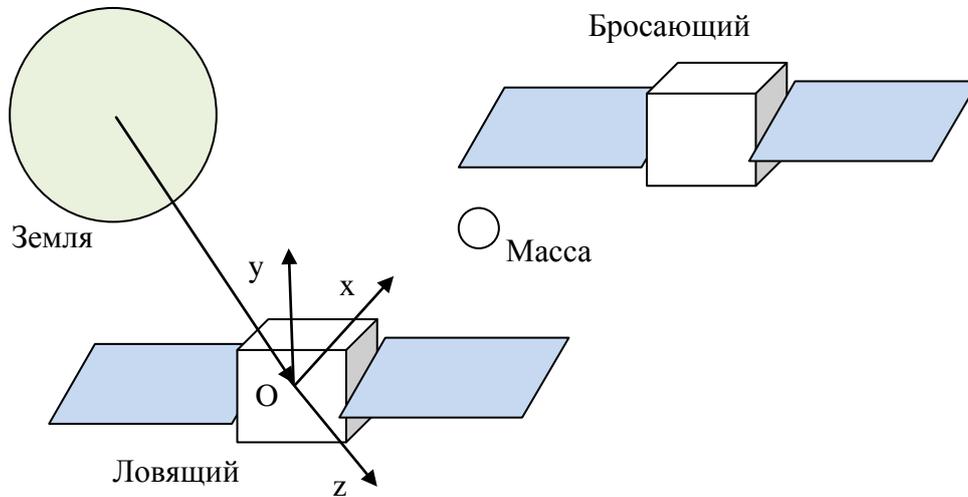
## 1. Решение задачи о перебросе массы

Реализуемость управления с помощью переброса массы затрагивает прежде всего динамику спутников. Необходимо исследовать возможность попадания перебрасываемой массы во второй спутник. То есть нужно решить краевую задачу, используя уравнения движения спутников. Отделение массы и её столкновение влияют на относительное движение. Исследование этого влияния позволяет ответить на вопрос о реализуемости такого подхода, а также найти его основные особенности. В настоящем разделе сформулирована и решается с помощью уравнений Хилла–Клохесси–Уилтшира задача о перебросе массы.

### 1.1. Постановка задачи

Будем рассматривать конфигурацию, состоящую из двух спутников – материальных точек, движущихся по близким орбитам. Для описания траекторий в таком случае удобно пользоваться уравнениями движения в относительных координатах. Общий вид уравнения относительного движения двух спутников достаточно сложен для аналитического рассмотрения, поэтому в данной работе используется система уравнений Хилла–Клохесси–Уилтшира, которая соответствует движению двух спутников по близким околокруговым орбитам в центральном поле тяготения Земли [12; 13]. Используется орбитальная система координат, центр  $O$  которой движется по круговой орбите радиуса  $r_0$  с угловой скоростью  $\omega = \sqrt{\mu/r_0^3}$ ,  $\mu$  — гравитационный параметр Земли, ось  $Oz$  направлена вдоль радиус-вектора первого (ловящего) спутника от центра Земли, ось

$Oy$  — по нормали к плоскости опорной орбиты в направлении орбитального момента, ось  $Ox$  дополняет систему до правой тройки.



**Рис. 2.** Схематичное изображение группового полета

До переброса один из спутников, далее называемый *ловящим*, покоится в начале отсчета рассматриваемой системы координат, а система уравнений, описывающая движение второго (*бросающего*) спутника, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{z} = 0, \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0, \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Решение системы есть

$$\begin{cases} x = -3C_1\omega t + 2C_2 \cos \omega t - 2C_3 \sin \omega t + C_4, \\ y = C_5 \sin \omega t + C_6 \cos \omega t, \\ z = 2C_1 + C_2 \sin \omega t + C_3 \cos \omega t, \end{cases} \quad (1.2)$$

где константы интегрирования  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  выражаются через начальные условия следующим образом:

$$\begin{aligned} C_1 &= 2z(0) + \frac{\dot{x}(0)}{n}, & C_2 &= \frac{\dot{z}(0)}{n}, \\ C_3 &= -3z(0) - \frac{2\dot{x}(0)}{n}, & C_4 &= x(0) - \frac{2\dot{z}(0)}{n}, \\ C_5 &= \frac{\dot{y}(0)}{n}, & C_6 &= y(0). \end{aligned}$$

Как видно, относительная траектория бросающего спутника замкнута тогда и только тогда, когда  $C_1 = 0$ . Величина  $C_1$  обуславливает скорость относительно-

го дрейфа двух спутников. Заметим, что величина  $\sqrt{C_2^3 + C_3^2}$  определяет амплитуду траектории вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$ , величина  $\sqrt{C_5^2 + C_6^2}$  определяет амплитуду траектории вдоль оси  $Oy$ , величина  $C_4$  – сдвиг вдоль оси  $Ox$ . Эти величины определяют относительную траекторию и поэтому удобно рассматривать именно их изменение при изучении относительного движения.

## 1.2. Решение краевой задачи

Предположим, что в момент времени  $t=0$  от бросающего спутника отделяется тело – материальная точка некоторой массы  $m$ . В орбитальной системе координат оно также движется по некоторой хилловской траектории с константами, задаваемыми положением и скоростью бросающего спутника в момент времени  $t=0$  и относительной скоростью выброса. Потребуем, чтобы в некоторый момент  $t=t_1$  эта дополнительная масса столкнулась с ловащим спутником, т.е. чтобы выполнялось  $x_1(t_1) = y_1(t_1) = z_1(t_1) = 0$ .

Скорость массы  $\dot{\mathbf{r}}_m$  в момент  $t=0$  равна:

$$\dot{\mathbf{r}}_m = \dot{\mathbf{r}}_0 + \Delta\mathbf{v},$$

где  $\Delta\mathbf{v} = (\Delta\dot{x}, \Delta\dot{y}, \Delta\dot{z})^T$  — относительная скорость выброса, а  $\dot{\mathbf{r}}_0$  — скорость бросающего спутника в момент броска. Подставим скорость в константы в решении системы уравнений Хилла (1.2) и используем начальные условия движения бросающего спутника. Окончательно, зануляя левую часть вследствие столкновения с ловащим спутником, покоящимся в центре системы координат, получим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} -3\left(2z_0 + \frac{\dot{x}_0 + \Delta\dot{x}}{\omega}\right)\omega t_1 + 2\frac{\dot{z}_0 + \Delta\dot{z}}{\omega}\cos\omega t_1 - 2\left(-3z_0 - 2\frac{\dot{x}_0 + \Delta\dot{x}}{\omega}\right)\sin\omega t_1 + \\ \qquad \left(x_0 - 2\frac{\dot{z}_0 + \Delta\dot{z}}{\omega}\right) = 0, \\ \frac{\dot{y}_0 + \Delta\dot{y}}{\omega}\sin\omega t_1 + y_0\cos\omega t_1 = 0, \\ 2\left(2z_0 + \frac{\dot{x}_0 + \Delta\dot{x}}{\omega}\right) + \frac{\dot{z}_0 + \Delta\dot{z}}{\omega}\sin\omega t_1 + \left(-3z_0 - 2\frac{\dot{x}_0 + \Delta\dot{x}}{\omega}\right)\cos\omega t_1 = 0, \end{array} \right.$$

линейную относительно  $\Delta\dot{x}, \Delta\dot{y}, \Delta\dot{z}$ . Решая её, находим требуемое значение относительной скорости выброса

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{x} &= -\dot{x}_0 - 2z_0\omega + \omega \frac{x_0 \sin \omega t_1 - 2z_0(1 - \cos \omega t_1)}{8 \cos \omega t_1 + 3\omega t_1 \sin \omega t_1 - 8}, \\
\Delta \dot{y} &= -\dot{y}_0 - y_0\omega \frac{\cos \omega t_1}{\sin \omega t_1}, \\
\Delta \dot{z} &= -\dot{z}_0 - \omega \frac{2x_0(1 - \cos \omega t_1) + z_0(3\omega t_1 \cos \omega t_1 - 4 \sin \omega t_1)}{8 \cos \omega t_1 + 3\omega t_1 \sin \omega t_1 - 8}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Эта система вырождается при  $\sin \omega t_1 = 0$ ,  $y_0 \neq 0$  и при  $8 \cos \omega t_1 + 3\omega t_1 \sin \omega t_1 - 8 = 0$ . В этих случаях нет возможности для столкновения массы с ловящим спутником — краевая задача не имеет решений.

### 1.3. Изменение относительной траектории

Определим влияние переброса массы на относительное движение спутников. Пусть масса каждого из двух спутников формации (без перебрасываемой массы) —  $M$ , дополнительная масса —  $m$ . Тогда, применяя закон сохранения импульса в момент выброса груза, получаем:  $(M + m)\mathbf{v}_0 = M\mathbf{v}_1 + m(\mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v})$ , где  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  — скорости бросающего спутника до и после броска соответственно. Отсюда получаем:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 - \Delta\mathbf{v} \cdot m / M.$$

Соответственно, изменяются константы в системе (1.1), описывающей траекторию бросающего спутника.

