



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 79 за 2013 г.



Мирер С.А.

Равновесные конфигурации  
системы трех тел в  
плоскости круговой орбиты

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Мирер С.А. Равновесные конфигурации системы трех тел в плоскости круговой орбиты // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 79. 28 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-79>

**Ордена Ленина**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В.Келдыша**  
**Российской академии наук**

**С.А. Мирер**

**Равновесные конфигурации**  
**системы трех тел**  
**в плоскости круговой орбиты**

**Москва — 2013**

## **Мирер С.А.**

Равновесные конфигурации системы трех тел в плоскости круговой орбиты

Исследуется движение в плоскости круговой орбиты системы трех шарнирно соединенных тел под действием гравитационного момента. Рассматривается случай, когда шарниры в каждом теле расположены на одной из его главных центральных осей инерции. Определены все плоские равновесные конфигурации системы в орбитальной системе координат, условия их существования и достаточные условия устойчивости.

**Ключевые слова:** спутник, система шарнирно соединенных тел, положение равновесия, устойчивость

## **Sergey Aleksandrovich Mirer**

Equilibrium configurations of three hinged bodies in the plane of a circular orbit

The attitude motion of three hinged bodies affected by gravitational torque in the plane of a circular orbit is examined. The case where the hinges are located on principal inertia axes in corresponding bodies is considered. All planar equilibriums of the system are found in orbital reference frame as well as their existence conditions and sufficient conditions of stability.

**Key words:** satellite, system of hinged bodies, equilibrium, stability

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-01-00665-а.

## **Оглавление**

Введение .....	3
Система трех тел на орбите .....	4
Плоская задача .....	12
Достаточные условия устойчивости .....	17
Решения (11) .....	20
Решения (12) .....	21
Решения (15) .....	22
Решения (18) .....	23
Пример .....	25
Библиографический список .....	28

## Введение

Известно, что твердое тело с неравными главными центральными моментами инерции имеет на круговой орбите двадцать четыре положения равновесия в орбитальной системе координат, из которых четыре являются устойчивыми. Они соответствуют совпадению наибольшей оси эллипсоида инерции спутника с радиусом-вектором и наименьшей оси с нормалью к плоскости орбиты [1]. Если спутник представляет собой совокупность тел, соединенных шарнирами, то задача определения равновесных конфигураций становится значительно более сложной и давно привлекает внимание многих исследователей. В первую очередь следует упомянуть работы В.А. Сарычева. В [2] были рассмотрены плоские колебания системы двух твердых тел, соединенных идеальным сферическим шарниром, на круговой орбите под действием гравитационного момента. Здесь исследуется достаточно простой частный случай, когда шарнир расположен на пересечении главных центральных осей инерции обоих тел. Определены все плоские положения равновесия системы в орбитальной системе координат. С использованием интеграла энергии получены достаточные условия устойчивости. Аналогичная система исследуется и в [5], однако на этот раз тела, составляющие систему, предполагаются осесимметричными и шарнир расположен на пересечении осей симметрии. При этом определены все изолированные пространственные положения равновесия и области их существования. Также отмечено, что при некоторых соотношениях между параметрами системы существуют однопараметрические и двухпараметрические семейства положений равновесия. Следует отметить, что для определения всех пространственных положений равновесия системы двух тел в случае произвольного расположения шарнира необходимо анализировать настолько сложную систему уравнений, что в полном объеме эта задача до сих пор не решена.

Представляет интерес также задача о движении маятника, установленного на спутнике, который на круговой орбите находится в положении равновесия в орбитальной системе координат [6, 7]. В [6] предполагается, что маятник представляет собой осесимметричное тело, жестко скрепленное с невесомым стержнем, являющимся продолжением его оси симметрии. С корпусом спутника маятник соединен при помощи идеального сферического шарнира. Здесь решается задача поиска положений равновесия маятника, а также его стационарных вращений в орбитальной системе координат. Проанализирована устойчивость найденных решений. Та же система в случае, когда маятник уже не осесимметричный, рассматривается в [7]. Стержень (по-прежнему, невесомый) направлен по главной оси инерции маятника. Уравнения движения записаны для произвольного расположения шарнира в теле спутника, но возможные равновесные конфигурации проанализированы только в двух частных случаях: когда шарнир смещен относительно центра масс спутника по нормали к плоскости орбиты или по трансверсали. При этом найдены все

положения равновесия маятника и показано, что в обоих случаях число решений не менее 8 и не более 24. Приведены неравенства, которые определяют достаточные условия устойчивости равновесий.

Если упростить постановку задачи и рассматривать не систему тел, а систему материальных точек, соединенных шарнирами и невесомыми стержнями, то удастся получить новые результаты. Так в [4] получены все пространственные положения равновесия и области их существования для системы, состоящей из трех материальных точек, соединенных двумя невесомыми стержнями (в точке соединения идеальный сферический шарнир). По существу, это двойной математический маятник. В [8] рассматривается обобщение этой системы на случай  $n+1$  материальных точек (цепочка соединена  $n$  невесомыми стержнями и идеальными сферическими шарнирами). Однако здесь получены только равновесные конфигурации системы в плоскости орбиты.

Анализ равновесий системы трех тел, соединенных шарнирами, пока ограничивается рассмотрением некоторых частных случаев. Два таких частных случая рассмотрены в [9]. В первом случае к центральному телу присоединены два математических маятника (точечные массы на невесомых стержнях). Во втором случае к основному телу присоединен двойной математический маятник. В обоих случаях определяются возможные равновесные конфигурации системы в плоскости круговой орбиты. В [10] выполнен более детальный анализ найденных равновесных конфигураций и их устойчивости.

В данной работе рассматривается система трех шарнирно соединенных тел на круговой орбите под действием гравитационного момента. Предполагается, что каждый шарнир расположен на пересечении главных центральных осей инерции соответствующих тел и определяются все плоские равновесные конфигурации такой системы. Кроме того, приводятся достаточные условия для всех найденных равновесий.

## Система трех тел на орбите

Рассмотрим систему трех соединенных идеальными сферическими шарнирами тел на орбите (Рис. 1). Предполагается, что шарниры расположены на пересечении главных центральных осей инерции соответствующих тел.

Введем следующие обозначения:

$C$  - центр Земли;  $O, O_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) - центры масс системы и составляющих ее тел,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{CO}$ ,  $\mathbf{r}_i = \mathbf{CO}_i$ ;  $P_1, P_2$  - шарниры,  $\mathbf{O}_1\mathbf{P}_1 = a_1\mathbf{e}_1^{(1)}$ ,  $\mathbf{O}_2\mathbf{P}_2 = a_2\mathbf{e}_1^{(2)}$ ,  $\mathbf{O}_3\mathbf{P}_1 = s_1\mathbf{e}_1^{(3)}$ ,  $\mathbf{O}_3\mathbf{P}_2 = s_2\mathbf{e}_1^{(3)}$ ,  $\mathbf{e}_1^{(i)}$  - орт оси  $O_ix_i$ ;  $m_i, A_i, B_i, C_i$  - масса и главные центральные моменты инерции  $i$ -го тела;  $m = m_1 + m_2 + m_3$  - суммарная масса системы.

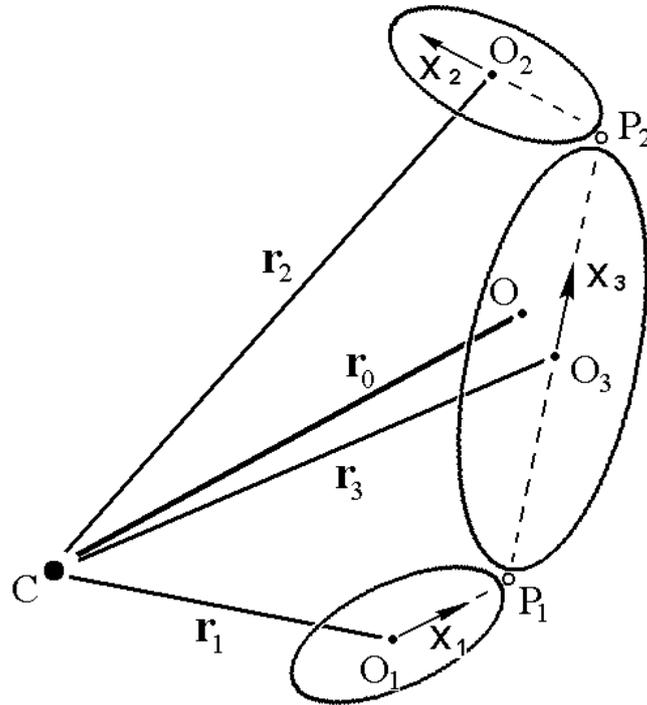


Рис. 1. Система трех тел на орбите

Матрицу направляющих косинусов между орбитальной системой координат  $OXYZ$  и системой  $O_v x_v y_v z_v$ , связанной с  $\nu$ -м телом (ее оси направлены вдоль главных центральных осей инерции), обозначим

$$\mathbf{A}_\nu = \left\| a_{mn}^{(\nu)} \right\|_{m,n=1}^3 \quad (\nu = 1, 2, 3),$$

