ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 54 за 2013 г.

Пустыльников Л.Д., Дерябин М.В.

Чёрные дыры и обобщённые релятивистские биллиарды

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Пустыльников Л.Д., Дерябин М.В. Чёрные дыры и обобщённые релятивистские биллиарды // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 54. 36 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-54**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

Л. Д. Пустыльников, М. В. Дерябин

ЧЁРНЫЕ ДЫРЫ И ОБОБЩЁННЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ БИЛЛИАРДЫ

Москва, 2013 г.

Л. Д. Пустыльников, М. В. Дерябин. Чёрные дыры и обобщённые релятивистские биллиарды. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2013.

Дано обоснование существования чёрных дыр. Это обоснование основано на понятии обобщённого релятивистского биллиарда. Обобщённый релятивистский биллиард — это динамическая система, в которой частица двигается под влиянием некоторого силового поля внутри области с псевдо-римановой метрикой, и если частица сталкивается с границей области, то её скорость преобразуется так, как если бы частица подверглась упругому удару от движущейся стенки, который рассматривается в рамках специальной теории относительности. Изучаются как периодическое, так и "монотонное" действия границы. Доказано, что в обоих случаях при некоторых общих условиях инвариантное многообразие в фазовом пространстве обобщённого релятивистского биллиарда, где скорость точки равна скорости света, есть экспоненциальный аттрактор или содержит его, и для открытого множества начальных данных энергия частицы стремится к бесконечности.

L. D. Pustyl'nikov, M. V. Deryabin. Black holes and generalized relativistic billiards. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2013.

It is given the justification of the existence of black holes. This justification is based on the notation of generalized relativistic billiard. A generalized relativistic billiard is the following dynamical system: a particle moves under the influence of some force fields in the interior of a domain with pseudo-Riemannian metric, and as the particle hits the boundary of the domain, its velocity is transformed as if the particle underwent an elastic collision from a moving wall, considered in the framework of the special theory of relativity. We study a periodic and "monotone" action of the boundary. We prove that in both cases under some general conditions the invariant manifold in the velocity phase space of the generalized relativistic billiard, where the point velocity equals the velocity of light, is an exponential attractor or contains one, and for an open ser of initial conditions the particle energy tends to infinity.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 11-01-00023-а.

1 Введение

Главная цель этой работы — дать обоснование природы чёрных дыр. Согласно определению чёрной дыры (см. Wikipedia, black hole) этот объект представляет собой область космического пространства, в которую затягиваются лежащие вблизи от него точки этого пространства, как материальные, так и свет. С момента открытия чёрных дыр их обоснование осуществлялось на основе общей теории относительности. Однако точного и строгого понимания причин и механизмов возникновения чёрных дыр не достигнуто. В настоящей работе предпринята попытка дать такое строгое обоснование. Это обоснование основано на понятии обобщённого релятивистского биллиарда, для которого доказано существование в фазовом пространстве экспоненциальных аттракторов, таких, что точки, расположенные в их окрестности, приближаются к аттрактору экспоненциально быстро, скорость частиц стремится к скорости света, а энергия частиц экспоненциально быстро стремится к бесконечности. Высказывается также следующая проблема: как совместить понятие чёрной дыры со вторым началом термодинамики (Wikipedia, black hole), и эта проблема находит своё решение в рамках теории обобщённых релятивистских биллиардов ([15], [16], [17], [5]). А именно, в этих работах доказано, что при достаточно общих условиях, накладываемых на обобщённый биллиард с учётом релятивистского фактора термодинамическая энтропия и энтропия Гиббса возрастают.

Перейдём к описанию классических биллиардов и их обобщений, которые могут рассматриваться как в классической (ньютоновской), так и в релятивистской механике (теории относительности). Классический биллиард — это динамическая система, порождённая линейным равномерным движением массивной точки (частицы) с постоянной скоростью внутри замкнутой области $\Pi \in R^n$ с кусочно-гладкой границей Γ. При этом отражение частицы от границы Γ таково, что нормальная компонента скорости частицы меняет свой знак, в то время как касательная компонента скорости частицы сохраняется [1]. Таким образом, длина вектора скорости при отражении от границы также сохраняется. Для произвольного Риманового многообразия с границей (вместо R^n) биллиард — это геодезический поток внутри замкнутой области на этом многообразии с тем же самым отражением от границы Γ (нормальная компонента скорости частицы меняет знак, а касательная компонента скорости частицы сохраняется). В случае Евклидова пространства этот закон отражения приводит к классическому закону: угол падения равен углу отражения. Биллиарды изучались во многих работах ([9]). Для широкого класса классических биллиардов (биллиарды Синая и их обобщения) были доказаны сильные стохастические свойства (эргодичность, перемешивание и др., [24], [25]).

Эта работа посвящена обобщённым биллиардам, которые были введены в общем случае в [17], а в случае, когда область Π — параллелепипед, были введены в [16]. С физической точки зрения обобщённый биллиард описывает газ, состоящий из конечного числа частиц, двигающихся в сосуде, в то время как стенки сосуда нагревают газ или охлаждают его. Существо обобщения состоит в следующем. Как только частица ударяет границу Γ, её скорость преобразуется с помощью заранее заданной функции $f(\gamma, t)$, определённой на прямом произведении $\Gamma \times R^1$ (здесь R^1 — вещественная прямая, $\gamma \in \Gamma$ — точка границы и $t \in R^1$ — время) согласно следующему закону. Предположим, что траектория частицы, которая двигается со скоростью v внутри Π, пересекается с Γ в точке $\gamma \in \Gamma$ в момент времени t^*. Тогда в этот момент времени t^* частица приобретает такую скорость v^*, как если бы она подверглась упругому удару со стороны бесконечно-тяжёлой плоскости Γ^*, которая касается Γ в точке γ, и в момент времени t^* двигается вдоль нормали к Γ в точке γ со скоростью $\dfrac{\partial f}{\partial t}(\gamma, t^*)$. Подчеркнём, что положение самой границы — фиксировано, в то время как воздействие на частицы осуществляется через функцию $f(\gamma, t)$ (рис. 1).

Здесь мы берём в качестве положительного направления движения плоскости Γ^* направление во внутрь области Π. Таким образом, если производная $\dfrac{\partial f}{\partial t}(\gamma, t) > 0$, то после столкновения с Γ частица ускоряется.

Если скорость v^*, которую приобрела частица в результате описанного выше закона отражения, направлена во внутрь области Π, то после отражения частица покинет границу Γ и продолжит движение внутри Π до тех пор, пока вновь не столкнётся с границей Γ. Если же скорость направлена во вне от Π, то частица останется неподвижной на Γ до тех пор, пока в некоторый момент времени $\tilde{t} > t^*$ взаимодействие её с границей Γ не заставит частицу покинуть Γ.

Если функция $f(\gamma, t)$ не зависит от t, то есть $\dfrac{\partial f}{\partial t}(\gamma, t) = 0$, то обобщённый биллиард совпадает с классическим.

Этот закон отражения очень естественный. Во-первых, он отражает очевидный факт, что стенки сосуда с газом — неподвижные, а во-вторых, воздействие стенок на частицу привносит классический закон упругого удара. По-существу, мы рассматриваем бесконечно малые перемещения границы Γ с заданными скоростями.

Обобщённые биллиарды были введены и изучены ввиду их важности для термодинамики и неравновесной статистической механики (парадокс Лошмидта и обоснование второго закона термодинамики) ([16]). Эта модель есть обобщение и конкретная реализация модели Пуанкаре ([14]). А. Пуанкаре изучил одномерный и трёхмерный газ, состоящий из конечного большого числа частиц, двигающихся на отрезке и внутри параллелепипеда соответственно под действием внешней силы. Эта сила вызвана внешним горячим телом, которое то приближается, то удаляется от сосуда, в котором двигаются частицы, и таким образом действует на частицы. Особенность нашей модели состоит в том, что влияние внешнего тела моделируется действием границы сосуда на частицы согласно закону обобщённого биллиарда.

Можно рассматривать упругое отражение от границы Γ как в рамках механики Ньютона, так и в рамках специальной теории относительности ([15], [16], [17]).

Для классического биллиарда (то есть когда $\dfrac{\partial f(\gamma,t)}{\partial t} \equiv 0$) нет никакой разницы между этими двумя случаями: это одна и та же динамическая система.

Однако для обобщённого биллиарда ($\dfrac{\partial f(\gamma,t)}{\partial t} \neq 0$) существует огромная и принципиальная разница: в ньютоновском случае соответствующая динамическая система — консервативная, то есть существует инвариантная мера, эквивалентная мере Лебега, а в релятивистском случае эта динамическая система — диссипативная, то есть такой инвариантной меры не существует. Если Π — параллелепипед, то эти факты были доказаны в [16]. Более того, в этом случае инвариантная мера, эквивалентная мере Лебега, строится явно. Эта принципиальная разница приводит к тому, что в ньютоновском случае энтропия Гиббса — постоянная, тогда как в релятивистском случае она возрастает ([16]).

Настоящая работа посвящена обобщенным релятивистским биллиардам в наиболее общем случае, когда существует внешнее силовое поле, действующее на частицу. Это соответствует условию, при котором возникает чёрная дыра. Главный результат может быть сформулирован следующим образом. В релятивистском случае система всегда имеет инвариантное многообразие M в фазовом пространстве, где скорость частицы v равна скорости света c: $M = \big\{(x,v) : \|v\| = c\big\}$ ($x \in \Pi$ — пространственная координата частицы). Мы доказываем, что при некоторых естественных предположениях многообразие M или является экспоненциальным аттрактором или содержит такой аттрактор. Будем измерять все скорости в долях от скорости света c, то есть $c = 1$.

Главный постулат общей теории относительности состоит в том, что гравитационное поле есть неплоская метрика на пространстве-времени с сигнатурой $(+,-,-,-)$ в каждой точке. В отсутствии гравитационных сил метрика псевдо-евклидова:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2.$$

Мы рассматриваем отдельно два случая:

1) Метрика внутри области Π — псевдо-евклидова, и внешние силы действуют на частицу (будем называть этот случай, как “не гравитационные силы”).

2) В области Π частица двигается вдоль геодезической некоторой псевдоримановой метрики, то есть частица двигается в некотором гравитационном поле. Предполагается, что метрика, которая определяет гравитационное поле — постоянная, то есть все компоненты метрического тензора не зависят от временной координаты x^0.

