



Малинецкий Г.Г., Фаллер Д.С.

Сценарии перехода к хаосу в двухмодовой системе для моделей «реакция-диффузия»

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Малинецкий Г.Г., Фаллер Д.С. Сценарии перехода к хаосу в двухмодовой системе для моделей «реакция-диффузия» // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 67. 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-67>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Г.Г. Малинецкий, Д.С. Фаллер

**Сценарии перехода к хаосу
в двухмодовой системе для моделей
«реакция-диффузия»**

Москва — 2013

Малинецкий Г.Г., Фаллер Д.С.

Сценарии перехода к хаосу в двухмодовой системе для моделей «реакция-диффузия»

В работе рассматривается появление хаотических аттракторов в системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в теории моделей «реакция-диффузия». Исследуются динамика соответствующих одномерных и двумерных отображений и ляпуновские показатели возникающих аттракторов. Показано, что переход к хаосу происходит по нетрадиционному сценарию, связанному с многократным рождением и исчезновением хаотических режимов, который ранее был изучен для одномерных отображений с острой вершиной и квадратичным минимумом. С помощью численного анализа были исследованы характерные особенности системы: наличие областей бистабильности и гиперболичности, кризис хаотических аттракторов

Ключевые слова: нелинейная динамика, двухмодовая система, модели «реакция-диффузия», бифуркации, самоподобие, «каскад каскадов», кризис аттрактора, эргодичность, бистабильность

Malinetsky G., Faller D.

Transition to chaos in the two-mode system for «reaction-diffusion» models

The article discusses the emergence of chaotic attractors in the system of three ordinary differential equations arising in the theory of «reaction-diffusion» models. The dynamics of the corresponding one- and two-dimensional maps and Lyapunov exponents of such attractors are studied. It is shown that the transition to chaos is in accordance with a non-traditional scenario of repeated birth and disappearance of chaotic regimes, which had previously been studied for one-dimensional maps with a sharp apex and a quadratic minimum. Some characteristic features of the system – zones of bistability and hyperbolicity, the crisis of chaotic attractors – are studied by means of numerical analysis

Key words: nonlinear dynamics, two-mode system, «reaction-diffusion» models, bifurcation, self-similarity, «cascade cascades», attractor crisis, ergodicity, bistability

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 11-01-00887 и № 13-01-00617

Введение

В настоящее время одними из наиболее популярных классов нелинейных математических моделей являются системы «реакция-диффузия» (см., например, [1-3])

$$\begin{cases} X_t = D_1 \Delta X + f_1(X, Y, \lambda), \\ Y_t = D_2 \Delta Y + f_2(X, Y, \lambda), \end{cases} \quad (1)$$

где $\vec{r}$ и t – пространственная и временная координаты; $X(\vec{r}, t)$ и $Y(\vec{r}, t)$ – концентрации реагирующих веществ; $f_1(X, Y, \lambda)$ и $f_2(X, Y, \lambda)$ – нелинейные функции, определяющие кинетику их взаимодействия; D_1 и D_2 – соответствующие коэффициенты диффузии; Δ – оператор Лапласа. Впервые модель подобного вида была предложена в работе А. Тьюринга [4]; на сегодняшний день этим системам и их многочисленным приложениям посвящено большое количество работ.

В соответствии с исследовательской программой А. Пуанкаре одним из наиболее интересных направлений изучения нелинейных систем является анализ бифуркаций и универсальных описаний изучаемых объектов в окрестностях точек бифуркации. Этот подход был применен к системам вида (1), для которых типичными являются бифуркация Андронова-Хопфа (бифуркация рождения предельного цикла) и бифуркация Тьюринга (диффузионная неустойчивость). Универсальное описание связано с наличием малого параметра $\varepsilon \approx \sqrt{\lambda - \lambda_0}$ и возможностью перехода к медленным переменным $\vec{R} = \varepsilon \vec{r}$ и $T = \varepsilon^2 t$. В простейшем одномерном (и наиболее типичном) случае это приводит к следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} W_t &= (\pm 1 + ic_0)W + (1 + ic_1)W_{rr} - (1 + ic_2)|W|^2 W, \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0, \\ W_r(0, t) &= W_r(l, t) = 0, \quad W(r, 0) = W_0(r), \end{aligned} \quad (2)$$

где $W = u(r, t) + iv(r, t)$.

Вывод этого уравнения на физическом уровне строгости и анализ области его применимости был дан И. Курамoto и Т. Цузуки [5]. Более строгое обоснование было предложено С.А. Кащенко в построенной им теории квазинормальных форм, в рамках которой можно рассматривать уравнения с малой диффузией, пропорциональной ε [6]. Нетривиальные аттракторы уравнение имеет, когда выбран знак «плюс». От коэффициента c_0 можно избавиться заменой переменных. Краевая задача (2) была подробно исследована в случае небольших областей $l \leq \pi$ (см., например, [7]).

В отсутствие диффузионного члена одним из решений (2) является пространственно однородное решение $W = \exp(-ic_2 t + i\alpha)$, где α – некоторая действительная константа. Другими словами, решение стремится к

простейшему предельному циклу. В нелинейных системах типа «реакция-диффузия» и, в частности, в уравнении (2) диффузионные процессы приводят к появлению сложных, непериодических по времени турбулентных процессов, получивших название «химическая турбулентность» или «диффузионный хаос». В ряде работ (например, [8, 9]) уравнение (2) называют зависящим от времени уравнением Гинзбурга – Ландау (TDGL), поскольку аналогичная нелинейность используется в развитой ими теории фазовых переходов.

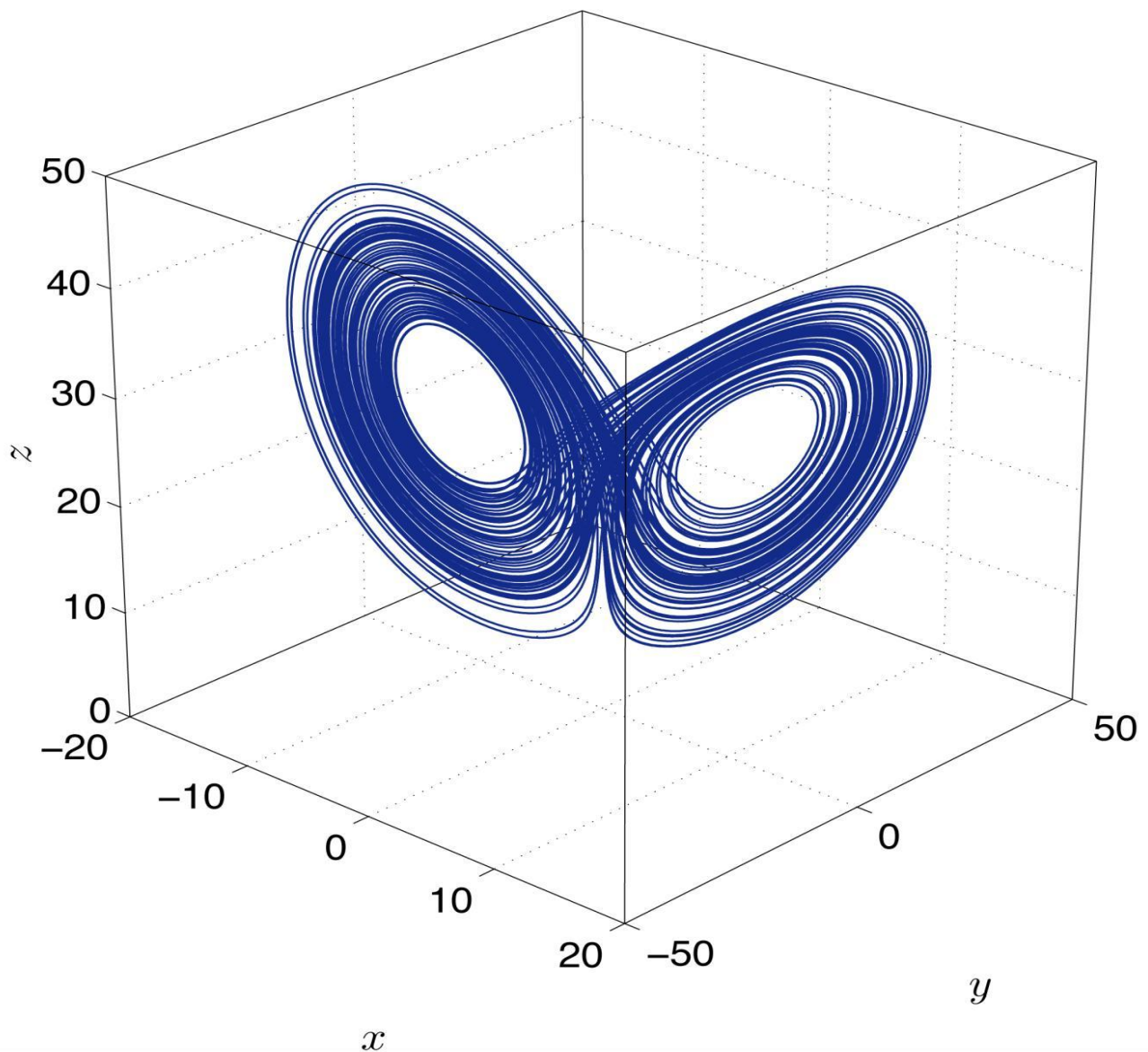


Рис. 1. (*Видео*) Аттрактор Лоренца. Траектория получена для начальных данных $(1,1,1)$ при значениях параметров $\sigma=10, b=8/3, r=28$

Вопрос о том, как возникает хаотичное, турбулентное движение из простейшего упорядоченного, ламинарного, имеет многолетнюю историю. Огромное значение здесь имели исследования Э. Лоренца, посвященные возникновению странного аттрактора в модели подогреваемой снизу жидкости [10], которая описывала конвективную неустойчивость, играющую важную роль в динамике атмосферы. Переход к хаосу в этой системе происходит в результате последовательности бифуркаций, которая может быть исследована при анализе простейших динамических систем с непрерывным или дискретным временем, зависящих от параметра. Соответствующая математическая конструкция, показывающая, как это может происходить, была предложена Д. Рюэлем и Ф. Такенсом [11].

С этого момента начали активно развиваться два направления, связанные с анализом турбулентных процессов. Первое рассматривает, в каком отношении уравнения, описывающие движение жидкости (уравнения Навье – Стокса), конвекцию, неустойчивости в плазме, химические реакции или другие процессы в нелинейных средах, находятся к конечномерным динамическим системам, зависящим от параметра. Второе изучает последовательность бифуркаций и количественные характеристики хаоса в простейших динамических системах.

В оригинальной работе Э. Лоренца рассматривалась система трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases}$$

Система обладает симметрией $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow z$, которая переводит эти уравнения в себя. Это делает ее нетипичной и существенно усложняет анализ возникающих аттракторов (рис. 1). Большие усилия были вложены в исследование сценариев возникновения хаоса при значениях параметров $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и различных значениях r .

При этом очень важную роль играло сечение Пуанкаре плоскостью $z = \text{const}$, которое порождало двумерное отображение

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n, \lambda), \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n, \lambda), \end{cases} \quad (3)$$

где x_n и y_n – координаты n -го пересечения траектории $(x(t), y(t), z(t))$ с выбранной плоскостью (когда траектория идет от меньших значений z к большему); λ – выбранный параметр (в случае системы Лоренца, как правило, r). Сильное сжатие вдоль одной из осей позволяет с высокой точностью перейти во многих случаях от двумерного отображения (3) к одномерному отображению $S_{n+1} = h(S_n, \lambda)$, $S = q(x, y)$.

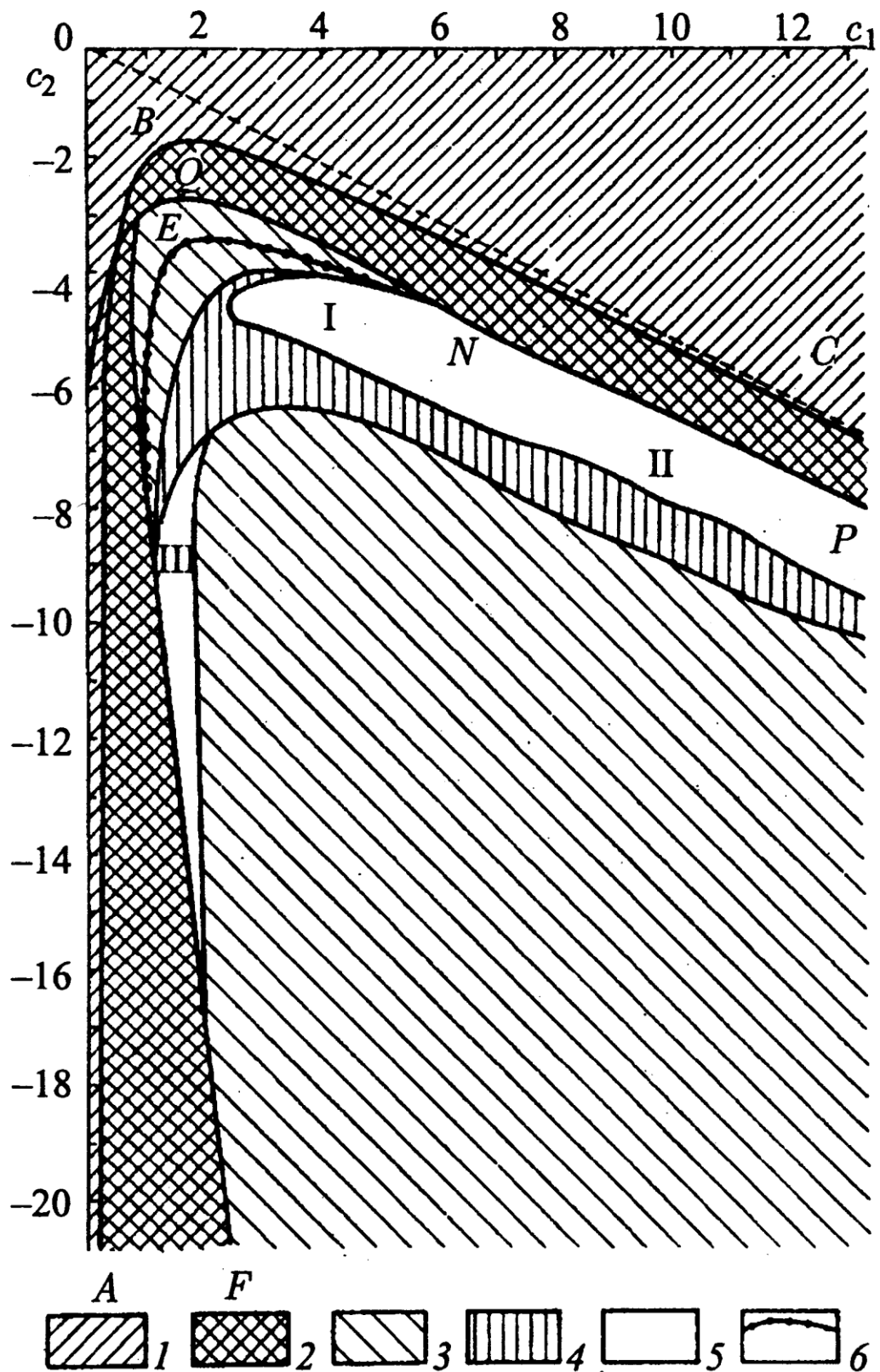


Рис. 2. Типы аттракторов системы (4) на плоскости (c_1, c_2) при $k=1$: 1 – решение $\xi=1, \eta=0$; 2 – особая точка с $\xi>0, \eta>0$; 3 – простой цикл S^1 ; 4 – цикл S^2 ; 5 – более сложные решения; 6 – линия, на которой происходит переход $S_0^1 \rightarrow S_1^1$; QNP – линия бифуркации Хопфа

Подобная стратегия была реализована для систем «реакция-диффузия» и, в частности, для уравнения (2). Полагая, что в решении при небольших $l \leq \pi$ существенны только две первые гармоники

$$W = u + iv = (x_0 + iy_0) + (x_1 + iy_1) \cos(kr), \quad k = \pi/l,$$

и пренебрегая остальными, получаем так называемую двухмодовую систему.