После столкновения с перебрасываемой массой ловящий спутник покидает начало орбитальной системы координат и начинает двигаться относительно нее по хилловской траектории. Найдем влияние столкновения с массой на траекторию ловящего спутника в системе координат, двигающейся по круговой орбите. Для этого, зная координаты  $x_0, y_0, z_0$  и скорость из (1.3) придаваемую перебрасываемой массе, сначала находим константы интегрирования, описывающие движение массы в орбитальной системе координат. Выражая их через начальные константы кидаемого спутника и неизвестное время до столкновения, получаем

$$\begin{aligned}
C_{1,m} &= \frac{1}{A}((4C_1 + 2C_3)(\cos \omega t_1 - 1) + (2C_2 + C_4)\sin \omega t_1), \\
C_{2,m} &= -\frac{1}{A}((4C_2 + 2C_4)(1 - \cos \omega t_1) - (8C_1 + 4C_3)\sin \omega t_1 + (6C_1 + 3C_3)\omega t_1 \cos \omega t_1), \\
C_{3,m} &= -\frac{1}{A}((8C_1 + 4C_3)(1 - \cos \omega t_1) - (4C_2 + 2C_4)\sin \omega t_1 - (6C_1 + 3C_3)\omega t_1 \sin \omega t_1), \\
C_{4,m} &= \frac{1}{A}((8C_2 + 4C_4)(\cos \omega t_1 - 1) - (16C_1 + 8C_3)\sin \omega t_1 + \\
&\quad + (12C_1 + 6C_3)\omega t_1 \cos \omega t_1 + (6C_2 + 3C_4)\omega t_1 \sin \omega t_1), \\
C_{5,m} &= -C_6 \operatorname{ctg} \omega t_1, \\
C_{6,m} &= C_6.
\end{aligned}$$

Здесь и далее  $A = 8\cos \omega t_1 + 3\omega t_1 \sin \omega t_1 - 8$ , индекс «m» относится к перебрасываемой массе.

Затем найдем скорость  $\mathbf{u}$  груза в момент времени  $t = t_1$ . В точке столкновения, а именно в начале координат, из закона сохранения импульса (начальная скорость ловающего тела нулевая) получаем

$$\mathbf{v}_c = \frac{m}{M + m} \mathbf{u}(t_1),$$

где  $\mathbf{v}_c$  — скорость ловающего спутника после столкновения с массой.

Далее, считая  $t_1$  новой точкой отсчета времени, получим окончательные уравнения движения ловающего спутника в орбитальной системе координат после переброса, то есть, определим новые константы интегрирования через начальные данные и значение сдвига по времени  $t_1$ :

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{1,c} &= \frac{(4C_1 + 2C_3)(\cos \omega t_1 - 1) + (2C_2 + C_4)\sin \omega t_1}{(k + 1)A}, \\
\hat{C}_{2,c} &= \frac{(4C_2 + 2C_4)(1 - \cos \omega t_1) + (8C_1 + 4C_3)\sin \omega t_1 - (6C_1 + 3C_3)\omega t_1}{(k + 1)A}, \\
\hat{C}_{3,c} &= \frac{(8C_1 + 4C_3)(1 - \cos \omega t_1) - (4C_2 + 2C_4)\sin \omega t_1}{(k + 1)A}, \\
\hat{C}_{4,c} &= \frac{(8C_2 + 4C_4)(\cos \omega t_1 - 1) - (16C_1 + 8C_3)\sin \omega t_1 + (12C_1 + 6C_3)\omega t_1}{(k + 1)A}, \\
\hat{C}_{5,c} &= -C_6 \frac{1}{(k + 1)\sin \omega t_1}, \\
\hat{C}_{6,c} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь  $k = M / m$ , индекс «с» относится к ловающему спутнику.

Кроме того, для полного описания относительного положения спутников в группе требуется дополнительно пересчитать новые (после перебрасывания) константы интегрирования для бросающего спутника, сдвинув их на время  $t_1$ :

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{1,t} &= \frac{1}{kA} \{ (8kC_1 + 4C_1 - 2C_3)(1 - \cos \omega t_1) + (2C_2 + C_4) \sin \omega t_1 - \\
&\quad - 3(k+1)C_1 \omega t_1 \sin \omega t_1 \}, \\
\hat{C}_{2,t} &= \frac{1}{2kA} \{ 4C_1 [3\omega t_1 - 4 \sin \omega t_1] + C_2 [(k+1)(3\omega t_1 \sin 2\omega t_1 + 8 \cos 2\omega t_1) - \\
&\quad - 8(2k+1) \cos \omega t_1 + 8k] + C_3 [(k+1)(3\omega t_1 \cos 2\omega t_1 - 8 \sin 2\omega t_1) + \\
&\quad + 8(2k+1) \sin \omega t_1 + 3(1-k)\omega t_1] + 4C_4 [\cos \omega t_1 - 1] \}, \\
\hat{C}_{3,t} &= \frac{1}{2kA} \{ 16C_1 [\cos \omega t_1 - 1] + C_2 [(k+1)(8 \sin 2\omega t_1 + 3\omega t_1 (1 - \cos 2\omega t_1)) - \\
&\quad - 8(2k+1) \sin \omega t_1] + C_3 [(k+1)(\cos 2\omega t_1 + 3\omega t_1 \sin 2\omega t_1) - \\
&\quad - 8(2k+1) \cos \omega t_1 + 8k] + 4C_4 \sin \omega t_1 \}, \\
\hat{C}_{4,t} &= \frac{1}{kA} \{ C_1 [16 \sin \omega t_1 - 12\omega t_1 - 3A(k+1)\omega t_1] + 8C_2 [1 - \cos \omega t_1] + \\
&\quad + 2C_3 [4 \sin \omega t_1 - 3\omega t_1] + C_4 [3(k+1)\omega t_1 \sin \omega t_1 + 4(\cos \omega t_1 - 1) - 8k] \}, \\
\hat{C}_{5,t} &= \frac{C_5(k+1)}{k} \cos \omega t_1 + \frac{C_6(\cos^2 \omega t_1 - k \sin^2 \omega t_1)}{k \sin \omega t_1}, \\
\hat{C}_{6,t} &= \frac{k+1}{k} (C_5 \sin \omega t_1 + C_6 \cos \omega t_1),
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где индекс « $t$ » относится к бросающему спутнику.

Системы (1.4) и (1.5) вместе описывают положение спутников после переброса в орбитальной системе координат, начало которой движется по круговой орбите радиуса  $r_0$ . Далее рассмотрим частные случаи относительного движения и влияние на него переброса массы.

## 2. Частные случаи относительного движения после переброса массы

Для работы пары спутников требуется, по крайней мере, чтобы они не удалялись друг от друга на большое расстояние. В связи с этим целесообразно рассмотреть возможность переброса массы, который приводит к остановке начального дрейфа одного из спутников. В нашем случае это означает, что должно выполняться соотношение — константа  $C_1 \neq 0$ .

Рассмотрим два возможных случая.

## 2.1. Замкнутость орбиты одного спутника относительно другого

Если два спутника движутся в одной и той же орбитальной системе координат по различным хилловским орбитам, то, как видно из (1.2), разность их координат будет ограниченной для любого времени  $t$  тогда и только тогда, когда константы  $C_1$  у этих спутников равны между собой.

Из (1.4) и (1.5), обозначая  $n = \omega t_1$ , получаем соотношение:

$$\begin{aligned} & -\frac{(8kC_1 + 4C_1 - 2C_3)(1 - \cos n) + (2C_2 + C_4)\sin n - 3(k+1)C_1n\sin n}{k(8(\cos n - 1) + 3n\sin n)} = \\ & = -\frac{(4C_1 + 2C_3)(1 - \cos n) - (2C_2 + C_4)\sin n}{(k+1)(8(\cos n - 1) + 3n\sin n)}. \end{aligned}$$

Далее, переходя к половинному углу

$$n = 2x, \quad 1 - \cos n = 2\sin^2 x, \quad \sin n = 2\sin x \cos x,$$

Перепишем это соотношение в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k}((8kC_1 + 4C_1 - 2C_3)\sin x + (2C_2 + C_4)\cos x - 6(k+1)C_1x\cos x) = \\ & = \frac{1}{k+1}((4C_1 + 2C_3)\sin x - (2C_2 + C_4)\cos x). \end{aligned}$$

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} & (8k^2C_1 + (2k+1)(4C_1 - 2C_3))\sin x + \\ & + (2k+1)(2C_2 + C_4)\cos x - 6(k+1)^2C_1x\cos x = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Решая это уравнение относительно  $x$  для заданных констант, находим требуемое время переброса, а из него — требуемую скорость выброса (1.3) и окончательные параметры движения спутников группы (1.4) и (1.5).