В обоих случаях мы доказываем, что при некоторых естественных условиях траектории стремятся к инвариантному многообразию $M = \big\{(x,v) : \|v\| = c\big\}$ экспоненциально быстро.

Мы изучаем движение частиц в произвольном сосуде с монотонным действием границы, то есть $\dfrac{\partial f}{\partial t}(\gamma, t) > 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$ и $t \in \mathbb{R}^1$, и, в частном, но очень важном случае, когда сосуд-параллелепипед, в то время, как действие границы на частицы задаётся периодической функцией времени (рис. 2). Заметим, что эти два случая не могут быть выведены один из другого. Последний случай есть релятивистская версия классической модели Пуанкаре ([14]), который был изучен в [16] при условии отсутствия внешних сил, действующих на систему. Было доказано, что при выполнении некоторого интегрального условия энергия, энтропия Гиббса и энтропия относительно фазового объёма будут расти. Физический смысл этого условия состоит в том, что стенки сосуда горячее, чем газ. Мы рассматриваем также обобщение ускорительной модели в постоянном силовом поле: точечная масса (частица) падает вертикально на горизонтальную бесконечно-тяжёлую стенку (рис. 3) с постоянным ускорением g. Предполагается, что релятивистский фактор проявляется только в момент столкновения со стенкой; сама стенка — неподвижная, но она действует на частицу согласно обобщённому биллиардному закону, заданному периодической функцией от времени, имеющей период 1. Если задать положение стенки уравнением $x = 0$, то многообразие $M' = \big\{x, v : \|v\| = c, x = 0\big\}$ — инвариантно, более того, движение на этом многообразии — периодично с некоторым периодом t_g, который зависит только от константы ускорения g.

Здесь возможны два случая:

1. t_g — рациональное число. Здесь мы доказываем, что при некоторых естественных условиях на множестве начальных данных $\{x = 0, \|v\| \leqslant c\}$ существует подмножество положительной меры Лебегатакое, что соответствующие траектории стремятся к инвариантному многообразию M'.

2. Число t_g — иррациональное. В этом случае также при некоторых предположениях доказывается, что множество M' будет притягивающим: существует такое $v_0 > 0$, что если $\|v\| \geqslant v_0$, то траектория с начальной скоростью v стремится к M' экспоненциально быстро, но необязательно монотонно.

Заметим, что это первое изучение подобного рода систем в релятивистском случае, тогда как подобные ньютоновские системы были изучены в [18] и [11].

Хотя обобщённый релятивистский биллиард — диссипативная система, эргодическая теория здесь играет важную роль: она применяется к некоторой динамической системе, которая сохраняет меру Лебега и связана с обобщённым релятивистским биллиардом в предельном случае, когда скорость частицы стремится к скорости света.

Главные результаты для обобщения модели Пуанкаре и ускорительной модели во втором случае следуют из общей теоремы о дискретной динамической системе на цилиндре $S^1 \times D^{n-1}$, где $D^{n-1} \subset R^{n-1}$, R^{n-1} — $(n-1)$-мерный диск. Эта теорема и её обобщение доказаны в секции 3. Подобная техника была использована для доказательства экспоненциального роста энергии частицы в модели Пуанкаре в случае отсутствия внешних сил и иррационального числа вращения в [16]. Здесь же мы применяем её к ускорительной модели с одной стенкой в поле тяжести. Эта работа не предполагает никаких знаний основ общей и специальной теории относительности. Необходимые результаты представлены в секции 2, а их доказательства даны в приложении. Основная информация, которую мы здесь используем, это закон преобразования вектора скорости частицы при её упругом отражении от движущейся бесконечно-тяжёлой стенки. Мы выводим его, используя закон сохранения импульса для подобных столкновений. Он был получен в [16]. Обобщённый биллиард есть аппроксимация модели с реально движущимися границами, если начальные скорости частиц достаточно большие. В одномерном случае такая модель с периодически движущимися границами есть хорошо известная модель Ферми–Улама, которая была предложена Уламом ([26]) для строгого обоснования механизма ускорения Ферми ([7]): упругий шар вертикально двигается между двумя горизонтальными бесконечными стенками, которые осуществляют периодические колебания. Эта система моделирует движение частиц между космическими объектами в ситуации, когда частицы взаимодействуют с полями этих объектов. Гипотеза Ферми и Улама состояла в том, что энергия шарика неограниченно возрастает в результате столкновений шарика со стенками. В рамках ньютоновской механики проблема Ферми–Улама была полностью разрешена в отрицательном смысле: скорость и энергия шарика всегда ограничены [19], [20], [21], [6]. Вопреки этим отрицательным результатам, гипотеза Ферми о возможности неограниченного роста энергии частиц в модели Ферми–Улама оказалась справедливой, если рассматривать эту модель в рамках специальной теории относительности ([22], [23] , [16]). Модель Ферми–Улама — консервативная система, сохраняет некоторую меру, в то время как обобщённый релятивистский биллиард (который формально проще релятивистской версии модели Ферми–Улама) — диссипативная система. Механизм ускорения частицы в этих моделях всецело различный ([16]), и, по нашему мнению, это подтверждает необходимость изучения обеих систем. В основе этой работы лежат результаты, полученные в [2]–[4] .

2 Равенства для преобразований энергии, импульса и скорости при упругом столкновении шарика со стенкой в обобщённом биллиарде и некоторые другие результаты теории относительности

В ньютоновском случае закон преобразования импульса и скорости частицы при упругом столкновении с бесконечно-тяжёлой стенкой хорошо известный: если частица падает вертикально на горизонтальную стенку, то после столкновения её скорость равна

$$v' = -v + 2V,$$

где v — скорость частицы до столкновения со стенкой, а V — скорость стенки. Далее мы предполагаем, что масса частицы равна 1, а все скорости измеряются в долях от скорости света c, то есть $c = 1$.

Закон преобразования для упругого удара в специальной теории относительности, очевидно, отличается от ньютоновского. Законы преобразования энергии и импульса частицы при столкновении со стенкой в релятивистском случае впервые были получены в [16] и [22]. Предположим, что частица падает на бесконечно-тяжёлую горизонтальную стенку, которая двигается в вертикальном направлении со скоростью V. Пусть

$$p = \frac{v}{\sqrt{1 - \|v\|^2}} \tag{1}$$

будет импульс частицы до столкновения со стенкой. После столкновения проекция импульса на касательную плоскость к стенке остаётся неизменной: $p'_\tau = p_\tau$, в то время как проекция импульса на нормаль к стенке p'_ν после столкновения имеет вид

$$p'_\nu = (-p_\nu)\frac{1+V}{1-V} + \frac{2V}{1-V^2}\big(\sqrt{\|p\|^2+1} + p_\nu\big). \tag{2}$$

Здесь $\|p\| = \|p_\tau + p_\nu\|$ — длина вектора импульса. Мы также предположим что $p_\nu \leqslant 0$. Это означает, что частица падает на стенку. Энергия частицы E имеет вид

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-\|v\|^2}}. \tag{3}$$

Энергия частицы E' после столкновения со стенкой зависит как от энергии E до столкновения, так и от касательной компоненты импульса (или скорости):

$$E' = E\frac{1+V}{1-V} + \frac{2V}{1-V^2}(\sqrt{E^2-\Delta} - E). \tag{4}$$

Здесь $\Delta = \|p_\tau\|^2 + 1$. Заметим, что $E \geqslant \sqrt{\Delta}$ для всех импульсов p. Соотношения (2) и (4) появились первоначально в [22] и [16] и были доказаны для одномерного случая. Мы даём доказательство для общего случая в приложении. Если частица двигается наверх и ударяет горизонтальную стенку, которая двигается в вертикальном направлении, то импульс преобразуется следующим образом ([ ]):

$$p'_\nu = -p_\nu\frac{1-V}{1+V} + \frac{2V}{1-V^2}(\sqrt{\|p\|^2+1} - p_\nu). \tag{5}$$

Здесь V — скорость стенки, направленная вверх. Мы используем равенство (2), (4) и (5), чтобы найти соотношения между скоростью частицы v до столкновения со стенкой и её скоростью v' после столкновения.

Лемма 2.1. Предположим, что частица ударяет бесконечно-тяжёлую стенку, имея скорость v с нормальной компонентой $v_\nu < 0$. Предположим также, что в момент столкновения стенка двигалась вдоль нормали со скоростью V. Тогда после столкновения компоненты скорости v' частицы имеют вид:

$$v'_\nu = -\frac{v_\nu - 2V + V^2 v_\nu}{1 - 2Vv_\nu + V^2}, \quad v'_\tau = \frac{v_\tau(1-V^2)}{1-2Vv_\nu+V^2}, \tag{6}$$

где v_τ — касательная компонента скорости частицы.

Лемма 2.2. Предположим, что частица ударяет бесконечно тяжёлую стенку имея скорость v. Тогда после столкновения длина $\|v'\|$ вектора скорости v' удовлетворяет равенству

$$1 - \|v'\|^2 = \frac{(1 - V^2)^2}{(1 + V^2 - 2Vv_\nu)^2}(1 - \|v\|^2), \tag{7}$$

где V — скорость стенки в момент столкновения с частицей.

Доказательства этих лемм даны в приложении.

Опишем теперь некоторые результаты и специальной теории относительности. Обычная сила F равна производной от импульса:

$$F = \frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \|\dot{x}\|^2}} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{1 - \|\dot{x}\|^2}} + \frac{(\ddot{x}, \dot{x})}{\bigl(1 - \|\dot{x}\|^2\bigr)^{3/2}}, \tag{8}$$

где x — точка трёхмерного пространства, а t — время.

Мы предположим, что сила F задаётся гладкой ограниченной функцией от x, $\dot{x}$ и t. Пусть $E = \bigl(1 - \|\dot{x}\|^2\bigr)^{-1/2}$ будет кинетической энергией частицы. Равенство

$$(F, \dot{x}) = \frac{dE}{dt} = \frac{(\ddot{x}, \dot{x})}{\bigl(1 - \|\dot{x}\|^2\bigr)^{3/2}} \tag{9}$$

выводится из (8), если умножить обе его части на $\dot{x}$. Так как последний член в (8) равен $(F, \dot{x})\dot{x}$, то эти уравнения могут быть переписаны в следующем виде:

$$\ddot{x} = \sqrt{1 - \|\dot{x}\|^2}\, G(\dot{x}, x, t), \quad G = F - (F, \dot{x})\dot{x}. \tag{10}$$

Таким образом, если скорость $\dot{x}$ равна скорости света, то есть $\|\dot{x}\| = 1$, то ускорение $\ddot{x} = 0$. Обозначим $1 - \|\dot{x}\|^2 = w > 0$.

