ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 58 за 2013 г.

Парусников В.И.

Цепная дробь неоднородной линейной формы

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Парусников В.И. Цепная дробь неоднородной линейной формы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 58. 15 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-58

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

В.И. Парусников

ЦЕПНАЯ ДРОБЬ
НЕОДНОРОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

Москва, 2013 г.

УДК 511.41, 511.43

В. И. Парусников. Цепная дробь неоднородной линейной формы. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2013.

Пусть α, β вещественные числа $0 \le \alpha < 1, 0 \le \beta < 1$, задающие на плоскости $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ неоднородную линейную форму $L_{\alpha,\beta}(y, z) = -\beta + \alpha\, y + z$. В работе предложен алгоритм разложения линейной формы в 'неоднородную цепную дробь'

$$L_{\alpha,\beta} \sim [\ 0\ ;\ b_1, b_2, \ldots]\ \mathrm{mod}\ [\ 0\ ;\ a_1, a_2, \ldots].$$

Неоднородная цепная дробь обобщает классическую (правильную) цепную дробь: при $\beta = 0$ все $b_n = 0$ и мы получаем разложение в цепную дробь числа α: $L_{\alpha,0} \sim [\ 0\ ]\ \mathrm{mod}\ [\ 0\ ;\ a_1, a_2, \ldots]$. Доказаны некоторые свойства неоднородных цепных дробей.

V. I. Parusnikov. A continued fraction of a inhomogeneous linear form. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2013.

Let α, β be real numbers $0 \le \alpha < 1, 0 \le \beta < 1$. They define at the plane $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ the inhomogeneous linear form $L_{\alpha,\beta}(y, z) = -\beta + \alpha\ y + z$. We propose the algorithm of an expansion of this linear form into the 'inhomogeneous continued fraction'

$$L_{\alpha,\beta} \sim [\ 0\ ;\ b_1, b_2, \ldots]\ \mathrm{mod}\ [\ 0\ ;\ a_1, a_2, \ldots].$$

Inhomogeneous continued fraction generalize the classic regular continued fraction: for $\beta = 0$ every $b_n = 0$, and we get the continued fraction expansion of the number α: $L_{\alpha,0} \sim [\ 0\ ]\ \mathrm{mod}\ [\ 0\ ;\ a_1, a_2, \ldots]$. Some properties of inhomogeneous continued fractions are proved.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 11-01-00023а, и программой фундаментальных исследований ОМН РАН "Современные проблемы теоретической математики".

Обозначения. Единичную матрицу обозначим E. Квадратными скобками будет обозначаться целая часть $[x]$ числа x, цепная дробь, а также период цепной дроби, если он есть ($[\, a_0 \, ; \, a_1, \ldots, a_{j-1}, [a_j, \ldots, a_{j+T-1}]]$). Символ T слева вверху матрицы (вектора) означает транспонирование матрицы.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть на двумерной вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (y, z) прямая $\mathcal{L}_1$ задана *нормированным* уравнением (т.е. с коэффициентом 1 при z):

$$\mathcal{L}_1 = \{(y, z) : \; L_1(y, z) \overset{\text{def}}{=} -\beta + \alpha y + z = 0\}. \tag{1}$$

Числа α, β назовём *наклоном* и *сдвигом* прямой. Требуется найти 'наилучшие приближения' к прямой, т.е. целые точки $(y, z) \in \mathbb{Z}^2$, в каком-то смысле 'близкие' к прямой, а именно, в которых значения $L_1(y, z)$ 'близки' к нулю.

В настоящей работе нами будет предложен алгоритм отыскания последовательности наилучших приближений к прямой, т.е. целых чисел (y, z), при подстановке которых в уравнение прямой получаются наименьшие по абсолютной величине значения среди всех целых точек из некоторого расширяющегося семейства множеств целых чисел. Предлагаемый алгоритм занимает промежуточное место между одномерными [1,2] и многомерными алгоритмами (например, [4-7]).

Геометрически алгоритм отличается от известной конструкции 'вытягивания носов'. Точнее, он противоположен указанному алгоритму. В алгоритме вытягивания носов целочисленные аппроксиманты располагаются вдоль прямой по одну сторону от начала координат, всё ближе приближаясь к прямой и всё дальше удаляясь от начала координат. Выходящие из начала координат стороны угла треугольника с вершинами в двух последовательных приближениях образуют всё более острый угол, а сам треугольник от шага к шагу вытягивается. Для предлагаемого нами алгоритма на n-м шаге на плоскости имеются три целочисленные точки, также образующие растянутый вдоль исходной прямой треугольник. В случае $\beta = 0$ точка ноль будет вершиной тупого угла треугольника, но вместо вершин $(0, 0), (p_{n-1}, q_{n-1}), (p_n, q_n)$ у нас вершинами треугольника будут $(0, 0), (-1)^{n-1}(p_{n-1}, q_{n-1}), (-1)^n(p_n, q_n)$, т.е. одна из тачек меняется на симметричную относительно начала координат. В случае $\beta \neq 0$, и вообще, когда числа $\beta, \alpha, 1$ независимы над кольцом Z, при достаточно больших n все вершины треугольника удаляются от начала координат. Расстояние от треугольника до начала координат по вертикальной оси примерно равно β.