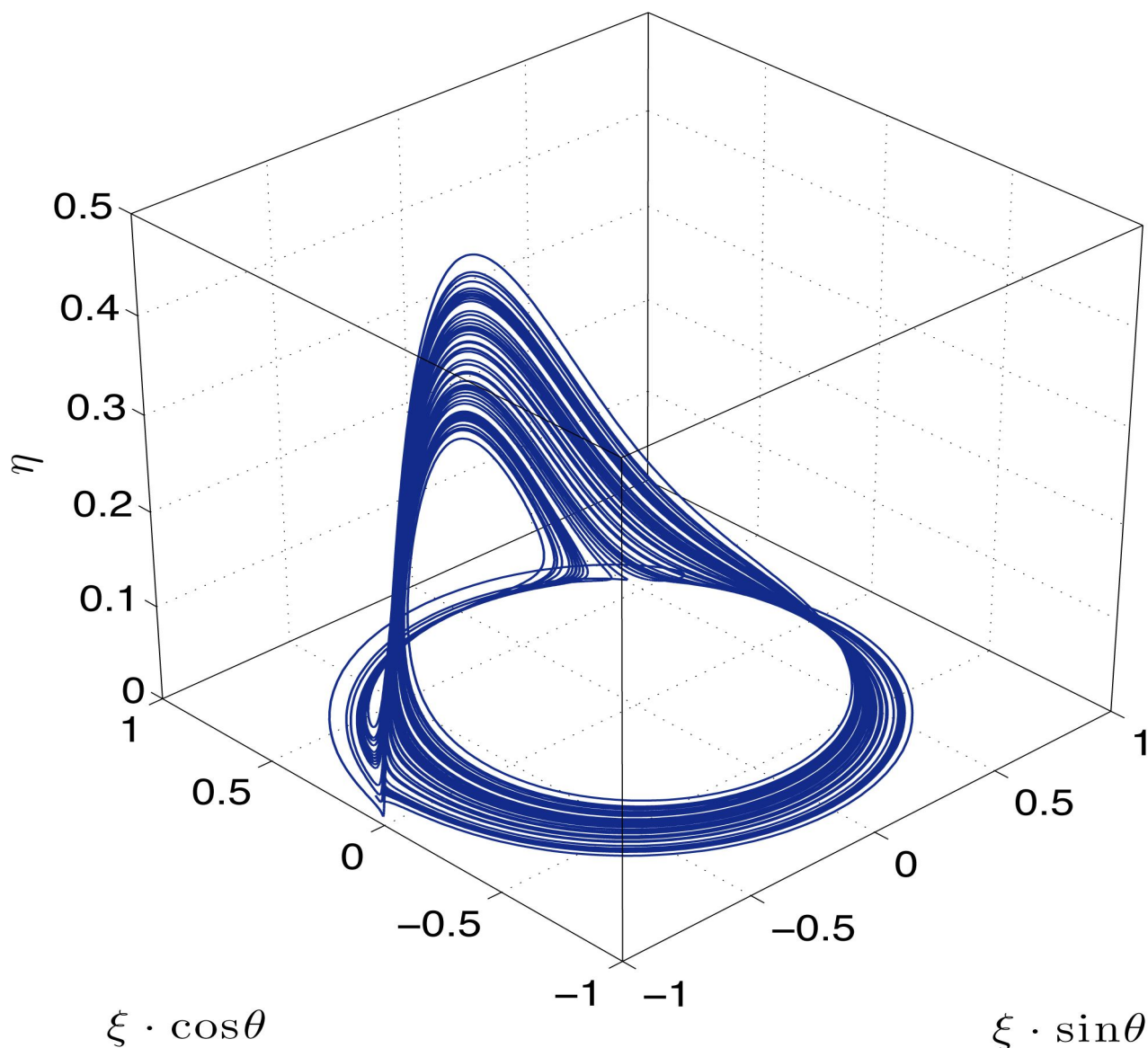


Рис. 3. (Видео) Хаотический аттрактор системы (4). Траектория получена для начальных данных $(0.5, 0.5, \pi)$ при значениях параметров $c_1 = 7, c_2 = -6, k = 1$

Ее можно существенно упростить, если положить

$$x_0 = \rho_0 \cos \varphi_0, y_0 = \rho_0 \sin \varphi_0, x_1 = \rho_1 \cos \varphi_1, y_1 = \rho_1 \sin \varphi_1, \xi = \rho_0^2, \eta = \rho_1^2, \theta = 2(\varphi_0 - \varphi_1).$$

Это приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{\xi} = 2\xi - 2\xi(\xi + \eta) - \xi\eta(\cos \theta + c_2 \sin \theta), \\ \dot{\eta} = 2\eta - 2\eta\left(\xi + \frac{3}{4}\eta\right) - 2\xi\eta(\cos \theta - c_2 \sin \theta) - 2k^2\eta, \\ \dot{\theta} = c_2\left(2\xi - \frac{1}{2}\eta\right) + \sin \theta(2\xi + \eta) + c_2 \cos \theta(2\xi - \eta) + 2c_1k^2. \end{cases} \quad (4)$$

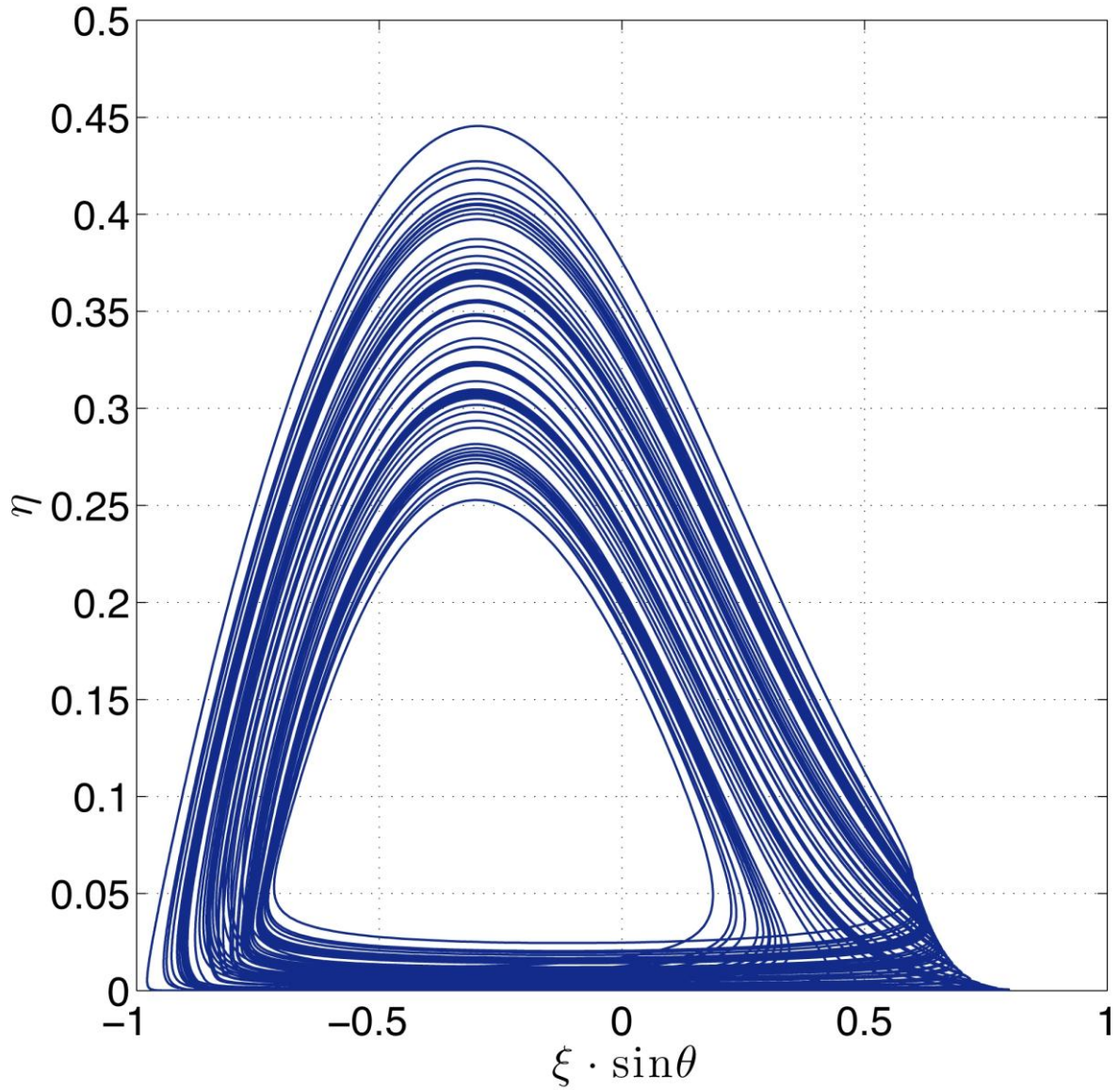


Рис. 4. Видовая проекция хаотического аттрактора системы (4),
 $c_1 = 7, c_2 = -6, k = 1$

Система (4) и будет объектом нашего исследования. Заметим, что возможность перейти от системы четырех дифференциальных уравнений к трем связана с симметрией исходной задачи $W \rightarrow We^{i\alpha}$, $\alpha = \text{const}$, которую сохраняют галеркинские системы.

В ряде работ, результаты которых были подытожены в монографии [7], представлена карта простейших аттракторов динамической системы на плоскости (c_1, c_2) при $k=1$ (рис.2). К простейшим аттракторам можно отнести особые точки и предельные циклы. Циклы удобно различать по числу оборотов n , которые они совершают вокруг некоторой центральной области, и по числу m , характеризующему изменение фазового угла θ . При этом соответствующий цикл обозначается S_m^n [7].

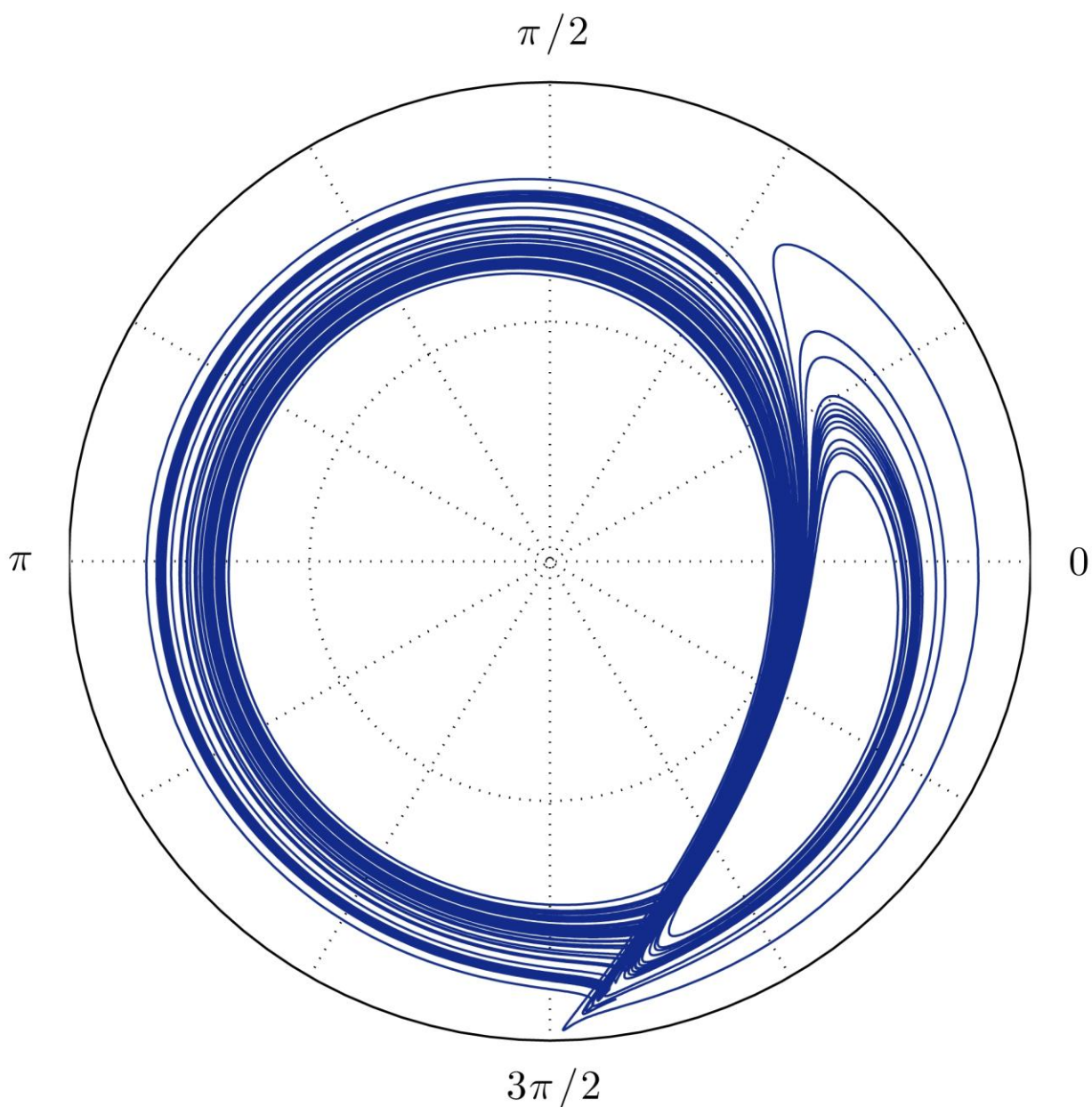


Рис. 5. Видовая проекция хаотического аттрактора системы (4),
 $c_1 = 7, c_2 = -6, k = 1$

Кроме того, был подробно изучен один хаотический аттрактор, определяющий асимптотику этой системы при $t \rightarrow \infty$ со значениями параметров $c_1 = 7$, $c_2 = -6$, $k = 1$ (рис. 3, 4, 5). Оказалось, что это решение обладает многими интересными геометрическими и эргодическими свойствами.

В настоящей работе на основе результатов численного анализа исследуется, как возникает и исчезает этот хаотический аттрактор при изменении параметров в пространстве (c_1, c_2, k) . Мы будем проводить однопараметрический анализ, фиксируя два параметра и варьируя третий.

Инструменты анализа и общая картина

Замечательным свойством динамического хаоса является чувствительность по отношению к начальным данным. Это свойство отражает экспоненциальное разбегание бесконечно близких траекторий. Из этого следует, что прогноз состояния системы при типичных начальных данных в среднем может быть дан на время, не превышающее некоторого значения T , называемого горизонтом прогноза.

Для исследования динамики близких траекторий используют т.н. ляпуновские показатели. Для этого наряду с исходной динамической системой

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}), \quad x = (x_1, \dots, x_p), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \quad (5)$$

рассматривают систему в вариациях

$$\dot{\vec{y}} = \frac{\partial \vec{f}(\vec{x}(t))}{\partial \vec{x}} \vec{y} = J(\vec{x}(t)) \vec{y},$$

где $J(\vec{x}(t))$ – матрица Якоби.

Для вычисления показателей Ляпунова рассчитывают p траекторий с начальными данными $\vec{y}^1(0), \dots, \vec{y}^p(0)$.

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\vec{y}(t)\|,$$

где $\vec{y}(0) = \vec{y}^1(0)$ – взятый наугад вектор. Далее,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\vec{S}(t)\|,$$

где $S(t)$ – площадь треугольника со сторонами, определяемыми векторами $\vec{y}^1(t)$, $\vec{y}^2(t)$ – $\|[\vec{y}^1(t) \times \vec{y}^2(t)]\|/2$ и т.д.; $\lambda_1 + \dots + \lambda_p$ определяется изменением соответствующего фазового объема $V^p(t)$ p -мерной пирамиды, образованной векторами $\vec{y}^1(t), \dots, \vec{y}^p(t)$.

Чтобы оценить выписанные пределы численно, необходимо периодически производить перенормировку векторов $\{\vec{y}^1(t), \dots, \vec{y}^p(t)\}$ (когда они становятся слишком большими, теряется точность) и их ортогонализацию (иначе все векторы $\vec{y}^1(t), \dots, \vec{y}^p(t)$ стремятся к вектору, соответствующему старшему ляпуновскому показателю). Эти очевидные соображения были положены в основу численного метода расчета ляпуновских показателей, предложенного Д. Бенеттином и соавторами [12], используемого в настоящей работе.

Сумма показателей Ляпунова в соответствии с мультипликативной эргодической теоремой Оселедца [7] равна среднему по времени показателю сжатия или растяжения элемента фазового объема. В частности, изменение бесконечно малого p - мерного фазового объема в динамической системе, заданной в p - мерном фазовом пространстве (5), определяется уравнением

$$\frac{dV^p}{dt} = \Omega(\vec{x}(t))V^p, \quad \Omega = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i(\vec{x}(t))}{\partial x_i}.$$

Здесь $\vec{x}(t)$ – траектория, вдоль которой рассматривается изменение фазового объема.