В силу (9) имеем:

$$\frac{\dot{w}}{2w^{3/2}} = -(F, \dot{x}). \tag{11}$$

Предположим теперь, что длина скорости частицы $\|\dot{x}\|$ близка к 1, или, что то же самое, $w \ll 1$. Так как скорости и координаты частицы ограничены (мы предполагаем, что движение частицы происходит в ограниченной области), то производная $\dot{w}$ по времени допускает оценку

$$\dot{w} \leqslant Cw^{3/2} \tag{12}$$

с некоторой константой C. Пусть K фазовое пространство обобщённого бильярда относительно скорости (вместо импульса).

Лемма 2.3. Множество $M = \bigl\{(x, v) \in K, \|v\| = 1\bigr\}$ инвариантно относительно динамики обобщённого релятивистского биллиарда.

Доказательство очевидно следует из равенства (7).

Если частица двигается вдоль отрезка, то движение на инвариантном многообразии M совпадает с соответствующим классическим биллиардом. Это справедливо также для $N \geqslant 1$ одинаковых частиц, двигающихся вдоль отрезка: динамика осуществляется на инвариантном многообразии

$$\hat{M} = \big\{(x_1, \ldots, x_N, v_1, \ldots, v_N) : \|v_1\| = 1, \ldots, \|v_N\| = 1\big\}$$

и в точности совпадает с динамикой классического биллиарда в N-симплексе. Если размер области Π будет больше 1, то ситуация становится более сложной. Динамика на M — диссипативная: отсутствует гладкая инвариантная мера.

Как было уже упомянуто во введении, главный постулат общей теории относительности состоит в том, что гравитационное поле определяется метрикой на пространстве-времени, то есть квадратичной формой,

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \quad (i, j = 0, \ldots, 3),$$

имеющей сигнатуру $(+, -, -, -)$ в каждой точке ([12]). Первая координата будет рассматриваться, как мировое время. Мы предполагаем, что $g_{00} > 0$. Движение в гравитационном поле описывается геодезической этой метрики; поэтому длина 4-вектора скорости частицы есть постоянная при движении:

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dx}{ds}\right) = g_{ij}\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^j}{ds} = 1,$$

где s — натуральный параметр (называемый временем частицы) вдоль геодезической.

Интервал времени в общей теории относительности зависит не только от скорости перемещения репера (как в специальной теории относительности), но также от положения часов в пространстве. Далее будет предполагаться, что гравитационное поле — постоянное, то есть функции g_{ij} не зависят от мирового времени x^0. Так же, как и в случае плоской метрики $ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$, в случае постоянного гравитационного поля можно определить трёхмерный вектор скорости частицы:

$$v^a = \frac{dx^a}{\sqrt{g_{00}}\,(dx^0 + g_a\, dx^a)} \quad (a = 1, 2, 3), \tag{13}$$

([12], глава 10, § 89). Здесь мы обозначили $g_a = \dfrac{g_{0a}}{g_{00}}$. Эта скорость измеряется относительно собственного синхронизированного времени, то есть часы синхронизированы вдоль траектории частицы. Четырёхмерный интервал ds^2 может быть выражен в виде

$$ds^2 = g_{00}(dx^0 + g_a\, dx^a)^2\big(1 - \|v\|^2\big),$$

где $\|v\|^2 = \gamma_{ab} v^a v^b$ $(a, b = 1, 2, 3)$, и

$$\gamma_{ab} = -g_{ab} + \frac{g_{0a} g_{0b}}{g_{00}} \tag{14}$$

есть трёхмерный тензор, определяющий геодезические свойства пространства. Уравнения движения частицы в четырёхмерном пространстве-времени в постоянном гравитационном поле могут быть также переписаны трёхмерном пространстве ([12], глава 10, § 89). Действие гравитационного поля задаётся трёхмерным вектором силы

$$f^a = \gamma^{ab} \frac{1}{\sqrt{1 - \|v\|^2}} \left(-\frac{\partial}{\partial x^b} \ln \sqrt{g_{00}} + \sqrt{g_{00}} \left(\frac{\partial g_c}{\partial g_b} - \frac{\partial g_b}{\partial g_c} \right) v^c \right). \tag{15}$$

Уравнение движения имеют вид

$$\frac{d}{d\tau} \frac{v^a}{\sqrt{1 - \|v\|^2}} + \lambda^a_{bc} \frac{v^b v^c}{\sqrt{1 - \|v\|^2}} = f^a \quad (a, b, c = 1, 2, 3), \tag{16}$$

где в левой части стоит ковариантная производная импульса частицы относительного синхронизированного собственного времени:

$$d\tau^2 = g_{00} (dx^0 + g_a \, dx^a)^2,$$

λ^a_{bc} — трёхмерный символ Кристофеля, построенный по компонентам тензора γ_{ab}. Энергия частицы, определённая равенством

$$E_0 = \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \|v\|^2}}, \tag{17}$$

постоянна вдоль траектории движения частицы.

Формально уравнения (16) становятся сингулярными, когда скорость стремится к скорости света, то есть когда $1 - \|v\|^2 \to 0$.

Предложение 2.1. Уравнения (16) могут быть разрешены относительно производных $\dfrac{dv^a}{d\tau}$:

$$\frac{dv^a}{d\tau} = F^a(v, x) \quad (a = 1, 2, 3),$$

где функции $F^a(v, x)$ — гладкие функции трёх пространственных координат x и скоростей $v = \dfrac{dx}{d\tau}$ в окрестности множества $\|v\|^2 = 1$.

Доказательство предложения 2.1 дано в приложении.

Определение отражения в обобщённом биллиарде остается почти таким же, как и ранее: нормаль следует взять в метрике g_{ij}, и, чтобы получить новую скорость, нужно сделать преобразование координат в окрестности точки столкновения так, чтобы в этой точке метрика стала плоской:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2,$$

и использовать равенства (6).

3 Основополагающие теоремы

В этой секции формулируются и доказываются две общие теоремы, которые являются основным средством в доказательстве существования экспоненциальных аттракторов в обобщённых релятивистских биллиардах.

Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, которое есть (локально) прямое произведение окружности S^1 и $n-1$-мерного диска D^{n-1}. Для примера можно рассматривать гладкое расслоение $\pi\colon M \to B$, $D^{n-1} \in B$, где слои — одномерные окружности. Пусть t, w, x будут локальные координаты на M, где $t \pmod 1 \in S^1$, $w \in R^1$, $x \in R^{n-2}$. Рассмотрим гладкое отображение $T\colon t, w, x \to t', w', x'$ компактной области $S \times D^{n-1}$ в себя. Предположим, что отображение оставляет инвариантным многообразие $w = 0$, и в окрестности этого многообразия отображение имеет вид:

$$\begin{aligned} w' &= A(t,l)w + B_1(t,w,x,l), & |B_1| &\leqslant C_1|w|^{1+\alpha}, \\ t' &= t + l + B_2(t,w,x,l) \pmod 1, & |B_2| &\leqslant C_2|w|, \end{aligned} \tag{18}$$

где l — константа. Предполагаем, что константы C_1, C_2 и α положительные, а функция $A(t,l)$ ограничена снизу: $A(t,l) \geqslant \alpha > 0$.

Все функции — гладкие и 1-периодические по t. Таким образом, на многообразии $w = 0$ ограничение отображения T на слой S^1 есть вращение окружности

$$t' = t + l \pmod 1.$$

Обозначим через $w^{(n)}$, $t^{(n)}$ и $x^{(n)}$ w-, t- и x-координаты вектора $T^n(w,t,x)$, где T^n — n-ая степень отображения $T(t,w,x) \to (t', w', x')$.

Теорема 3.1. *Предположим, что для некоторого компактного множества $L \subset R^1$ интеграл*

$$\int_0^1 \ln A(t,l)\, dt \leqslant -\delta < 0$$

для всех $l \in L$. Тогда для любого $\tilde{\delta} > 0$, $\tilde{\delta} < \delta$ существует константа $N \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел)такая, что если $l \in L$, $l \neq \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \leqslant N$ и $\dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь, то существует константа $\omega > 0$, такая, что для любого w с условием $|w| \leqslant \omega$ справедливо неравенство

$$|\omega^{(n)}| \leqslant Ce^{-\tilde{\delta}n}|w|,$$

в котором C — некоторая константа, а $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что константа N не зависит от параметра l.

Доказательство. $\triangleright$ Рассмотрим линеаризованное отображение

$$\tilde{T}\colon (t, w) \to (\tilde{t}, \tilde{w}),$$

где $\tilde{w} = A(t, l)w$, $\tilde{t} = t + l \pmod 1$, которое есть косое произведение поворота окружности и линейного отображения. Обозначим через $\tilde{w}^{(n)}$ w-координату вектора $\tilde{T}^{(n)}(t, v)$, где $\tilde{T}^{(n)}$ — n-ая степень отображения $\tilde{T}$.

Лемма 3.1. При выполнении условий теоремы 3.1 для любого $\hat{\delta} > 0$, $\hat{\delta} < \delta$ существует такая константа $N \in \mathbb{N}$, что если $l \in L$, $l \neq \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \leqslant N$ то существует $m \in \mathbb{N}$ такая, что для любого w выполняется неравенство

$$|\tilde{w}^{(m)}| \leqslant e^{-\hat{\delta} m}|w|.$$

Доказательство леммы 3.1. $\triangleright$ Если l — иррациональное число, то лемма 3.1 следует из соответствующего результата в [16] (часть 1, глава 1, § 2, лемма 3): для иррационального числа вращения поворот окружности $t \to t + l \pmod 1$ — строго эргодическое преобразование, и согласно эргодической теореме сумма

$$\frac{1}{q} \sum_{k=0}^{n-1} \ln A\bigl(\tilde{T}^k(t, w), l\bigr)$$

(здесь $\tilde{T}^k(t, w)$ рассматривается относительно координаты t), выраженная в логарифмической координате $\ln |w|$, равномерно сходится к этому δ. Заметим, что это более сильный результат, чем результат леммы (3.1): для любого достаточно большого $m \in \mathbb{N}$

$$|\tilde{w}^{(m)}| \leqslant e^{-\delta m + o(m)}|w|,$$

где функция $o(m)/m = 0$ при $m \to \infty$.