Отметим, что вместо нормированного уравнения можно рассматривать произвольное уравнение, задающее прямую,– уравнение, отличающееся от нормированного умножением на не равное нулю число. Исследуемые в работе объекты носят геометрический характер и от этого не меняются.

Одновременно рассмотрим линейную форму

$$L(x,y,z) \stackrel{\text{def}}{=} -\beta x + \alpha y + z, \quad L_1(y,z) = L(1,y,z),$$

и в проективном пространстве $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ с *конечной частью*, отождествлённой с $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{R}^2 \sim \{(x,y,z) \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 : \ x = 1\},$$

рассмотрим множество (плоскость) $\mathcal{L}$, заданную уравнением

$$\mathcal{L} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 : \ L(x,y,z) = 0\}.$$

Прямая $\mathcal{L}_1$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ будет конечной частью плоскости $\mathcal{L}$, лежащей в $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

Пропустим описание предварительного, нестандартного шага алгоритма. Сразу будем считать, что прямая $\mathcal{L}_1$ пересекает квадрат $K_{0,0}$, где

$$K_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \quad i \le y < i+1, \quad j \le z < j+1\}, \quad i,j \in \mathbb{Z},$$

поло́го справа налево сверху вниз. Другими словами, наклон и сдвиг подчинены условиям

$$0 \le \beta < 1, \quad 0 \le \alpha < 1. \tag{2}$$

Произвольная прямая $\mathcal{L}$ имеет вид (2) в координатах, отличающихся от исходных переносом начала координат на целочисленный вектор $(\bar{y},\bar{z}) \in \mathbb{Z}^2$ и, возможно, перестановкой осей y,z местами. Простейший наклон $\alpha = 1$, не укладывающийся в данную схему, не включён в (2) для единообразия последующих шагов: отвечающая этому случаю цепная дробь обрывается на первом шаге.

Замечание 1. Имеется бесконечно много систем координат с так же ориентированными (параллельно заданным) осями, в которых запись уравнения прямой удовлетворяет условию (2). Все они получающихся друг из друга параллельным переносом на целочисленный вектор, а за начало координат можно взять левый нижний угол любого из бесконечного числа квадратов $K_{i,j}$, пересекаемых прямой $\mathcal{L}$. Соответственно в разных системах координат начальными наилучшими приближениями будут разные точки. Разными окажутся и некоторое число первых членов последовательностей наилучших приближений.

Определяемое на шаге преобразование будет задаваться двумя целочисленными параметрами a_n, b_n. Последовательность этих параметров

$\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ мы будем называть (обобщённой) *цепной дробью линейной формы* L и записывать в виде $L \sim$

$$[\ 0\ ;\ b_1, b_2, \dots] \bmod [\ 0\ ;\ a_1, a_2, \dots]. \tag{3}$$

Шаг алгоритма. Положим

$$x_0 = x,\ y_0 = y,\ z_0 = z, \quad \beta_0 = \beta,\ \alpha_0 = \alpha, \quad A_0 = {}^T(-\beta, \alpha, 1).$$

Шаг с номером n, $n \in \mathbb{N}$, алгоритма состоит в построении унимодулярного преобразования M_n, переводящего плоскость

$$\Pi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z):\ x = 1\} \subset \mathbb{R}^3 \tag{4}$$

(и целочисленную решётку $\mathbb{Z}^3$) в себя. В новых координатах

$$X_n \stackrel{\text{def}}{=} (x_n, y_n, z_n) = (x_0, y_0, z_0)M_n$$

значение линейной формы $L(x_0, y_0, z_0)$ записывается как произведение (скалярное произведение) вектора координат на некоторый конкретный вектор, т.е. как значение линейной формы $L^{(n)}(X_n)$,

$$A_n = {}^T(A_{n,1}, A_{n,2}, A_{n,3}) \stackrel{\text{def}}{=} M_n^{-1} A_0 : \tag{5}$$

$$L(X_0) = L^{(0)}(X_0) = X_0 A_0 = X_n A_n = L^{(n)}(X_n).$$

Для компонент нормированного вектора $\bar{A}_n$ введём обозначения α_n, β_n:

$${}^T(-\beta_n, \alpha_n, 1) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{A}_n \stackrel{\text{def}}{=} {}^T\left(\frac{A_{n,1}}{A_{n,3}}, \frac{A_{n,2}}{A_{n,3}}, 1\right); \quad \bar{A}_0 = A_0.$$