где

$$a_{11}^{(\nu)} = \cos \alpha_\nu \cos \beta_\nu,$$

$$a_{12}^{(\nu)} = \sin \alpha_\nu \sin \gamma_\nu - \cos \alpha_\nu \sin \beta_\nu \cos \gamma_\nu,$$

$$a_{13}^{(\nu)} = \sin \alpha_\nu \cos \gamma_\nu + \cos \alpha_\nu \sin \beta_\nu \sin \gamma_\nu,$$

$$a_{21}^{(\nu)} = \sin \beta_\nu,$$

$$a_{22}^{(\nu)} = \cos \beta_\nu \cos \gamma_\nu,$$

$$a_{23}^{(\nu)} = -\cos \beta_\nu \sin \gamma_\nu,$$

$$a_{31}^{(\nu)} = -\sin \alpha_\nu \cos \beta_\nu,$$

$$a_{32}^{(\nu)} = \cos \alpha_\nu \sin \gamma_\nu + \sin \alpha_\nu \sin \beta_\nu \cos \gamma_\nu,$$

$$a_{33}^{(v)} = \cos \alpha_v \cos \gamma_v - \sin \alpha_v \sin \beta_v \sin \gamma_v;$$

$\alpha_v, \beta_v, \gamma_v$  - углы ориентации (тангажа, рыскания и крена, см. рис. 2) соответствующего тела.

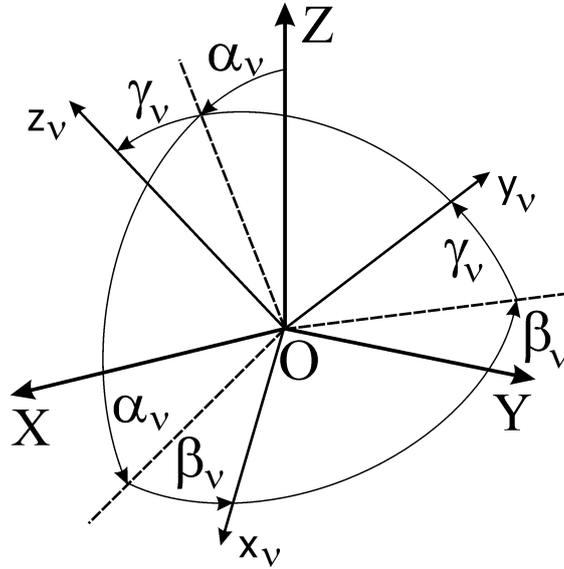


Рис. 2. Системы координат

Из уравнений связей

$$\mathbf{r}_i + a_i \mathbf{e}_1^{(i)} = \mathbf{r}_3 + s_i \mathbf{e}_1^{(3)}, \quad i = 1, 2$$

и определения радиуса-вектора центра масс системы

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{m} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3)$$

выражаем радиусы-векторы тел

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \sum_{v=1}^3 n_{iv} \mathbf{e}_1^{(v)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$\|n_{iv}\|_{i,v=1}^3 = \left\| \begin{pmatrix} \left(\frac{m_1}{m} - 1\right)a_1 & \frac{m_2}{m}a_2 & s_1 - \frac{m_1s_1 + m_2s_2}{m} \\ \frac{m_1}{m}a_1 & \left(\frac{m_2}{m} - 1\right)a_2 & s_2 - \frac{m_1s_1 + m_2s_2}{m} \\ \frac{m_1}{m}a_1 & \frac{m_2}{m}a_2 & -\frac{m_1s_1 + m_2s_2}{m} \end{pmatrix} \right\|.$$

Тогда

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{v=1}^3 n_{iv} \dot{\mathbf{e}}_1^{(v)} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{v=1}^3 n_{iv} (\boldsymbol{\omega}_v \times \mathbf{e}_1^{(v)}), \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_v = (p_v, q_v, r_v)^T$  - абсолютная угловая скорость  $i$ -го тела. Очевидно

$$\boldsymbol{\omega}_v \times \mathbf{e}_1^{(v)} = (0, r_v, -q_v)^T$$

или, переходя к орбитальной системе координат,

$$\mathbf{A}_v (\boldsymbol{\omega}_v \times \mathbf{e}_1^{(v)}) = (r_v a_{12}^{(v)} - q_v a_{13}^{(v)}, r_v a_{22}^{(v)} - q_v a_{23}^{(v)}, r_v a_{32}^{(v)} - q_v a_{33}^{(v)})^T.$$

Возводя (1) в квадрат, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i^2 = & \dot{\mathbf{r}}_0^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_0 \sum_{v=1}^3 n_{iv} (\boldsymbol{\omega}_v \times \mathbf{e}_1^{(v)}) + \sum_{v=1}^3 n_{iv}^2 (\boldsymbol{\omega}_v \times \mathbf{e}_1^{(v)})^2 + \\ & + 2n_{i1}n_{i2} (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_1^{(1)}) (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_1^{(2)}) + \\ & + 2n_{i2}n_{i3} (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_1^{(2)}) (\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{e}_1^{(3)}) + \\ & + 2n_{i3}n_{i1} (\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{e}_1^{(3)}) (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_1^{(1)}). \end{aligned} \quad (2)$$

Кинетическая энергия системы трех тел имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (A_i p_i^2 + B_i q_i^2 + C_i r_i^2). \quad (3)$$

Подставляя (2) в (3), учитывая очевидные соотношения

$$\sum_{i=1}^3 m_i n_{iv} = 0, \quad v = 1, 2, 3 \quad (4)$$

и используя обозначения

$$\begin{aligned}
L_1 &= \sum_{i=1}^3 m_i n_{i1}^2 = \left(1 - \frac{m_1}{m}\right) m_1 a_1^2, \\
L_2 &= \sum_{i=1}^3 m_i n_{i2}^2 = \left(1 - \frac{m_2}{m}\right) m_2 a_2^2, \\
L_3 &= \sum_{i=1}^3 m_i n_{i3}^2 = m_1 s_1^2 + m_2 s_2^2 - \frac{1}{m} (m_1 s_1 + m_2 s_2)^2, \\
N_1 &= \sum_{i=1}^3 m_i n_{i2} n_{i3} = \left[ m_1 s_1 - (m_1 + m_3) s_2 \right] \frac{m_2}{m} a_2, \\
N_2 &= \sum_{i=1}^3 m_i n_{i3} n_{i1} = \left[ m_2 s_2 - (m_2 + m_3) s_1 \right] \frac{m_1}{m} a_1, \\
N_3 &= \sum_{i=1}^3 m_i n_{i1} n_{i2} = -\frac{m_1 m_2}{m} a_1 a_2,
\end{aligned} \tag{5}$$

находим

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_0 \dot{\mathbf{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[ A_i p_i^2 + (B_i + L_i) q_i^2 + (C_i + L_i) r_i^2 \right] + \\
&\quad + N_1 \sum_{i=1}^3 \left( r_2 a_{i2}^{(2)} - q_2 a_{i3}^{(2)} \right) \left( r_3 a_{i2}^{(3)} - q_3 a_{i3}^{(3)} \right) + \\
&\quad + N_2 \sum_{i=1}^3 \left( r_3 a_{i2}^{(3)} - q_3 a_{i3}^{(3)} \right) \left( r_1 a_{i2}^{(1)} - q_1 a_{i3}^{(1)} \right) + \\
&\quad + N_3 \sum_{i=1}^3 \left( r_1 a_{i2}^{(1)} - q_1 a_{i3}^{(1)} \right) \left( r_2 a_{i2}^{(2)} - q_2 a_{i3}^{(2)} \right).
\end{aligned}$$

При обычных предположениях о центральности поля тяготения Земли и малости отношения характерного линейного размера системы к расстоянию между центрами масс Земли и системы выражение для силовой функции может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned}
U &= \mu \sum_{i=1}^3 \left( \int_{m_i} \frac{dm}{r} \right) = \mu \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{m_i}{r_i} + \frac{1}{2r_i^3} \left[ (B_i + C_i - 2A_i) (a_{31}^{(i)})^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (C_i + A_i - 2B_i) (a_{32}^{(i)})^2 + (A_i + B_i - 2C_i) (a_{33}^{(i)})^2 \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Выражения для  $\mathbf{r}_i$  в орбитальной системе координат имеют вид