Рассмотрим пример. Зададим начальные данные:

$$\begin{aligned} & C_1 = 10\text{м}, C_2 = 100\text{м}, C_3 = 87\text{м}, C_4 = 42\text{м}, \\ & C_5 = 100\text{м}, C_6 = 67\text{м}, k = 20, \omega = 0.0011\text{с}^{-1}, \end{aligned}$$

период обращения орбитальной системы координат вокруг Земли  $T = 2\pi / \omega \approx 5700\text{с}$ . Тогда уравнение (2.1) переходит в уравнение

$$26506\sin x + 9922\cos x - 26460x\cos x = 0. \tag{2.2}$$

Это уравнение вида  $\text{tg}x = Ax + B$ , оно имеет бесконечное число корней. Возьмем первый положительный корень:  $x = 4.4726 = \omega t_1 / 2$ . Отсюда находим время переброса  $t_1 = 8132\text{с}$ . Подставляя затем полученные данные в (1.3), находим скорость выброса:  $|\Delta\mathbf{v}| = 0.86\text{ м/с}$ .

На рис. 3 представлены траектории всех тел в процессе переброса в орбитальной системе координат, а на рис. 4 представлена траектория бросающего спутника относительно ловящего после совершения переброса. Изначально бросающий спутник совершал дрейф по оси  $Ox$ , так как  $C_1 = 10\text{ м}$ . После переброса массы в исходной системе координат дрейф остался, однако после столкновения с ловящим спутником у последнего появился такой же дрейф. Поэтому в итоге спутники имеют уже замкнутую относительную траекторию. Как видно, спутники совершают дрейф в орбитальной системе координат, не разлетаясь друг от друга.

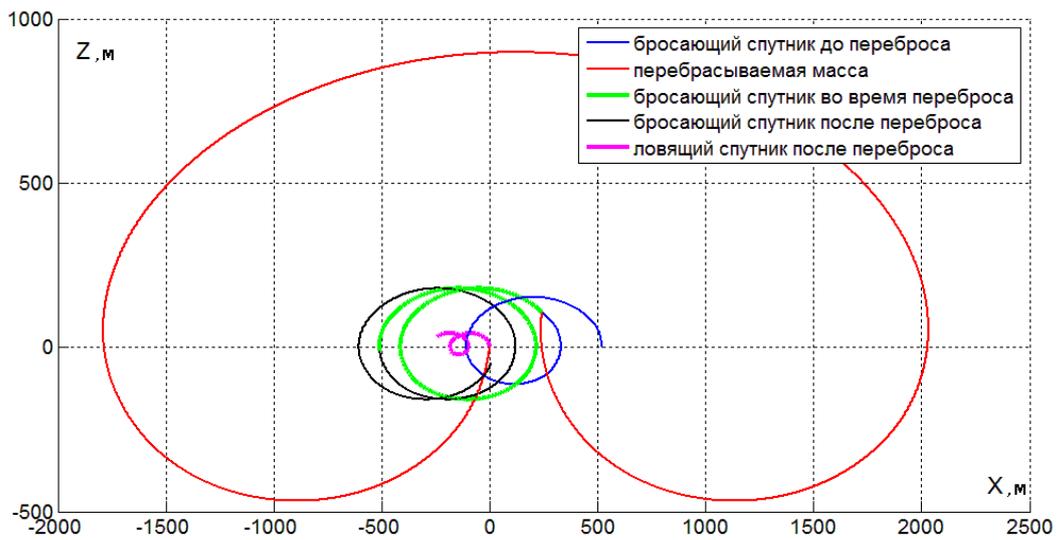


Рис. 3а. Пример траектории при перебросе массы. Проекция  $Oxz$

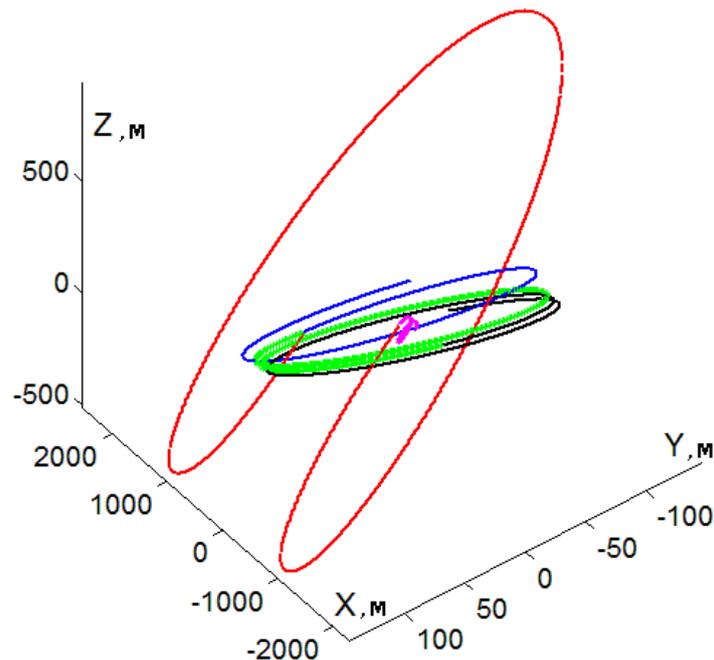


Рис. 3б. Пример траектории при перебросе массы. Общий вид

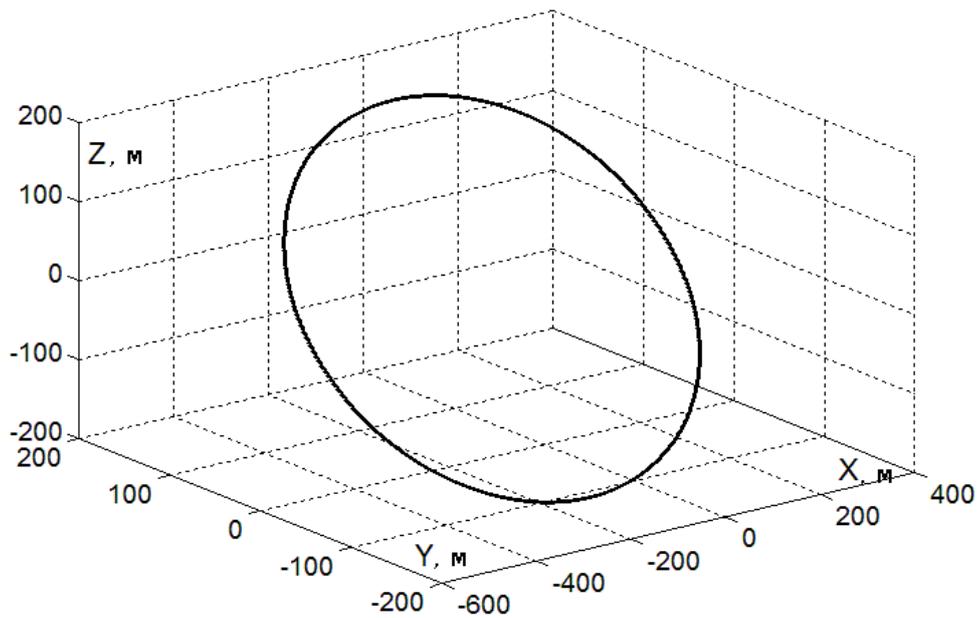


Рис. 4. Пример переброса — относительная траектория

Возьмем теперь следующий положительный корень уравнения (2.2)  $x = 10.9007$ , тогда  $t_1 = 19819\text{с}$ , то есть, переброс совершается почти за 3.5 периода обращения спутников вокруг Земли. В данном случае  $|\Delta v| \approx 2 \text{ м/с}$ . Соответствующие траектории показаны на рис. 5 и 6.