Алгоритм будет состоять из шагов, задаваемых элементарными унимодулярными преобразованиями P_n, для которых

$$X_n = X_{n-1} P_n, \quad A_n = P_n^{-1} A_{n-1}.$$

Преобразования M_n будут их композициями

$$M_0 = E, \quad M_n = M_{n-1} P_n = P_1 P_2 \dots P_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

для которых

$$X_n = X_0 M_n, \quad A_n = M_n^{-1} A_0 \quad \text{и} \quad L(X_0) = X_n A_n. \tag{7}$$

Для описываемого алгоритма компоненты нормированного вектора будут подчинены условиям, аналогичным (2):

$$0 \le \beta_n < 1, \quad 0 \le \alpha_n < 1. \tag{8}$$

Перейдём к описанию n-го шага ($n \in \mathbb{N}$) алгоритма. Если $\alpha_{n-1} = 0$ (или, эквивалентно, $A_{n-1,2} = 0$), будем говорить, что алгоритм (разложение в неоднородную цепную дробь) *оборвался на шаге* n. Если же $\alpha_{n-1} \neq 0$, определим *элементы цепной дроби – неполное частное* a_n и *смещение* b_n:

$$a_n = \left[\frac{1}{\alpha_{n-1}}\right], \quad b_n = \left[\frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}}\right]. \tag{9}$$

Зададим коэффициенты $(n+1)$-ой нормированной формы формулами

$$\beta_n = \frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}} - b_n, \quad \alpha_n = \frac{1}{\alpha_{n-1}} - a_n. \tag{10}$$

Из (9),(10) и определения целой части числа следует, что β_n, α_n снова удовлетворяют соотношениям (8). Через векторы коэффициентов A_{n-1} (9), (10) записываются как

$$a_n = \left[\frac{A_{n-1,3}}{A_{n-1,2}}\right], \quad b_n = \left[-\frac{A_{n-1,1}}{A_{n-1,2}}\right],$$

$$\begin{aligned} A_{n,1} = {} & A_{n-1,1} + b_n A_{n-1,2}, \\ A_{n,2} = {} & A_{n-1,3} - a_n A_{n-1,2}, \\ A_{n,3} = {} & A_{n-1,2}, \end{aligned}$$

а в векторной форме – как

$$A_n = P_n^{-1} A_{n-1},$$

где

$$P_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & b_n & 0 \\ 0 & -a_n & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b_n \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Введём индивидуальные обозначения для величин $-A_{n,1}, A_{n,2}$ (минус введён, чтобы обеспечить их неотрицательность):

$$\delta_n \overset{\text{def}}{=} A_{n,2}, \quad \epsilon_n \overset{\text{def}}{=} -A_{n,1}.$$

Поскольку $A_{n,3} = A_{n-1,2} = \delta_{n-1}$, то

$$a_n = \left[\frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}}\right], \quad b_n = \left[\frac{\epsilon_{n-1}}{\delta_{n-1}}\right],$$

и величины ϵ_n, δ_j связаны рекуррентными уравнениями

$$\delta_n = \delta_{n-2} - a_n \delta_{n-1}, \quad \epsilon_n = \epsilon_{n-1} - b_n \delta_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

с начальными условиями

$$\delta_{-1} = 1, \quad \delta_0 = \alpha, \qquad \epsilon_0 = \beta.$$

Соотношение на ϵ_n можно переписать через величины δ_j

$$\epsilon_n = \beta - \sum_{j=1}^{n} b_j \delta_{j-1},$$

а представление (5) – как

$$A_n = M_n^{-1} A_0 = \ ^T(\ -\beta + \sum_{j=1}^{n} b_j \delta_{j-1}, \ \delta_n, \ \delta_{n-1} \ ).$$

Используя положительность $A_{n-1,2}$ (δ_{n-1}), В других обозначениях неравенства (8) могут быть последовательно по n интерпретированы как

$$0 \ \leq -A_{n,1} < A_{n,3}, \quad 0 \ \leq A_{n,2} < A_{n,3},$$

или

$$0 \ \leq \ \epsilon_n \ < \ \delta_{n-1}, \quad 0 \ \leq \ \delta_n < \ \delta_{n-1}. \tag{11}$$

Повтор описанных в данном пункте шагов приводит к конечной или бесконечной цепной дроби (3).

Конечная цепная дробь получится, если на каком-то шаге n алгоритма наклон α_n оказался равным нулю. В частности, если всё же рассмотреть исключённый нами случай $\alpha = 1$, алгоритм оборвётся на первом же шаге.