Предположим теперь, что $\dfrac{p}{q} \in L$ — несократимая дробь. Рассмотрим сумму

$$\frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \ln A\left(t + \frac{kp}{q}, l\right), \quad l \in L.$$

Легко видеть, что эта сумма есть в точности интегральная сумма интеграла $I(l) = \int_0^1 \ln A(t, l)\, dt$, так как все q точек $t + \dfrac{pk}{q} \pmod 1$ $(k = 0, \ldots, q - 1)$ — различны на окружности.

Таким образом, выбирая q достаточно большим, мы можем аппроксимировать интеграл $I(l)$ с любой точностью для всех $l \in L$, если L — компакт.

Таким образом, для любого $\tilde{\delta}$ с условием $0 < \hat{\delta} < \delta$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \ln A\Big(t + \frac{kp}{q}, l\Big) \leqslant -\hat{\delta}$$

для любого $t \in S^1$ и любого $q > N$. Теперь для рационального $l = \frac{p}{q} \in L$, $q > N$ положим $m = q$. В результате для любого w получаем: $|\tilde{w}^{(m)}| \leqslant e^{-\hat{\delta} m}|w|$. Лемма 3.1 доказана. $\lhd$

Остаток доказательства — технический: мы показываем, что нелинейные члены не могут радикально изменить свойство сходимости.

Рассмотрим первоначальное отображение T. Далее мы будем опускать аргумент l в функциях A, B_1, B_2.

Лемма 3.2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $|w \leqslant 1|$

$$w^{(n)} = A\big(t + (n-1)l\big) A\big(t + (n-2)l\big) \ldots A(t) w + B_n(t, w, x),$$
$$\big|B_n(t, w, x)\big| \leqslant C_n |w|^{1+\alpha},$$
$$t^{(n)} = t + nl + B_n^t(t, w, x) \pmod 1, \quad \big|B_n^t(t, w, x)\big| \leqslant C_n |w|$$

для некоторой константы C_n.

Доказательство леммы 3.2. $\rhd$ Доказательство проведём индукцией по n. В силу (18) утверждение справедливо для $n = 1$. Предположим, что для $n = k$

$$w^{(k)} = A\big(t + (k-1)l\big) \ldots A(t) w + B_k(t, w, x),$$
$$t^{(k)} = t + kl + B_k^t(t, w, x) \pmod 1,$$

и соответствующие оценки справедливы. Тогда

$$\begin{aligned} w^{(k+1)} &= A\big(t^{(k)}\big)\tilde{w}^{(k)} + B_1(t^{(k)}, w^{(k)}, x^{(k)}) = \\ &= A\big(t + kl + B_k^t(t, w, x)\big)\big(A\big(t + (k-1)l\big)\big) \ldots A(t) w + \\ &\quad + B_k(t, w, x) + B_1(t^{(k)}, w^{(k)}, x^{(k)}) = \\ &= A(t + kl) A\big(t + (k-1)l\big) \ldots A(t) w + \frac{dA}{dt}\bigg|_{t=\xi} B_k^t(t, w, x) w^{(k)} + \\ &\quad + A(t + kl) B_k(t, w, x) + B_1(t^{(k)}, w^{(k)}, x^{(k)}). \end{aligned}$$

Обозначим

$$B_{k+1}(t, w, x) = \frac{dA}{dt}\bigg|_{t=\xi} B_k^t(t, w, x) w^{(k)} + A(t + kl) B_k(t, w, x) + B_1(t^{(k)}, w^{(k)}, x^{(k)}).$$

Так как в силу того, что $t \in S^1$, $\dfrac{dA}{dt}$ ограничены и $|w|$, $\|x\|$ также ограничены, то из (18) следует, что существует константа $\tilde{C}_{k+1}$такая, что

$$\big|B_{k+1}(t, w, x)\big| \leqslant \tilde{C}_{k+1} |w|^{1+\alpha}.$$

Точно так же и доказывается, что $\left|B'_{k+1}(t,w,x)\right| \leqslant \tilde{\tilde{C}}_{k+1}|w|$, и мы полагаем $C_{k+1} = \max(\tilde{C}_{k+1}, \tilde{\tilde{C}}_{k+1})$. Лемма 3.2 доказана. ◁

Полагаем $\hat{\delta} = \dfrac{\delta + \tilde{\delta}}{2}$. Согласно леммам 3.1 и 3.2 существуют $m \in \mathbb{N}$ и C_mтакие, что $|w^{(m)}| \leqslant e^{-\hat{\delta}m}|w| + C_m|w|^{1+\alpha}$. Выбираем $\tilde{\omega} > 0$такое, что если $|w| \leqslant \tilde{\omega}$, то второй член в предыдущем неравенстве настолько мал, что $|w^{(m)}| < e^{-\tilde{\delta}m}|w|$.

Следующая лемма — очевидна (она может быть доказана по индукции).

Лемма 3.3. Для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого w, $|w| \leqslant 1$ существует константа $C^*_k > 0$ такая, что $|w^{(j)}| \leqslant C^*_k|w|$ для любого $j = 0, \ldots, k$.

Пусть $\omega < 1$такая, что $|w^{(j)}| \leqslant \tilde{\omega}$ для $j \leqslant m$, $|w| < \omega$. В силу леммы 3.3 существует константа $C > 0$такая, что

$$|w^{(j)}| \leqslant Ce^{-\tilde{\delta}j}|w|, \quad j = 0, \ldots, m, \quad |w| \leqslant 1.$$

Рассмотрим $|w^{(mn+j)}|$, $|w| \leqslant \omega$. Так как $|w^{(j)}| \leqslant \tilde{\omega}$, то в силу неравенства, предшествующего лемме 3.3

$$|w^{(m+j)}| = \left|T^m_w(w^{(j)}, t^{(j)}, x^{(j)})\right| \leqslant e^{-\tilde{\delta}m}|w^{(j)}|,$$

где T^m_w — w-компонента вектора T^m, рассматриваемого, как преобразование от трёхмерного вектора. Но правая часть последнего неравенства опять меньше, чем $\tilde{\omega}$, и поэтому

$$|w^{(2m+j)}| = \left|T^m_w(w^{(m+j)}, t^{(m+j)}, x^{(m+j)})\right| \leqslant e^{-\tilde{\delta}m}|w^{(m+j)}| \leqslant e^{-2\tilde{\delta}m}|w^{(j)}|,$$

и продолжаем этот процесс для всех чисел, кратных m. В результаты получаем неравенства

$$\left|T^{mn}_w(w^{(j)}, t^{(j)}, x^{(j)})\right| \leqslant e^{-\tilde{\delta}mn}|w^{(j)}| \leqslant Ce^{-\tilde{\delta}(mn+j)}|w|$$

для всех $k = mn + j$ и $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.1 доказана. ◁

Замечания.

1. Очевидно, все иррациональные значения l удовлетворяют условиям теоремы 3.1.

2. Теорема может быть обобщена на случай, когда слои S^1 и база B заменены на некоторые многообразия (например, можно рассмотреть m-мерный тор $\mathbb{T}^m$ вместо S^1), и потребовать, что на слое $w = 0$ преобразование этого многообразия было строго эргодично. Линеаризованная система будет косым или групповым сдвигом на $\mathbb{T}^m$, и является строго эргодическим преобразованием [10].

3. Условие гладкости может быть ослаблено.

Рассмотрим более общую ситуацию, когда на многообразии $\omega = 0$ отображение окружности S^1 имеет вид

$$t \to t' \equiv t + l + G(t,x) \pmod 1,$$

и в его окрестности

$$\begin{aligned} w' &= (A(t,l) + A_1(t,x,l)w + B_1(t,w,x,l), & \big|B_1(t,w,x,l)\big| \leqslant C_1|w|^{1+\alpha},\\ t' &= t + l + G(t,x,l) + B_2(t,w,x,l) \pmod 1, & \big|B_2(t,w,x)\big| \leqslant C_2|w| \end{aligned}$$

(функцию $G = G(t,x)$ будем рассматривать также как функцию $G(t,x,l)$ трёх переменных).

Предполагается, что $A(t) \geqslant a > 0$, а функции G, A_1 — малы: $|G| \leqslant \mu$, $|A_1| \leqslant \mu$ при некотором $\mu > 0$.

Теорема 3.2. *Предположим, что для некоторого компакта $L \subset \mathbb{R}^1$ интеграл $\int_0^1 \ln A(t,l)\,dt \leqslant -\delta < 0$ для всех $l \in L$. Тогда для любого $\tilde{\delta} > 0$, $\tilde{\delta} < \delta$ существует константа $N \in \mathbb{N}$такая, что если $l \in L$, $l \neq \dfrac{p}{q}$, $p,q \in \mathbb{N}$, $\dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь и $q \leqslant N$, то существуют константы $\omega > 0$, $\tilde{\mu} > 0$такие, что для любого w с условием $|w| \leqslant \omega$ и любого $\mu \leqslant \tilde{\mu}$ справедливо неравенство $|w^{(n)}| \leqslant Ce^{-\hat{\delta}n}|w|$ для некоторой константы C и при любом $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. $\triangleright$ Доказательство проводится подобно доказательству теоремы 3.1. Первоначально рассмотрим линеаризованное отображение $T^*\colon (t,w,x) \to (t_*,w_*,x_*)$, где $w_* = \big(A(t) + A_1(t,x)\big)w$, $t_* = t + l + G(t,x)$, $x_* = x'$.

Так же, как и раньше, $t_*^{(k)}$, $w_*^{(k)}$, $x_*^{(k)}$ обозначают соответствующие координаты k-ой степени отображения T^*.