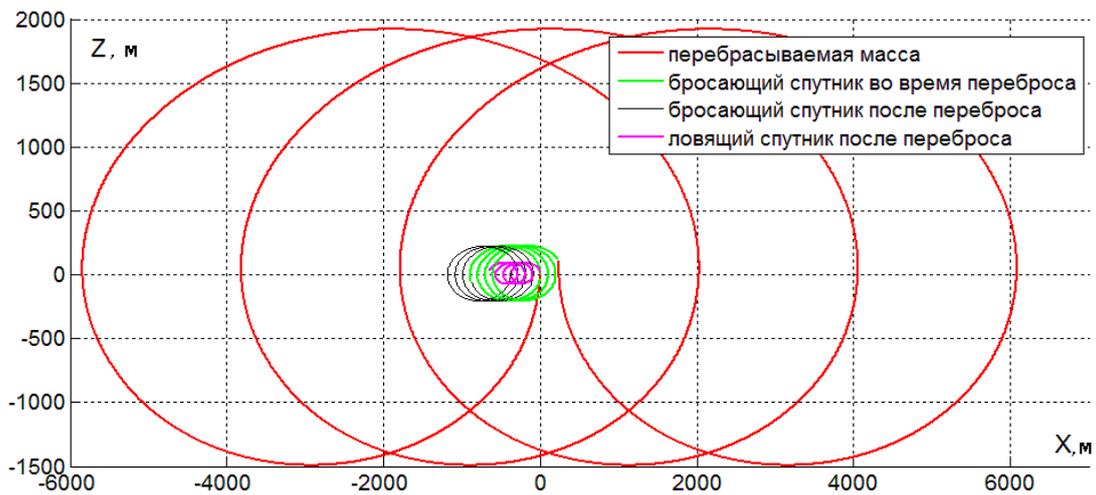


Рис. 5. Переброс массы, второй корень

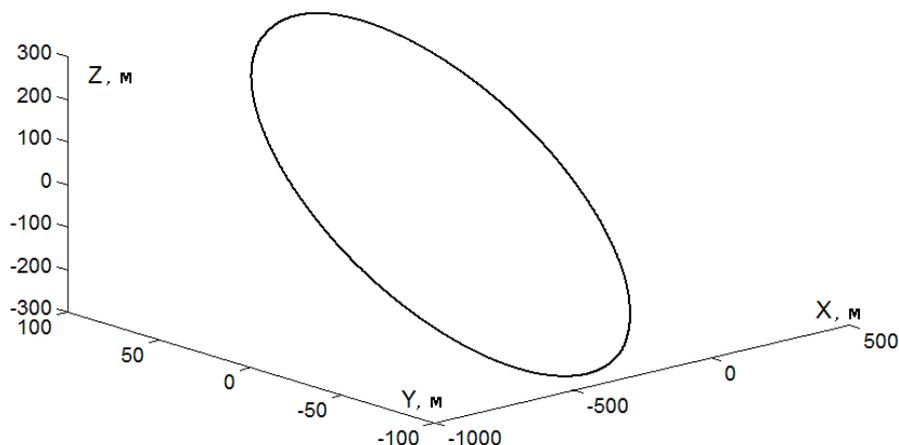


Рис. 6. Относительная траектория после переброса (используется второй корень)

## 2.2. Замкнутость двух орбит

Более сильным условием ограниченности движения является замкнутость орбит обоих спутников в исходной орбитальной системе координат. Исследуем возможность такого переброса. Положим  $\hat{C}_{1,c} = 0$  и  $\hat{C}_{1,t} = 0$ . В тех же обозначениях получим систему уравнений относительно времени переброса (положительные множители опущены):

$$\begin{cases} \frac{(8kC_1 + 4C_1 - 2C_3)(1 - \cos n) + (2C_2 + C_4)\sin n - 3(k+1)C_1 n \sin n}{8(\cos n - 1) + 3n \sin n} = 0, \\ \frac{(4C_1 + 2C_3)(1 - \cos n) - (2C_2 + C_4)\sin n}{8(\cos n - 1) + 3n \sin n} = 0. \end{cases}$$

Переходя к половинному углу, имеем

$$\begin{cases} \frac{(8kC_1 + 4C_1 - 2C_3)\sin x + (2C_2 + C_4)\cos x - 6(k+1)C_1 x \cos x}{3x \cos x - 4 \sin x} = 0, \\ \frac{(4C_1 + 2C_3)\sin x - (2C_2 + C_4)\cos x}{3x \cos x - 4 \sin x} = 0. \end{cases}$$

Складываем уравнения:

$$\frac{(8kC_1 + 8C_1)\sin x - 6(k+1)C_1 x \cos x}{3x \cos x - 4 \sin x} = 0,$$

из чего следует  $C_1 = 0$ .

Следовательно, замкнутые орбиты относительно исходной системы координат после переброса массы можно получить только в случае изначально замкнутой орбиты.

Если верно, что  $C_1 = 0$ , то время переброса можно получить из уравнения

$$\frac{-2C_3 \sin x + (2C_2 + C_4)\cos x}{3x \cos x - 4 \sin x} = 0.$$

Выражая константы через начальные данные, находим

$$x_0 \cos \frac{\omega t_1}{2} = 2z_0 \sin \frac{\omega t_1}{2} \quad (2.3)$$

$$\omega t_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{x_0}{2z_0} \quad (2.4)$$

В качестве примера рассмотрим случай круговой относительной начальной орбиты. Для этого положим

$$C_1 = 0, C_2 = a \cos \alpha, C_3 = a \sin \alpha, C_4 = 0, C_5 = \sqrt{3}a \cos \alpha, C_6 = \sqrt{3}a \sin \alpha, \quad (2.5)$$

где  $\alpha$  параметризует точку выброса массы на окружности. Относительная орбита круговая, так как

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \quad \text{и} \quad (x, y, z) \perp (0, -1, \sqrt{3}).$$

Тогда из (1.4) и (1.5) (и в их обозначениях), учитывая (2.3), получаем выражения констант интегрирования после переброса ( $\omega t_1$  выражается из (2.4)):

$$\hat{C}_{1,c} = 0, \hat{C}_{2,c} = -\frac{3a \sin \alpha \cdot \omega t_1}{(k+1)A}, \hat{C}_{3,c} = 0,$$

$$\hat{C}_{4,c} = \frac{6a \sin \alpha \cdot \omega t_1}{(k+1)A}, \hat{C}_{5,c} = -\frac{\sqrt{3}a \sin \alpha}{(k+1) \sin \omega t_1}, \hat{C}_{6,c} = 0$$

$$\hat{C}_{1,t} = 0,$$

$$\hat{C}_{2,t} = \frac{a}{kA} (3 \sin \alpha \cdot \omega t_1 \cos \omega t_1 + 4k[\cos \alpha - \sin \alpha] - 8 \cos \alpha [\cos \omega t_1 - 1]),$$

$$\hat{C}_{3,t} = \frac{a(k+1)}{kA} (3 \cos \alpha \cdot \omega t_1 [1 - \cos \omega t_1]),$$

$$\hat{C}_{4,t} = -\frac{a}{k \cos \alpha},$$

$$\hat{C}_{5,t} = \sqrt{3}a \cot \omega t_1 \sin \alpha,$$

$$\hat{C}_{6,t} = \frac{\sqrt{3}a \sin \alpha (k+1)}{k},$$

а из (1.3) — значения относительной скорости выброса

$$\Delta \dot{x} = 0, \Delta \dot{y} = -\frac{\sqrt{3}\omega a}{2 \cos \alpha}, \Delta \dot{z} = -\frac{3\omega^2 a t_1 \sin \alpha}{A}.$$

На рис. 7 и 8 показаны зависимости времени переброса и необходимой относительной скорости дополнительной массы в зависимости от точки выброса, которая задается углом  $\alpha$ , для круговой начальной орбиты радиуса  $a = 100$  м.

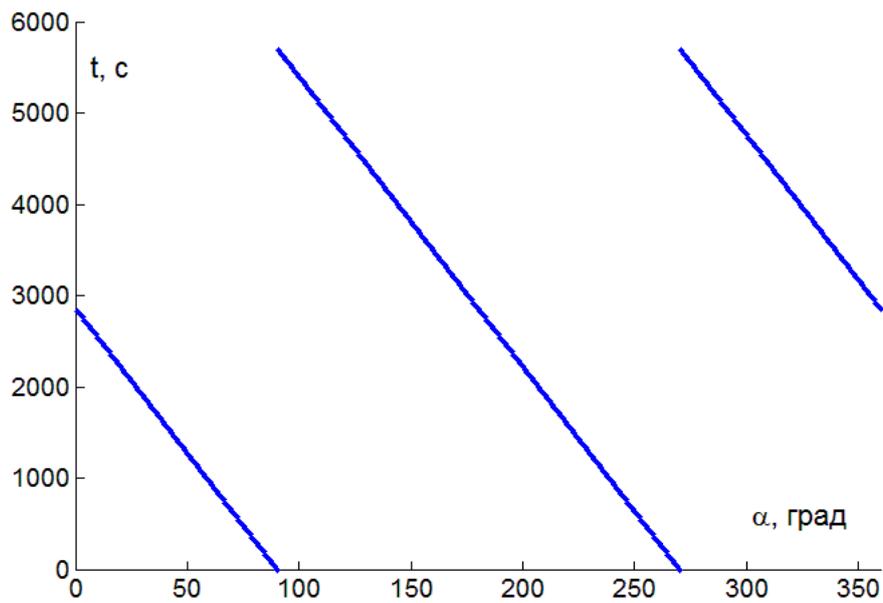


Рис. 7. Зависимость времени переброса от точки броска

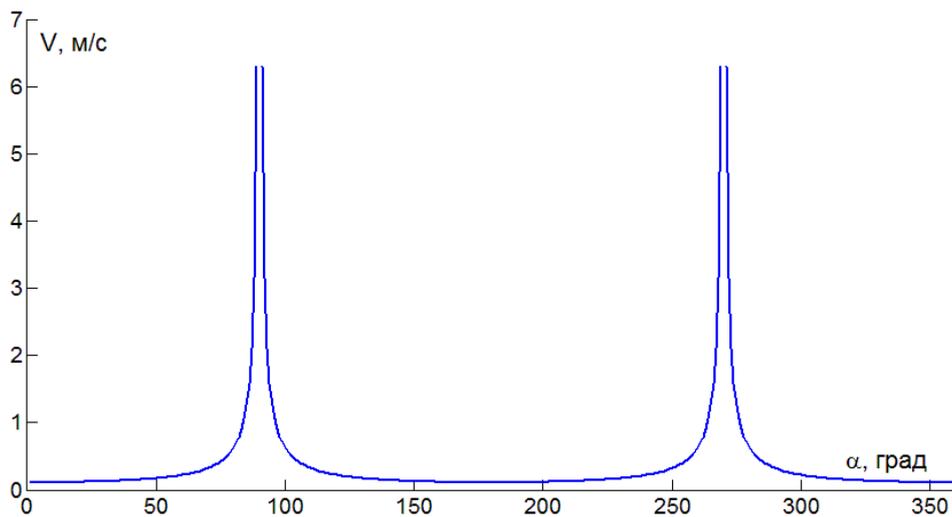


Рис. 8. Зависимость относительной скорости от точки броска

Исследуем подробнее относительную траекторию. До переброса она описывалась уравнениями

$$\begin{cases} x = 2a \cos(\omega t + \alpha), \\ y = \sqrt{3}a \sin(\omega t + \alpha), \\ z = a \sin(\omega t + \alpha). \end{cases}$$