Предложение 1. *Разложение в цепную дробь обрывается тогда и только тогда, когда число α рационально.*

В определении элементов a_n участвуют только вторая и третья компоненты вектора A_n, а первая – нет. Т.е. последовательность $\{a_n\}$ не зависит от сдвигов β_n и, в частности, от сдвига β_0. При $\beta_0 = 0$ определённый нами алгоритм является в точности алгоритмом разложения α в классическую правильную цепную дробь.

Предложение 2. *При $\beta = 0$, то на всех шагах $b_n = 0, \beta_n = 0$ и формулы (9), (10) редуцируются в формулы разложения числа α в классическую правильную цепную дробь с элементами a_n $[\ 0 \ ; \ a_1, a_2, a_3, \ldots]$.*

Так как число β_n пропорционально $\epsilon_n = \beta - v_n\alpha - u_n$, то равенство $\beta_n = 0$ означает $\beta = v_n\alpha + u_n$ с целыми u_n, v_n, т.е. что β целочисленно выражается через 1 и α, или, эквивалентно, прямая $\mathcal{L}_1$ проходит через целую точку $(y, z) = (v_n, u_n) \in \mathbb{Z}^2$. Можно показать и обратное:

Предложение 3. *Если $\beta = v\alpha + u$, где $u, v \in \mathbb{Z}$, то при некотором n будет $\beta_n = 0$ и $b_j = 0$ для $j > n$.*

Замечание 2. Вместо операции [.] взятия целой части можно рассмотреть операцию взятия ближайшего целого, ближайшего чётного (нечётного) числа и вообще любую операцию, на основе которой может быть построено какое-либо осмысленное обобщение одномерной цепной дроби. При этом можно предположить, что возможен и комбинированный подход, когда a_n вычисляется по одному правилу, а b_n – по другому. Однако, как будет показано дальше, последнее обобщение малосодержательно: полученные по надуманным правилам цепные дроби в некотором смысле эквивалентны цепной дроби, в которой величины b_n получают 'стандартным' путём. Тем не менее, есть несколько 'стандартных' способов, каждый из которых приспособлен для описания определённых специфических свойств цепной дроби.

Замечание 3. Описание шага алгоритма годится не только для случая прямой на плоскости $\mathbb{R}^2$, когда отыскиваются точки решётки $\mathbb{Z}^2$, близкие к прямой.

Пусть имеется некоторое поле K, снабженное топологией, относительно которой непрерывны операции сложения и умножения. Далее, пусть K непрерывно вложено в полное топологическое пространство F, в котором оно плотно. При этом F также поле. Примерами таких полей K будут поля алгебраических чисел (поле $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ или $\mathrm{F} = \mathbb{C}$), поле $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел, поле рациональных функций $\tilde{\mathrm{F}}(X)$ над другим полем $\tilde{\mathrm{F}}$, поле $\tilde{\mathrm{F}}((X))$ формальных степенных рядов $f = \sum_{r=n}^{\infty} c_r X^r$ ($c_r \in \tilde{\mathrm{F}},\ n \in \mathbb{Z}$) над $\tilde{\mathrm{F}}$.

'Целой частью' [.] там может служить любое приемлемое в топологическом смысле отображение пространства F в некоторое подмножество M, инвариантное относительно некоторой аддитивной подгруппы F. Можно потребовать, чтобы это отображение (или некоторая его степень, например, квадрат) действовало неподвижно в точках M, т.е. было *проектором.* Таким образом, уже в вещественном случае вместо целой части может быть взято, например, любое чередование (в зависимости, например, от наперёд заданного номера шага или результата предыдущего шага) операций, перечисленных в предыдущем пункте.

Предложение 4. *Для элементов a_n, b_n цепной дроби верно:*

$$1 \le a_n, \quad 0 \le b_n \le a_n, \tag{12}$$

$$\textit{если}\ \ b_{n-1} = a_{n-1}, \quad \textit{то}\ \ b_n = 0. \tag{13}$$

Свойство (12) вытекает из неравенств (8), (9) (на самом деле, (12) эквивалентно (8), (9)). Чтобы проверить (13), попробуем решить систему

$$b_{n-1} = a_{n-1}, \quad 1 \le b_n, \tag{14}$$

являющуюся отрицанием свойства (13). В явном виде неравенство $1 \le b_n$ записывается как

$$1 \le \left[\frac{\beta_{n-1} - \alpha_{n-1} \left[\dfrac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \right]}{1 - \alpha_{n-1} \left[\dfrac{1}{\alpha_{n-1}} \right]} \right] \le \frac{\beta_{n-1} - \alpha_{n-1} \left[\dfrac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \right]}{1 - \alpha_{n-1} \left[\dfrac{1}{\alpha_{n-1}} \right]},$$

где знаменатель длинной дроби, с точностью до множителя α_{n-1}, равен положительному числу α_n. Поэтому охватывающее неравенство последней строки переписывается как

$$1 - \alpha_{n-1} \left[\frac{1}{\alpha_{n-1}} \right] \le \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} \left[\frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \right].$$

Далее, равенство $b_{n-1} = a_{n-1}$ означает, что $\left[\dfrac{1}{\alpha_{n-1}} \right] = \left[\dfrac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \right]$, в силу чего предыдущее неравенство равносильно неравенству $1 \le \beta_{n-1}$, противоречащему (8). Итак, система (14) не имеет решений и Предложение 4 доказано.