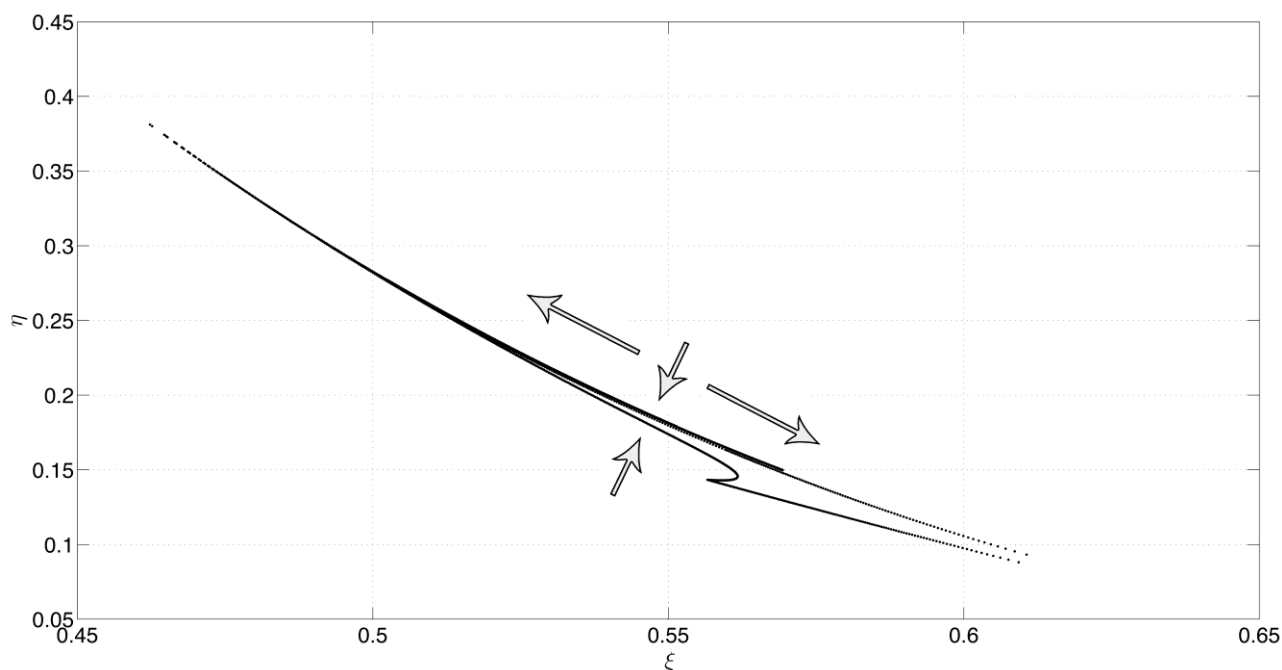


Рис. 6. Сжимающее и растягивающее направления двумерного отображения исходной области $[0.4, 0.6] \times [0.1, 0.4]$, переводящего ее в себя при значениях параметров $c_1 = 7, c_2 = -6, k = 1$

Проведенные расчеты показывают, что за характерное время возврата точки, определяющей состояние системы, на плоскость Пуанкаре фазовый объем V^3 для хаотических аттракторов системы (4) убывает более чем в 800 раз.

За это время прямоугольник на плоскости Пуанкаре, в пределах которого находятся точки, принадлежащие аттрактору, с высокой точностью стягивается в отрезок.

Странный аттрактор системы (4) порождает в сечении Пуанкаре плоскостью $\theta = 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ отображение

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = F(\xi_n, \eta_n), \\ \eta_{n+1} = G(\xi_n, \eta_n). \end{cases}$$

У этого отображения есть направление, обеспечивающее сильное сжатие, и направление, вдоль которого происходит растяжение, расположенное под достаточно большим углом к сжимающему направлению во всей области, которой принадлежит этот странный аттрактор (см. схематичное изображение на рис. 6). Это позволило проверить обобщенные условия гиперболичности, гарантирующие ряд характеристик хаоса, связанных с порождаемым им двумерным отображением [7].

Типичными аттракторами одномерных отображений $x_{n+1} = f(x_n)$, переводящими некоторый отрезок I в себя, являются неподвижные точки x^*

$$x^* = f(x^*)$$

и предельные циклы типа S^p

$$x_2 = f(x_1), \dots, x_p = f(x_{p-1}), x_1 = f(x_p). \quad (6)$$

Условия устойчивости цикла (6) одномерного отображения определяются следующим образом [7]:

$$\left| \frac{\partial f(x_1)}{\partial x} \dots \frac{\partial f(x_p)}{\partial x} \right| < 1. \quad (7)$$

Как отмечалось ранее, количественным выражением чувствительности по отношению к начальным данным для непрерывных систем с хаотическим аттрактором является экспоненциальный рост расстояния между двумя ближайшими траекториями $d(t) \sim e^{\mu t}, \mu > 0$.

Для одномерных отображений аналогом этого является свойство

$$\bar{\mu} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \left| \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \right| > 0. \quad (8)$$

Такие аттракторы можно характеризовать при помощи инвариантной меры, которая при численном анализе представляется как предел гистограммы

значений одной из динамических переменных $\{x_i\}$ при увеличении длины траектории $N \rightarrow \infty$ и уменьшении интервала разбиения отрезка $\varepsilon > 0$.

В некоторых случаях хаотический аттрактор занимает весь отрезок I , который отображение переводит в себя – плотность инвариантной меры $\rho(x) \neq 0$ на всем отрезке, например, для $x_{n+1} = 1 - 2|x_n|$ $\rho(x) = 0.5$ при $-1 \leq x \leq 1$. Этот аттрактор и другие, в которых $\rho(x) \neq 0$ в пределах одного отрезка, называют шумящими циклами и обозначают χ^1 . Иногда инвариантная мера оказывается сосредоточена на p островах, которые траектория $\{x_n\}$ последовательно обходит, вне этих островов $\rho(x) = 0$. Их обозначают χ^p .

Еще одним инструментом анализа изменения аттракторов динамической системы является построение и рассмотрение бифуркационных диаграмм. Чтобы рассматривать изменение аттрактора в зависимости от некоторого параметра λ и, в частности, сценарии перехода к хаосу, будем строить бифуркационную диаграмму следующим образом: фиксируем параметр λ и в течение достаточного большого времени проводим расчет для соответствующего одномерного отображения; затем отбрасываем первые 1000 точек (чтобы исключить переходные эффекты); далее проводим вычисления для следующих 100 членов последовательности $\{x_n\}$, которые наносятся на график в плоскости (λ, x) . Затем повторяем эту процедуру при $\lambda + \Delta\lambda$ и т.д.

Одномерные отображения и сценарии возникновения хаоса

Значительная часть идей и представлений нелинейной динамики оказалась связана с исследованием одномерных отображений (см., например, [7]). Одной из наиболее интересных, важных и детально исследованных моделей является логистическое отображение

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n), \quad x_0 = \tilde{x}, \quad 0 \leq \lambda \leq 4. \quad (9)$$

Это отображение переводит отрезок $[0,1]$ в себя. Оно относится к т.н. S -унимодальным отображениям, имеющим один аттрактор (почти все начальные точки $\tilde{x}$ порождают последовательности, стремящиеся к этому предельному множеству).

Бифуркационная диаграмма отображения (9) представлена на рис. 7. При увеличении параметра λ от 0 до 1 $x^* = 0$, затем при $\lambda = 1$ появляется устойчивая неподвижная точка $x^* = 1 - \lambda^{-1}$. При $\lambda = 3$ она теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода $S^1 \rightarrow S^2$. Далее происходит бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода $S^1 \rightarrow S^2 \rightarrow S^4 \rightarrow \dots \rightarrow S^{2^n} \rightarrow S^{2^{n+1}} \rightarrow \dots$. В результате этой последовательности при $\lambda = \lambda_\infty \approx 3.57$ возникает непериодическая траектория, начинается хаос.

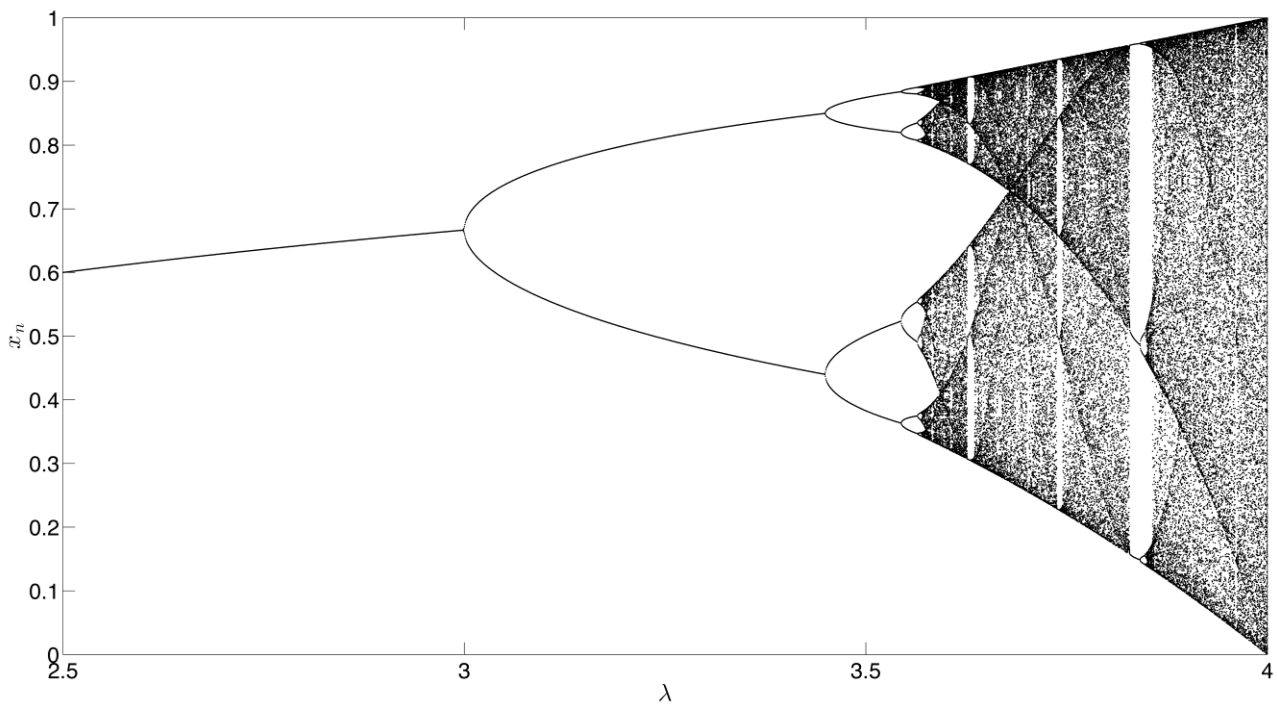


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма для логистического отображения

Следует отметить важную качественную особенность логистического отображения. Бифуркационная диаграмма показывает, что область при $\lambda > \lambda_\infty$ пронизана «окнами периодичности». В этих окнах аттракторами являются устойчивые циклы S^p , и также происходит переход к хаосу в результате бесконечной последовательности бифуркаций удвоения периода $S^p \rightarrow S^{2p} \rightarrow S^{4p} \rightarrow \dots \rightarrow S^{p \cdot 2^n} \rightarrow S^{p \cdot 2^{n+1}} \rightarrow \dots$

Были получены принципиальные результаты, касающиеся «оконной структуры» и множества параметров, при которых имеют место хаотические режимы (выполняется неравенство (8)). Оказалось, что сколь угодно близко к параметру $\lambda = \lambda_h$, при котором имеет место хаотический режим, найдутся параметры $\lambda = \lambda_s$, при которых аттракторами являются устойчивые циклы.

Пояснить это можно с помощью неравенства (7). В самом деле, если соответствующий x_r элемент цикла S^p таков, что $\partial_x f(x_r) = 0$, то цикл S^p будет устойчивым (в литературе такие циклы называют сверхустойчивыми). Поскольку $\partial_x f(0.5) = 0$ и циклов различных порядков бесконечно много, то при изменении параметра λ элемент $x = 0.5$ время от времени будет становиться элементом цикла, автоматически делая его устойчивым. Иными словами, данное множество обладает канторовой структурой (сложной фрактальной структурой, не содержащей ни одного отрезка, но имеющей положительную меру) [7]. Положительность меры означает, что наугад задав параметр λ , $0 \leq \lambda \leq 4$, мы с ненулевой вероятностью попадем на хаотический аттрактор [13].

При $\lambda > 4$ имеет место явление, получившее название кризиса аттрактора. Оно связывается с резким изменением областей притяжения инвариантных множеств при $\lambda \approx 4$. При $\lambda = 4 - 0$ мы имеем, как и при $\lambda = 4$, хаотические аттракторы. Однако при $\lambda = 4 + 0$ отображение $f(x)$ уже не переводит отрезок $[0, 1]$ в себя, $|x_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ у взятой наугад траектории в этой области параметров. Аттрактор при изменении параметра λ исчезает скачком.

Семейство отображений «тент» и отображения с острой вершиной

Одним из классических отображений (которое Д. фон Нейман использовал для генерации псевдослучайных чисел) является отображение

$$x_{n+1} = 1 - 2|x_n|.$$

Оно получило название «тент», или «палатка». Его можно рассматривать как элемент однопараметрического семейства

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda x_n, & 0 \leq x_n \leq 0.5, \\ x_{n+1} = -\lambda(x_n - 1), & 0.5 < x_n \leq 1. \end{cases} \quad (10)$$

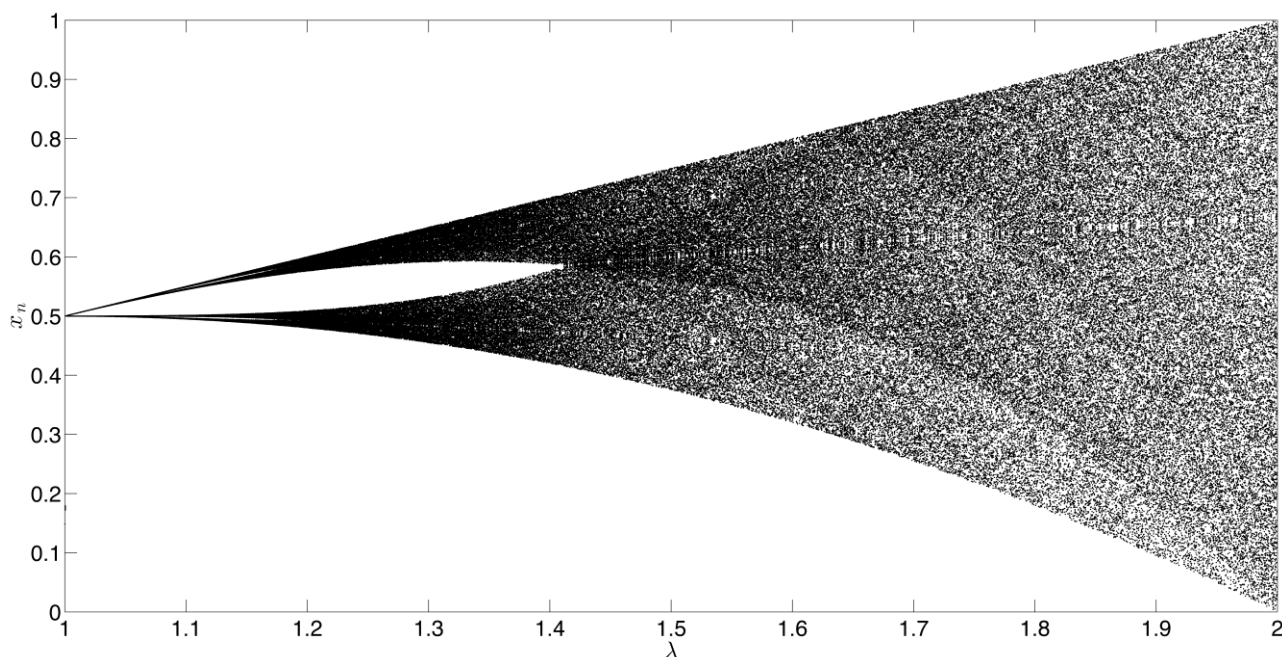


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма для отображения «тент»

При $0 \leq \lambda < 1$ аттрактором такого отображения является неподвижная точка $x^* = 0$. Из неравенства (7) видно, что при $\lambda > 1$ отображение (10) не может иметь устойчивых циклов ($|\partial_x f| = \lambda > 1$ для любой точки отрезка). Бифуркационная диаграмма этого отображения показана на рис. 8.

Обратим внимание на бифуркацию $\chi^2 \rightarrow \chi^1$, наблюдающуюся при увеличении параметра λ , и отсутствие «оконной структуры», обусловленное тем, что при $\lambda > 1$ это отображение не имеет устойчивых циклов.