После переброса:

$$\begin{cases} x_{отн} = 2A_1 \cos(\omega t + 2\phi) + B, \\ y_{отн} = A_2 \sin(\omega t + \psi), \\ z_{отн} = A_1 \sin(\omega t + \phi), \end{cases}$$

где  $\phi$  и  $\psi$  — фазы,  $A_1$ ,  $A_2$  - амплитуды и  $B$  - сдвиг, определяемые равенствами

$$A_1 = \sqrt{(\hat{C}_{2,t} - \hat{C}_{2,c})^2 + (\hat{C}_{3,t} - \hat{C}_{3,c})^2},$$

$$A_2 = \sqrt{(\hat{C}_{5,t} - \hat{C}_{5,c})^2 + (\hat{C}_{6,t} - \hat{C}_{6,c})^2},$$

$$B = \hat{C}_{4,t} - \hat{C}_{4,c}.$$

Качественное поведение  $A_1$ ,  $A_2$  и  $B$  в зависимости от точки выброса массы показано на рис. 9 — амплитуды слабо изменяются при всех точках выброса, кроме небольших участков в окрестности точек вырождения. Сдвиг  $B$ , с другой стороны, достаточно значителен.

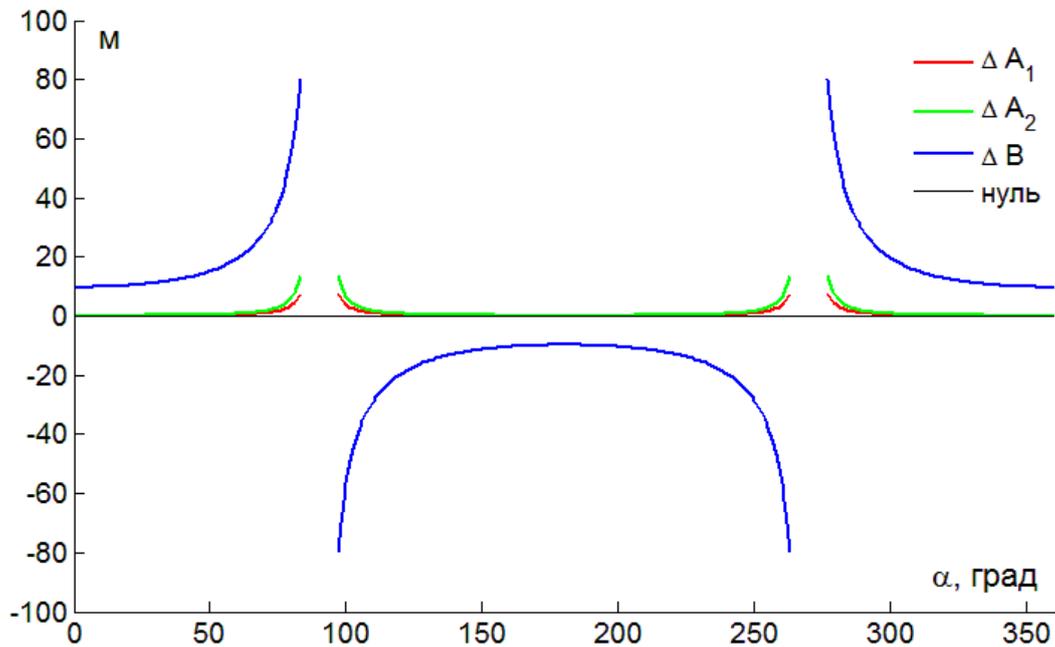


Рис. 9. Изменение констант  $A_1, A_2, B$

На рис. 10 и 11 в качестве примера показаны два варианта переброса массы на круговой относительной орбите.

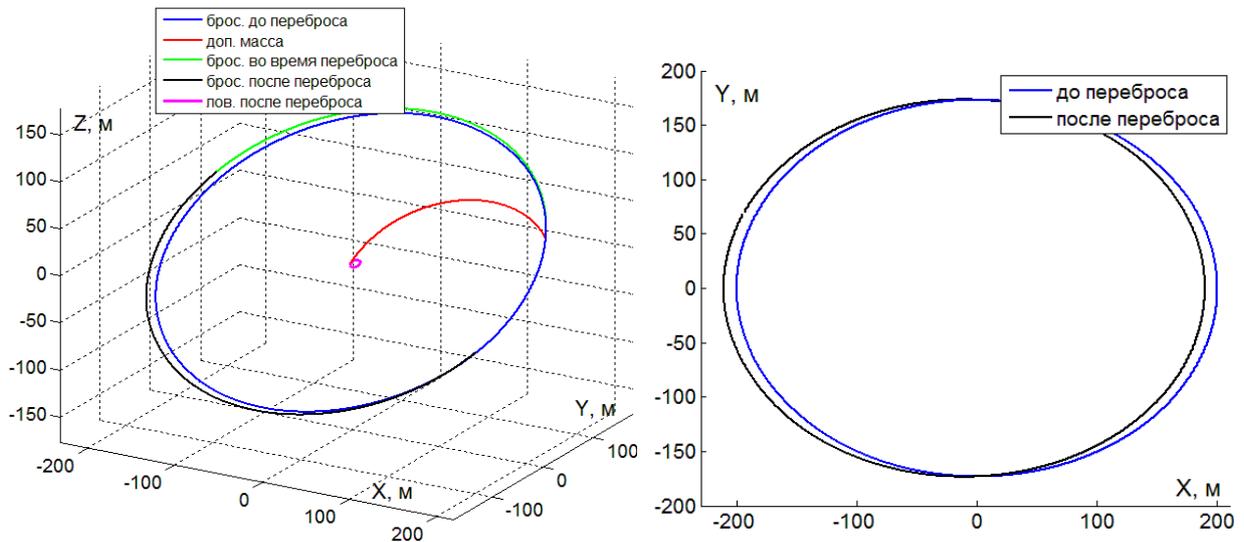
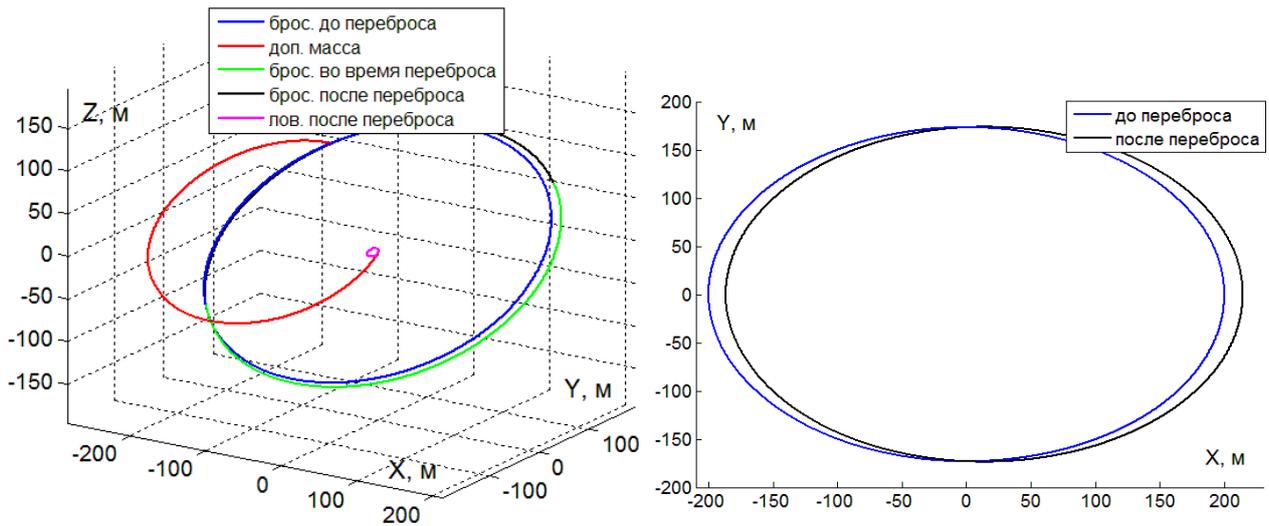


Рис. 10. Переброс при  $\alpha = \pi/8$ . Траектории в орбитальной (слева) и относительной (справа) системах координат.



**Рис. 11.** Переброс при  $\alpha = 3\pi/4$ . Траектории в орбитальной (слева) и относительной (справа) системах координат.