Матрицы P_n и обратные к ним P_n^{-1} имеют блочную структуру: их первый столбец – единичный вектор; такими же будут и матрицы M_n и M_n^{-1}. Из рекуррентной формулы (6) и вида матриц P_n вытекает, что правые нижние 2×2 блоки этих матриц совпадают с матрицами, возникающими в теории обыкновенных цепных дробей, и состоят из числителей p_n и знаменателей q_n последовательных подходящих дробей числа α. Для элементов первых строк M_n, M_n^{-1}, $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0\} \bigcup \mathbb{N}$, введём специальные обозначения o_n, u_n, v_n в соответствии со следующими формулами:

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & o_{n-1} & o_n \\ 0 & p_{n-1} & p_n \\ 0 & q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}, M_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & v_n & u_n \\ 0 & (-1)^n q_n & -(-1)^n p_n \\ 0 & -(-1)^n q_{n-1} & (-1)^n p_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{array}{c} \det M_n = \\ p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n = \\ (-1)^n. \end{array}$$

Они суть целые числа, для которых верны рекуррентные формулы с выписанными начальными условиями:

$$\begin{array}{rll} o_{-1} = 0,\ o_0 = 0, & o_n = a_n\, o_{n-1} + o_{n-2} - b_n\,, & \\ p_{-1} = 1,\ p_0 = 0, & p_n = a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}, & \\ q_{-1} = 0,\ q_0 = 1, & q_n = a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}, & \\ u_0 = 0, & u_n = u_{n-1} - b_n\, (-1)^{n-1} p_{n-1}, & \\ v_0 = 0, & v_n = v_{n-1} + b_n\, (-1)^{n-1} q_{n-1} & (n \in \mathbb{N}). \end{array} \tag{15}$$

Следующее утверждение очевидно:

Предложение 5. *Верны формулы*

$$u_n = -\sum_{j=1}^{n} b_j(-1)^{j-1}p_{j-1}, \quad v_n = \sum_{j=1}^{n} b_j(-1)^{j-1}q_{j-1},$$
$$\delta_n = (-1)^n(q_n\alpha - p_n),$$
$$\epsilon_n = \beta - v_n\alpha - u_n, \quad n \in \{-1\} \bigcup \mathbb{Z}_+.$$

В дальнейшем будут встречаться величины

$$\bar{v}_n \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{n+1}v_n = \sum_{j=1}^{n} b_j(-1)^{n-j}q_{j-1} = b_nq_{n-1} - b_{n-1}q_{n-2} + b_{n-2}q_{n-3} - \dots,$$

а в вычислениях полезны следующие формулы

$$\begin{array}{lclcl} q_no_{n-1} & + & q_no_{n-1} & = & \bar{v}_n, \\ v_np_{n-1} & + & u_nq_{n-1} & = & -\,o_{n-1}, \\ v_np_n & + & u_nq_n & = & -\,o_n. \end{array} \tag{16}$$

Два первых соотношения являются поэлементной интерпретацией формул обращения матриц M_n, M_n^{-1}, третье следует из рекуррентных формул для u_n, v_n.

По индукции устанавливается, что величины $-o_n, p_n, q_n$ неотрицательны и $0 \le -o_n < q_n$, $-q_{n-1} < \bar{v}_n < q_n$.

Теорема 1. *Компоненты векторов* $A_n = (-\epsilon_n, \delta_n, \delta_{n-1})$ *стремятся к нулю при* $n \to \infty$.

Доказательство. Индукцией по n проверяется, что

$$\delta_nq_{n-1} + \delta_{n-1}q_n = 1 \quad (\text{и} \ \ \delta_np_{n-1} + \delta_{n-1}p_n = \alpha\,), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Откуда, учитывая монотонность (11) последовательности δ_n, получаем $\delta_n(q_{n-1} + q_n) < 1 < \delta_{n-1}(q_{n-1} + q_n)$, т.е.

$$1 = \delta_0 > \dots > \delta_{n-1} > \frac{1}{q_{n-1} + q_n} > \delta_n > \frac{1}{q_n + q_{n+1}} > \dots > 0.$$

Из (15) и $a_n \ge 1$ следует, что $q_n > n$ и последовательность δ_n сверху и снизу оценена последовательностью, стремящейся к нулю. Теперь из неравенства (11) $0 \le \epsilon_n < \delta_{n-1}$ следует и утверждение теоремы для ϵ_n.