Еще один класс отображений, который будет важен для дальнейшего анализа, – отображения с острой степенной вершиной

$$x_{n+1} = \frac{1 - |x - \lambda|^\alpha}{1 + |x - \lambda|^2}, \quad \alpha < 1. \quad (11)$$

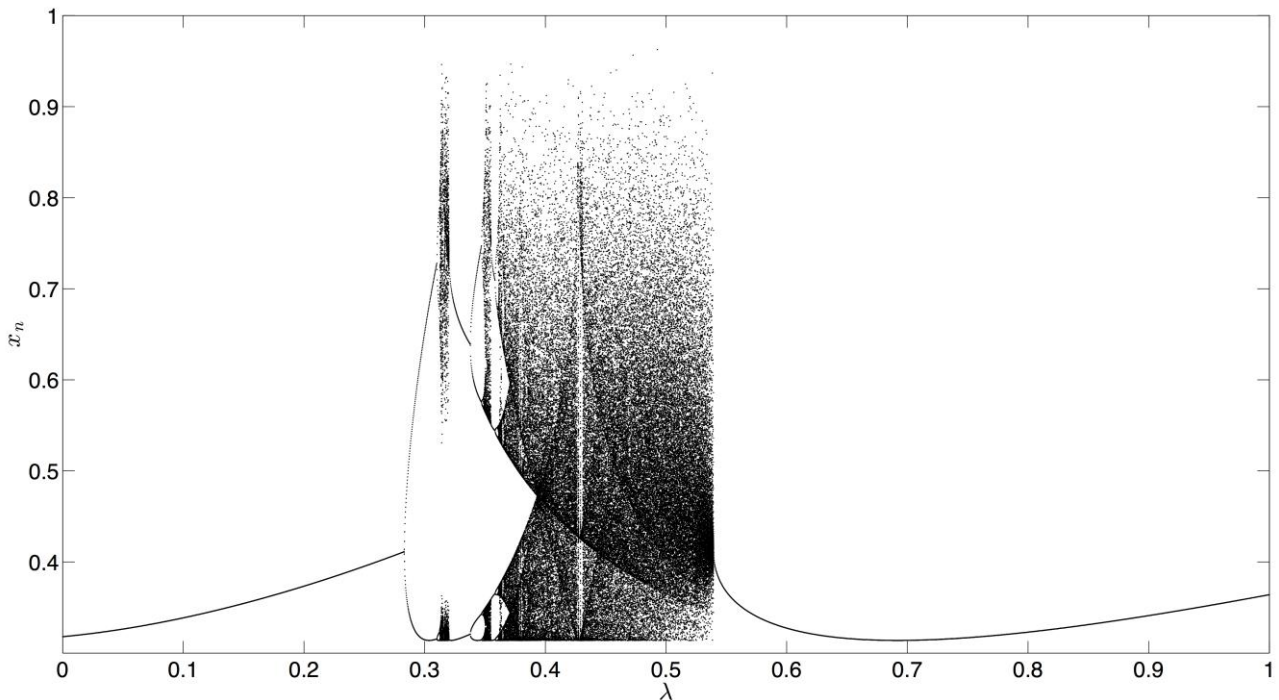


Рис. 9. Бифуркационная диаграмма для отображения с острой степенной вершиной при $\alpha = 0.25$

Для логистического отображения после каждой бифуркации удвоения периода ближайший к вершине ($x = 0.5$) элемент цикла S^{2n} перескакивает с одной ветви ($x < 0.5$) на другую ($x > 0.5$) строго поочередно: влево – вправо – влево – ... Каждый раз, когда элемент цикла попадает на вершину $\tilde{x} = 0.5$, возникает сверхустойчивый цикл. Эти переходы через вершину не приводят к усложнению устойчивых циклов и появлению устойчивых режимов.

В отображении (11) $\partial_x f(x) = \infty$ при $x = \lambda$, поэтому «гладкий» переход элемента устойчивого цикла через вершину невозможен. В связи с изменением топологии циклов (числа элементов, соответственно, на левой и на правой частях отображения) появляется сложная структура, представляющая собой бесконечное количество каскадов бифуркаций удвоения периода. Такая структура, подробно изученная в работе [14], получила название «каскад каскадов». Бифуркационная диаграмма отображения представлена на рис. 9.

Качественные особенности бифуркационных диаграмм

Приведенные расчеты для трех бифуркационных диаграмм, возникающих соответственно при изменении параметров c_1 , c_2 , k и фиксированной паре других параметров системы (рис. 10, 11, 12), показывает их удивительное сходство.

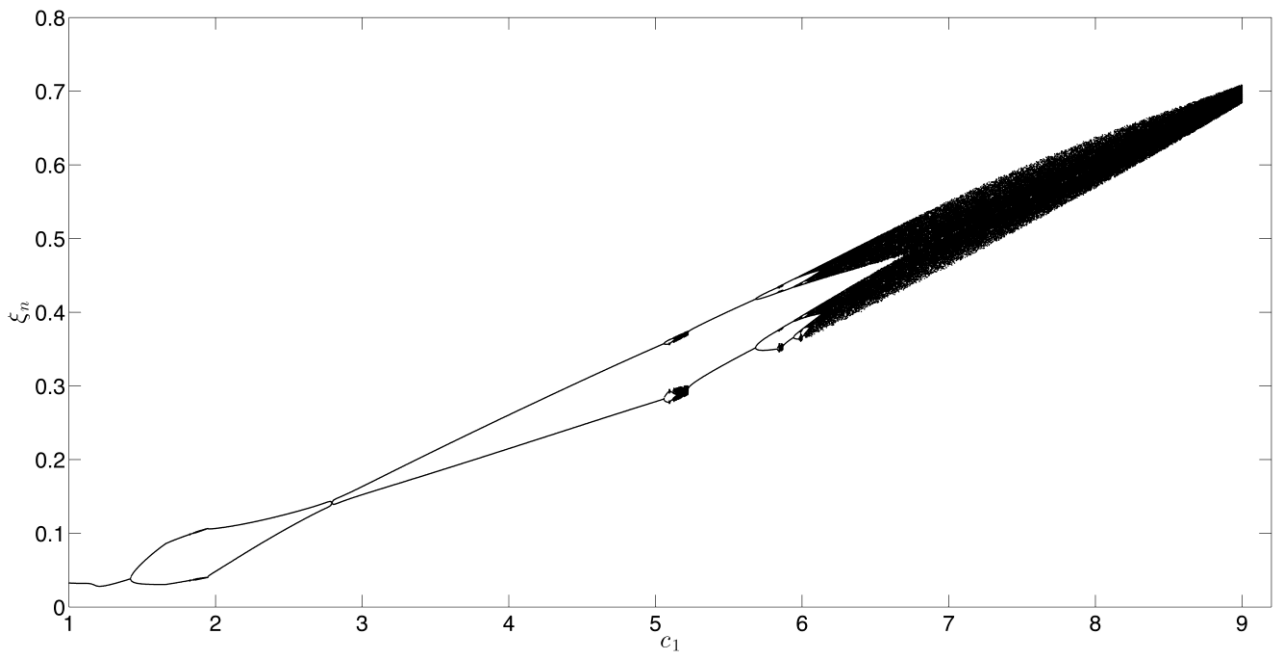


Рис. 10. Бифуркационная диаграмма для системы (4) при вариации параметра c_1 и значениях параметров $c_2 = -6, k = 1$

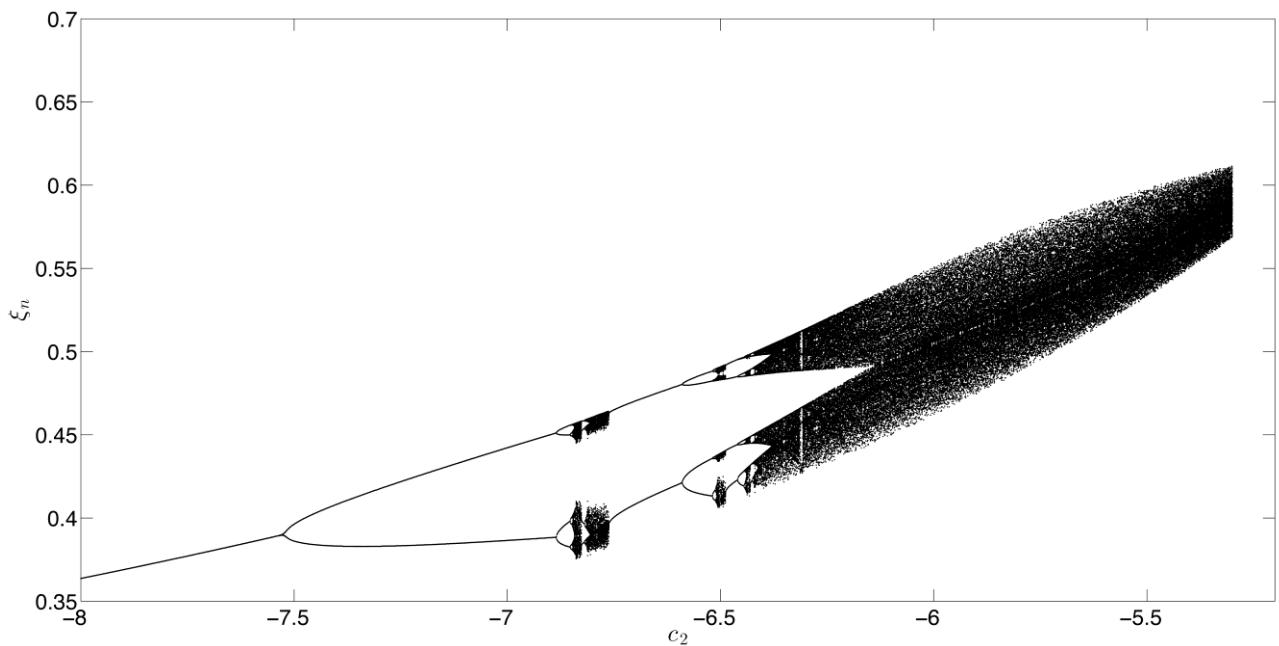


Рис. 11. Бифуркационная диаграмма для системы (4) при вариации параметра c_2 и значениях параметров $c_1 = 7, k = 1$

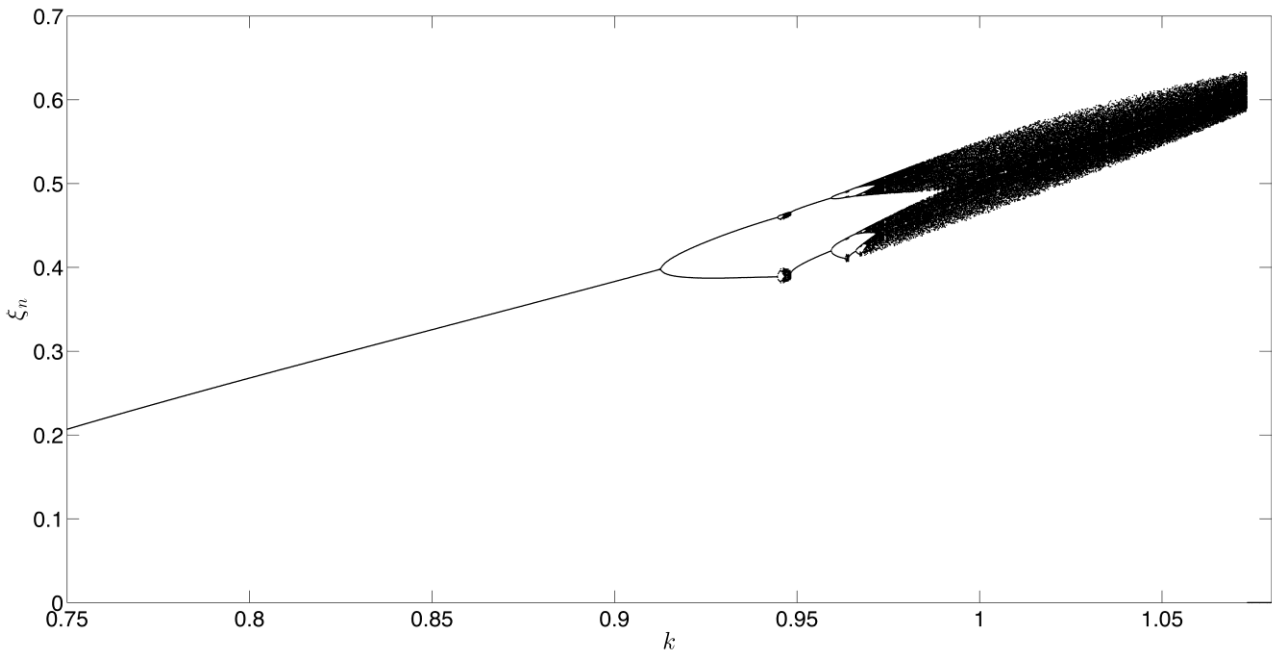


Рис. 12. Бифуркационная диаграмма для системы (4) при вариации параметра k и значениях параметров $c_1 = 7, c_2 = -6$

Видно, что хаотические режимы возникают и исчезают при изменении бифуркационного параметра неоднократно, при этом возникновение зон хаотического поведения является результатом последовательности бифуркаций удвоения периода. Каждый раз появляются области, в которых нет «оконной структуры». Исчезновения аттракторов похожи одно на другое. По этим причинам далее мы подробно остановимся на исследовании перехода к хаосу при изменении параметра c_1 , считая, что сценарии перехода при вариации параметров c_2 и k идентичны.

Самоподобие фрагментов бифуркационной диаграммы и наличие «вложенных структур»

Для бифуркационной диаграммы, соответствующей логистическому отображению, характерно «двухуровневое самоподобие» (см. рис. 7). С одной стороны, существует бесконечное количество каскадов бифуркаций удвоения периода $S^{p \cdot 2^n} \rightarrow S^{p \cdot 2^{n+1}}, n = 1, 2, \dots$. С другой — в пределах каждого каскада фрагменты между последовательными бифуркациями $S^{p \cdot 2^n} \rightarrow S^{p \cdot 2^{n+1}}$ оказываются подобными друг другу тем с большей точностью, чем больше n , а значения, при которых происходят бифуркации, быстро стремятся к геометрической прогрессии. Это явление стало основой для теории универсальности, построенной М. Фейгенбаумом [15].

Замечательным свойством одномерных отображений с квадратичной вершиной является наличие предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}} \right) = \delta \approx 4.669$$

для всех отображений этого класса.

Исследование отображений с острой вершиной и квадратичным минимумом показало, что для них характерен еще один уровень самоподобия. В них, как отмечалось ранее, оказывается бесконечно много каскадов бифуркаций удвоения периода. В дополнение к этому, самих таких каскадов, подобных тем, которые наблюдаются в логистическом отображении, по-видимому, также бесконечно много.

Расчеты показывают, что такая вложенная «матрешечная» структура имеет место не только для модельного одномерного отображения, но и для исходной двухмодовой системы.

В самом деле, при взгляде на бифуркационную диаграмму, характеризующую изменение аттракторов при увеличении параметра c_1 , становится ясно, что хаос в этой системе возникает и исчезает примерно одинаковым образом многократно на разных по c_1 масштабах (рис. 13, 14, 15). Увеличение соответствующих фрагментов показывает, что бифуркационная диаграмма изучаемого объекта действительно носит фрактальный, самоподобный характер с коэффициентом подобия около 10.

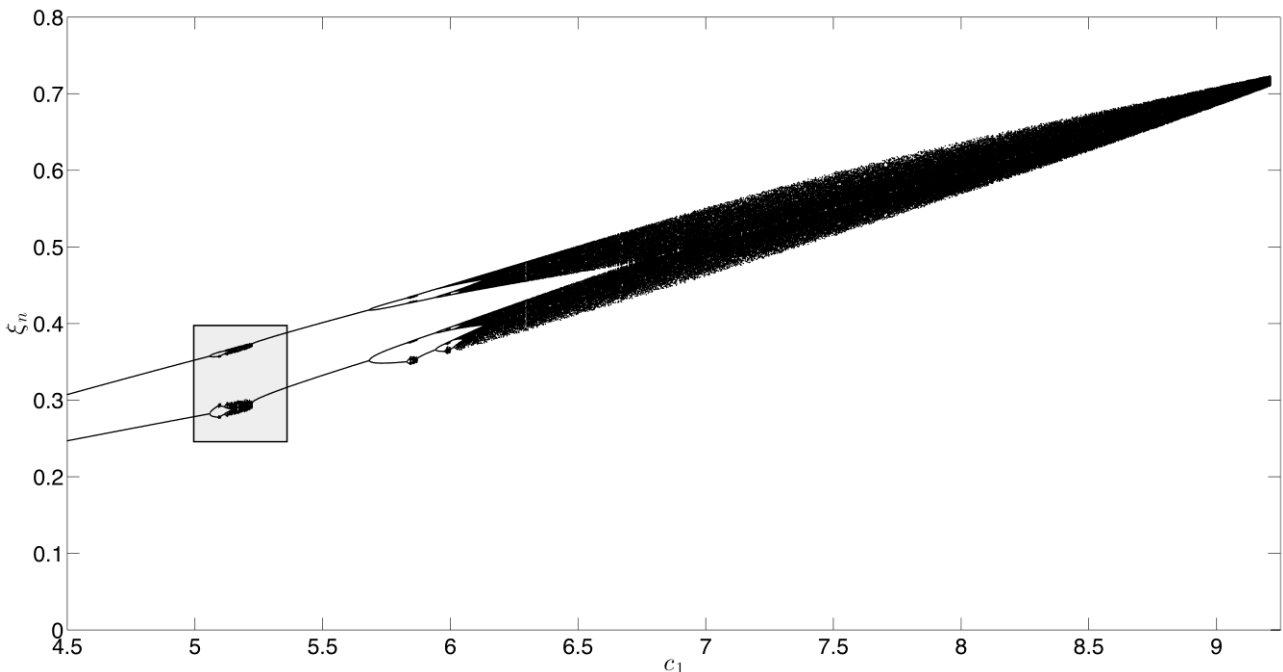


Рис. 13. «Матрешечная» структура в системе (4): $4.5 \leq c_1 \leq 9.3$, $c_2 = -6$, $k = 1$.