Таким образом, рассмотренные примеры изменения относительных траекторий замкнутых орбит с помощью переброса массы показывают, что, выбирая точку переброса массы, можно сдвигать по оси  $Ox$  положение ловящего спутника. При этом размеры круговой орбиты изменяются слабо. Однако если выбрать точку переброса вблизи углов  $\pi/2$  и  $3\pi/2$ , то возможно также значительно изменить и размеры замкнутой относительной траектории. Причем, изменение размеров можно производить многократно с использованием одной и той же перебрасываемой массы — после переброса ловящий и бросающий спутник меняются ролями и можно совершить переброс снова.

### 3. Учёт влияния несферичности Земли

#### 3.1. Постановка задачи и метод решения

Основной недостаток уравнений (1.1) — низкая точность на больших промежутках времени. Основной причиной этого является влияние второй гармоники  $J_2$  гравитационного поля Земли. Уравнения (1.1) были модифицированы Седвиком и Швайгардом [14], чтобы учитывать влияние  $J_2$  на движение спутника, оставаясь в рамках модели Хилла–Клохесси–Уилтшира.

Пусть орбиты двух спутников близки к некоторой опорной круговой орбите.  $i_0, i_1, i_2$  — наклонения опорной орбиты и двух спутников соответственно. Пусть  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  — координаты бросающего и ловящего спутников в опорной системе координат. Тогда для  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \ddot{x} + A\dot{z} = 0, \\ \ddot{y} + q^2 y = 2lq \cos(qt + \varphi), \\ \ddot{z} - A\dot{x} - Bz = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} A &= 2\omega c, \\ B &= \omega^2(5c^2 - 2), \\ c &= \sqrt{1 + \frac{3J_2 R_\oplus^2}{8r_0^2}(1 + 3\cos 2i_0)}, \\ q &= \omega c + \frac{3\omega J_2 R_\oplus^2}{2r_0^2} \left( \cos^2 i_2 - \frac{(\cos i_1 - \cos i_2)(\cot i_1 \sin i_2 \cos \Delta\Omega_0 - \cos i_2)}{\sin^2 \Delta\Omega_0 + (\cot i_1 \sin i_2 - \cos i_2 \cos \Delta\Omega_0)^2} \right), \\ l &= -\frac{3\omega J_2 R_\oplus^2}{2r_0^2} \frac{(\cos i_1 - \cos i_2) \sin i_1 \sin i_2 \sin \Delta\Omega_0}{\sqrt{1 - (\cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos \Delta\Omega_0)^2}}, \\ \Delta\Omega_0 &= \frac{y_0}{r_0 \sin i_0}, \end{aligned}$$

$R_\oplus$  — радиус Земли,  $r_0$  — радиус опорной орбиты,  $\omega$  — угловая скорость вращения по опорной орбите,  $\varphi$  находится из уравнения

$$l \sin \varphi + qy_0 \operatorname{ctg} \varphi = \dot{y}_0.$$

Решение системы (3.1) есть

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{A}{a^3}(A\dot{x}_0 + Bz_0)\sin at + \frac{A\dot{z}_0}{a^2}(\cos at - 1) - \frac{B}{a^2}(\dot{x}_0 + Az_0)t, \\ y = \left( lt + \frac{y_0}{\sin \phi} \right) \sin(qt + \phi), \\ z = \frac{A}{a^2}(\dot{x}_0 + Az_0) + \frac{\dot{z}_0}{a}\sin at - \frac{1}{a^2}(A\dot{x}_0 + Bz_0)\cos at, \end{cases} \quad (3.2)$$

где  $a = \sqrt{A^2 - B}$ ,  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$  — координаты и скорости в момент времени  $t = 0$ . Следует заметить, что  $\dot{y}_0$  присутствует в (3.2) неявно, влияя на  $\phi$ .

Однако, применение общего алгоритма, описанного выше, для рассматриваемой системы уравнений затрудняется тем, что в (3.2) константы зависят от относительной орбиты спутника, а значит, вместо линейной системы вида (1.3) получим некоторую нелинейную зависимость. Упростим задачу: считая движение спутника по уравнениям Швайгарда-Седвика (3.1). Однако переброс будем осуществлять согласно уравнениям Хилла. Такой подход оправдан тем, что на малых промежутках времени (порядка периода обращения по опорной орбите) уравнения (1.1) хорошо описывают движение спутника.

### 3.2. Поддержание относительной траектории

Рассмотрим следующий пример: начальные условия обеспечивают круговую относительную орбиту, однако вследствие влияния члена  $J_2$  орбиты спутников расходятся — орбита одного спутника относительно другого смещается, что соответствует росту константы  $C_4$  в уравнениях (1.2). Требуется осуществлять переброс дополнительной массы с тем, чтобы спутники не расходились друг от друга. Продемонстрируем возможность этого на конкретном примере: возьмем следующие константы

$$C_1 = 0, C_2 = a, C_3 = a/10, C_4 = a/100, C_5 = \sqrt{3}a, C_6 = \sqrt{3}a/10.$$

Положим  $a = 100$  м,  $i_0 = 45$  град,  $r_0 = 6.8 \cdot 10^6$  м,  $m/m_b = 100$ . Так как  $C_1 = 0$ , то начальная относительная траектория замкнутая согласно уравнениям (1.2). Однако она не является замкнутой при использовании уравнений (3.2), так как  $y_0 \neq 0$ .

Рассчитаем как зависит изменение констант от точки броска массы, определяемой углом  $\alpha$  от начального значения на исходной орбите (см. рис. 12). Так как возмущение от гармоник  $J_2$  в основном влияет на изменение смещения вдоль оси  $Ox$  (которое определяется величиной  $C_4$ ), необходимо выбирать такие точки переброса, чтобы уменьшить влияние на остальные константы. Минимальное значение разницы  $\Delta\left(\sqrt{C_2^2 + C_3^2}\right)$  находится в точке  $\alpha = 180$  град, но это особая точка для разности  $\Delta\left(\sqrt{C_5^2 + C_6^2}\right)$ , где она меняет знак. Таким образом, точки переброса можно менять таким образом вблизи  $\alpha = 180$ , чтобы

менять знак изменения  $\Delta(\sqrt{C_5^2 + C_6^2})$ , и в результате нескольких перебросов это изменение было небольшим. На рис. 13 изображена относительная траектория второго спутника и траектории переброса массы. Точки совершения бросков указаны на рис. 12.

На рис.14 изображены зависимости координат траектории от времени во время поддержания орбиты. На рис. 15 представлен график изменения во времени сдвига (представленной величиной  $C_4$ ) относительной траектории по оси  $x$ , из которого видно, что положение аппарата по этой координате удерживается в интервале  $(-1, 1)$  м. На рис. 16 изображен график изменения во времени значения амплитуды  $\sqrt{C_5^2 + C_6^2}$  движения по оси  $y$ . Видно, что первый бросок был совершен из точки с отрицательным изменением  $\Delta\sqrt{C_5^2 + C_6^2} \approx -2$  м, а второй и третий с положительным изменением этой величины. В результате трёх перебросов разница составила всего  $\Delta\sqrt{C_5^2 + C_6^2} \approx 0.1$  м. Изменение амплитуды  $\sqrt{C_2^2 + C_3^2}$  при перебросах менее оптимистично (рис. 17): при любом значении  $\alpha$  её изменение положительно. Таким образом, поддержание значения  $\sqrt{C_2^2 + C_3^2}$  невозможно с помощью переброса массы для рассматриваемой относительной орбиты. Однако в рассматриваемом примере это изменение довольно мало и составляет  $\Delta\sqrt{C_2^2 + C_3^2} \approx 0.01$  м.

Таким образом, рассматриваемый пример демонстрирует возможность поддерживать заданную относительную орбиту с помощью переброса массы. Он является частным случаем и не доказывает возможность поддержания орбиты в общем случае. Несмотря на невозможность удержания значения амплитуды  $\sqrt{C_2^2 + C_3^2}$  в заданных пределах, результаты исследования позволяют продолжить исследования возможности поддержания относительных орбит для разных типов траекторий.