Назовём *базисными точками* три лежащие в плоскости Π_1 (см. (4)) точки

$$e_1 \stackrel{\text{def}}{=} (1,0,0), \quad e_2 \stackrel{\text{def}}{=} (1,1,0), \quad e_3 \stackrel{\text{def}}{=} (1,0,1).$$

Эти точки образуют базис решётки $\mathbb{Z}^3$, а лежащий в плоскости Π_1 параллелограмм с вершинами в этих точках имеет единичную площадь и его стороны $e_2 - e_1, e_3 - e_1$ образуют базис решётки $(\mathbb{Z}^3 \bigcap \Pi_1) \sim \mathbb{Z}^2$. Точки

$$e_{n,j} = e_j M_n^{-1}, \quad j = 1, 2, 3, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

назовём *n-ми наилучшими приближениями к неоднородной форме* L, $L = L^{(0)}$: $L(e_{n,j}) = e_j M_n^{-1} A_0 = e_j A_n = L^{(n)}(e_j)$.

Следствие 1. *Значения формы $L(X)$ в точках наилучшего приближения $e_{n,j}$ стремятся к нулю. Треугольник с вершинами в этих точках пересекается с прямой $\mathcal{L}_1$.*

Поскольку

$$L^{(n)}(1,0,0) = -\epsilon_n, \quad L^{(n)}(1,1,0) = -\epsilon_n + \delta_n, \quad L^{(n)}(1,0,1) = -\epsilon_n + \delta_{n-1},$$

все эти величины по модулю не превосходят δ_{n-1}:

$$-\delta_{n-1} < L(e_{n,1}) \leq 0, \quad -\delta_{n-1} < L(e_{n,2}) < \delta_{n-1}, \quad 0 < L(e_{n,3}) \leq \delta_{n-1}.$$

Т.е., действительно, целые проекции $e_{1,n,j} \in \mathbb{Z}^2$

$$(v_n, u_n), \;\; (v_n{+}(-1)^n q_n, u_n{-}(-1)^n p_n), \;\; (v_n{+}(-1)^{n-1} q_{n-1}, u_n{-}(-1)^{n-1} p_{n-1}). \quad (17)$$

точек $e_{n,j}$ на плоскость Π_1 лежат близко к прямой $\mathcal{L}_1$ и значения $L_1(e_{1,n,j})$ линейной формы L_1 в них близки к нулю. Поскольку $L_1(e_{1,n,1}) \leq 0$, а $L_1(e_{1,n,3}) > 0$, то две стороны треугольника пересекаются с прямой $\mathcal{L}_1$.

Проведём три прямые $\mathcal{L}^n_{j,k}$, $j \neq k$, через вершины $e_{1,n,j}, e_{1,n,k}$ треугольника (17). Их наклоны $t^n_{j,k}$ равны

$$t^n_{1,2} = \frac{p_n}{q_n}, \quad t^n_{3,1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \quad t^n_{2,3} = \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}, \tag{18}$$

и близки к наклону α прямой $\mathcal{L}_1$. Продолжение $\mathcal{L}^n_{2,3}$ самой длинной из сторон треугольника лучше всего аппроксимирует наклон прямой. Координаты $\beta^n_{j,k}$ точек, в которых эти прямые пересекают ось z, равны

$$\beta^n_{1,2} = \frac{-\,o_n}{q_n}, \quad \beta^n_{3,1} = \frac{-\,o_{n-1}}{q_{n-1}}, \quad \beta^n_{2,3} = \frac{1 - o_n - o_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}. \tag{19}$$

Замечание 4. Алгоритм имеет геометрический смысл. Шаг алгоритма преобразует пересекающийся с прямой L_1 базисный параллелограмм плоскости $\mathbb{Z}^2$ в аналогичный, но более растянутый вдоль прямой, с вершинами – наилучшими приближениями к ней. При этом у нового параллелограмма одна (или две) вершины старые, а другие – новые. Шаг алгоритма состоит из трёх этапов. Два коммутирующих друг с другом этапа (S, R) суть отыскание целочисленного приближения a к наклону прямой (его целой части) и целочисленного сдвига начала координат так, чтобы он переместился ближе к прямой L_1. Третий этап $J,\ J^2 = E$, это замена местами координат y, z на плоскости.

Задающий базис n-й системы координат треугольник вершинами имеет точки – наилучшие приближения (17), а наклонами сторон – величины (18). Первая вершина треугольника сдвинута относительно исходного начала координат на вектор (v_n, u_n), а за один n-й шаг система координат сдвигается на вектор $b_n\ (-1)^{n-1}(q_{n-1}, p_{n-1})$, пропорциональный стороне $(n-1)$-го треугольника.