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \sum_{v=1}^3 n_{iv} \mathbf{A}_v \mathbf{e}_1^{(v)},$$

откуда

$$r_i^2 = r_0^2 \left( 1 + \frac{2}{r_0} D_{i1} + \frac{1}{r_0^2} D_{i2} \right).$$

Здесь, учитывая, что в орбитальной системе координат  $\mathbf{r}_0/r_0 = (0, 0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} D_{i1} &= \frac{\mathbf{r}_0}{r_0} \sum_{v=1}^3 n_{iv} \mathbf{A}_v \mathbf{e}_1^{(v)} = \sum_{v=1}^3 n_{iv} a_{31}^{(v)}, \\ D_{i2} &= \left( \sum_{v=1}^3 n_{iv} \mathbf{A}_v \mathbf{e}_1^{(v)} \right)^2 = \left( n_{i1} a_{11}^{(1)} + n_{i2} a_{11}^{(2)} + n_{i3} a_{11}^{(3)} \right)^2 + \\ &\quad + \left( n_{i1} a_{21}^{(1)} + n_{i2} a_{21}^{(2)} + n_{i3} a_{21}^{(3)} \right)^2 + \left( n_{i1} a_{31}^{(1)} + n_{i2} a_{31}^{(2)} + n_{i3} a_{31}^{(3)} \right)^2 = \\ &= n_{i1}^2 + n_{i2}^2 + n_{i3}^2 + \\ &\quad + 2n_{i2}n_{i3} \sum_{v=1}^3 a_{v1}^{(2)} a_{v1}^{(3)} + 2n_{i3}n_{i1} \sum_{v=1}^3 a_{v1}^{(3)} a_{v1}^{(1)} + 2n_{i1}n_{i2} \sum_{v=1}^3 a_{v1}^{(1)} a_{v1}^{(2)}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_i} &= \frac{1}{r_0} \left( 1 - \frac{1}{r_0} D_{i1} - \frac{1}{r_0^2} \frac{D_{i2} - 3D_{i1}^2}{2} \right) + O\left( \frac{1}{r_0^4} \right); \\ \frac{1}{r_i^3} &= \frac{1}{r_0^3} + O\left( \frac{1}{r_0^4} \right). \end{aligned}$$

В результате (6) принимает вид

$$\begin{aligned} U &= \frac{\mu m}{r_0} - \frac{\mu}{r_0^2} \sum_{i=1}^3 m_i D_{i1} - \frac{\mu}{2r_0^3} \sum_{i=1}^3 m_i (D_{i2} - 3D_{i1}^2) + \\ &\quad + \frac{\mu}{2r_0^3} \sum_{i=1}^3 \left[ (B_i + C_i - 2A_i)(a_{31}^{(i)})^2 + (C_i + A_i - 2B_i)(a_{32}^{(i)})^2 + \right. \\ &\quad \left. + (A_i + B_i - 2C_i)(a_{33}^{(i)})^2 \right]. \end{aligned}$$

Но в силу (4)

$$\sum_{i=1}^3 m_i D_{i1} = \sum_{\nu=1}^3 \left[ \left( \sum_{i=1}^3 m_i n_{i\nu} \right) a_{31}^{(\nu)} \right] = 0;$$

кроме того,

$$\begin{aligned} D_{i2} - 3D_{i1}^2 &= n_{i1}^2 + n_{i2}^2 + n_{i3}^2 + 2n_{i2}n_{i3} \left( a_{11}^{(2)}a_{11}^{(3)} + a_{21}^{(2)}a_{21}^{(3)} + a_{31}^{(2)}a_{31}^{(3)} \right) + \\ &+ 2n_{i3}n_{i1} \left( a_{11}^{(3)}a_{11}^{(1)} + a_{21}^{(3)}a_{21}^{(1)} + a_{31}^{(3)}a_{31}^{(1)} \right) + \\ &+ 2n_{i1}n_{i2} \left( a_{11}^{(1)}a_{11}^{(2)} + a_{21}^{(1)}a_{21}^{(2)} + a_{31}^{(1)}a_{31}^{(2)} \right) - 3 \left( n_{i1}a_{31}^{(1)} + n_{i2}a_{31}^{(2)} + n_{i3}a_{31}^{(3)} \right) = \\ &= \sum_{\nu=1}^3 \left[ 1 - 3 \left( a_{31}^{(\nu)} \right)^2 \right] n_{i\nu}^2 + 2n_{i2}n_{i3} \left( a_{11}^{(2)}a_{11}^{(3)} + a_{21}^{(2)}a_{21}^{(3)} - 2a_{31}^{(2)}a_{31}^{(3)} \right) + \\ &+ 2n_{i3}n_{i1} \left( a_{11}^{(3)}a_{11}^{(1)} + a_{21}^{(3)}a_{21}^{(1)} - 2a_{31}^{(3)}a_{31}^{(1)} \right) + \\ &+ 2n_{i1}n_{i2} \left( a_{11}^{(1)}a_{11}^{(2)} + a_{21}^{(1)}a_{21}^{(2)} - 2a_{31}^{(1)}a_{31}^{(2)} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (5), окончательно получаем

$$\begin{aligned} U &= \frac{\mu m}{r_0} + \frac{\mu}{2r_0^3} \sum_{i=1}^3 \left[ (B_i + C_i - 2A_i) \left( a_{31}^{(i)} \right)^2 + (C_i + A_i - 2B_i) \left( a_{32}^{(i)} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. (A_i + B_i - 2C_i) \left( a_{33}^{(i)} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{2r_0^3} \sum_{\nu=1}^3 L_\nu \left[ 1 - 3 \left( a_{31}^{(\nu)} \right)^2 \right] - \\ &- \frac{\mu}{r_0^3} \left[ N_1 \left( a_{11}^{(2)}a_{11}^{(3)} + a_{21}^{(2)}a_{21}^{(3)} - 2a_{31}^{(2)}a_{31}^{(3)} \right) + \right. \\ &+ N_2 \left( a_{11}^{(3)}a_{11}^{(1)} + a_{21}^{(3)}a_{21}^{(1)} - 2a_{31}^{(3)}a_{31}^{(1)} \right) + \\ &+ \left. N_3 \left( a_{11}^{(1)}a_{11}^{(2)} + a_{21}^{(1)}a_{21}^{(2)} - 2a_{31}^{(1)}a_{31}^{(2)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Если орбита круговая, то с точностью до постоянных членов кинетическая энергия движения системы относительно центра масс и силовая функция принимают вид

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[ A_i p_i^2 + (B_i + L_i) q_i^2 + (C_i + L_i) r_i^2 \right] + \\
& + N_1 \sum_{i=1}^3 \left( r_2 a_{i2}^{(2)} - q_2 a_{i3}^{(2)} \right) \left( r_3 a_{i2}^{(3)} - q_3 a_{i3}^{(3)} \right) + \\
& + N_2 \sum_{i=1}^3 \left( r_3 a_{i2}^{(3)} - q_3 a_{i3}^{(3)} \right) \left( r_1 a_{i2}^{(1)} - q_1 a_{i3}^{(1)} \right) + \\
& + N_3 \sum_{i=1}^3 \left( r_1 a_{i2}^{(1)} - q_1 a_{i3}^{(1)} \right) \left( r_2 a_{i2}^{(2)} - q_2 a_{i3}^{(2)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U = & -\frac{3}{2} \omega_0^2 \sum_{i=1}^3 \left[ (A_i - L_i) \left( a_{31}^{(i)} \right)^2 + B_i \left( a_{32}^{(i)} \right)^2 + C_i \left( a_{33}^{(i)} \right)^2 \right] - \\
& - \omega_0^2 \sum_{i=1}^3 \left( N_1 a_{i1}^{(2)} a_{i1}^{(3)} + N_2 a_{i1}^{(3)} a_{i1}^{(1)} + N_3 a_{i1}^{(1)} a_{i1}^{(2)} \right) + \\
& + 3 \omega_0^2 \left( N_1 a_{31}^{(2)} a_{31}^{(3)} + N_2 a_{31}^{(3)} a_{31}^{(1)} + N_3 a_{31}^{(1)} a_{31}^{(2)} \right).
\end{aligned}$$

Здесь  $\omega_0$  - орбитальная угловая скорость центра масс системы,  $\omega_0^2 = \mu/r_0^3$ .