Лемма 3.4. При выполнении условий теоремы 3.2 для любого $\hat{\delta} > 0$ с условием $\hat{\delta} < \delta$ существует константа $N \in \mathbb{N}$, такая, что для всех $l \in L$, $l \neq \dfrac{p}{q}$, $p,q \in \mathbb{N}$, $\dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь и $q \leqslant N$, существуют константы $m \in \mathbb{N}$ и $\tilde{\mu}$такие, что для любого $\mu \leqslant \tilde{\mu}$ и любого w

$$|w_*^{(m)}| \leqslant e^{-\hat{\delta}m}|w|.$$

Доказательство леммы 3.4. $\triangleright$ Из леммы 3.1 следует, что для любого $\hat{\delta}$ можно выбрать константы N и mтакие, что для любого $l \in L$, $l \neq \dfrac{p}{q}$, $q \leqslant N$ сумма

$$\sum_{k=0}^{m} \ln\big(A(t+kl,l)\big) < -\hat{\delta}m.$$

Зафиксируем значение l и рассмотрим сумму

$$\sum_{k=0}^{m} \ln(A(t_*^{(k)} + A_1(t_*^{(k)}, x_*^{(k)})) = \sum_{k=0}^{m} \ln\bigl(A(t + kl + G_k(t,x,l)) + A_1(t_*^{(k)}, x_*^{(k)}, l)\bigr),$$

где

$$G_k(t,x,l) = G(t,x,l) + G(t_*, x_*, l) + \ldots + G(t_*^{(k-1)}, x_*^{(k-1)}, l).$$

Функции G_k допускают следующую оценку: $\bigl|G_k(t,x)\bigr| \leqslant k\mu$, так как $\bigl|G(t,x)\bigr| < \mu$. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{m} \ln(A(t_*^{(k)} + A_1(t_*^{(k)}, x_*^{(k)})) = \sum_{k=0}^{m} \ln\biggl(A(t+kl,l) + \frac{dA}{dt}(\xi_k) G_k(t,x,l) + A_1\biggr) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \ln(t+kl,l) + \sum_{k=0}^{m} \ln\left(1 + \frac{1}{A(t+kl,l)}\left(\frac{dA}{dt}(\xi_k) G_k(t,x,l) + A_1\right)\right).$$

Второй член последнего равенства по модулю меньше, чем $C_m\mu$, где C_m — некоторая константа, не зависящая от μ. Лемма 3.4 доказана. $\triangleleft$

Остаток доказательства теоремы 3.2 повторяет доказательство теоремы 3.1. Теорема 3.2 доказана. $\triangleleft$

Обе теоремы утверждают, что при некоторых условиях инвариантное многообразие $\{(t,w,x) : w = 0\}$ — притягивающее для всех $l \in L$ кроме конечного числа значений, и траектории стремятся к нему экспоненциально быстро. Теорема 3.2 показывает, что ситуация структурно устойчива в некоторой подходящей топологии.

4 Обобщённые биллиарды в негравитационных силовых полях

Первоначально рассмотрим случай, когда частица массы 1 двигается внутри параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ (рис. 2). Мы предполагаем, что частица отражается от верхней и нижней границ Π согласно закону обобщённого биллиарда, а отражение от других граней происходит согласно классическому биллиардному закону. Предположим, что v — скорость частицы. Обозначим через v_ν компоненту вектора скорости, ортогональную верхней и нижней граням параллелепипеда, а v_τ — его компонента, касательная к верхней и нижней граням. Заметим, что v_ν — число, а v_τ — двумерный вектор. Предполагаем, что внутри Π частица двигается под влиянием негравитационного силового поля, задаваемого гладкой ограниченной вектор-функцией $F(x, \dot{x}, t)$. Мы предполагаем также, что касательная компонента вектора силы F_τ допускает оценку

$$\|F_\tau\| = O\big(\|v_\tau\|\big) \tag{19}$$

для малых значений $\|v_\tau\|$.

Примеры:

1. Сила F ортогональна верхней и нижней граням параллелепипеда П.

2. Частица двигается под действием магнитного поля H, которое направлено ортогонально верхней и нижней граням. В этом случае

   $$F = e(v \times H), \quad \|F\| = e\|v_\tau\|\,\|H\|,$$

   где e — заряд частицы.

Обобщённый биллиард задаётся функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$ от времени. Мы предполагаем, что функции скорости стенок $V_1(t)$ и $V_2(t)$ – 1-периодичны по t, и $\big|V_1(t)\big| < 1$, $\big|V_2(t)\big| < 1$, а скорость света равна 1 (рис. 2).

Рассмотрим отображение $\bar{T}$, которое состоит из двух последовательных отражений частицы от нижней и верхней граней параллелепипеда П. Это означает, что частица падает на нижнюю грань с некоторой скоростью v, ударяет её в точке x в момент времени t, затем частица отражается и достигает верхнюю грань, и после отражения от верхней грани падает снова на нижнюю грань, ударяя её с новой скоростью $\bar{v}$ в точке $\bar{x}$ в момент времени $\bar{t}$. В результате получим отображение $\bar{T}\colon (t, v, x) \to (\bar{t}, \bar{v}, \bar{x})$, которое хорошо определено, если нормальная компонента скорости $|v_\nu|$ близка к 1. Обозначим через $v^{(n)}$ – v-компоненту вектора $\bar{T}^n(t, v, x)$, где $\bar{T}^n$ — n-ая степень $\bar{T}$. Компонента $v_\nu < 0$, так как частица ударяет нижнюю грань, и поэтому $\bar{v}_\nu < 0$.

Теорема 4.1. *Предположим, что для всех $l \in L$, L — отрезок в R^+,*

$$\int_0^1 \ln \frac{\big(1 - V_1(t)\big)\big(1 + V_2(t+l)\big)}{\big(1 + V_1(t)\big)\big(1 - V_2(t+l)\big)}\,dt \leqslant -\frac{\delta}{2} < 0.$$

Тогда для любого $\tilde{\delta}$, $\tilde{\delta} < \delta$, существует константа $N \in \mathbb{N}$такая, что если $l \in L$, $l \neq \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $\dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь и $q \leqslant N$, то существует константа $\omega > 0$такая, что если $1 - |v_\nu|^2 \leqslant \omega$, то при любом $n \in \mathbb{N}$

$$1 - \|v^{(n)}\|^2 \leqslant Ce^{-\tilde{\delta}n}\big(1 - |v_\nu|^2\big),$$

где C — некоторая константа.

Пример ([16], гл. 1, § 3). Приведём пример периодических функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, удовлетворяющих интегральному неравенству в теореме 4.1: $f_1(t) =$

$\varepsilon(Q_1 \sin(2\pi kt) + Q_2 \sin(4\pi kt)) + C_1$, $f_2(t) = C_2$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, k — целое, $Q_1 \neq 0$, Q_2, C_1 и C_2 — константытакие, что $Q_2 k > 0$. Так как f_2 — константа, то интегральное неравенство справедливо для всех l.

Доказательство теоремы 4.1. $\triangleright$ Пусть $w_\nu = 1 - v_\nu^2$. Тогда $w_\nu = w + \|v_\tau\|^2$, где $w = 1 - \|v\|^2$. Дифференцируя по t, получим:

$$\dot{w}_\nu = \dot{w} + 2(v_\tau, \dot{v}_\tau) = O\big(\|v_\tau\|^2 \sqrt{w}\big) + O(w^{3/2}) = O(w_\nu^{3/2}).$$

Действительно, в силу (12), $\dot{w} = O(w^{3/2})$ и из (10) имеем:

$$\dot{v}_\tau = \sqrt{w}\big(F_\tau + O(v_\tau)\big),$$

где F_τ — компонента силы, которая оценивается в (19). Рассмотрим движение частицы в $\mathbb{R}^3$ под действием силы F.

Лемма 4.1. Рассмотрим уравнение $\dfrac{dw}{dt} = cw^{3/2}$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + 2l$ с начальным данным $w(t_0) = w_0 > 0$, где c — константа. Тогда при малом значении $|w_0|$ справедливо равенство

$$w(t) = w(t_0) + O(w_0^{3/2}).$$

Доказательство. $\triangleright$ Решение $w = w(t)$ этого уравнения удовлетворяет равенству

$$w^{-\frac{1}{2}} - w_0^{-\frac{1}{2}} = -2c(t - t_0). \tag{20}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Имеем: $f(w^{-\frac{1}{2}}) = w$,

$$f(w^{-\frac{1}{2}}) - f(w_0^{-\frac{1}{2}}) = w - w_0 = (w^{-\frac{1}{2}} - w_0^{-\frac{1}{2}})\frac{df}{dx}(\theta), \tag{21}$$

где

$$w^{-\frac{1}{2}} < \theta < w_0^{-\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Предложение 4.2. Существует константа $C_* > 0$такая, что при малом значении $|w_0|$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{df}{dx}(\theta)\right| < c_* \left|\frac{df}{dx}(w_0^{-\frac{1}{2}})\right|.$$

Доказательство предложения. $\triangleright$ В силу (20)

$$|w^{-\frac{1}{2}} - w_0^{-\frac{1}{2}}| < 4cl, \tag{23}$$

и $\lim_{\omega_0\to 0}\bigl(w_0^{-\frac{1}{2}} - (2w_0)^{-\frac{1}{2}}\bigr) \to \infty$. Поэтому при малом ω_0 в силу (22)

$$w_0^{-\frac{1}{2}} > \theta > (2w_0)^{-\frac{1}{2}}.$$

В силу этого неравенства имеем:

$$\left|\frac{df}{dx}(\theta)\right| = \left|\frac{2}{\theta^3}\right| < \left|\frac{2}{(2\omega_0)^{3/2}}\right| = \left|2\frac{df}{dx}(2\omega_0)^{-\frac{1}{2}}\right| = c_*\left|\frac{df}{dx}(w_0^{-\frac{1}{2}})\right|.$$

Предложение доказано. ◁

Применяя (21), (23) и доказанное выше предложение, получаем:

$$w = w_0 + O(w_0^{3/2}),$$

где $O(w^{3/2}) = 8cc_* w_0^{3/2}$.