Матрицы P_n^{-1} являются композициями матриц, возникающих на этих этапах. При этом мы рассматривали иной способ компоновки последовательности этапов в шаги

$$\begin{aligned}
&\dots R_{n-2}J\ \ S_{n-1}R_{n-1}J\ \ S_nR_nJ\ \ S_{n+1}R_{n+1}\dots =\\
&= \dots R_{n-2}J\ \ JJS_{n-1}JJR_{n-1}J\ \ JJS_nJJR_nJ\ \ JJS_{n+1}JJR_{n+1}\dots =\\
&= \dots R_{n-2}J\ \ JS'_{n-1}JR_{n-1}J\ \ JS'_nJR_nJ\ \ JS'_{n+1}JR_{n+1}\dots =\\
&= \dots\ \ R_{n-2}JJS'_{n-1}J\ \ R_{n-1}JJS'_nJ\ \ R_nJJS'_{n+1}J\ \ R_{n+1}\dots =\\
&= \dots\ \ R_{n-2}S'_{n-1}J\ \ R_{n-1}S'_nJ\ \ R_nS'_{n+1}J\ \ R_{n+1}\dots\ .
\end{aligned}$$

$(S' = JSJ$, и уже $S'R \neq RS')$, при котором этап S' шага алгоритма может быть описан, как и в нашем случае, в геометрических терминах близости узлов решётки Z^2 к прямой. Причём выбор смещения b' выглядит даже чуть более 'естественно'. Недостаток этого взгляда в том, что индексация последовательности b'_n относительно a'_n сдвигается на 1.

Замечание 5. Предложение 1 и некоторые из высказываний, сделанных в Замечаниях 1 и 3, будут доказаны в отдельных публикациях. Планируются работы, посвящённые периодическим неоднородным цепным дробям, вопросам сходимости, группе сложения, образованной сдвигами, 'геометричности' наилучших приближений сходимости неоднородных дробей, группе сложения на них, неоднородным цепным дробям над другими полями. Часть из этих работ находится в процессе формирования.

Примеры.

Напомним, что число, обратное 'золотому сечению', разлагается в цепную дробь, все элементы которой, кроме начального, равны 1, т.е. в периодическую цепную дробь с периодом, состоящим из одной единицы: $\alpha = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} \sim$ $[\ 0\ ;\ [1]\ ]$.

Пример 1. $L = -\dfrac{3}{7(1+\sqrt{5})} + \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}y + z$ разлагается в периодическую цепную дробь с длиной периода 48:

$$\begin{aligned}[\ 0\ ;\ [\ &0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,1,0,1,0,1,0,0,0,1,0,0,1,0,1,\\ &0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0]\ ]\ \mathrm{mod}\ [\ 0\ ;\ [1]\ ],\ T = 48.\end{aligned}$$

Пример 2. По сравнению с предыдущим, в этом примере α, β 'почти' поменяны местами. $L = -\dfrac{2}{1+\sqrt{5}} + \dfrac{15}{7(1+\sqrt{5})}y + z$ разлагается в периодическую цепную дробь с длиной периода 50:

$$\begin{aligned}&[\ 0\ ;\ 0, [\ 1,0,20,8,1,0,0,0,0,31,0,1,4,0,4,0,0,0,4,0,0,8,1,0,0,\\ &\qquad\qquad 1,0,2,0,1,1,0,1,3,0,2,4,37,1,0,1,2,0,11,2,0,2,0,1,0\ ]\ ]\\ &\mathrm{mod}\ [\ 0\ ;\ 1, [\ 1,1,24,10,1,1,1,2,2,51,1,3,14,1,8,1,1,1,5,1,1,10,7,1,1,\\ &\qquad\qquad 1,1,12,2,3,1,1,3,4,2,6,6,42,1,1,9,12,1,15,3,1,2,1,1,1\ ]\ ],\ T = 50.\end{aligned}$$

Пример 3. $L = -\dfrac{1}{2e} + \dfrac{1}{e}y + z \sim$

$$[\ 0\ ;\ 0,0,1,1,0,2,0,0,3,1,0,4,0,0,\ldots]\ \mathrm{mod}\ [\ 0\ ;\ 2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,\ldots].$$

Пример 4. $L = -\dfrac{3}{2}\,\dfrac{e^2-1}{e^2+1} + \dfrac{e^2-1}{e^2+1}y + z$. Здесь, как и в примере 3, сдвиг пропорционален половине наклона.