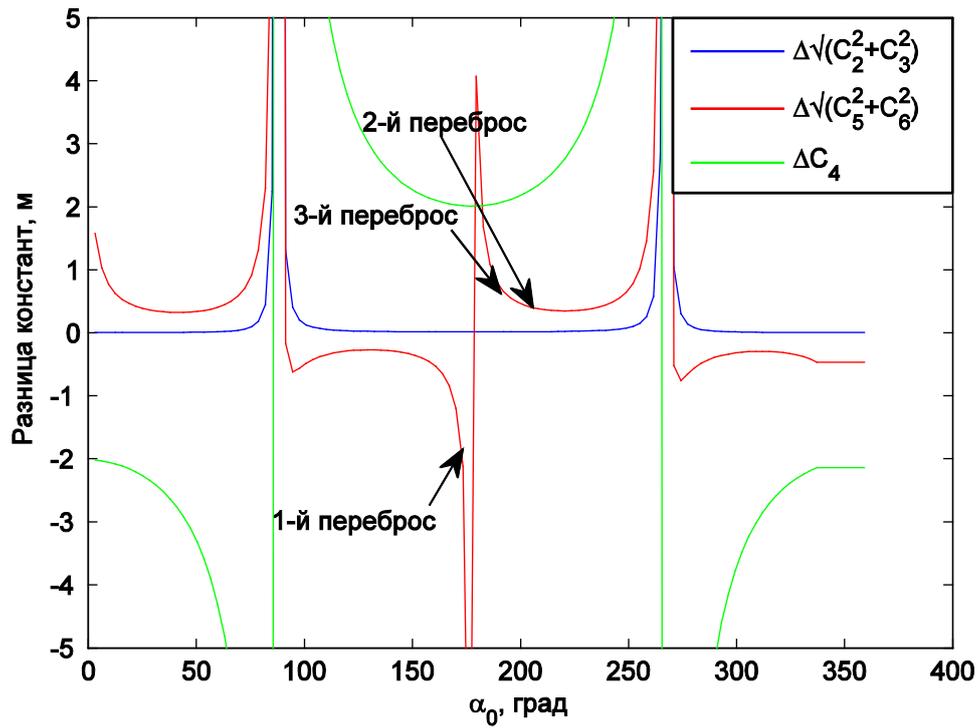


Рис.12. Зависимость разности констант от точки броска  $\alpha_0$

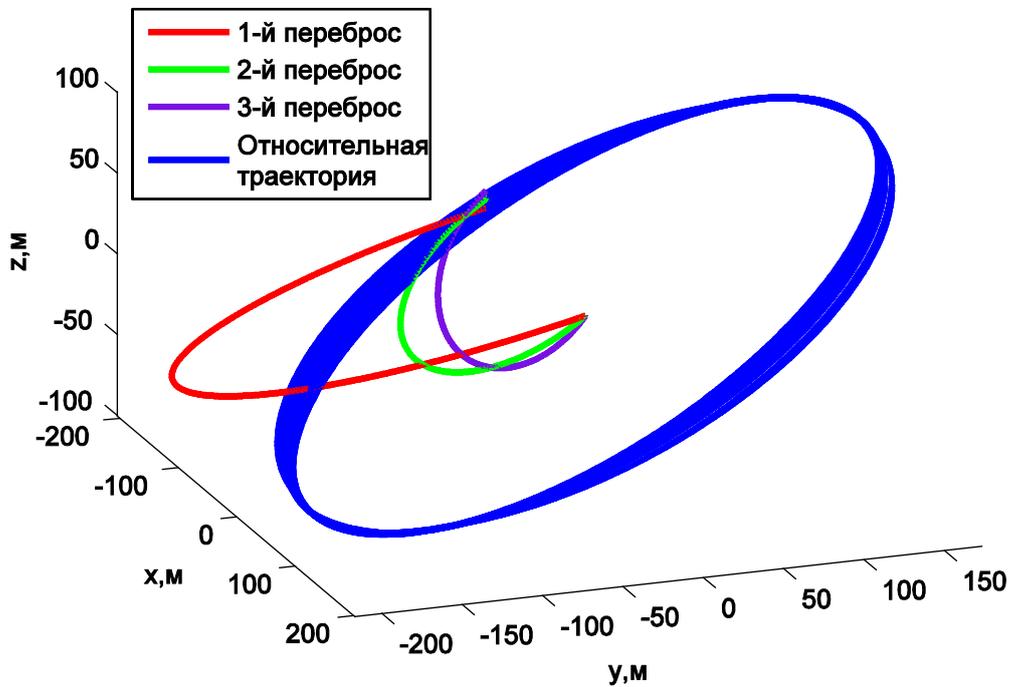


Рис. 13. Относительная траектория при поддержании относительной орбиты

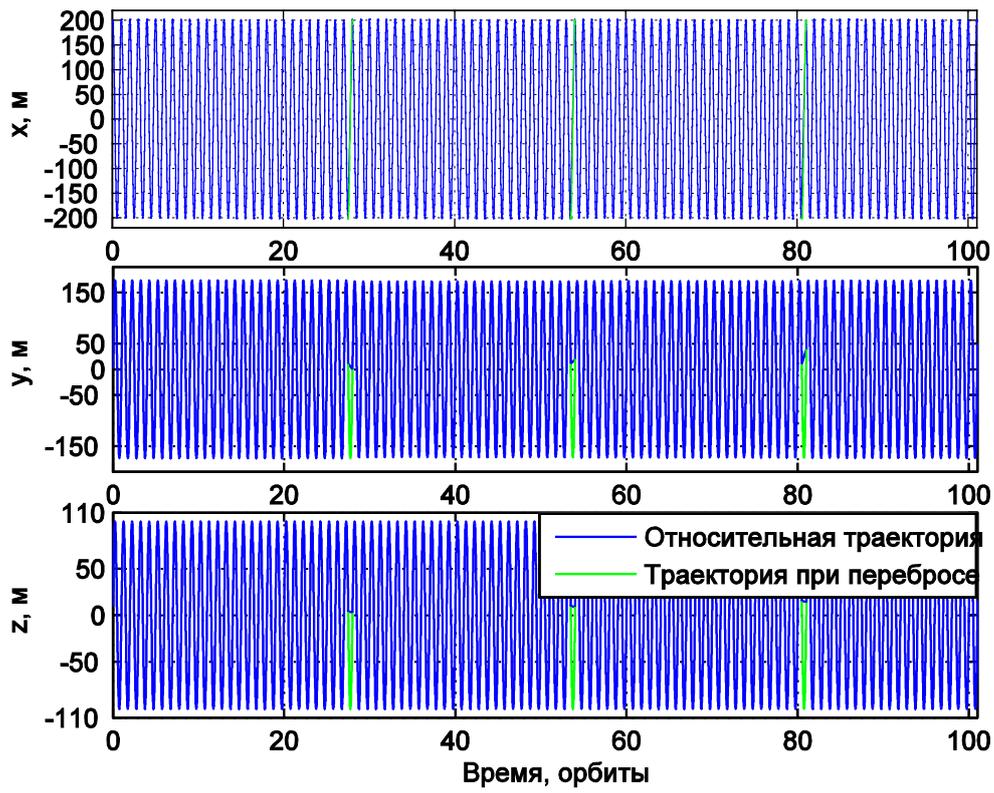


Рис. 14. Координаты относительной траектории во время поддержания

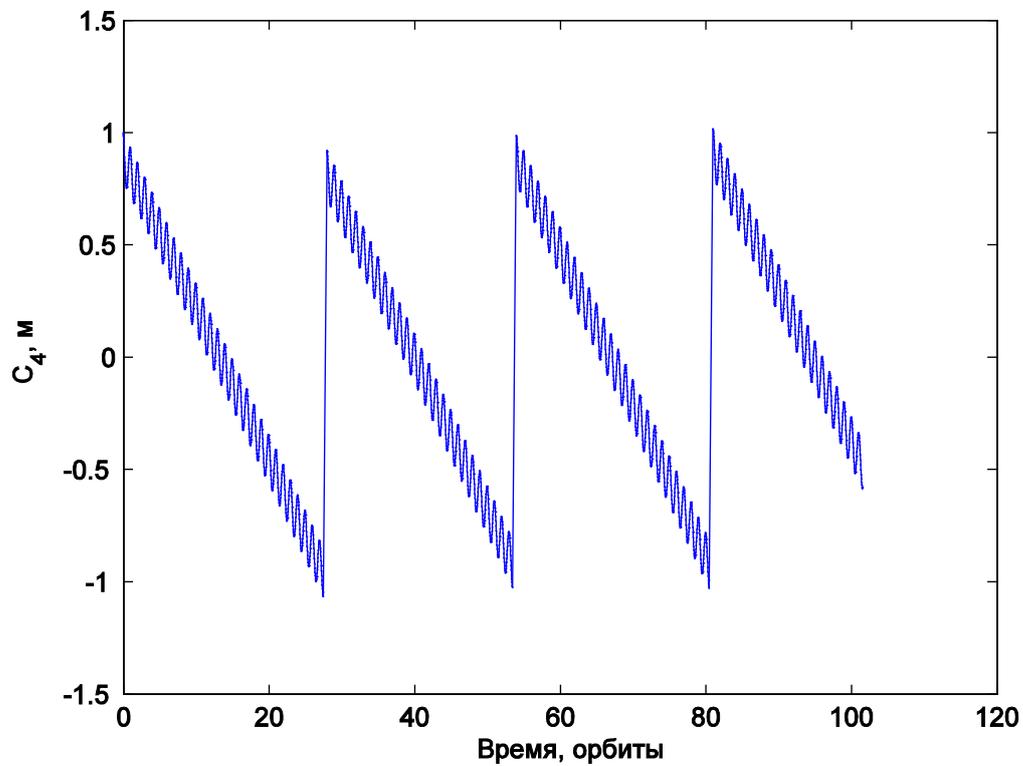


Рис. 15. Изменение константы  $C_4$

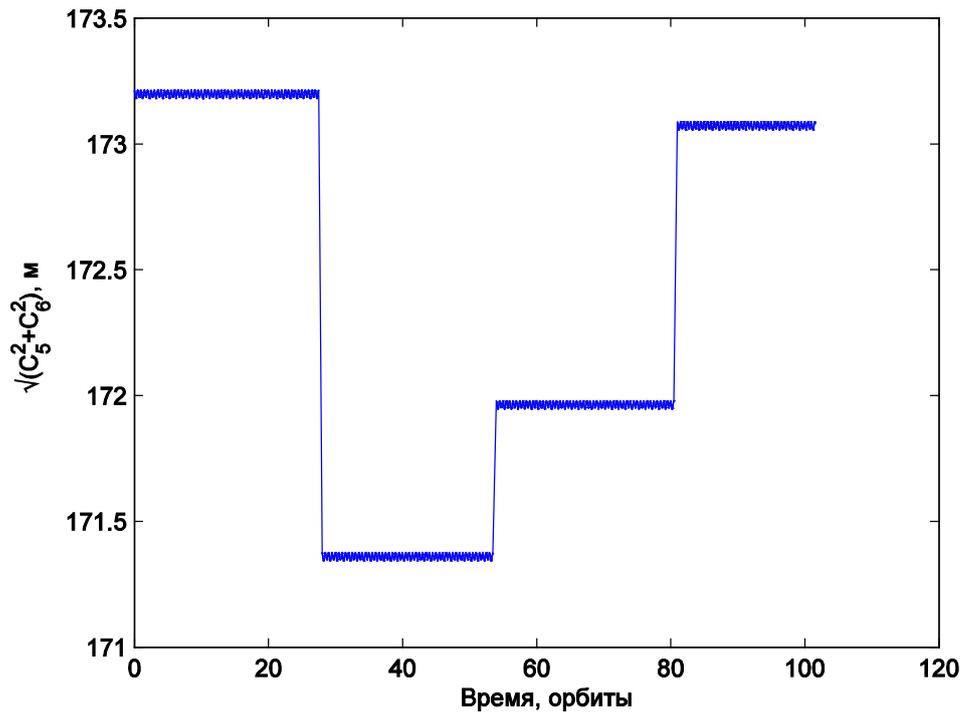


Рис. 16. Изменение величины  $\sqrt{C_5^2 + C_8^2}$

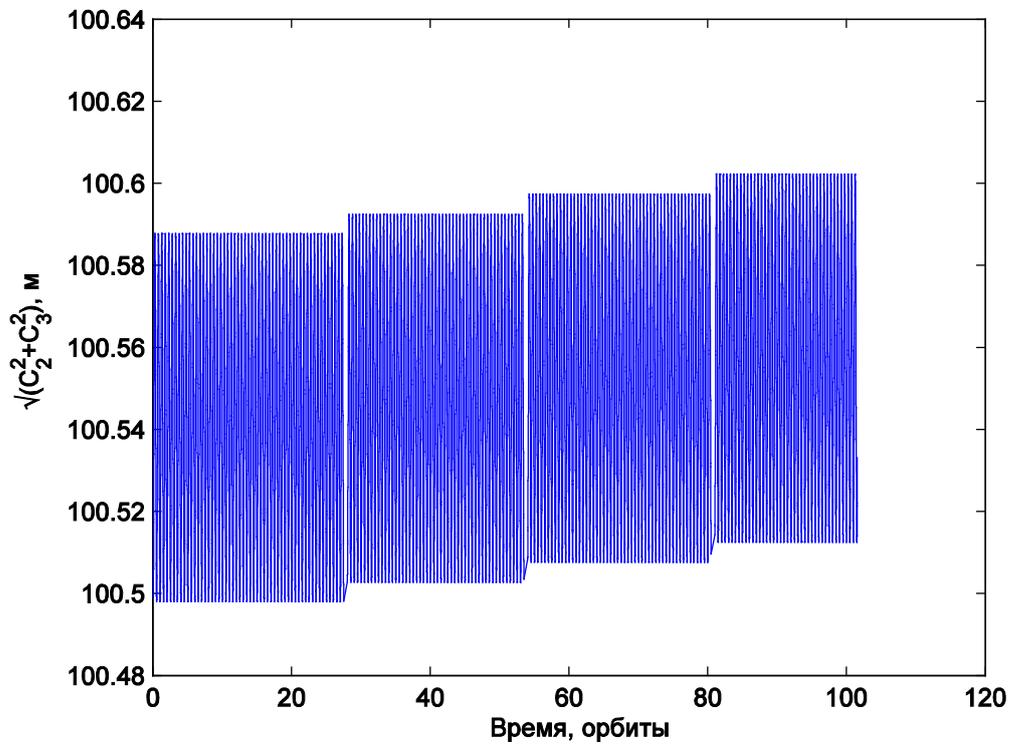


Рис. 17. Изменение величины  $\sqrt{C_2^2 + C_3^2}$

## Заключение

Проведено исследование возможности управления относительным движением спутников в группе с помощью переброса масс. Для хилловской модели полета были выведены основные уравнения, связывающие параметры относительного движения до и после переброса. Показано, что с помощью переброса массы можно остановить относительный дрейф двух спутников. В случае изначально замкнутой орбиты возможно сдвинуть относительную траекторию по оси  $Ox$ , слабо изменяя форму относительной траектории. Выбрав точку бросания массы, можно изменить также и форму траектории.

Так как основное влияние на относительное движение оказывает вторая гармоника разложения гравитационного поля Земли, были рассмотрены уравнения, учитывающие это возмущение. Было показано на примере, что с помощью переброса массы возможно бороться с дрейфом относительного движения, выбирая необходимую для этого точку переброса.

Таким образом, предложенный метод управления относительным движением спутников в группе с помощью переброса массы может применяться для относительных маневров, для изменения конфигурации полета, а также для поддержания заданной траектории. Однако следует учитывать, что с помощью переброса массы возможно не произвольное изменение траектории, а только некоторый ограниченный набор вариантов, который определяется параметрами начальной орбиты, массами спутников и дополнительного тела.

## Список литературы

1. Schaub H. et.al. Challenges and Prospects of Coulomb Spacecraft Formation Control of the Astronautical Sciences // *Journal of the Astronautical Sciences*. 2004. V. 52. P. 169–193.
2. Mullen E.G., Gussenhoven M.S., Hardy D.A. SCATHA Survey of High-Voltage Spacecraft Charging in Sunlight // *Journal of the Geophysical Sciences*. 1986. V. 91. P. 1074–1090.