Лемма 4.1 доказана. ◁

Сравнивая решение уравнения $\dot{w} = cw^{3/2}$ с решением уравнения $\dot{w}_\nu = O(w_\nu^{3/2})$ с одним и тем же начальным данным $w_0 = w(t_0) = w_\nu(t_0)$ в силу леммы 4.1 при условии, что $\bigl|O(w_\nu^{3/2})\bigr| < cw_\nu^{3/2}$, при малом $|w_0|$ получим, что на отрезке $[t_0, t_0 + 2l]$ решение уравнения $\dot{w}_\nu = O(w_\nu^{3/2})$ имеет вид

$$w_\nu(t) = w_\nu(t_0) + O\bigl((w_\nu(t_0))^{3/2}\bigr). \tag{24}$$

Так как $v_\nu(t) = 1 - \dfrac{1}{2}w_\nu(t) + O\bigl(w_\nu(t)^2\bigr)$, то вертикальная компонента v_ν скорости частицы на временном отрезке $t \in [t_0, t_0 + 2l]$ допускает оценку

$$v_\nu(t) = 1 - \frac{1}{2}w_\nu(t_0) + O\bigl((w_\nu(t_0)^{3/2})\bigr).$$

Если $w_\nu(t_0)$ достаточно мало, то $v_\nu > \frac{1}{2}$, и, таким образом, временной интервал, в течение которого частица двигается внутри Π без столкновения с верхней или нижней граней, меньше, чем $2l$. Предположим, что частица отражается от нижней грани и w_ν достаточно мало. Частица достигает верхней грани в течение некоторого временного интервала, меньшего, чем $2l$. Из (24) следует, что величина w_ν останется неизменной в линейном приближении. Таким образом, в силу (7) отображение $\bar{T}$ переводит точку w_ν, t в точку

$$\bar{w}_\nu = \left(\frac{1 - V_1(t)}{1 + V_1(t)}\right)^2 \left(\frac{1 + V_2(t)}{1 - V_2(t)}\right)^2 w_\nu + O(w_\nu^{3/2}),$$
$$\bar{t} = t + l\bigl(1 + O(w_\nu)\bigr) \pmod 1.$$

Доказательство завершает применение теоремы 3.1 с параметром $\alpha = \dfrac{1}{2}$. ◁

Замечание. Теорема справедлива в случае, когда силовое поле имеет тангенциальную компоненту F_τ, такую, что $\|F_\tau\| \leqslant \mu$ при достаточно малом μ, если воспользоваться теоремой 3.2.

Теперь рассмотрим “монотонный ” случай, при котором частица двигается внутри компактной области произвольной формы (рис. 1). В этом случае действие границы Γ на частицу задаётся функцией $f(\gamma, t)$, у которой $\dfrac{\partial f}{\partial t}(\gamma, t) > 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$ и t (см. введение). Как и ранее, нормаль к границе направлена внутрь сосуда Π. Предполагаем, что внутри Π частица двигается под действием силового поля F.

Теорема 4.2. *Существует константа $u > 0$, $u < 1$такая, что если скорость частицы $\|v\| \geqslant u$, то существуют константы $\delta > 0$, $C > 0$такие, что $1 - \|v(t)\|^2 \leqslant Ce^{-\delta t}$.*

Теоремы 4.1 и 4.2 утверждают, что энергия частицы (3) растёт экспоненциально быстро.

Доказательство теоремы 4.2. $\triangleright$ Пусть D — диаметр Π, то есть $D = \max_{\gamma_1,\gamma_2} \rho(\gamma_1, \gamma_2)$, где $\rho(x, y)$ — расстояние между точками x и y.

Так как Π — компакт, то $D < \infty$.

Лемма 4.2. Существует константа $\tilde{u} > 0$, $\tilde{u} < 1$такая, что если скорость частицы $\|v\| \geqslant \tilde{u}$, то для некоторой константы $\hat{t} > 0$ временной интервал Δt между двумя последовательными столкновениями частицы с границей Γ удовлетворяет неравенству $\Delta t \leqslant \hat{t}$.

Доказательство леммы 4.2. $\triangleright$ Движение частицы под действием внешнего силового поля описывается уравнением (10). Очевидно, если скорость частицы $\|v\|$ достаточно близка к 1, то траектории близки к прямым линиям (здесь имеет значение то, что сила F ограничена). Теперь утверждение леммы следует из компактности области Π.

Лемма 4.2 доказана. $\triangleleft$

На временном интервале $[t, t + \hat{t}\,]$ величина $w = 1 - \|v\|^2$ изменяется медленнее, чем любая линейная функция, в силу (12). Рассмотрим отображение $A\colon (t, \gamma, v) \to (t', \gamma', v')$, определённое следующим образом. Пусть частица ударяет границу в некоторой точке γ в момент времени t, двигаясь со скоростью v. Затем она отражается от границы и в момент времени t' ударяет границу опять в точке γ', двигаясь со скоростью v' (это отображение хорошо определено, если $\|v\| \geqslant \tilde{u}$). Так как для всех точек $\gamma \in \Gamma$ и для всех $t \in \mathbb{R}$ скорость $\dfrac{\partial f}{\partial t}(\gamma, t) > 0$, то существует константа $V > 0$такая, что $\dfrac{\partial f}{\partial t}(\gamma, t) \geqslant V$. Таким образом, в силу (7) при отражении от границы скорость частицы изменяется в соответствии с равенством

$$\tilde{w} = W\left(\frac{\partial f}{\partial t}(\gamma, t), v_\nu\right) w,$$

где

$$W \leqslant \tilde{\sigma} = \left(\frac{1 - V^2}{1 + V^2}\right)^2 < 1$$

(в (7) $V = \frac{\partial f}{\partial t}$). Отображение A может быть переписано в виде $w' = W(w, t, \gamma)w + o(w)$. Берём $\tilde{\sigma} < \sigma < 1$. Существует $w_0 > 0$такое, что если $w < w_0$, то n-ая степень отображения A может быть оценена в виде $w^{(n)} \leqslant C_{w_0}\sigma^n w$ для некоторой константы C_{w_0}. Чтобы завершить доказательство теоремы 4.2 берём $u = max(\tilde{u}, \sqrt{1 - w_0})$, где $\tilde{u}$ — константа, введённая в лемме 4.2.

Теорема 4.2 доказана. $\triangleleft$

5 Обобщённые биллиарды в гравитационных полях

Рассмотрим релятивистскую версию модели Пуанкаре, в которой частица массы 1 двигается внутри параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ под действием постоянного гравитационного поля (рис. 2). Мы предполагаем, что частица отражается от верхней и нижней граней параллелепипеда Π по закону обобщённого биллиарда, а от остальных граней по закону классического биллиарда. Движение внутри Π описывается геодезическими метриками g_{ij} $(i, j = 0, 1, 2, 3)$, имеющими сигнатуру $(+, -, -, -)$ в каждой точке. Действие сосуда Π на частицу задаётся функциями $f_1(t)$, $f_2(t)$ (секция 2). Векторы $V_1(t)\dfrac{df_1}{dt}(t)$, $V_2(t)\dfrac{df_2}{dt}(t)$ направлены вдоль нормалей $n_{1,2}(x)$ к нижней и верхней граням Π метрики $\gamma_{a,b}$, введённой в (14):

$$\hat{V}_i(x, t) = V_i(t) n_i(x) \quad (i = 1, 2),$$

x — точка Π, соответствующая грани Π. Как и ранее, $t = x_0$ обозначает "мировое время". Нормаль к границе направлена внутрь Π. Пусть v будет трёхмерный вектор скорости, определённый в (13). Предполагаем, что $v = v(t)$ — функция "мирового времени" (секция 2). Мы также предположим, что гравитационное поле — слабое в следующем смысле: функции g_{ij} близки к постоянным, а их производные близки к нулю:

$$\begin{aligned} &g_{00} = 1 + \mu g_{00}^{(1)}, \quad g_{0a} = \mu g_{0a}^{(1)}, \\ &g_{ab} = -\delta_{ab} + \mu g_{ab}^{(1)} \quad (a, b = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{25}$$

где $\delta_{ab} = 1$, если $a = b$, и $\delta_{ab} = 0$, если $a \neq b$, гладкие функции $g_{ij}^{(1)}$ — ограничены в Π и $0 < \mu \ll 1$.

Замечание. Можно сформулировать эквивалентное предположение, согласно которому высота параллелепипеда Π — мала.

Пусть скорости стенок $V_1(t)$, $V_2(t)$-периодические функции, $|V_1| < 1$, $|V_2| < 1$. Рассмотрим отображение T, которое состоит из двух последовательных отражений частицы от нижней и верхней граней параллелепипеда Π (такое же, как в секции 4): частица падает на нижнюю грань Π со скоростью v в точке x в момент времени t, и после двух отражений от нижней и верхней граней Π она падает на нижнюю грань с новой скоростью v', ударяя границу в точке x' в момент времени t':

$$T\colon (t, v, x) \to (t', v', x').$$

Это отображение хорошо определено, если μ — достаточно мало, а $\|v\|$ — близко к 1. Как и ранее, $v^{(n)} - v$ — компонента вектора $T^n(t, v, x)$. Пусть v_ν будет проекцией скорости частицы на нормаль n к нижней грани в метрике $\gamma_{ab} : v_\nu = (v, n)$. Скорость $v_\nu < 0$, когда частица ударяет нижнюю грань, и поэтому $v'_\nu < 0$.

Теорема 5.1. *Предположим, что для всех $l \in L$ отрезка $L \subset \mathbb{R}^+$*

$$\int_0^1 \ln \frac{\big(1 - V_1(t)\big)\big(1 + V_2(t + l)\big)}{\big(1 + V_1(t)\big)\big(1 - V_2(t + l)\big)}\, dt \leqslant -\frac{\delta}{2} < 0.$$

Тогда для любого $\tilde{\delta} > 0$, $\tilde{\delta} < \delta$ существует константа $N \in \mathbb{N}$ такая, что если $l \in L$, $l \neq \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $\frac{p}{q}$ — неприводимая дробь, $q \leqslant N$, то существуют константы $\tilde{\mu} > 0$, $\omega > 0$такие, что для любого v с условием $1 - |v_\nu|^2 \leqslant \omega$ и любого μ с условием $0 < \mu < \tilde{\mu}$ справедлива оценка

$$1 - \|v^{(n)}\|^2 \leqslant C e^{-\tilde{\delta} n}\big(1 - |v_\nu|^2\big),$$

где C — константа, не зависящая от n, а n — любое натуральное число. Здесь длина $\big\|T^n(t, v, x)\big\|$ берётся в метрике γ_{ab}.