Выделенная область: $5 \leq c_1 \leq 5.3$

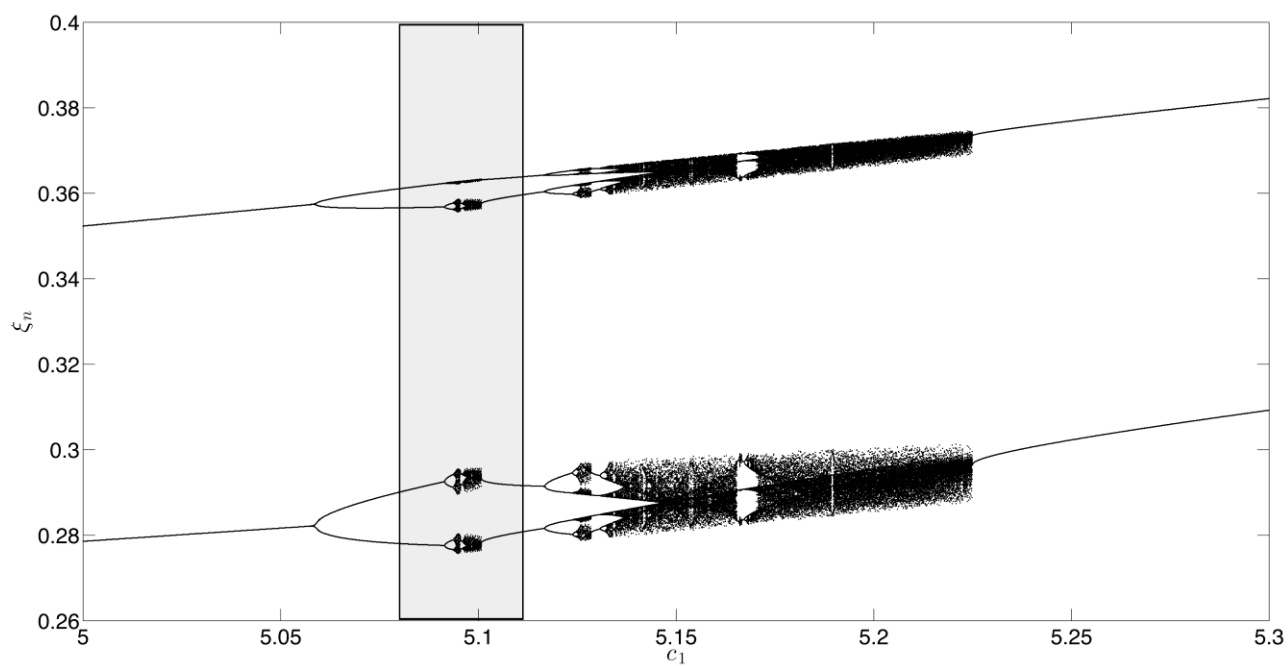


Рис. 14. «Матрешечная» структура в системе (4): $5 \leq c_1 \leq 5.3$, $c_2 = -6$, $k = 1$.
Выделенная область: $5.08 \leq c_1 \leq 5.11$

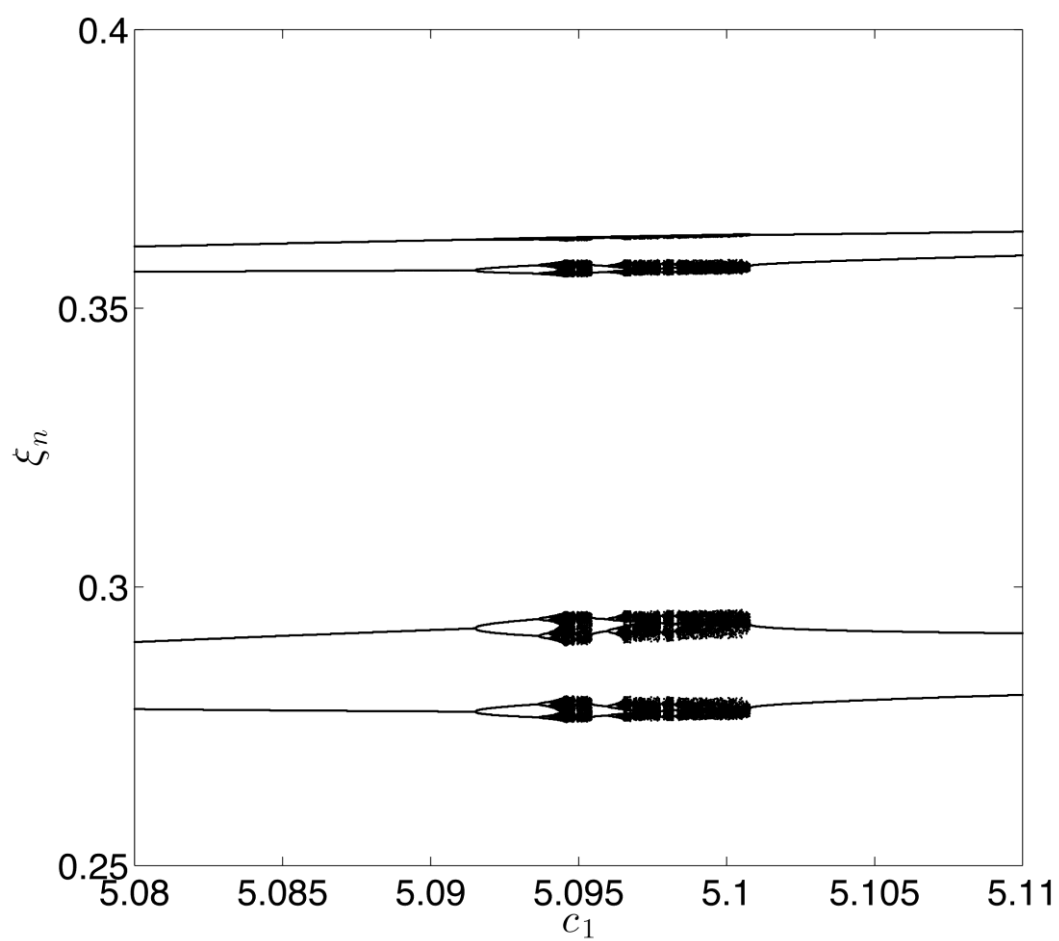


Рис. 15. «Матрешечная» структура в системе (4): $5.08 \leq c_1 \leq 5.11$, $c_2 = -6$, $k = 1$

Как и во всех реальных, а не модельных или специально сконструированных фрактальных структурах, мы можем проследить сравнительно небольшое количество уровней, на которых наблюдается самоподобие. В данном случае это ограничено точностью численного решения изучаемой системы дифференциальных уравнений. Однако прослеженные уровни масштабов, на которых фрагменты бифуркационной диаграммы оказываются подобными себе, показывают отличное качественное соответствие с модельным одномерным отображением, и это дает все основания полагать, что в рассматриваемой двухмодовой системе имеет место «каскад каскадов».

Семейство хаотических аттракторов, порождающих растягивающие одномерные отображения

После обнаружения хаотического аттрактора в двухмодовой системе встал ряд вопросов: насколько типичным является он для исследуемого объекта, в какой мере он обладает чувствительностью к параметрам задачи, является ли структура множества параметров, при которой имеет место хаос, сложной, подобной той, которая наблюдается для логистического отображения, или простой, характерной для всюду растягивающего отображения.

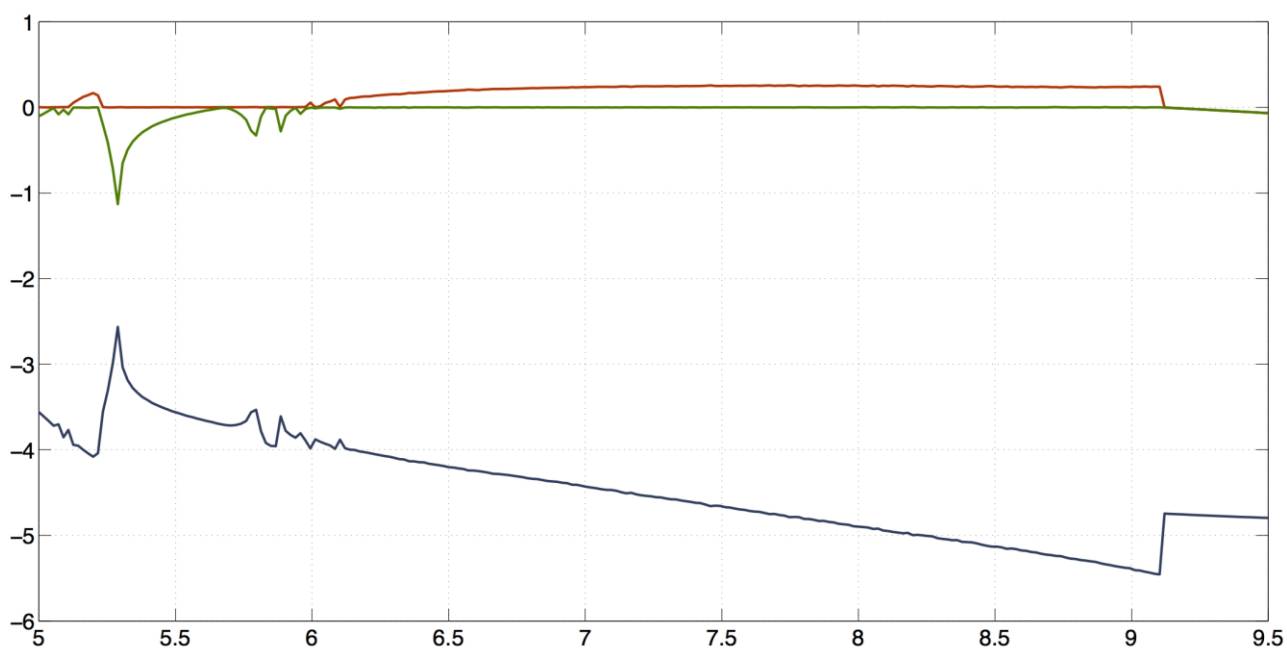


Рис. 16. Зависимость ляпуновских показателей от параметра c_1

Приведенные расчеты убедительно показывают, что мы имеем дело со вторым вариантом. Зависимость ляпуновских показателей от параметра такова, что старший ляпуновский показатель λ в большом интервале параметров превышает 0.1 (рис. 16). Заметим, что это значение весьма велико по сравнению с системой Лоренца и рядом других исследованных ранее странных аттракторов систем трех обыкновенных дифференциальных уравнений.

Из теории ляпуновских показателей следует, что для странных аттракторов, существующих в ограниченной области фазового пространства в динамических системах с непрерывным временем, один из ляпуновских показателей равен нулю [16]. Точность ε , с которой это выполняется при численно найденных показателях, позволяет судить о точности используемого вычислительного алгоритма. В нашем случае нулевой показатель приближает λ_2 с $\varepsilon \approx 10^{-3}$.

Из расчетов следует, что в этой области параметров странные аттракторы порождают семейство растягивающих отображений (см. далее «Возникновение хаоса и эволюция одномерных отображений») с

$$z = \frac{d\xi_{n+k}}{d\xi_n} > 1, \quad k = 1, 2.$$

Иными словами, качественные свойства исследуемого объекта близки к характеристикам простейшего всюду растягивающего одномерного отображения. Поэтому можно ожидать, что и в этом случае количественные характеристики хаоса (моменты распределения ξ_n и η_n , автокорреляционные функции, спектр мощности, инвариантные меры) непрерывно зависят от параметров задачи в тех пределах, в которых можно пренебречь фрактальной структурой странного аттрактора вдоль сжимающего направления.

Возникновение хаоса и эволюция одномерных отображений

Наглядно представить сценарий возникновения хаоса позволяет упоминавшееся выше семейство одномерных отображений $\xi_{n+1} = f(\xi_n, c_1)$, порождаемое решениями исходной двухмодовой системы при разных значениях c_1 .

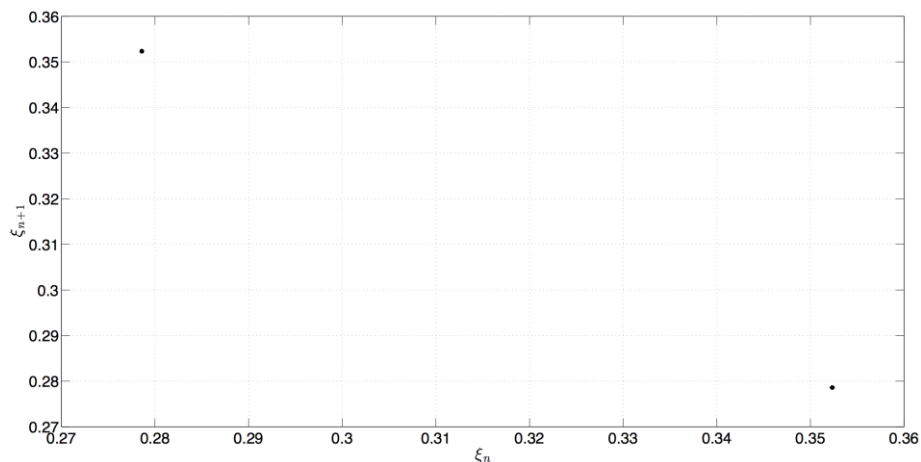


Рис.17. Цикл S^2 одномерного отображения $\xi_{n+1} = f(\xi_n, c_1)$, $c_1 = 5$

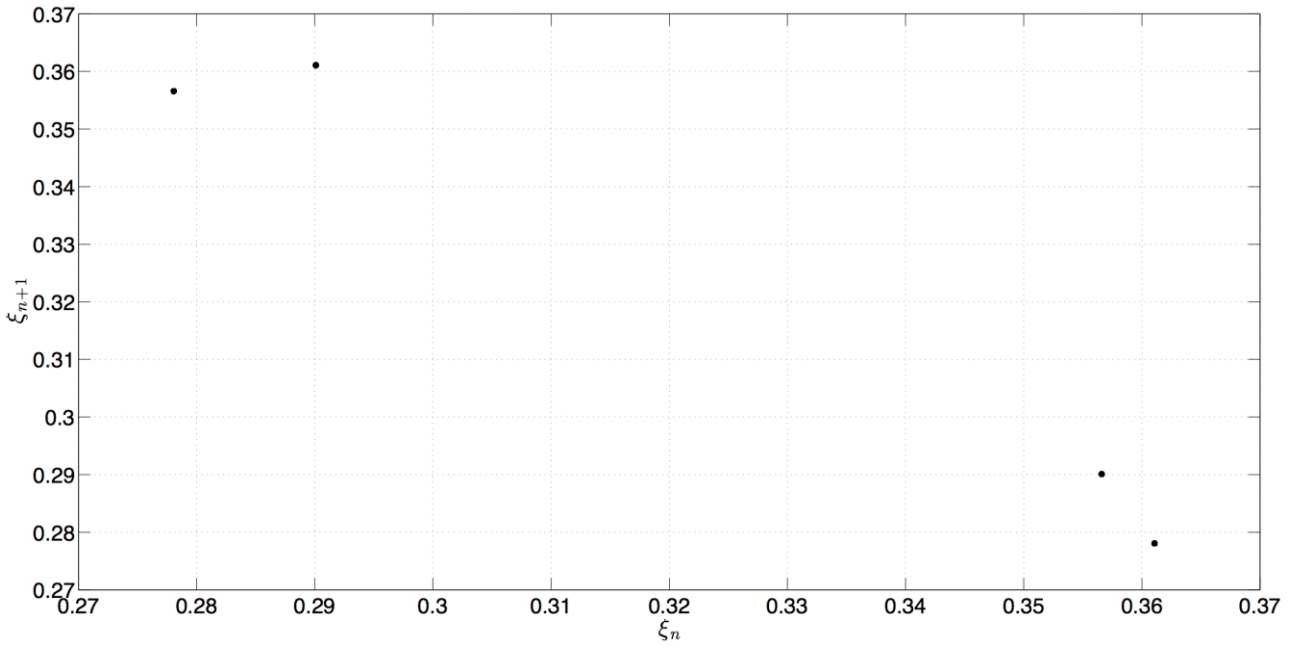


Рис.18. Цикл S^4 одномерного отображения $\xi_{n+1} = f(\xi_n, c_1)$, $c_1 = 5.08$

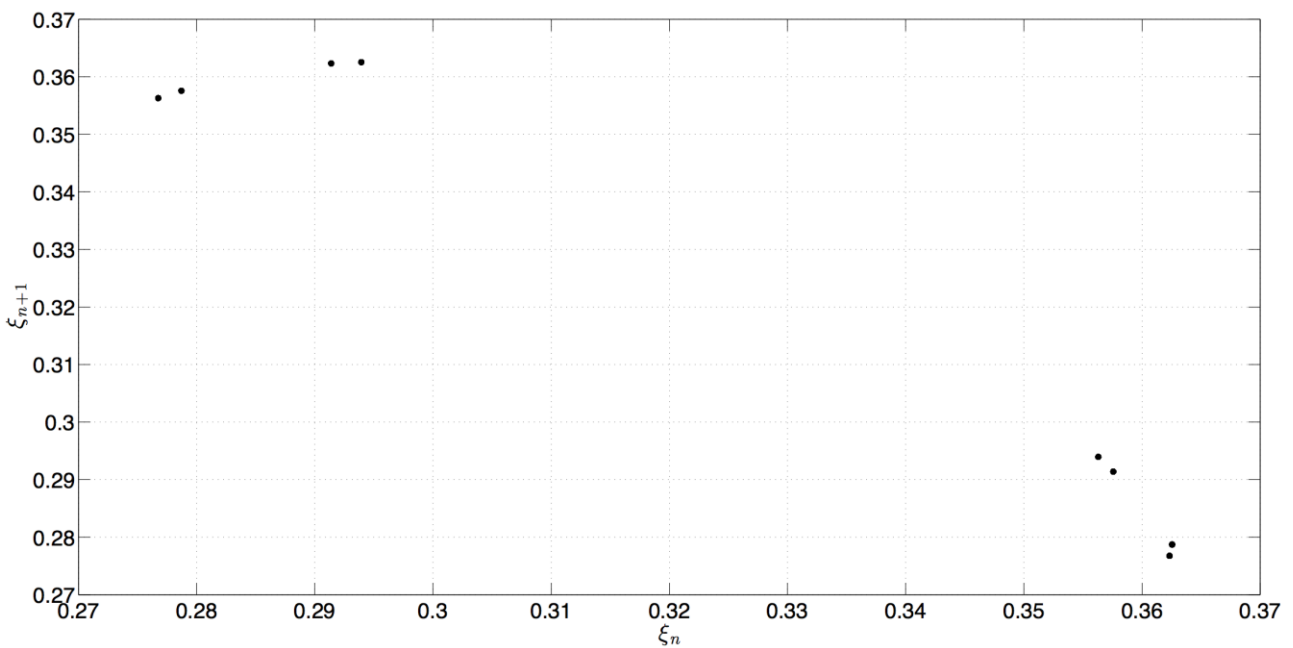


Рис.19. Цикл S^8 одномерного отображения $\xi_{n+1} = f(\xi_n, c_1)$, $c_1 = 5.093$

Видно, что вначале мы имеем дело с традиционной последовательностью бифуркаций удвоения периода. Соответствующие точки, порождаемые циклами S^2 , S^4 и S^8 , прекрасно ложатся на квадратичную параболу (рис. 17, 18, 19). Вид нескольких типичных предельных циклов этого семейства показан на рис. 20, 21.