Имеет место первый интеграл

$$T_2 - T_0 - U = h_0,$$

где

$$\begin{aligned}
T_2 = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[ A_i \bar{p}_i^2 + (B_i + L_i) \bar{q}_i^2 + (C_i + L_i) \bar{r}_i^2 \right] + \\
& + N_1 \sum_{i=1}^3 \left( \bar{r}_2 a_{i2}^{(2)} - \bar{q}_2 a_{i3}^{(2)} \right) \left( \bar{r}_3 a_{i2}^{(3)} - \bar{q}_3 a_{i3}^{(3)} \right) + \\
& + N_2 \sum_{i=1}^3 \left( \bar{r}_3 a_{i2}^{(3)} - \bar{q}_3 a_{i3}^{(3)} \right) \left( \bar{r}_1 a_{i2}^{(1)} - \bar{q}_1 a_{i3}^{(1)} \right) + \\
& + N_3 \sum_{i=1}^3 \left( \bar{r}_1 a_{i2}^{(1)} - \bar{q}_1 a_{i3}^{(1)} \right) \left( \bar{r}_2 a_{i2}^{(2)} - \bar{q}_2 a_{i3}^{(2)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_0 = & \frac{1}{2} \omega_0^2 \sum_{i=1}^3 \left[ A_i a_{21}^{(i)} + (B_i + L_i) a_{22}^{(i)} + (C_i + L_i) a_{23}^{(i)} \right] + \\
& + \omega_0^2 \sum_{i=1}^3 \left[ N_1 \left( a_{23}^{(2)} a_{i2}^{(2)} - a_{22}^{(2)} a_{i3}^{(2)} \right) \left( a_{23}^{(3)} a_{i2}^{(3)} - a_{22}^{(3)} a_{i3}^{(3)} \right) + \right. \\
& \quad + N_2 \left( a_{23}^{(3)} a_{i2}^{(3)} - a_{22}^{(3)} a_{i3}^{(3)} \right) \left( a_{23}^{(1)} a_{i2}^{(1)} - a_{22}^{(1)} a_{i3}^{(1)} \right) + \\
& \quad \left. + N_3 \left( a_{23}^{(1)} a_{i2}^{(1)} - a_{22}^{(1)} a_{i3}^{(1)} \right) \left( a_{23}^{(2)} a_{i2}^{(2)} - a_{22}^{(2)} a_{i3}^{(2)} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\bar{p}_i = p_i - \omega_0 a_{21}^{(i)} = \dot{\alpha}_i a_{21}^{(i)} + \dot{\gamma}_i,$$

$$\bar{q}_i = q_i - \omega_0 a_{22}^{(i)} = \dot{\alpha}_i a_{22}^{(i)} + \dot{\beta}_i \sin \gamma_i,$$

$$\bar{r}_i = r_i - \omega_0 a_{23}^{(i)} = \dot{\alpha}_i a_{23}^{(i)} + \dot{\beta}_i \cos \gamma_i.$$

Учитывая очевидные тождества  $a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13} = a_{31}$ ,  $a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32} = a_{11}$  и отбрасывая постоянные члены, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{T_0}{\omega_0^2} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[ (A_i - L_i) a_{21}^{(i)} + B_i a_{22}^{(i)} + C_i a_{23}^{(i)} \right] + \\
& + N_1 \left( a_{31}^{(2)} a_{31}^{(3)} + a_{11}^{(2)} a_{11}^{(3)} \right) + N_2 \left( a_{31}^{(3)} a_{31}^{(1)} + a_{11}^{(3)} a_{11}^{(1)} \right) + \\
& + N_3 \left( a_{31}^{(1)} a_{31}^{(2)} + a_{11}^{(1)} a_{11}^{(2)} \right)
\end{aligned}$$

и окончательно

$$\begin{aligned}
-2 \frac{T_0 + U}{\omega_0^2} = & \sum_{i=1}^3 \left\{ (A_i - L_i) \left[ 3 \left( a_{31}^{(i)} \right)^2 - \left( a_{21}^{(i)} \right)^2 \right] + \right. \\
& + B_i \left[ 3 \left( a_{32}^{(i)} \right)^2 - \left( a_{22}^{(i)} \right)^2 \right] + C_i \left[ 3 \left( a_{33}^{(i)} \right)^2 - \left( a_{23}^{(i)} \right)^2 \right] \left. \right\} + \\
& + 2N_1 \left( a_{21}^{(2)} a_{21}^{(3)} - 3a_{31}^{(2)} a_{31}^{(3)} \right) + 2N_2 \left( a_{21}^{(3)} a_{21}^{(1)} - 3a_{31}^{(3)} a_{31}^{(1)} \right) + \\
& + 2N_3 \left( a_{21}^{(1)} a_{21}^{(2)} - 3a_{31}^{(1)} a_{31}^{(2)} \right).
\end{aligned}$$

## Плоская задача

Далее ограничимся анализом колебаний в плоскости орбиты, т.е. будем считать, что  $\beta_i = \gamma_i \equiv 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Тогда

$$\mathbf{A}_i = \left\| a_{mn}^{(i)} \right\|_{m,n=1}^3 = \begin{vmatrix} \cos \alpha_i & 0 & \sin \alpha_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_i & 0 & \cos \alpha_i \end{vmatrix}; \quad p_i = r_i = 0, \quad q_i = \dot{\alpha}_i + \omega_0.$$

Уравнения углового движения в плоскости орбиты

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_i} - \frac{\partial (T+U)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

после перехода к безразмерному времени  $\tau = \omega_0 t$  можно записать в виде

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial T_*}{\partial \alpha'_i} - \frac{\partial (T_* + U_*)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $\tau$ ,

$$\begin{aligned} T_* = \frac{T}{\omega_0^2} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (B_i + L_i) (\alpha'_i + 1)^2 + \\ & + N_1 (\alpha'_2 + 1) (\alpha'_3 + 1) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + \\ & + N_2 (\alpha'_3 + 1) (\alpha'_1 + 1) \cos(\alpha_3 - \alpha_1) + \\ & + N_3 (\alpha'_1 + 1) (\alpha'_2 + 1) \cos(\alpha_1 - \alpha_2); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} U_* = \frac{U}{\omega_0^2} = & \frac{3}{2} \sum_{i=1}^3 (C_i - A_i + L_i) \sin^2 \alpha_i + \\ & + 3(N_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + N_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 + N_3 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) - \\ & - N_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_3) - N_2 \cos(\alpha_3 - \alpha_1) - N_3 \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (8), (9) в (7), получаем

$$\begin{aligned} (B_1 + L_1) \alpha_1'' + N_3 \alpha_2'' \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + N_2 \alpha_3'' \cos(\alpha_3 - \alpha_1) + \\ + N_3 (\alpha_2' + 2) \alpha_2' \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - N_2 (\alpha_3' + 2) \alpha_3' \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + \\ + 3[(A_1 - C_1 - L_1) \sin \alpha_1 - N_3 \sin \alpha_2 - N_2 \sin \alpha_3] \cos \alpha_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B_2 + L_2) \alpha_2'' + N_1 \alpha_3'' \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + N_3 \alpha_1'' \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ + N_1 (\alpha_3' + 2) \alpha_3' \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - N_3 (\alpha_1' + 2) \alpha_1' \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ + 3[(A_2 - C_2 - L_2) \sin \alpha_2 - N_1 \sin \alpha_3 - N_3 \sin \alpha_1] \cos \alpha_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (B_3 + L_3)\alpha_3'' + N_2\alpha_1''\cos(\alpha_3 - \alpha_1) + N_1\alpha_2''\cos(\alpha_2 - \alpha_3) + \\
& + N_2(\alpha_1' + 2)\alpha_1'\sin(\alpha_3 - \alpha_1) - N_1(\alpha_2' + 2)\alpha_2'\sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \\
& + 3[(A_3 - C_3 - L_3)\sin\alpha_3 - N_2\sin\alpha_1 - N_1\sin\alpha_2]\cos\alpha_3 = 0.
\end{aligned}$$

Запишем уравнения равновесий системы

$$\begin{aligned}
& [(A_1 - C_1 - L_1)\sin\alpha_{10} - N_3\sin\alpha_{20} - N_2\sin\alpha_{30}]\cos\alpha_{10} = 0, \\
& [-N_3\sin\alpha_{10} + (A_2 - C_2 - L_2)\sin\alpha_{20} - N_1\sin\alpha_{30}]\cos\alpha_{20} = 0, \quad (10) \\
& [-N_2\sin\alpha_{10} - N_1\sin\alpha_{20} + (A_3 - C_3 - L_3)\sin\alpha_{30}]\cos\alpha_{30} = 0
\end{aligned}$$