$$\begin{aligned}[\ 0\ ;\ &0,1,4,3,6,6,1,4,3,9,2,8,16,9,1,15,21,30,2,9,29,1,26,10,20,46,29,20,32,17,44,\\ &49,9,62,34,5,50,11,11,68,1,26,62,77,2,33,80,87,28,42,29,29,88,74,80,54,20,\\ &93,112,39,2,32,18,57,100,29,41,54,64,62,63,4,45,5,113,137,113,2,52,132,44,\\ &19,58,75,56,152,9,162,87,89,79,179,91,113,156,67,98,162,139,186,17,\ldots]\\ &\mathrm{mod}\ [\ 0\ ;\ 1,3,5,7,9,11,\ldots\ ].\end{aligned}$$

Пример 5. $L = (\dfrac{3}{2}\,\dfrac{e^2-1}{e^2+1} - 1) + \dfrac{e^2-1}{e^2+1}y + z$. Сумма сдвига из этого примера со сдвигом из примера 4 равна единице.

$$\begin{aligned}[\ 0\ ;\ &0,0,3,5,0,8,1,13,14,4,13,13,11,26,17,8,15,27,2,34,3,1,16,38,31,44,17,2,47,\\ &56,6,41,14,26,50,8,38,53,56,63,1,40,9,27,47,5,74,35,41,63,43,96,28,57,65,\\ &80,87,83,109,58,3,48,27,86,85,108,129,14,96,24,23,77,68,8,96,55,15,80,1,\\ &38,145,111,5,112,85,57,13,156,42,44,28,177,44,76,139,100,148,49,11,\ldots]\\ &\mathrm{mod}\ [\ 0\ ;\ 1,3,5,7,9,11,\ldots\ ].\end{aligned}$$

Пример 6. $L = -\dfrac{1}{e} + \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}y + z$. Поскольку последовательность $\{b_n\}$ состоит только из нулей и единиц

$$[\,0\,;\,0,0,1,0,1,0,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,\ldots]\ \mathrm{mod}\ [\,0\,;\,[1]\,],$$

для лучшей обозримости записи цепной дроби подпоследовательность этой последовательности, состоящую из j нулей, за которой следует единица, обозначим (только в последующей формуле!) символом j:

$$\begin{aligned}[0;&2,1,1,3,1,4,1,2,7,1,2,1,1,3,1,5,1,2,3,1,2,1,2,1,4,2,7,1,2,1,2,2,1,3,1,5,3,1,4,1,1,\\
&6,3,3,3,3,3,6,2,1,3,4,3,3,3,1,4,3,1,1,4,1,1,3,8,2,2,1,2,1,2,2,2,2,4,2,1,5,4,2,3,5,\\
&1,3,2,9,2,2,3,1,4,1,2,3,6,1,3,1,1,3,2,3,1,4,1,3,1,2,4,3,4,1,13,1,2,2,2,7,2,2,1,4,2,\\
&6,1,1,2,3,1,2,5,2,2,2,2,1,3,1,1,2,2,1,2,6,6,3,7,2,3,3,1,2,1,2,2,1,1,1,1,1,5,1,1,1,\\
&1,4,2,2,3,1,2,1,3,3,3,3,2,4,1,4,2,2,4,2,1,3,3,2,5,1,5,1,1,1,2,1,1,2,3,2,2,2,3,1,3,\\
&6,2,1,6,1,1,2,3,3,4,1,1,5,1,3,3,2,4,2,1,9,1,3,1,10,3,2,1,2,4,3,3,1,2,4,1,1,1,1,1,8,\\
&2,1,1,1,3,4,6,3,1,1,5,1,1,2,3,5,1,10,7,1,1,3,2,1,\ldots]\ \mathrm{mod}\ [\,0\,;\ [1]\,].\end{aligned}$$

Список литературы

1. Никишин Е.М., Сорокин В.Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988. 254 с.

2. Хинчин А.Я. Цепные дроби. Издание второе. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 104 с.

3. Касселс Дж. В.С. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: Изд. иностр. литературы, 1961. 213 с.

4. Euler L. De relatione inter ternas pluserve quantitates instituenda // Petrsburger Akademie Notiz: Exhib. August 14, 1775. = Opuscula Analytica von Euler. 1785. T. 2. S. 91. = Commentationes aritmeticae collectae. 1849. T. II. P. 99-104. St. Petersburg. = Commentationes arithmeticae. 1941. T. 3. P. 136-145.

5. Jacobi K. G. J. Allgemeine Theorie der Kettenbruchänlichen Algo rithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird // J. für die Reine und Angewandte Mathematik. 1868. Bd. 69. S. 29-64.

6. Perron O. Grundlagen für eine Theorie des Jakobischen Kettenbruch Algorithmus // Math. Ann. 1907. V. 64. N 6. S. 1-76.

7. Parusnikov V.I. On the convergence of the multidimensional limit-periodic continued fractions // Lect. Notes in Math. New York. 1985. N 1237. P. 217-227.