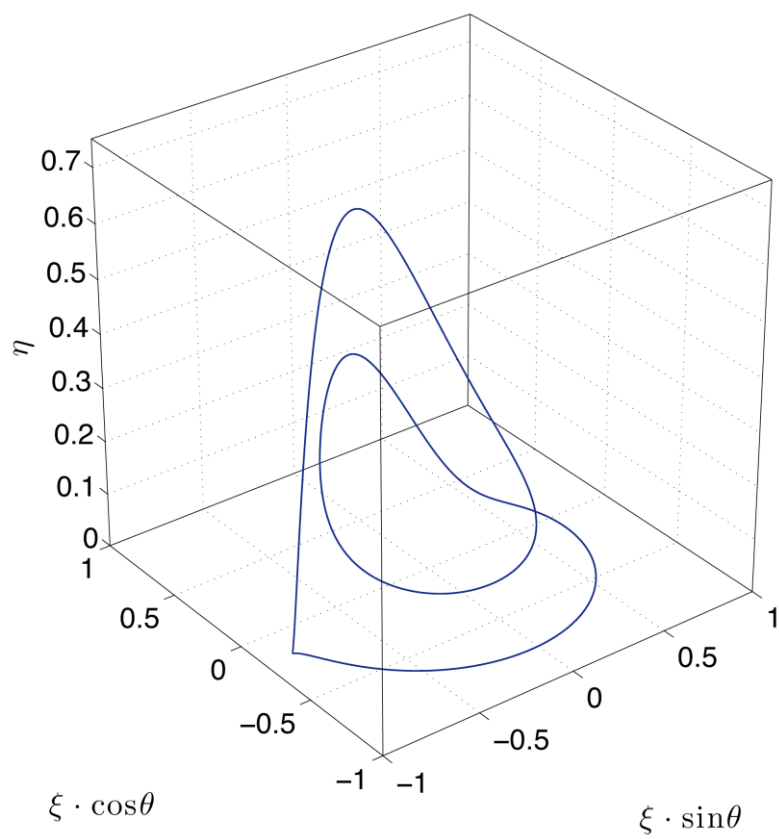


Рис. 20. Предельный цикл S^2 , $c_1 = 5$

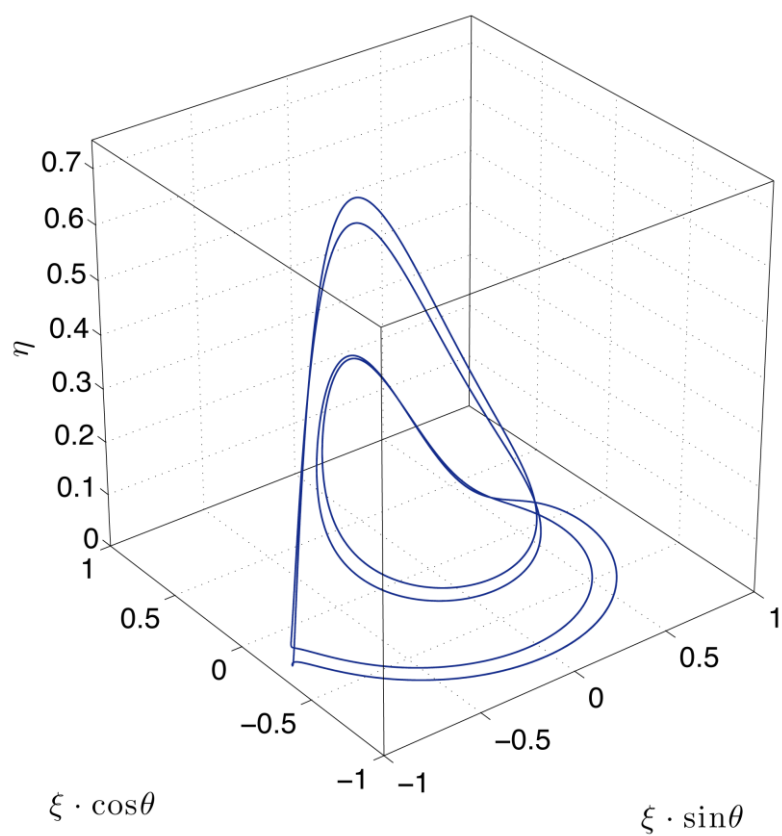


Рис. 21. Предельный цикл S^4 , $c_1 = 5.08$

Затем возникают хаотический аттрактор и шумящие циклы. В частности, на рис. 22 представлен такой цикл χ^4 .

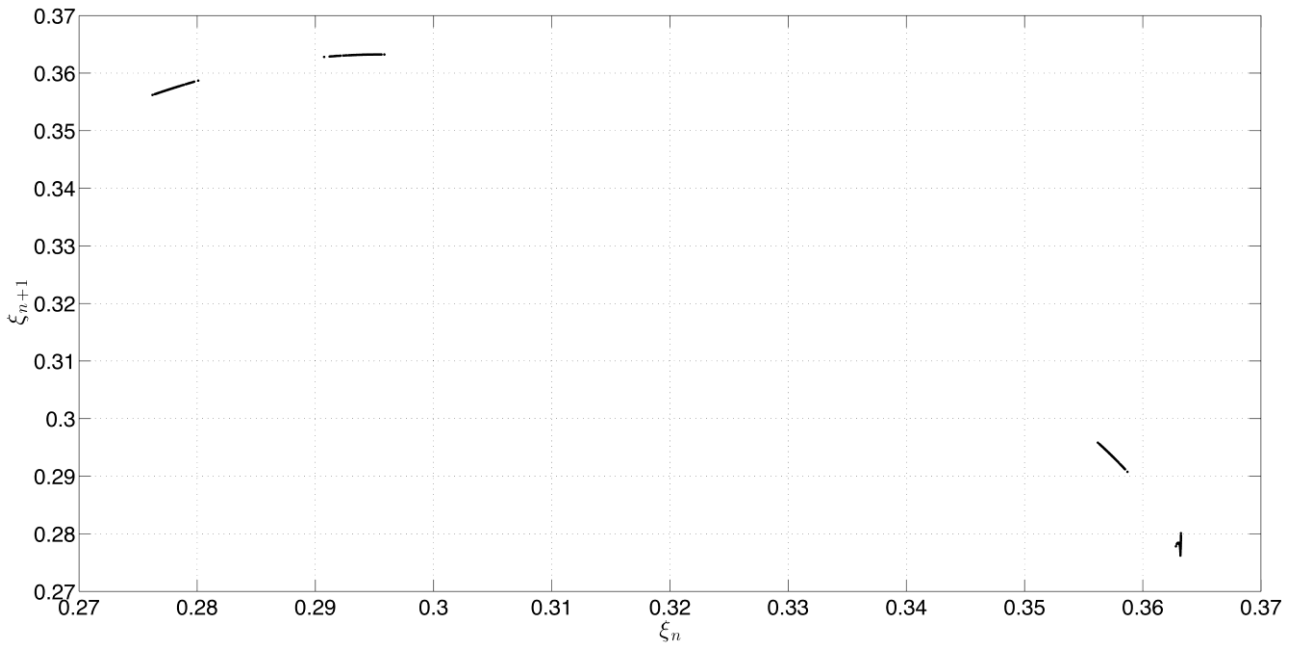


Рис. 22. Шумящий цикл χ^4 , $c_1 = 5.1$

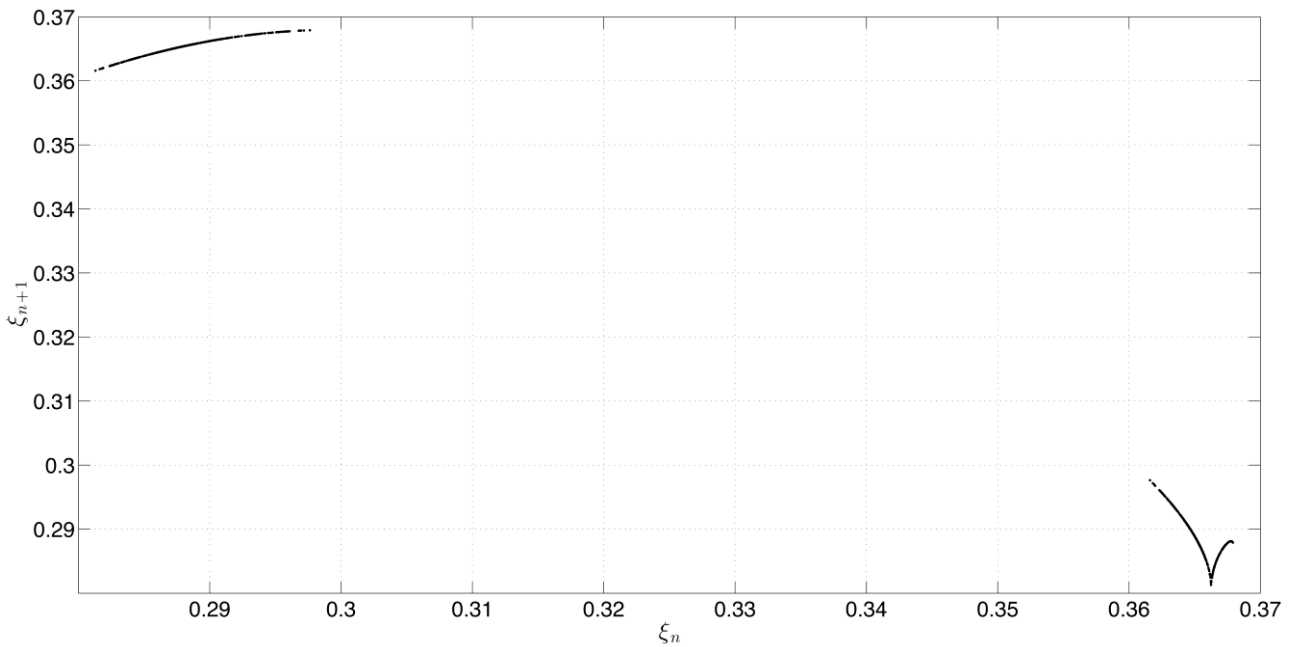


Рис. 23. «Отращивание острой вершины», $c_1 = 5.15$

При увеличении c_1 отображение f «отращивает острую вершину» (рис. 23). В этом представлении получаемое отображение, в отличие от модельного, имеет гладкую вершину и острый минимум. Однако замена вида $\xi'_n \rightarrow c - \xi_n$, где c – подходящая константа, показывает, что они переходят друг в друга.

Появляется вторая ветвь, которая определяет и циклы, и различные типы хаоса. Наличие гладкой вершины, как уже обсуждалось выше, приводит к возникновению сложной «оконной структуры», а наличие острого минимума порождает «каскад каскадов».

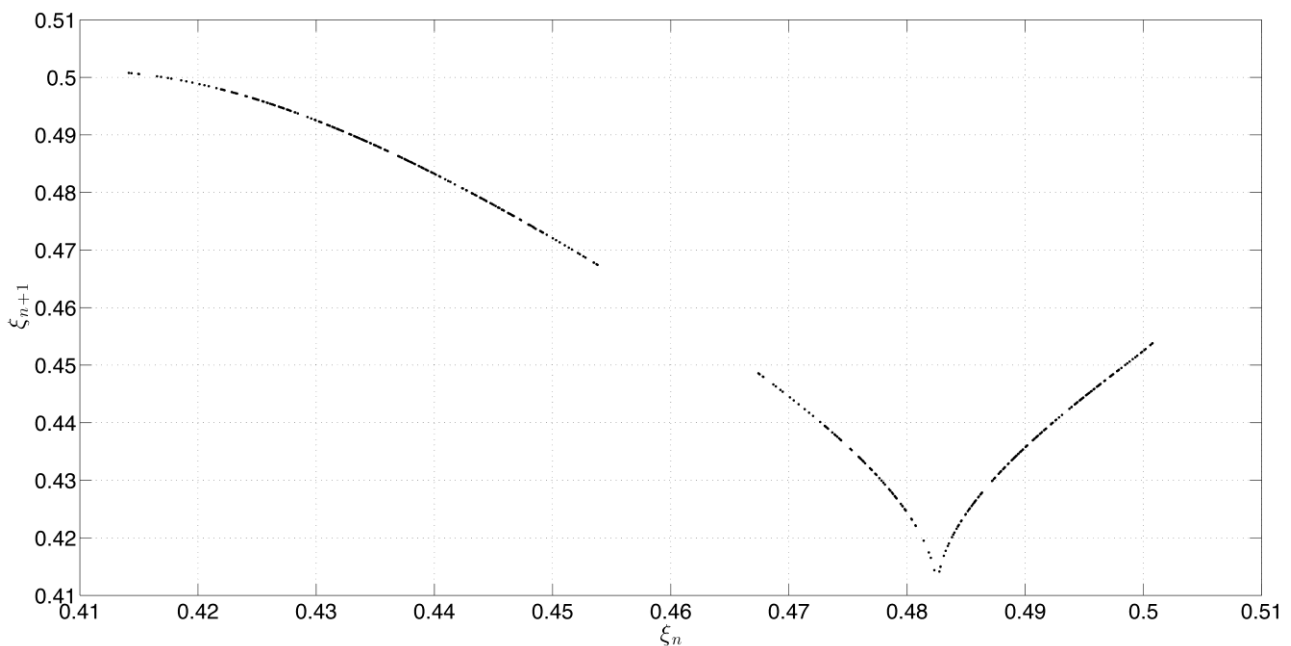


Рис. 24. Одномерное отображение, соответствующее «грубому» хаосу, $c_1 = 6.5$

Наконец, при дальнейшем увеличении параметра возникает растягивающее отображение, при этом

$$\frac{d\xi_{n+1}}{d\xi_n} > 1$$

на всем переходящем в себя интервале (рис. 24).

Таким отображениям соответствуют бифуркационная диаграмма, лишенная «оконной» или «фрактальной» структуры (рис. 25), «стабильные» ляпуновские показатели (рис. 26) и «грубый» хаотический аттрактор (рис. 27).