3. King L.B., Parker G.G. Spacecraft Formation-flying using Inter-vehicle Coulomb Forces. : NASA/NIAC, 2002.
4. Joe H., Schaub H., Parker G.G. Formation Dynamics of Coulomb Satellites // 6th International Conference on Dynamics and Control of Systems and Structures in Space. 2004. P. 79–90.
5. Saaj C.M. et.al. Electostatic Forces for Satellite Swarm Navigation Reconfiguration P. 96.
6. Peck M.A. et.al. Spacecraft Formation Flying Using Lorentz Forces // *Journal of the British Interplanetary Society*. 2007. V. 60. P. 263–267.
7. Leonard C.L. Formation Keeping of Spacecraft via Differential Drag // Master Thesis, Massachusetts Institute of Technology. 1986.
8. Bevilacqua R., Romano M. Rendezvous Maneuvers of Multiple Spacecraft Using Differential Drag under J2 Perturbation // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2008. V. 31. № 6. P. 1595–1607.
9. Bevilacqua R., Hall J.S., Romano M. Multiple Spacecraft Rendezvous Maneuvers by Differential Drag and Low Thrust Engines // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2010. V. 106. № 1. P. 69–88.
10. Reid T., Misra A. Formation Flying of Satellites in the Presence of Atmospheric Drag // *Journal of Aerospace Engineering, Sciences and Applications*. 2011. V. 3. P. 64–91.
11. Kumar B.S. et.al. Differential Drag as a Means of Spacecraft Formation Control // *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 2011. V. 47. № 2. P. 1125–1135.
12. Hill G.W. Researches in Lunar Theory // *American Journal of Mathematics*. 1878. V. 1. P. 5–26.
13. Clohessy W.H., Wiltshire R.S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous // *Journal of the Astronautical Sciences*. 1960. V. 27. № 9. P. 653–678.
14. Schweighart S., Sedwick R.J. High-Fidelity Linearized J2 Model for Satellite Formation Flight // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2002. T. 25. № 6. P. 1073–1080.

## Оглавление

Введение.....	3
1. Решение задачи о перебросе массы.....	5
1.1. Постановка задачи .....	5
1.2. Решение краевой задачи.....	7
1.3. Изменение относительной траектории .....	8
2. Частные случаи относительного движения после переброса массы.....	10
2.1. Замкнутость орбиты одного спутника относительно другого .....	11
2.2. Замкнутость двух орбит .....	14
3. Учёт влияния несферичности Земли.....	19
3.1. Постановка задачи и метод решения .....	19
3.2. Поддержание относительной траектории .....	20
Заключение .....	25
Список литературы .....	26