Доказательство. $\triangleright$ Все функции в уравнении (16) — гладкие функции параметра μ в метрике g_{ij} (см. (25)). Когда частица перемещается внутри Π переменная $w = 1 - \|v\|^2$ изменяется очень мало:

$$w \to (1 + \sigma) w, \tag{26}$$

где функция σ допускает оценку $|\sigma| < C_\sigma \mu$, C_σ — константа. Действительно, из доказательства предложения 2.1 (секция 2) следует, что производная $\dfrac{dw}{d\tau}$ — величина порядка w, и что она стремится к нулю, если $\mu \to 0$.

Предположим, что частица ударяет нижнюю грань параллелепипеда П. Введём угол ϕ между скоростью частицы v и нормалью n к границе П (в метрике γ_{ab}). Рассмотрим световую частицу, которая отражается ортогонально от нижней грани, то есть её скорость v параллельна вектору нормали n. Когда эта частица ударяет верхнюю грань, её скорость $\|v^*\|$ будет равна скорости света, однако она может быть не ортогональна верхней грани П: новый угол ϕ^* есть функция координаты x на нижней грани: $\phi^* = \phi + \psi(x)$, где $\psi(x) = O(\mu)$. В общей ситуации, когда $\|v\|^2$ близко к 1,

$$\phi^* = \phi + \psi(x) + \psi_1(x, w, \phi)\phi + \psi_2(x, w, \phi)w, \tag{27}$$

где функции ψ_1 и ψ_2 имеют порядок μ. Предположим, что частица ударяет нижнюю грань П. После отражения угол ϕ преобразуется в угол $\hat{\phi}$ так, что в силу (6)

$$\operatorname{tg}\hat{\phi} = \frac{1 - V_1^2}{1 - 2\dfrac{V_1}{v_\nu} + V_1^2} \operatorname{tg}\phi,$$

где $\operatorname{tg}\phi = \frac{v_\tau}{v_\nu}$, $v_\nu < 0$, v_ν — ортогональная компонента, а v_τ — тангенциальная компонента скорости частицы (в метрике γ_{ab}). Если ϕ и w — малы, то компонента v_ν близка к -1, и

$$\hat{\phi} = \frac{1 - V_1(t)}{1 + V_1(t)}\phi + O(\phi^2, w). \tag{28}$$

Пусть

$$A(t, l) = \frac{\bigl(1 - V_1(t)\bigr)^2 \bigl(1 + V_2(t + l)\bigr)^2}{\bigl(1 + V_1(t)\bigr)^2 \bigl(1 - V_2(t + l)\bigr)^2}.$$

Берём константу $\tilde{\delta} > 0$, $\tilde{\delta} < \delta$, и константы l и m из леммы 3.1такие, что произведение

$$A(t, l)A(t + l, l) \dots A\bigl(t + l(m - 1), l\bigr) \leqslant e^{-\hat{\delta}m/2}.$$

Лемма 5.1. Существует константа $C > 0$ такая, что множество $\{\phi \leqslant C\mu\}$ инвариантно для любого достаточно малого μ, если w достаточно близко к нулю.

Доказательство. $\triangleright$ Рассмотрим m-ую степень T^m отображения T и $\phi^{(m)}$: образ угла ϕ при отображении T^m. Отображение T состоит из следующих отображений: при столкновении с нижней гранью угол ϕ преобразуется, как в равенстве (28); когда частица достигает верхней грани угол ϕ преобразуется, как в равентсве (27); затем при столкновении с верхней гранью угол ϕ

преобразуется опять, как в (28), куда следует подставить функцию $V_2(t)$ вместо $V_1(t)$; наконец, в течение движения к нижней грани преобразование — обратное к (27), которое хорошо определено, так как предполагается, что параматр μ — мал.

Используя (27), (28) и лемму 3.2, заключаем, что $\phi \to \phi^{(m)} = A(t,l)A(t+l,l)\dots A(t+l(m-1),l)\phi + O(\phi^2) + O(\mu)$.

Таким образом,

$$|\phi^{(m)}| \leqslant e^{-\tilde{\delta}m/2}|\phi| + O(\phi^2) + O(\mu).$$

Так как $\tilde{\delta} > 0$, то при малых μ можно выбрать константу $C > 0$, не зависящую от μ, такую, что

$$C\mu \geqslant e^{-\tilde{\delta}m/2}C\mu + O(C^2\mu^2) + O(\mu).$$

Но это означает, что множество $\{\phi \leqslant C\mu\}$ инвариантно относительно отображения T^m. Построение множества, инвариантного относительно отображения T, основано на рассмотрении, подобном лемме 3.3 и концу доказательства теоремы 3.1.

Лемма 5.1 доказана. ◁

Из леммы 5.1 следует, что преобразование на инвариантном множестве $\{w = 0\}$ для углов ϕ, близких к нулю, может быть записано в виде

$$t \longrightarrow t + l + G(x, \phi, t) + O(w), \quad (\mathrm{mod}\ 1)$$

где функция G имеет порядок μ. Теперь можно применить теорему 3.2.

Теорема 5.1 доказана. ◁

Предположим теперь, что частица перемещается внутри произвольной области Π пространственных переменных (рис. 1). Действие границы Γ на частицу задаётся вектор-функцией $V(\gamma, t)$ (секция 2), которая направлена вдоль нормали к границе Γ в точке γ (как и ранее, $t = x^0$ — “мировое время”). Нормаль к границе направлена внутрь сосуда Π. Мы предполагаем, что $V(\gamma, t) \geqslant V_0 = \mathrm{const} > 0$ и направлена внутрь Π (“монотонный случай”). Так как Π ограничена, то компоненты метрического тензора также ограничены. Таким образом, $1/\hat{g} \leqslant |g_{00}| \leqslant \hat{g}$ для некоторой константы $\hat{g} > 1$. Предположим, что метрика такая, что для некоторого $\varepsilon > 0$ каждая геодезическая, удовлетворяющая условию $1 - \|v\|^2 \leqslant \varepsilon$, которая стартует внутри Π, пересекает Γ и существует константа $\hat{t} > 0$такая, что $|t_0 - t_C| \leqslant \hat{t}$. Здесь t_0 — начальный момент времени, а t_C — момент времени столкновения, ближайшего к t_0.

В случае негравитационных сил это условие всегда выполнено (см. лемму 4.2), но для произвольного гравитационного поля это утверждение не справедливо.

Теорема 5.2. *Предположим, что скорость частицы при $t = 0$ удовлетворяет неравенству $1 - \|v(0)\|^2 \leqslant \varepsilon/\hat{g}^2$. Тогда существуют константы $\delta > 0$, $C > 0$такие, что для всех $t > 0$*

$$1 - \|v(t)\|^2 \leqslant Ce^{-\delta t}.$$

Заметим, что здесь гравитационные силы не обязательно слабые.

Доказательство теоремы 5.2. $\triangleright$ В силу (17) энергия частицы E_0 — постоянная, когда частица двигается внутри П. Когда частица сталкивается с границей Г, преобразованная энергия частицы E_0' может быть оценена, используя соотношение (4):

$$E_0' \geqslant \frac{1 + V_0^2}{1 - V_0^2} E_0,$$

где E_0' — энергия частицы после столкновения. Действительно, энергия не зависит от преобразования координат, и таким образом соотношение (4) справедливо также для криволинейных координат (секция 2). Коэффициент g_{00} — ограничен: $\hat{g} > 1$. Согласно нашему предположению интервал времени между двумя последовательными столкновениями — ограничен, если $1 - \|v\|^2 \leqslant \varepsilon$. Это и доказывает теорему 5.2.

Теорема 5.2 доказана. $\triangleleft$

6 Ускорительная модель в постоянном поле тяжести

Рассмотрим обобщение ускорительной модели в постоянном поле тяжести: частица массы 1 вертикально падает на бесконечно-тяжёлую горизонтальную стенку (рис. 3). Мы предполагаем, что релятивистский фактор проявляется только при столкновении частицы со стенкой; сама — неподвижная, но она действует на частицу по закону обобщённого биллиарда, задаваемого гладкой 1-периодической функцией $f(t)$, $f(t) = f(t + 1)$. Выше стенки частица двигается с постоянным ускорением $g > 0$, направленным перпендикулярно стенке (как в классическом случае свободного падения: $\ddot{x} = -g$ (рис. 3)). Предположим, что положение стенки задаётся уравнением $x = 0$.

Лемма 6.1. Многообразие $M' = \{x, v : |v| = 1 \text{ при } x = 0\}$ — инвариантно.

Доказательство. $\triangleright$ Предположим, что частица покидает стенку со скоростью $v > 0$. Так как стенка неподвижная, то частица ударяет стенку со скоростью $-v$. Пусть $v = 1$. Тогда в силу (7) после отражения скорость частицы будет также равна 1.

Лемма 6.1 доказана. $\lhd$

Если $|v = 1|$, то время между двумя последовательными столкновениями частицы со стенкой равно $\dfrac{2}{g}$. Введём отображение $T\colon (t,v) \longrightarrow (t',v')$ следующим образом. Предположим, что в момент времени t частица покидает стенку со скоростью $v > 0$. Далее t' — момент следующего столкновения, и $v' > 0$ — скорость, которую частица приобретает после столкновения со стенкой в момент времени t'. В силу (6) имеем:

$$t' = t + \frac{2v}{g} \pmod 1, \quad v' = \frac{v + 2V + V^2 v}{1 + 2Vv + V^2},$$

где $V = \dfrac{df}{dt}(t')$. Как и прежде, обозначаем $t^{(n)}, v^{(n)}$ координаты n-ой степени отображения T.

Теорема 6.1. *Предположим, что* $\dfrac{2}{g}$ *— рациональное число:* $\dfrac{2}{g} = dfracpq$*, где* $p, q \in \mathbb{N}$*. Предположим, что существует момент* τ*, такой, что произведение*

$$\prod_{k=0}^{q-1} \frac{1 - \dfrac{df}{dt}\left(\tau + \dfrac{k}{q}\right)}{1 + \dfrac{df}{dt}\left(\tau + \dfrac{k}{q}\right)} < 1.$$

Тогда на множестве начальных данных $\big(|v| \leqslant 1, t \pmod 1\big)$ *существует подмножество положительной меры Лебегатакое, что* $|v^{(n)}| \to 1$.