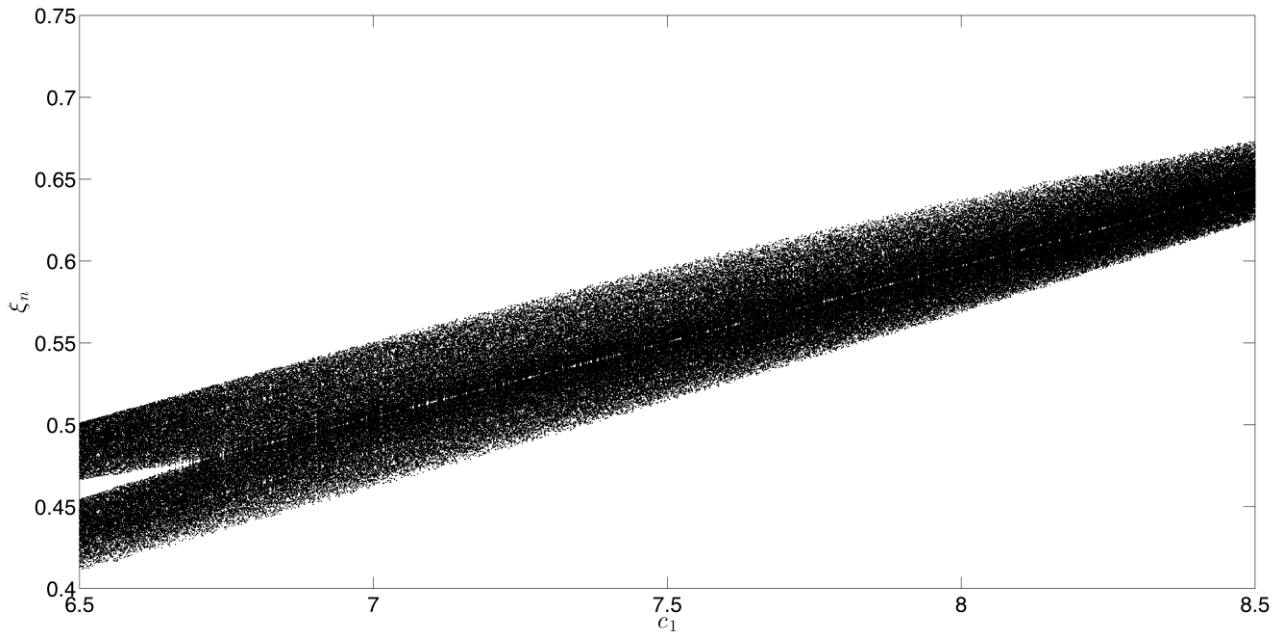


Рис. 25. Бифуркационная диаграмма, лишенная оконной структуры, $6.5 \leq c_1 \leq 8.5$

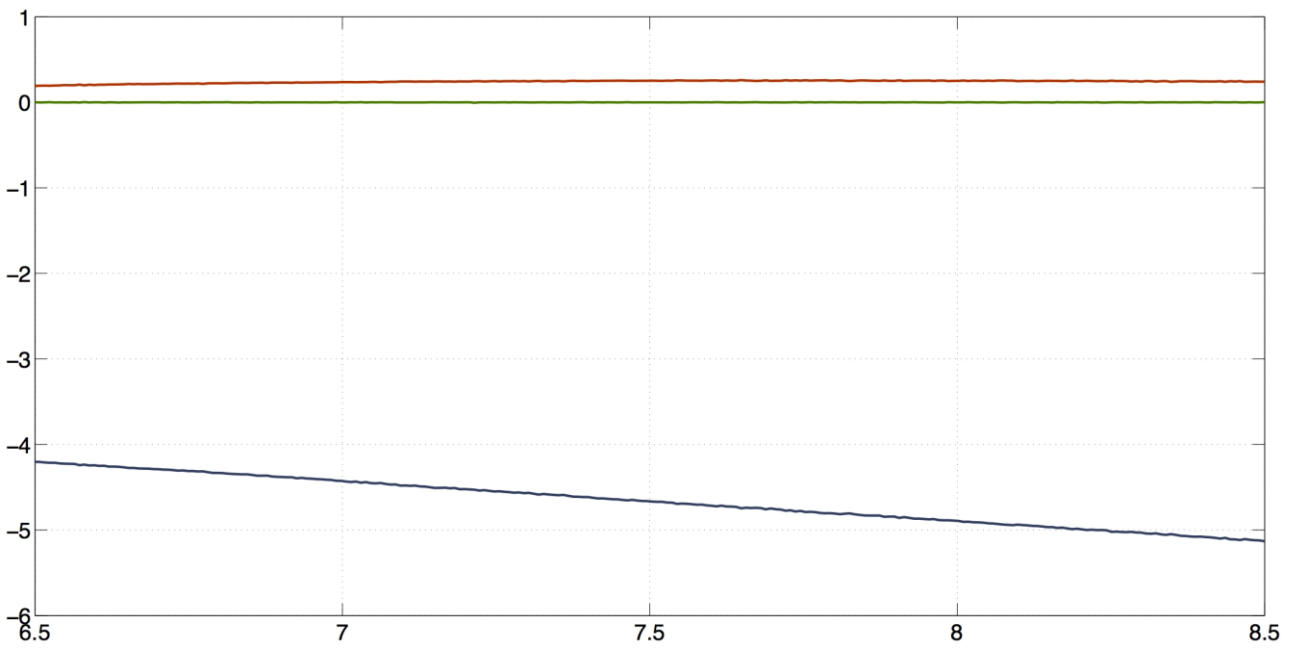


Рис. 26. «Стабильные» показатели Ляпунова, $6.5 \leq c_1 \leq 8.5$

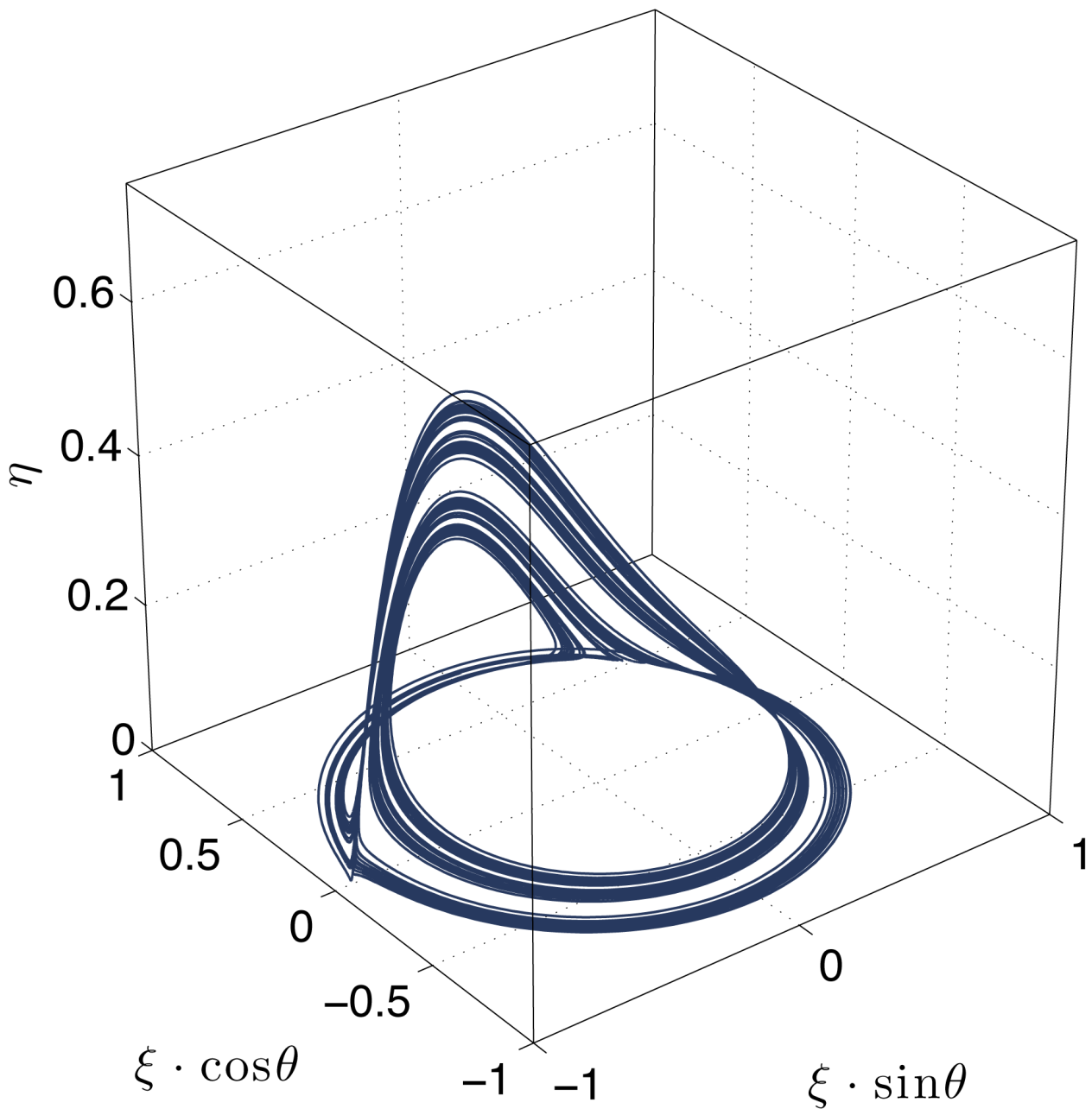


Рис. 27. «Грубый» хаотический аттрактор, $c_1 = 6.5$

Исчезновение хаотических аттракторов и бистабильность

Анализ двумерного отображения, называемого подковой Смейла, системы Лоренца, логистического отображения, а также многих других объектов нелинейной динамики показал, что хаотические аттракторы могут и появляться, и исчезать скачком. Как отмечалось ранее, в ряде работ это явление называется кризисом аттрактора [7].

Расчеты показывают, что с кризисом аттракторов мы имеем дело при увеличении параметров c_1 , c_2 или k при исчезновении хаотического аттрактора

системы (4). Соответствующие одномерные отображения $\xi_{n+1} = f(\xi_n)$ перестают переводить отрезок в себя.

Поскольку все траектории двухмодовой системы ограничены [7], то после кризиса хаотического аттрактора они стремятся к другому предельному множеству. Таковым при увеличении $c_1 > 9.25$ является устойчивая особая точка $\{\xi^*, \eta^*, \theta^*\}$, лежащая на инвариантной прямой $\xi > 0, \eta > 0$.

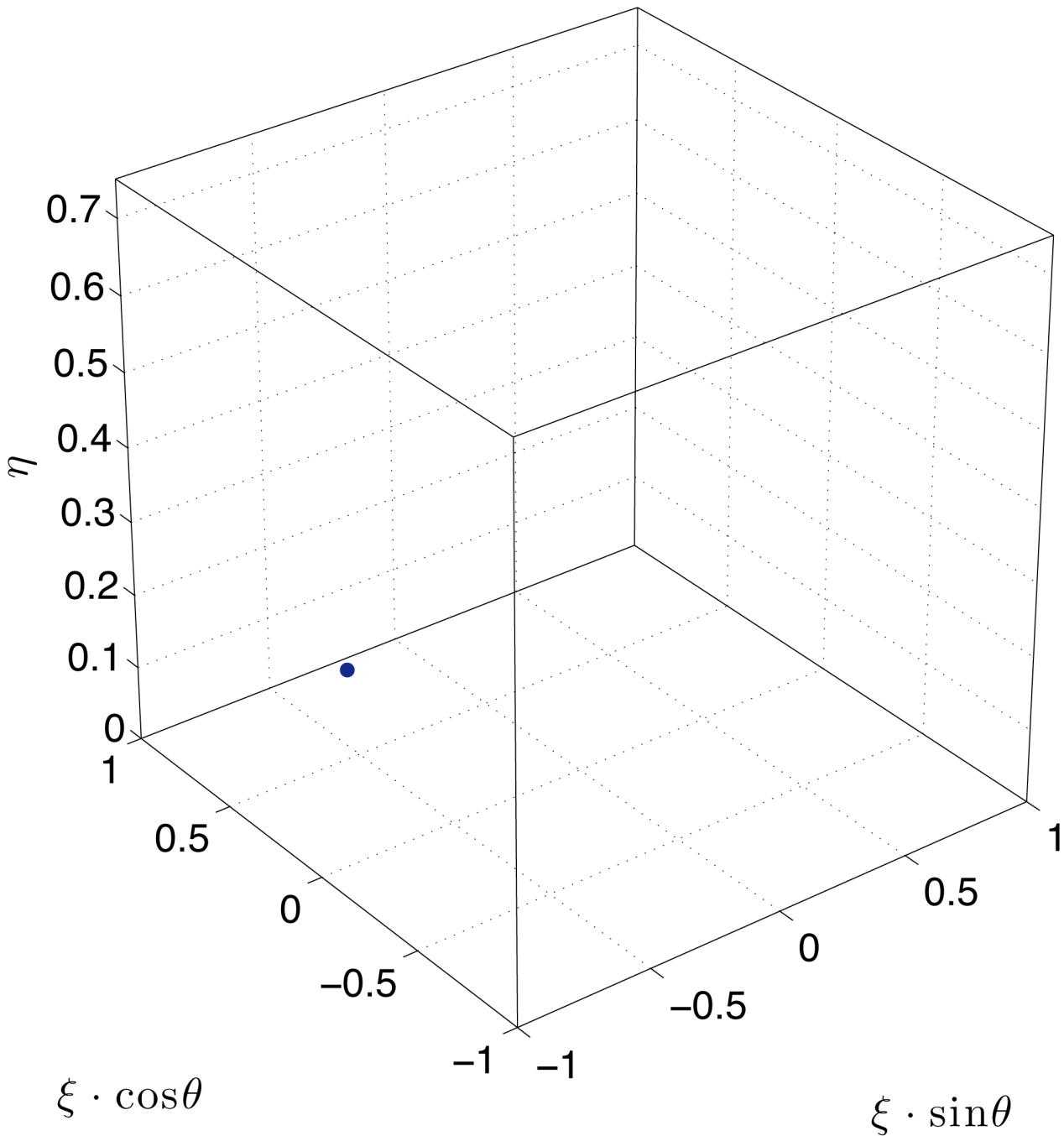


Рис. 28. Особая точка в системе (4) при $c_1 = 9.11$

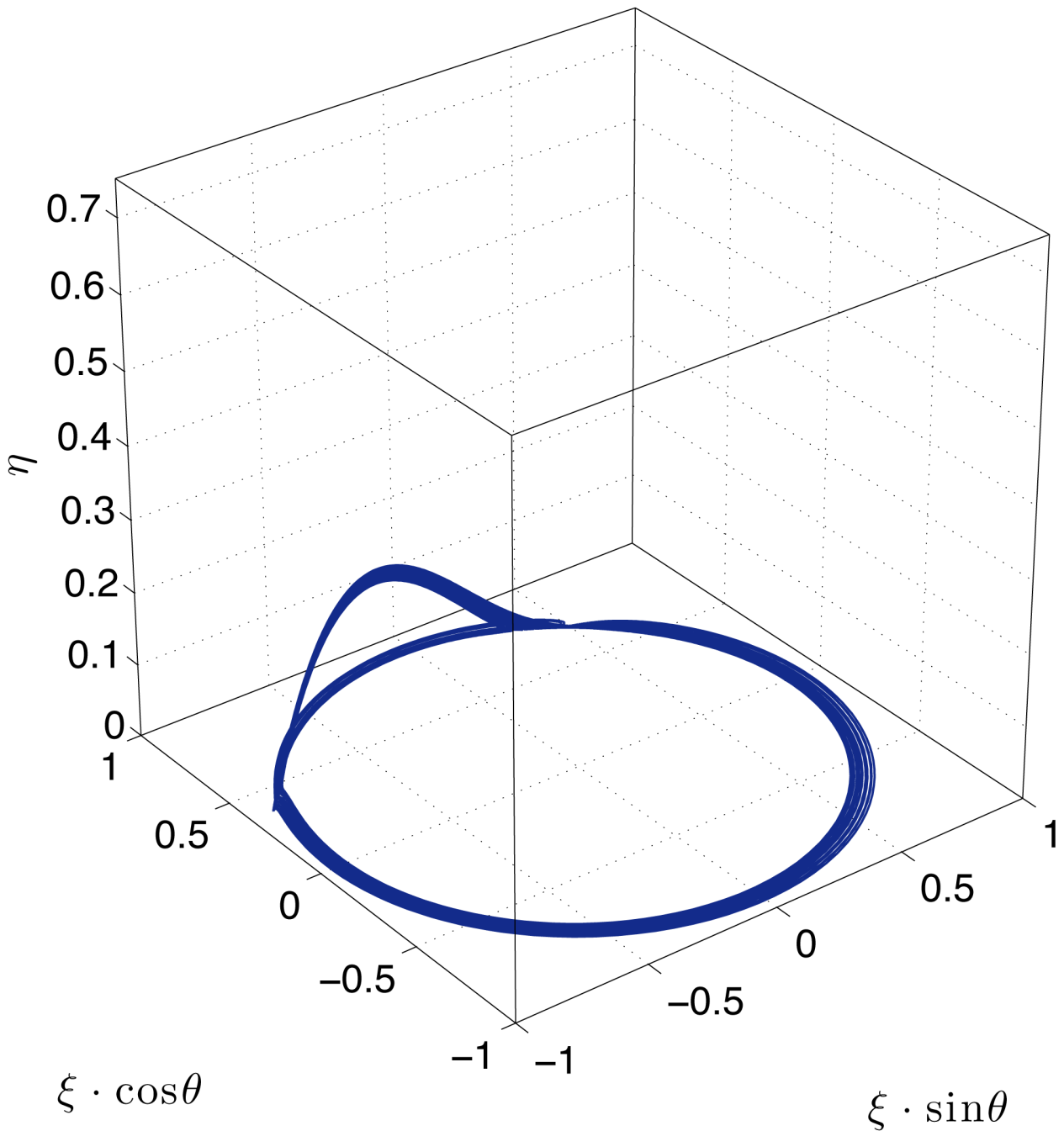


Рис. 29. Хаотический аттрактор в системе (4) при $c_1 = 9.11$

Результаты вычислительного эксперимента говорят о том, что эта устойчивая точка сосуществует с хаотическим аттрактором в интервале параметров $9.11 \leq c_1 \leq 9.25$ (рис. 28, 29). Для расчетов использовался упрощенный вариант метода продолжения по параметру: со значений $\tilde{c}_1 = 9.26$, при которых устойчива только одна точка, рассчитывается траектория при $\tilde{c}_1 - \Delta c_1$ с начальными данными, лежащими в окрестности точки $\tilde{c}_1 - \Delta c_1$, что дает точку или другой нехаотический аттрактор, затем описанная процедура повторяется при $c_1 = \tilde{c}_1 - 2\Delta c_1$ и т.д.