и определим все удовлетворяющие им значения углов  $\alpha_{i0}$ . При этом будем считать, что  $\alpha_{i0} \in [-\pi, \pi]$ . Анализ системы (10) приводит к следующим восьми группам решений:

$$\cos\alpha_{10} = \cos\alpha_{20} = \cos\alpha_{30} = 0; \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
& \cos\alpha_{10} = 0, \\
& \cos\alpha_{20} = 0, \quad N_2\sin\alpha_{10} + N_1\sin\alpha_{20} - (A_3 - C_3 - L_3)\sin\alpha_{30} = 0; \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cos\alpha_{20} = 0, \quad (A_1 - C_1 - L_1)\sin\alpha_{10} - N_3\sin\alpha_{20} - N_2\sin\alpha_{30} = 0, \\
& \cos\alpha_{30} = 0; \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cos\alpha_{10} = 0, \quad N_3\sin\alpha_{10} - (A_2 - C_2 - L_2)\sin\alpha_{20} + N_1\sin\alpha_{30} = 0, \\
& \cos\alpha_{30} = 0; \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cos\alpha_{10} = 0, \quad N_3\sin\alpha_{10} - (A_2 - C_2 - L_2)\sin\alpha_{20} + N_1\sin\alpha_{30} = 0, \\
& \quad N_2\sin\alpha_{10} + N_1\sin\alpha_{20} - (A_3 - C_3 - L_3)\sin\alpha_{30} = 0; \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cos\alpha_{20} = 0, \quad (A_1 - C_1 - L_1)\sin\alpha_{10} - N_3\sin\alpha_{20} - N_2\sin\alpha_{30} = 0, \\
& \quad N_2\sin\alpha_{10} + N_1\sin\alpha_{20} - (A_3 - C_3 - L_3)\sin\alpha_{30} = 0; \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cos\alpha_{30} = 0, \quad (A_1 - C_1 - L_1)\sin\alpha_{10} - N_3\sin\alpha_{20} - N_2\sin\alpha_{30} = 0, \\
& \quad N_3\sin\alpha_{10} - (A_2 - C_2 - L_2)\sin\alpha_{20} + N_1\sin\alpha_{30} = 0; \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A_1 - C_1 - L_1) \sin \alpha_{10} - N_3 \sin \alpha_{20} - N_2 \sin \alpha_{30} &= 0, \\
N_3 \sin \alpha_{10} - (A_2 - C_2 - L_2) \sin \alpha_{20} + N_1 \sin \alpha_{30} &= 0, \\
N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20} - (A_3 - C_3 - L_3) \sin \alpha_{30} &= 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Проанализируем каждый из случаев (11)-(18). Система (11) всегда имеет 8 решений

$$\alpha_{10} = \pm \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_{20} = \pm \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_{30} = \pm \frac{\pi}{2}. \tag{19}$$

Система (12) имеет решения, отличные от (19), при

$$\left| \frac{N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20}}{A_3 - C_3 - L_3} \right| < 1,$$

где  $\sin \alpha_{10} = \pm 1$ ,  $\sin \alpha_{20} = \pm 1$ . При этом если

$$\left| \frac{N_2 + N_1}{A_3 - C_3 - L_3} \right| < 1, \tag{20}$$

то существуют 4 решения

$$\alpha_{10} = \alpha_{20} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{30} = \text{sign}(\alpha_{10}) \left[ \frac{\pi}{2} \pm \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{N_2 + N_1}{A_3 - C_3 - L_3} \right) \right]; \tag{21}$$

если

$$\left| \frac{N_2 - N_1}{A_3 - C_3 - L_3} \right| < 1, \tag{22}$$

то существуют 4 решения

$$\alpha_{10} = -\alpha_{20} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{30} = \text{sign}(\alpha_{10}) \left[ \frac{\pi}{2} \pm \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{N_2 - N_1}{A_3 - C_3 - L_3} \right) \right]. \tag{23}$$

Если одновременно выполнены условия (20) и (22), то система (12) имеет 8 решений (21) и (23).

Системы (13) и (14) рассматриваются аналогично.

Систему (15) перепишем в виде

$$\begin{aligned}\cos \alpha_{10} &= 0, \\ (A_2 - C_2 - L_2) \sin \alpha_{20} - N_1 \sin \alpha_{30} &= N_3 \sin \alpha_{10}, \\ -N_1 \sin \alpha_{20} + (A_3 - C_3 - L_3) \sin \alpha_{30} &= N_2 \sin \alpha_{10}.\end{aligned}$$

Если

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_2 - C_2 - L_2 & -N_1 \\ -N_1 & A_3 - C_3 - L_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

имеем

$$\sin \alpha_{20} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \sin \alpha_{10}, \quad \sin \alpha_{30} = \frac{\Delta_3}{\Delta} \sin \alpha_{10}.$$

Здесь

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} N_3 & -N_1 \\ N_2 & A_3 - C_3 - L_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_2 - C_2 - L_2 & N_3 \\ -N_1 & N_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \sin \alpha_{10} = \pm 1.$$

Если

$$|\Delta_2| < |\Delta|, \quad |\Delta_3| < |\Delta|,$$

то существует 8 решений  $(\alpha_{10}^{(i)}, \alpha_{20}^{(j)}, \alpha_{30}^{(k)})$ ,  $i, j, k = 1, 2$ , где

$$\begin{aligned}\alpha_{10}^{(1,2)} &= \pm \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{s0}^{(1,2)} = \text{sign}(\alpha_{10}) \left[ \frac{\pi}{2} \pm \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_s^* \right) \right], \quad s = 2, 3; \\ \alpha_2^* &= \arcsin \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \alpha_3^* = \arcsin \frac{\Delta_3}{\Delta}.\end{aligned}$$

Особый случай  $\Delta = 0$  здесь не рассматривается. Заметим только, что в зависимости от соотношения между параметрами системы уравнения (15) при этом либо имеют однопараметрическое семейство решений, либо вообще не имеют решений.

Системы (16) и (17) рассматриваются аналогично.

Система (18) при условии

$$\begin{vmatrix} A_1 - C_1 - L_1 & -N_3 & -N_2 \\ -N_3 & A_2 - C_2 - L_2 & -N_1 \\ -N_2 & -N_1 & A_3 - C_3 - L_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

эквивалентна системе

$$\sin \alpha_{10} = \sin \alpha_{20} = \sin \alpha_{30} = 0,$$

которая всегда имеет 8 решений

$$\alpha_{10} = 0, \pi; \quad \alpha_{20} = 0, \pi; \quad \alpha_{30} = 0, \pi.$$

### Достаточные условия устойчивости

Считая  $\bar{\alpha}_i = \alpha_i - \alpha_{i0}$ ,  $\bar{\beta}_i = \beta_i - \beta_{i0}$ ,  $\bar{\gamma}_i = \gamma_i - \gamma_{i0}$  и  $\bar{p}_i, \bar{q}_i, \bar{r}_i$  малыми, разложим  $T_2$  и  $T_0 + U$  в окрестности решения  $\alpha_i = \alpha_{i0} = \text{const}$ ,  $\beta_{i0} = \gamma_{i0} = 0$ . Тогда с точностью до малых второго порядка после несложных преобразований приходим к выражению

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (A_i \dot{\gamma}_i^2 + B_i \dot{\alpha}_i^2 + C_i \dot{\beta}_i^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \left[ \left( \sum_{k=1}^3 n_{ik} \dot{\beta}_k \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^3 n_{ik} \dot{\alpha}_k \sin \alpha_{k0} \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^3 n_{ik} \dot{\alpha}_k \cos \alpha_{k0} \right)^2 \right],$$

т.е.  $T_2$  является положительно определенной квадратичной формой  $\dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_i, \dot{\gamma}_i$ .

При разложении  $T_0 + U$  члены нулевого порядка можно не учитывать, а члены первого порядка сокращаются в силу уравнений равновесий (10). В результате, с точностью до малых второго порядка получаем

$$-\frac{2}{\omega_0^2} (T_0 + U) = \sum_{i,j=1}^9 S_{ij} x_i x_j,$$

где  $x_i = \bar{\alpha}_i$ ,  $x_{i+3} = \bar{\beta}_i$ ,  $x_{i+6} = \bar{\gamma}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;

$$\|S_{ij}\| = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & S_{46} & S_{47} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & S_{56} & 0 & S_{58} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{46} & S_{56} & S_{66} & 0 & 0 & S_{69} \\ 0 & 0 & 0 & S_{47} & 0 & 0 & S_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{58} & 0 & 0 & S_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{69} & 0 & 0 & S_{99} \end{vmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} S_{11} &= 3[(A_1 - C_1 - L_1)\cos 2\alpha_{10} + (N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30})\sin \alpha_{10}], \\ S_{22} &= 3[(A_2 - C_2 - L_2)\cos 2\alpha_{20} + (N_1 \sin \alpha_{30} + N_3 \sin \alpha_{10})\sin \alpha_{20}], \\ S_{33} &= 3[(A_3 - C_3 - L_3)\cos 2\alpha_{30} + (N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20})\sin \alpha_{30}], \\ S_{12} &= -3N_3 \cos \alpha_{10} \cos \alpha_{20}, \\ S_{23} &= -3N_1 \cos \alpha_{20} \cos \alpha_{30}, \\ S_{31} &= -3N_2 \cos \alpha_{30} \cos \alpha_{10}, \\ S_{44} &= (B_1 - A_1 + L_1)(3\sin^2 \alpha_{10} + 1) + (N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30})\sin \alpha_{10}, \\ S_{55} &= (B_2 - A_2 + L_2)(3\sin^2 \alpha_{20} + 1) + (N_1 \sin \alpha_{30} + N_3 \sin \alpha_{10})\sin \alpha_{20}, \\ S_{66} &= (B_3 - A_3 + L_3)(3\sin^2 \alpha_{30} + 1) + (N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20})\sin \alpha_{30}, \\ S_{45} &= N_3, \quad S_{46} = N_2, \quad S_{56} = N_1, \\ S_{47} &= 3(B_1 - C_1)\sin \alpha_{10} \cos \alpha_{10}, \\ S_{58} &= 3(B_2 - C_2)\sin \alpha_{20} \cos \alpha_{20}, \\ S_{69} &= 3(B_3 - C_3)\sin \alpha_{30} \cos \alpha_{30}, \\ S_{77} &= (B_1 - C_1)(3\cos^2 \alpha_{10} + 1), \\ S_{88} &= (B_2 - C_2)(3\cos^2 \alpha_{20} + 1), \\ S_{99} &= (B_3 - C_3)(3\cos^2 \alpha_{30} + 1). \end{aligned}$$

Достаточными условиями устойчивости решения  $\alpha_i = \alpha_{i0}$ ,  $\beta_i = \gamma_i = 0$  являются условия положительной определенности квадратичной формы  $S(x, x)$ . Таким образом, должны выполняться условия

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad \dots \quad D_9 > 0.$$

Здесь  $D_i$  - главные миноры матрицы  $\mathbf{S}$ . Учитывая, что

$$D_{i+3} = D_3 \Delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6,$$

где  $\Delta_i$  - главные миноры матрицы

$$\left\| \begin{array}{cccccc} S_{44} & S_{45} & S_{46} & S_{47} & 0 & 0 \\ S_{45} & S_{55} & S_{56} & 0 & S_{58} & 0 \\ S_{46} & S_{56} & S_{66} & 0 & 0 & S_{69} \\ S_{47} & 0 & 0 & S_{77} & 0 & 0 \\ 0 & S_{58} & 0 & 0 & S_{88} & 0 \\ 0 & 0 & S_{69} & 0 & 0 & S_{99} \end{array} \right\|,$$

окончательно достаточные условия устойчивости можно записать в виде

$$\begin{aligned} D_1 &= S_{11} > 0, \\ D_2 &= S_{11}S_{22} - S_{12}^2 > 0, \\ D_3 &= S_{11}S_{22}S_{33} + 2S_{12}S_{22}S_{31} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{31}^2 - S_{33}S_{12}^2 > 0, \\ \Delta_1 &= S_{44} > 0, \\ \Delta_2 &= S_{44}S_{55} - N_3^2 > 0, \\ \Delta_3 &= S_{44}S_{55}S_{66} + 2N_1N_2N_3 - S_{44}N_1^2 - S_{55}N_2^2 - S_{66}N_3^2 > 0, \\ \Delta_4 &= S_{77}\Delta_3 - S_{47}^2(S_{55}S_{66} - N_1^2) > 0, \\ \Delta_5 &= S_{88}\Delta_4 - S_{58}^2 \left[ S_{77}(S_{44}S_{66} - N_2^2) - S_{66}S_{47}^2 \right] > 0, \\ \Delta_6 &= S_{99}\Delta_5 - \\ &\quad - S_{69}^2 \left[ S_{77}S_{88}(S_{44}S_{55} - N_3^2) - S_{55}S_{88}S_{47}^2 - S_{58}^2(S_{44}S_{77} - S_{47}^2) \right] > 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Далее приведем выражения для отличных от нуля коэффициентов квадратичной формы  $\mathbf{S}$  и конкретный вид условий ее положительной определенности (24) для каждой из групп решений (11)-(18).

**Решения (11)**

Для группы решений

$$\cos \alpha_{10} = \cos \alpha_{20} = \cos \alpha_{30} = 0$$

ненулевые элементы квадратичной формы  $\mathbf{S}$  имеют следующий вид:

$$S_{11} = 3(A_1 - C_1 - L_1) + 3(N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30}) \sin \alpha_{10},$$

$$S_{22} = 3(A_2 - C_2 - L_2) + 3(N_1 \sin \alpha_{30} + N_3 \sin \alpha_{10}) \sin \alpha_{20},$$

$$S_{33} = 3(A_3 - C_3 - L_3) + 3(N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20}) \sin \alpha_{30},$$

$$S_{44} = 4(B_1 - A_1 + L_1) + (N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30}) \sin \alpha_{10},$$

$$S_{55} = 4(B_2 - A_2 + L_2) + (N_1 \sin \alpha_{30} + N_3 \sin \alpha_{10}) \sin \alpha_{20},$$

$$S_{66} = 4(B_3 - A_3 + L_3) + (N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20}) \sin \alpha_{30},$$

$$S_{45} = N_3,$$

$$S_{46} = N_2,$$

$$S_{56} = N_1,$$

$$S_{77} = B_1 - C_1,$$

$$S_{88} = B_2 - C_2,$$

$$S_{99} = B_3 - C_3.$$

Тогда для достаточных условий устойчивости (24) получаем

$$(A_1 - C_1 - L_1) + (N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30}) \sin \alpha_{10} > 0,$$

$$(A_2 - C_2 - L_2) + (N_1 \sin \alpha_{30} + N_3 \sin \alpha_{10}) \sin \alpha_{20} > 0,$$

$$(A_3 - C_3 - L_3) + (N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20}) \sin \alpha_{30} > 0,$$

$$4(B_1 - A_1 + L_1) + (N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30}) \sin \alpha_{10} > 0,$$

$$S_{44} S_{55} - N_3^2 > 0,$$

$$S_{44} S_{55} S_{66} + 2N_1 N_2 N_3 - S_{44} N_1^2 - S_{55} N_2^2 - S_{66} N_3^2 > 0,$$

$$B_1 - C_1 > 0,$$

$$B_2 - C_2 > 0,$$

$$B_3 - C_3 > 0.$$

**Решения (12)**

Рассмотрим теперь группу решений

$$\cos \alpha_{10} = 0,$$

$$\cos \alpha_{20} = 0, \quad N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20} - (A_3 - C_3 - L_3) \sin \alpha_{30} = 0.$$

Имеем

$$S_{11} = 3(A_1 - C_1 - L_1) + 3(N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30}) \sin \alpha_{10},$$

$$S_{22} = 3(A_2 - C_2 - L_2) + 3(N_1 \sin \alpha_{30} + N_3 \sin \alpha_{10}) \sin \alpha_{20},$$

$$S_{33} = 3(A_3 - C_3 - L_3) \cos 2\alpha_{30} + 3(N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20}) \sin \alpha_{30},$$

$$S_{44} = 4(B_1 - A_1 + L_1) + (N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30}) \sin \alpha_{10},$$

$$S_{55} = 4(B_2 - A_2 + L_2) + (N_1 \sin \alpha_{30} + N_3 \sin \alpha_{10}) \sin \alpha_{20},$$

$$S_{66} = (B_3 - A_3 + L_3)(3 \sin^2 \alpha_{30} + 1) + (N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20}) \sin \alpha_{30},$$

$$S_{45} = N_3, \quad S_{46} = N_2, \quad S_{56} = N_1,$$

$$S_{69} = 3(B_3 - C_3) \sin \alpha_{30} \cos \alpha_{30},$$

$$S_{77} = B_1 - C_1,$$

$$S_{88} = B_2 - C_2,$$

$$S_{99} = (B_3 - C_3)(3 \cos^2 \alpha_{30} + 1).$$

Достаточные условия устойчивости:

$$(C_1 - A_1 + L_1) + (N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30}) \sin \alpha_{10} > 0,$$

$$(C_2 - A_2 + L_2) + (N_1 \sin \alpha_{30} + N_3 \sin \alpha_{10}) \sin \alpha_{20} > 0,$$

$$(A_3 - C_3 - L_3) \cos 2\alpha_{30} + (N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20}) \sin \alpha_{30} > 0,$$

$$4(B_1 - A_1 + L_1) + (N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30}) \sin \alpha_{10} > 0,$$

$$S_{44} S_{55} - N_3^2 > 0,$$

$$S_{44} S_{55} S_{66} + 2N_1 N_2 N_3 - S_{44} N_1^2 - S_{55} N_2^2 - S_{66} N_3^2 > 0,$$

$$B_1 - C_1 > 0,$$

$$B_2 - C_2 > 0,$$

$$S_{66} S_{99} - S_{69}^2 > 0.$$

Решения (13), (14) рассматриваются аналогично.