При $c_1 = 9.109$ особая точка претерпевает бифуркацию Хопфа (бифуркацию рождения предельного цикла).

В интервале $9.107 \leq c_1 \leq 9.109$ вместе с хаотическим аттрактором сосуществует предельный цикл (рис. 30). Таким образом, в отличие от логистического отображения, других S -унимодальных отображений и системы Лоренца, для двухмодовой системы (4) характерна бистабильность – существование двух аттракторов – странного и нехаотического – со своими областями притяжения.

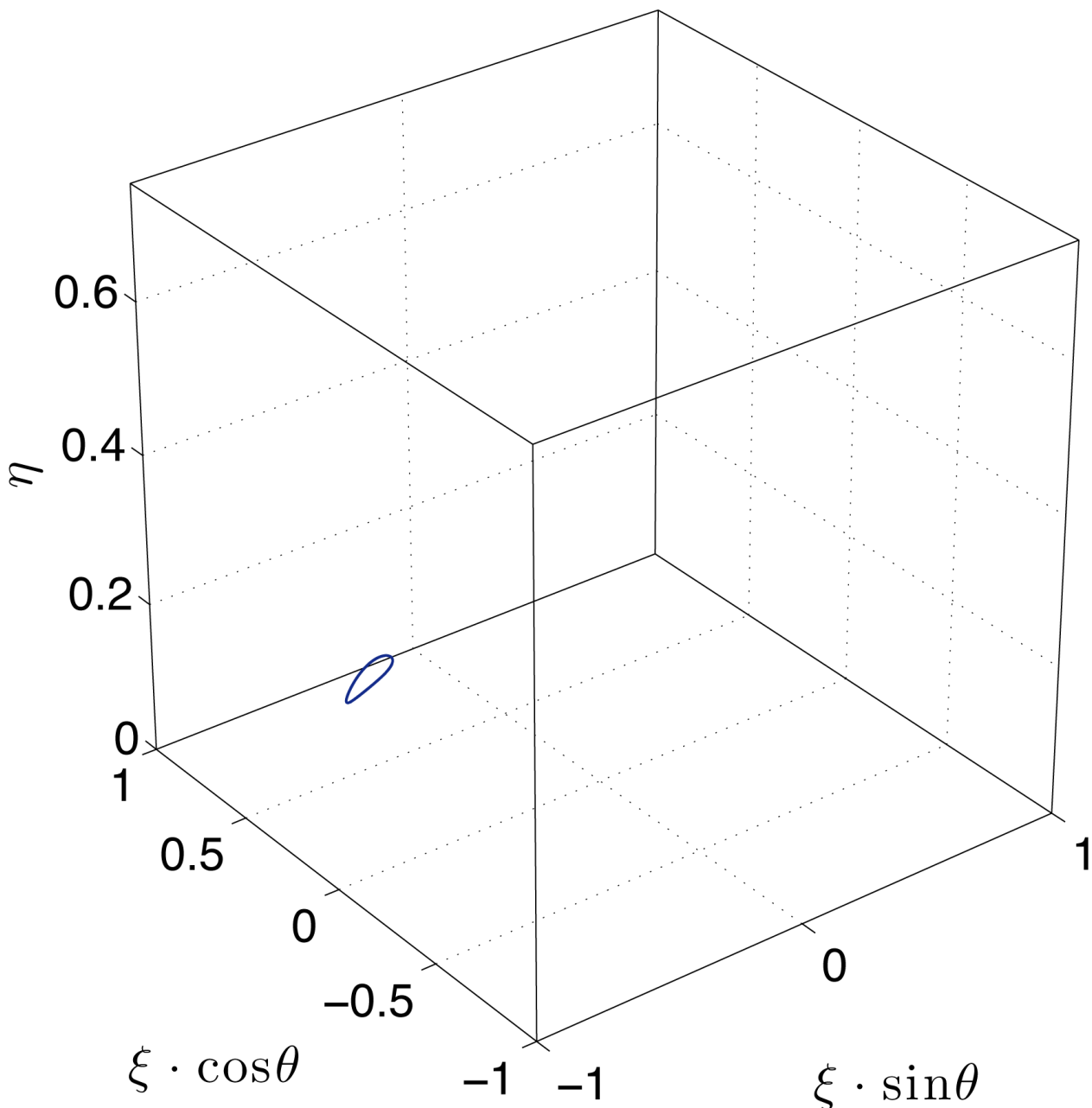


Рис. 30. Предельный цикл в системе (4) при $c_1 = 9.107$

Это явление характерно для рассматриваемого объекта и при других значениях c_1 . Были обнаружены зоны бистабильности при $5.224 < c_1 < 5.226$, в которой хаотический аттрактор сосуществует с устойчивым циклом S^2 (рис. 31, 32), а также в диапазоне значений параметра $5.870 < c_1 < 5.872$, при этом устойчив цикл S^4 .

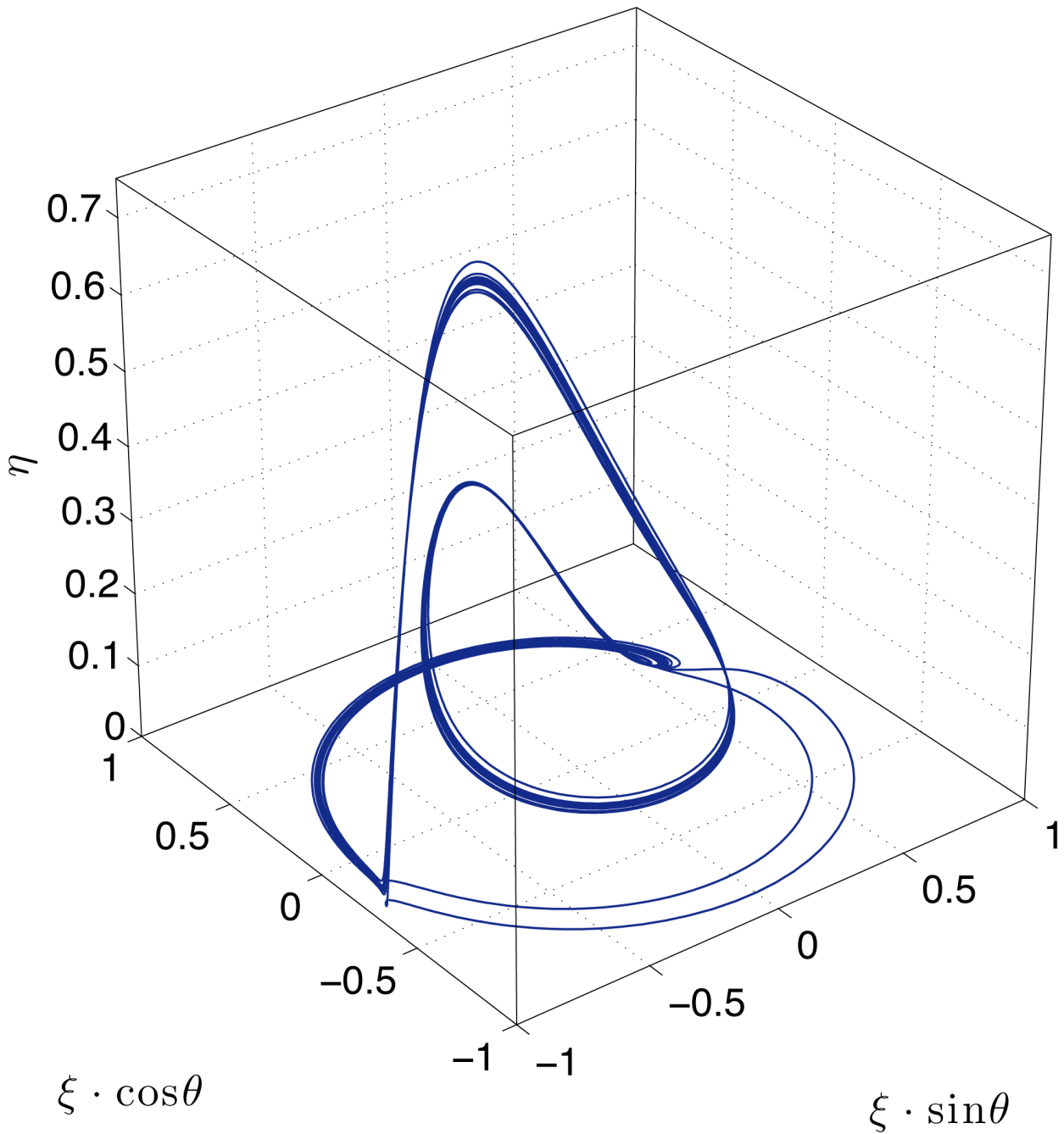


Рис. 31. Хаотический аттрактор в системе (4) при $c_1 = 5.225$

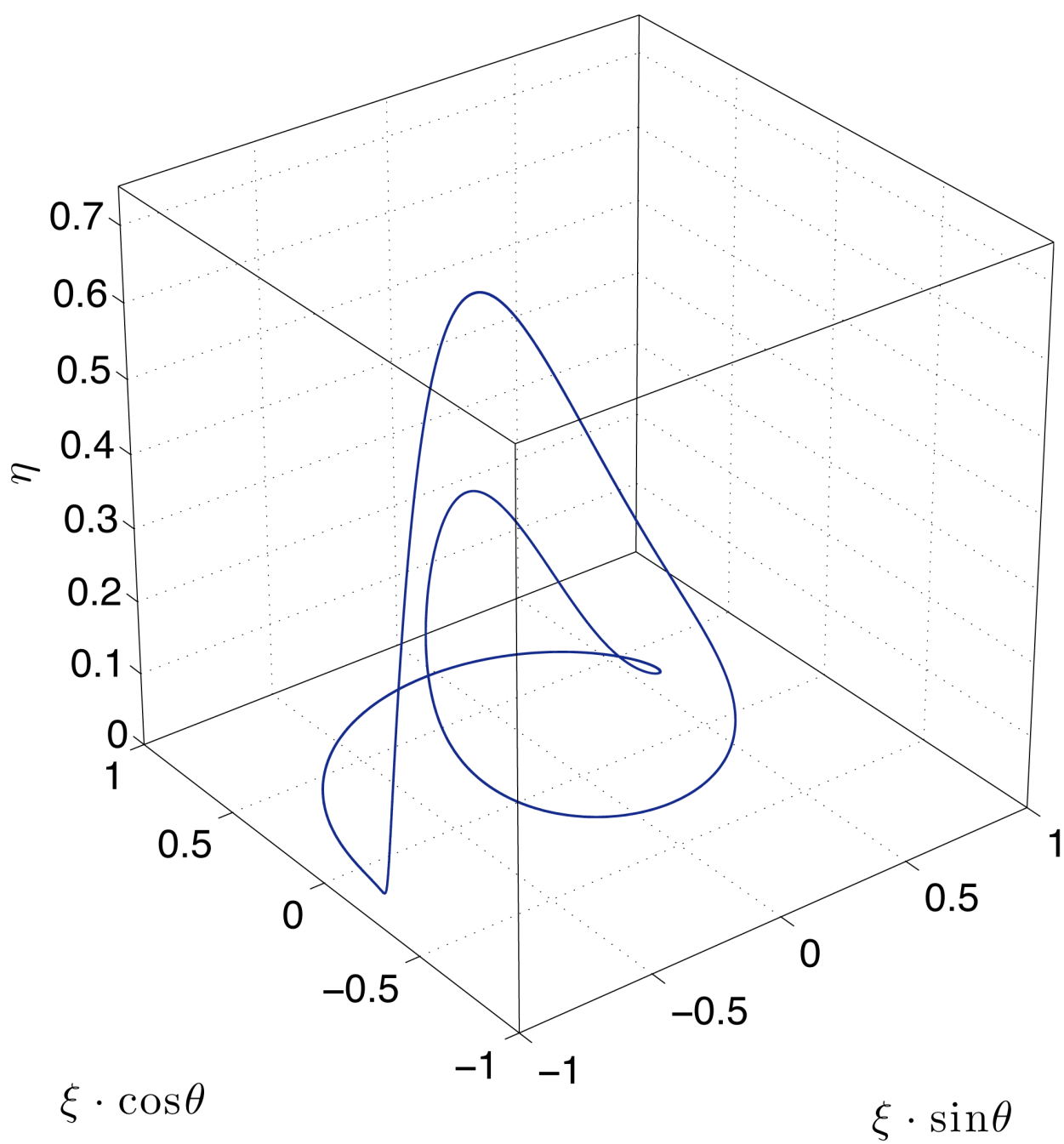


Рис. 32. Цикл S^2 в системе (4) при $c_1 = 5.225$

Заключение

Приведенный численный анализ позволил установить несколько замечательных особенностей аттракторов двухмодовой системы, которая отражает свойства большого класса систем «реакция-диффузия». Была обнаружена большая область параметров, где аттрактор обладает растягивающим и сжимающим направлениями, расположенными под большим углом и с высокой точностью может быть приближен растягивающим одномерным отображением. Это делает его идеальным объектом для эргодической и гиперболической теорий.

Показано качественное соответствие между бифуркационными диаграммами, описывающими рождение и уничтожение странных аттракторов при вариации параметров c_1 , c_2 и k в различных диапазонах. В частности, исчезновение хаоса во множестве случаев связано с кризисом странного аттрактора и бистабильностью (когда наряду со странным аттрактором существует особая точка или предельный цикл).

Интересные свойства изучаемой модели связаны с самоподобием на нескольких уровнях (структура бифуркационной диаграммы типа «каскад каскадов»). Соответствующие одномерные отображения имеют гладкую вершину и острый минимум, что приводит к ряду необычных неустойчивостей.

Благодарности

Считаем приятным долгом выразить признательность С.А. Махову и А.В. Подлазову за помощь и множество полезных советов.

Библиографический список

- [1] Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979. – 512 с.
- [2] Хакен Г. Синергетика. – М.: Мир, 1980. – 406 с.
- [3] Режимы с обострением: эволюция идеи / под ред. Малинецкого Г.Г.; составитель Курдюмов С.П. – М.: Наука, 1999.
- [4] Turing A. The chemical basis of morphogenesis // Phyl. Trans. Roy. Soc. London B. – 1952. – V. 237. – P.37-72.
- [5] Kuramoto Y., Tsuzuki T. On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems // Prog. Theor. Phys. – 1975. – V.54, No. 3. – P. 687-699.

- [6] Кащенко С.А. О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // ДАН СССР. – 1988. – Т. 229, № 5. – С. 1049-1052.
- [7] Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Структуры и хаос в нелинейных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, – 2007. – 488 с.
- [8] Kuramoto Y. Diffusion-induced chaos in reaction systems // Suppl. Prog. Theor. Phys. – 1978. – No. 64. – P. 346-367.
- [9] Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. – Berlin: Springer, 1984. – 156 p.
- [10] Лоренц Э. Детерминированное непериодическое течение // Странные аттракторы. – М.: Мир, 1981. – С. 88-116.
- [11] Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности // Странные аттракторы. – М.: Мир, 1981. – С. 117-151.
- [12] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Stretcin J.M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1, 2 // *Mechanica*. – 1980. – V. 15, No. 1. – P. 9-20; 21-30.
- [13] Collet P., Eckmann J.P. Iterated maps on the interval as dynamical systems. – Basel-Stuttgart: Birkhauser, 1980. – 248 p.
- [14] Боколишвили И.Б., Малинецкий Г.Г. О сценариях перехода к хаосу в одномерных отображениях с острой вершиной. – М.: ИПМ, 1987. – 28 с.
- [15] Feigenbaum M.J. Universal behavior in nonlinear systems // *Los Alamos Sci.* – 1980. – V. 1, No. 1. – P.4-27.
- [16] Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – М.: Мир, 1985. – 419 с.

Оглавление

Введение	3
Инструменты анализа и общая картина	10
Одномерные отображения и сценарии возникновения хаоса.....	13
Семейство отображений «тент» и отображения с острой вершиной	15
Качественные особенности бифуркационных диаграмм	17
Самоподобие фрагментов бифуркационной диаграммы и наличие «вложенных структур»	18
Семейство хаотических аттракторов, порождающих растягивающие одномерные отображения	21
Возникновение хаоса и эволюция одномерных отображений	22
Исчезновение хаотических аттракторов и бистабильность.....	28
Заключение.....	34
Благодарности.....	34
Библиографический список.....	34