### Решения (15)

$$\begin{aligned}\cos \alpha_{10} = 0, \quad N_3 \sin \alpha_{10} - (A_2 - C_2 - L_2) \sin \alpha_{20} + N_1 \sin \alpha_{30} &= 0, \\ N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20} - (A_3 - C_3 - L_3) \sin \alpha_{30} &= 0.\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}S_{11} &= 3(C_1 - A_1 + L_1) + 3(N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30}) \sin \alpha_{10}, \\ S_{22} &= 3[(A_2 - C_2 - L_2) \cos 2\alpha_{20} + (N_1 \sin \alpha_{30} + N_3 \sin \alpha_{10}) \sin \alpha_{20}], \\ S_{33} &= 3[(A_3 - C_3 - L_3) \cos 2\alpha_{30} + (N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20}) \sin \alpha_{30}], \\ S_{23} &= -3N_1 \cos \alpha_{20} \cos \alpha_{30}, \\ S_{44} &= 4(B_1 - A_1 + L_1) + (N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30}) \sin \alpha_{10}, \\ S_{55} &= (B_2 - A_2 + L_2)(3 \sin^2 \alpha_{20} + 1) + (N_1 \sin \alpha_{30} + N_3 \sin \alpha_{10}) \sin \alpha_{20}, \\ S_{66} &= (B_3 - A_3 + L_3)(3 \sin^2 \alpha_{30} + 1) + (N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20}) \sin \alpha_{30}, \\ S_{45} &= N_3, \\ S_{56} &= N_1, \\ S_{46} &= N_2, \\ S_{58} &= 3(B_2 - A_2) \sin \alpha_{20} \cos \alpha_{20}, \\ S_{69} &= 3(B_3 - A_3) \sin \alpha_{30} \cos \alpha_{30}, \\ S_{77} &= B_1 - C_1, \\ S_{88} &= (B_2 - C_2)(3 \cos^2 \alpha_{20} + 1), \\ S_{99} &= (B_3 - C_3)(3 \cos^2 \alpha_{30} + 1).\end{aligned}$$

Достаточные условия устойчивости:

$$\begin{aligned}(C_1 - A_1 + L_1) + (N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30}) \sin \alpha_{10} &> 0, \\ (C_2 - A_2 + L_2) \cos 2\alpha_{20} + (N_1 \sin \alpha_{30} + N_3 \sin \alpha_{10}) \sin \alpha_{20} &> 0,\end{aligned}$$

$$S_{22}S_{33} - S_{23}^2 > 0,$$

$$4(B_1 - A_1 + L_1) + (N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30}) \sin \alpha_{10} > 0,$$

$$S_{44}S_{55} - N_3^2 > 0,$$

$$S_{44}S_{55}S_{66} + 2N_1N_2N_3 - S_{44}N_1^2 - S_{55}N_2^2 - S_{66}N_3^2 > 0,$$

$$B_1 - C_1 > 0,$$

$$(B_2 - C_2)(3\cos^2 \alpha_{20} + 1) > 0,$$

$$(B_3 - C_3)(3\cos^2 \alpha_{30} + 1) > 0.$$

Решения (16), (17) рассматриваются аналогично.

### **Решения (18)**

$$\sin \alpha_{10} = \sin \alpha_{20} = \sin \alpha_{30} = 0.$$

Имеем

$$S_{11} = 3(A_1 - C_1 - L_1),$$

$$S_{22} = 3(A_2 - C_2 - L_2),$$

$$S_{33} = 3(A_3 - C_3 - L_3),$$

$$S_{12} = -3N_3 \cos \alpha_{10} \cos \alpha_{20},$$

$$S_{23} = -3N_1 \cos \alpha_{20} \cos \alpha_{30},$$

$$S_{31} = -3N_2 \cos \alpha_{30} \cos \alpha_{10},$$

$$S_{44} = B_1 - A_1 + L_1,$$

$$S_{55} = B_2 - A_2 + L_2,$$

$$S_{66} = B_3 - A_3 + L_3,$$

$$S_{45} = N_3,$$

$$S_{46} = N_2,$$

$$S_{56} = N_1,$$

$$S_{77} = 4(B_1 - C_1),$$

$$S_{88} = 4(B_2 - C_2),$$

$$S_{99} = 4(B_3 - C_3).$$

Достаточные условия устойчивости:

$$A_1 - C_1 - L_1 > 0,$$

$$(A_1 - C_1 - L_1)(A_2 - C_2 - L_2) - N_3^2 > 0,$$

$$(A_1 - C_1 - L_1)(A_2 - C_2 - L_2)(A_3 - C_3 - L_3) - 2N_1N_2N_3 - \\ - (A_1 - C_1 - L_1)N_1^2 - (A_2 - C_2 - L_2)N_2^2 - (A_3 - C_3 - L_3)N_3^2 > 0,$$

$$B_1 - A_1 + L_1 > 0,$$

$$(B_1 - A_1 + L_1)(B_2 - A_2 + L_2) - N_3^2 > 0,$$

$$S_{44}S_{55}S_{66} + 2N_1N_2N_3 - S_{44}N_1^2 - S_{55}N_2^2 - S_{66}N_3^2 > 0,$$

$$B_1 - C_1 > 0,$$

$$B_2 - C_2 > 0,$$

$$B_3 - C_3 > 0.$$

Заметим, что полученные результаты позволяют легко перейти к рассмотрению связки двух тел. Для этого среднее тело системы ( $m_3$ ) заменяется на безынерционную математическую точку, т.е. предполагается, что  $m_3 = 0$ ,  $A_3 = B_3 = C_3 = 0$ ,  $s_1 = s_2 = 0$ . Тогда  $N_1 = N_2 = L_3 = 0$ ,  $L_1 = Ma_1^2$ ,  $L_2 = Ma_2^2$ ,  $N_3 = -Ma_1a_2$ ,  $M = m_1m_2/(m_1 + m_2)$  и уравнения равновесий (10) принимают известный вид (см., например, [3])

$$\left[ (A_1 - C_1 - Ma_1^2) \sin \alpha_{10} + Ma_1a_2 \sin \alpha_{20} \right] \cos \alpha_{10} = 0,$$

$$\left[ Ma_1a_2 \sin \alpha_{10} + (A_2 - C_2 - Ma_2^2) \sin \alpha_{20} \right] \cos \alpha_{20} = 0.$$

## Пример

Рассмотрим систему из трех тонких однородных стержней (рис. 3).

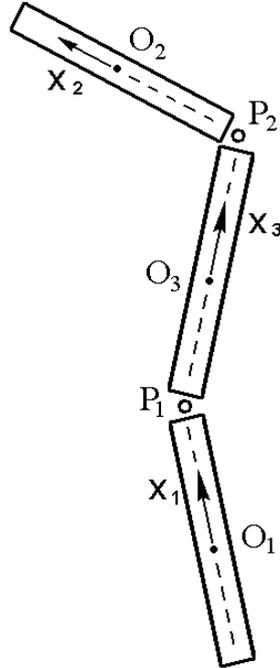


Рис. 3. Система трех тонких стержней

Пусть

$$m_1 = m_2 = m_3 = \frac{m}{3}, \quad a_1 = -a_2 = -s_1 = s_2 = a.$$

Тогда

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0, \quad B_1 = B_2 = B_3 = \frac{ma^2}{9}, \quad C_1 = C_2 = C_3 = \frac{ma^2}{9},$$

$$L_1 = L_2 = \frac{2ma^2}{9}, \quad L_3 = \frac{2ma^2}{3},$$

$$N_1 = N_2 = \frac{ma^2}{3}, \quad N_3 = \frac{ma^2}{9},$$

$$A_1 - C_1 - L_1 = A_2 - C_2 - L_2 = -\frac{ma^2}{3}, \quad A_3 - C_3 - L_3 = -\frac{7ma^2}{9}.$$

Группа решений (11) определяет 8 положений равновесия

$$\alpha_{10} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{20} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{30} = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Группа решений (18) определяет 8 положений равновесия

$$\alpha_{10} = 0, \pi; \quad \alpha_{20} = 0, \pi; \quad \alpha_{30} = 0, \pi.$$

Группа решений (12) определяет 8 равновесий

$$\alpha_{10} = \alpha_{20} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \sin \alpha_{30} = -\frac{6}{7} \operatorname{sign}(\alpha_{10});$$

$$\alpha_{10} = -\alpha_{20} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{30} = 0, \pi.$$

Группа решений (13) определяет 4 равновесия

$$\alpha_{20} = -\alpha_{30} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \sin \alpha_{10} = \frac{2}{3} \operatorname{sign}(\alpha_{20}).$$

Группа решений (14) определяет 4 равновесия

$$\alpha_{10} = -\alpha_{30} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \sin \alpha_{20} = \frac{2}{3} \operatorname{sign}(\alpha_{10}).$$

Группа решений (15) определяет 8 равновесий

$$\alpha_{10} = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \alpha_{20} = \frac{1}{6}, \quad \sin \alpha_{30} = -\frac{1}{2};$$

$$\alpha_{10} = -\frac{\pi}{2}, \quad \sin \alpha_{20} = -\frac{1}{6}, \quad \sin \alpha_{30} = \frac{1}{2}.$$

Группа решений (16) определяет 8 равновесий

$$\sin \alpha_{10} = \frac{1}{6}, \quad \alpha_{20} = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \alpha_{30} = -\frac{1}{2};$$

$$\sin \alpha_{10} = -\frac{1}{6}, \quad \alpha_{20} = -\frac{\pi}{2}, \quad \sin \alpha_{30} = \frac{1}{2}.$$

Группа решений (17) определяет 8 равновесий

$$\sin \alpha_{10} = \sin \alpha_{20} = -\frac{3}{4}, \quad \alpha_{30} = \frac{\pi}{2};$$

$$\sin \alpha_{10} = \sin \alpha_{20} = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{30} = -\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, общее число решений равно 56. Однако, принимая во внимание, что система состоит из одинаковых тел, равновесные конфигурации, в которых первое и второе тела (крайние стержни) просто меняются местами, фактически совпадают. Поэтому существенно различных решений значительно меньше. Все возможные типы равновесных конфигураций системы показаны на

рис. 4. Что касается устойчивости, то ни для одной из возможных равновесных конфигураций достаточные условия не выполняются, поскольку нарушаются условия типа  $B - C > 0$ .

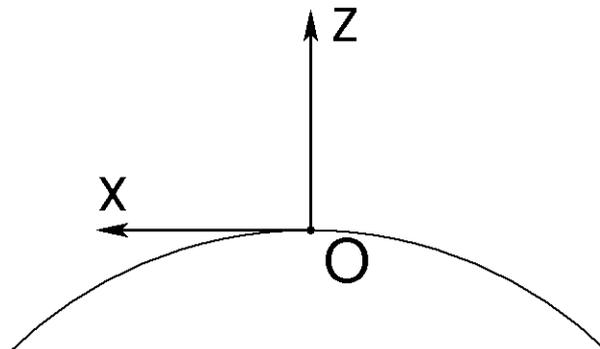
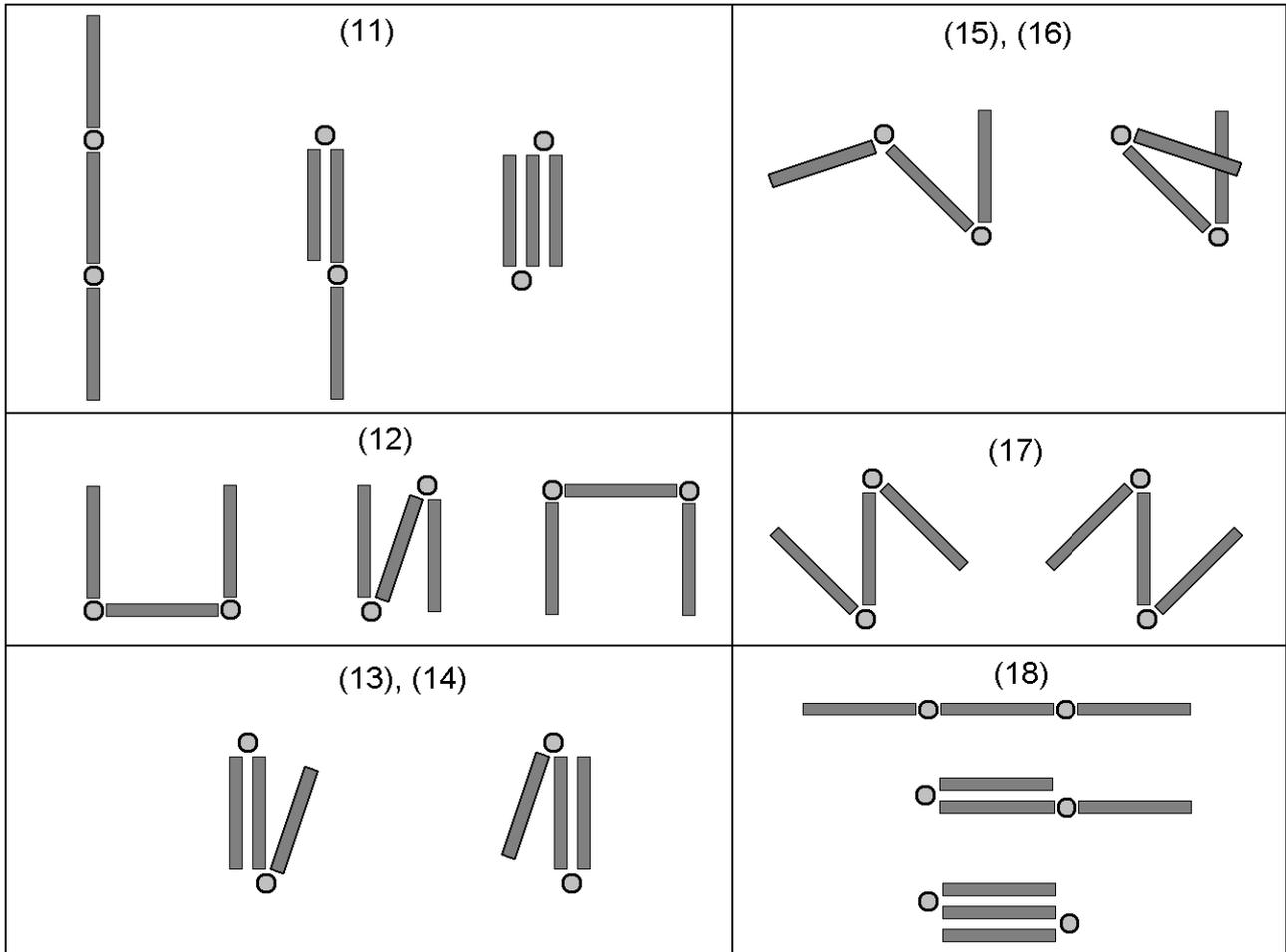


Рис. 4. Равновесные конфигурации системы трех стержней в плоскости круговой орбиты.

## Библиографический список

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука. – 1965. – 416 с.
2. Сарычев В.А. Положения относительного равновесия двух тел, соединенных сферическим шарниром, на круговой орбите // Космические исследования. – 1967. – Т. 5. – № 3. – С. 360-364.
3. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Серия «Исследование космического пространства». – М.: ВИНТИ. – 1978. – Т. 11. – 224 с.
4. Sarychev V.A. Equilibria of a double pendulum in a circular orbit // Acta Astronautica. – 1999. – Vol. 44. – № 1. – P. 63-65.
5. Сарычев В.А. Положения равновесия системы двух соединенных сферическим шарниром осесимметричных тел на круговой орбите // Космические исследования. – 1999. – Т. 37. – № 2. – С. 176-181.
6. Сарычев В.А. Положения равновесия маятника в спутнике // Космические исследования. – 2000. – Т. 38. – № 1. – С. 71-77.
7. Сарычев В.А. Положения равновесия системы спутник-несимметричный маятник на круговой орбите // Космические исследования. – 2000. – Т. 38. – № 4. – С. 414-422.
8. Guerman A.D. Equilibria of an n-Link Chain in a Circular Orbit // AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. – Paper AAS 02-169. – San Antonio, Texas. – 2002.
9. Lavagna M., Finzi A.E. Equilibrium analysis of a large multi-hinged space system // Acta Astronautica. – 2003. – Vol. 53. – P. 9-20.
10. Lavagna M., Finzi A.E. Large multi-hinged space systems: a parametric stability analysis // Acta Astronautica. – 2004. – Vol. 54. – P. 295-305.