Доказательство. $\rhd$ Рассмотрим специальный, но очень важный случай, когда $\dfrac{2}{g}$ — целое число: $\dfrac{2}{g} = n$, $n \in \mathbb{N}$. Условие теоремы 6.1 означает, что существует τ такое, что

$$\frac{df}{dt}(\tau) > 0.$$

Рассмотрим гладкое отображение $A\colon (x,y) \longrightarrow (x',y')$ плоскости $\mathbb{R}$ в себятакое, что точки $y = 0$ — стационарные для этого отображения:

$$x' = x + B_1(x,y), \quad y' = a(x)y + B_2(x,y),$$

где $|B_1| \leqslant C_1|y|$, $|B_2| \leqslant C_2|y|^2$ при $|x|, |y| < 1$.

Лемма 6.2. Предположим, что на интервале $x \in (x_1, x_2) \subset [-1, 1]$ функция $|a(x)| \leqslant \sigma < 1$. Тогда положение равновесия $(x, 0)$, $x \in (x_1, x_2)$ — устойчиво по Ляпунову и асимптотически устойчиво относительно y.

Эта лемма — простая дискретная версия известной теоремы Ляпунова–Малкина. Мы дадим её доказательство в приложении (секция 7). Рассмотрим теперь световую траекторию с начальными условиями $v = 1, t = \tau$. Эта траектория — неподвижная точка отображения T, так как мы предположили, что $\dfrac{2}{g} = n$; более того, все точки $(v = 1, t)$ — неподвижные, и существует интервал $(\tau-\sigma, \tau+\sigma)$, такой, что $\dfrac{df}{dt}(t) > 0$ для всех $t \in (\tau-\sigma, \tau+\sigma)$. Но это означает, что отображение T — притягивающее относительно v в линейном приближении для любого фиксированного t в этом интервале. Таким образом, условия леммы 6.2 выполнены, и "световые" траектории $v = 1, t \in (\tau-\sigma, \tau+\sigma)$ асимптотически устойчивы по v. Очевидно, "база" аттрактора имеет положительную меру Лебега на множестве $(|v| \leqslant 1, t \pmod 1)$.

Чтобы доказать теорему 6.1 в общем случае рационального числа $\dfrac{2}{g}$, рассмотрим q-ю степень отображения T. Неподвижная точка $t = \tau, v = 1$ отображения T^q асимптотически устойчива относительно v в линейном приближении, что гарантировано условием теоремы 6.1. Теперь можно применить лемму 6.2 к отображению T^q. Легко видеть, что здесь скорость v стремится к 1 экспоненциально быстро, но не обязательно монотонно (сходно с ситуацией в теореме 3.1).

Теорема 6.1 доказана. $\triangleleft$

Замечание. При выполнении условий теоремы 6.1 инвариантное множество M' (лемма 6.1) может быть не притягивающим. Действительно, если существует такой момент времени τ_1, что $\dfrac{df}{dt}(\tau_1) < 0$, то положение равновесия $v = 1, t = t_1 \in (\tau_1 - \sigma_1, \tau_1 + \sigma_1)$ отображения T будет неустойчивым (константа σ_1 выбирается так, чтобы $\frac{df}{dt}(t) < 0$ при $t \in (\tau_1 - \sigma_1, \tau_1 + \sigma_1)$).

Теорема 6.2. *Предположим, что число* $\dfrac{2}{g}$ *удовлетворяет следующему условию:* $\dfrac{2}{g} \neq \dfrac{p}{q}$, *для любых целых чисел* $p, q > 0$, *таких, что* $q \leqslant N$. *Предположим также, что*

$$\int_0^1 \ln \frac{1 - \dfrac{df}{dt}(t)}{1 + \dfrac{df}{dt}(t)}\, dt < 0.$$

Тогда, если число N *достаточно большое, то инвариантное множество* $M' = \{x, v : |v| = 1$ *при* $x = 0\}$ *— экспоненциальный аттрактор.*

Замечание. В качестве примера функции $f(t)$, удовлетворяющей интегральному неравенству в теореме 6.2, можно взять функцию $f(t) = f_1(t)$, где

$f_1(t)$ — функция из примера в секции 4.

Доказательство теоремы 6.2. $\triangleright$ Пусть $w = 1 - \|v\|^2$. Преобразование T отображает точку (t, w) в точку (t', w') с координатами $w' = \left(\dfrac{1-V}{1+V}\right)^2 w + O(w^2), t' = t + \dfrac{2}{g} + O(w) \pmod 1$, где $V = \dfrac{df}{dt}(t')$. Это — следствие равенства (7). Теперь теорема 6.2 следует из теоремы 3.1 с параметром $\alpha = 1$.

Теорема 6.2 доказана. $\triangleleft$

7 Приложение

В этой секции будет доказан ряд утверждений, которые были сформулированы без доказательства в предыдущих секциях.

Доказательства законов преобразования импульса и энергии.

Следуя [16], сперва предположим, что масса стенки M — конечная, и стенка двигается в вертикальном направлении со скоростью V.

Импульс стенки равен MP, где $P = \dfrac{V}{\sqrt{1-V^2}}$. Тангенциальная компонента импульса стенки равна нулю, так как V направлена вдоль нормали к стенке. Используя законы сохранения импульса и энергии, получим следующие равенства:

$$p_\nu + MP = p'_\nu + MP', \tag{29}$$

$$\sqrt{\|p\|^2+1} + M\sqrt{P^2+1} = \sqrt{\|p'\|^2+1} + M\sqrt{P'^2+1}\,. \tag{30}$$

Используя (30), найдём P' из равенства

$$MP' = M\left\{\left(\frac{\sqrt{1+\|p\|^2} - \sqrt{1+\|p'\|^2}}{M} + \sqrt{1+P^2}\right)^2 - 1\right\}^{1/2} =$$

$$= MP + \frac{\sqrt{1+P^2}}{P}\left(\sqrt{1+\|p\|^2} - \sqrt{1+\|p'\|^2}\,\right) + O\left(\frac{1}{M}\right).$$

Подставляя последнее равенство в (29) и переходя к пределу при $M \to \infty$, получим равенства

$$p'^2_\nu - p^2_\nu = V(p'_\nu - p_\nu)\left(\sqrt{1+\|p\|^2} + \sqrt{1+\|p'\|^2}\,\right),$$

$$p'_\nu + p_\nu = V\left(\sqrt{1+\|p\|^2} + \sqrt{1+\|p'\|^2}\,\right), \tag{31}$$

$$-V^2(p'_\nu - p_\nu) = -V\left(\sqrt{1+\|p'\|^2} - \sqrt{1+\|p\|^2}\,\right). \tag{32}$$

Складывая (31) и (32), получим равенство

$$p'_\nu(1-V^2) = -p_\nu(1+V^2) + 2V\sqrt{\|p\|^2+1}\,,$$

из которого следует равенство (2).

Для того, чтобы доказать закон преобразования энергии (равенство (4)), мы используем следующий трюк. Рассмотрим величину $\tilde{p} = \dfrac{p_\nu}{\Delta}$, где $\Delta = \|p_\tau\|^2+1$. Преобразование (2) в терминах $\tilde{p}$ точно такое же, как в одномерном случае [16]. Поэтому "энергия" $\tilde{E} = \sqrt{\tilde{p}^2+1}$ преобразуется точно так же, как в [16]:

$$\tilde{E}' = \tilde{E}\,\frac{1+V}{1-V} + \frac{2V}{1-V^2}\big(\sqrt{\tilde{E}^2-1} - \tilde{E}\big).$$

Но Δ при преобразовании остаётся постоянной, и легко показать, что "реальная энергия" $E = \sqrt{\Delta}\,\tilde{E}$, что и доказывает равенство (4).

Доказательство леммы 2.1. $\triangleright$ Предположим, что перед столкновением частица имела импульс p, а после столкновения она приобрела импульс p'. Из равенства (1) следует, что

$$v = \frac{1}{\sqrt{1+\|p\|^2}}\,p.$$

Первоначально предположим, что проекция импульса частицы на вертикальное направление до и после столкновения отлична от нуля: $p_\nu \neq 0$, $p'_\nu \neq 0$. Тогда вертикальные компоненты скорости частицы v_ν, v'_ν также не равны нулю.

В силу (2) имеем:

$$\frac{p'_\nu}{p_\nu} = -\frac{1+V}{1-V} + \frac{2V}{1-V^2}\left(\frac{1}{v_\nu}+1\right). \tag{33}$$

Из равенства (5) следует, что

$$\frac{p_\nu}{p'_\nu} = -\frac{1-V}{1+V} - \frac{2V}{1-V^2}\left(-\frac{1}{v'_\nu}+1\right). \tag{34}$$

Перемножая (33) и (34), получим:

$$1 = 1 + \frac{2V}{1-V^2}\,\frac{1+V}{1-V}\left(1-\frac{1}{v'_\nu}\right) - \frac{2V}{1-V^2}\,\frac{1-V}{1+V}\left(1+\frac{1}{v_\nu}\right) - \\ - \frac{4V^2}{(1-V^2)^2}\left(1-\frac{1}{v'_\nu}\right)\left(1+\frac{1}{v_\nu}\right).$$

Выражая из этого равенства v'_ν через v_ν и V, получим:

$$1-\frac{1}{v'_\nu}=\left(\frac{1-V}{1+V}\left(1+\frac{1}{v_\nu}\right)\right)\left(\frac{1+V}{1-V}-\frac{2V}{1-V^2}\left(1+\frac{1}{v_\nu}\right)\right)^{-1},$$
$$v'_\nu=-\frac{v_\nu-2V+V^2v_\nu}{V^2-2Vv_\nu+1}.$$

Так как тангенциальная компонента скорости

$$v_\tau=\frac{1}{\sqrt{1+\|p\|^2}}\,p_\tau,$$

и $p'_\tau=p_\tau$, используя (4) получим:

$$v'_\tau=\frac{1}{\sqrt{1+\|p'\|^2}}\,p_\tau=\frac{E}{E'}v_\tau=\frac{1-V^2}{1-2Vv_\nu+Vr}v_\tau. \tag{35}$$

Импульсы p_ν и p'_ν не могут быть равны нулю одновременно, в силу (5), так как предполагается, что $V\neq 0$ (случай $V=0$ — тривиальный). Пусть $p_\nu=0$. Тогда $v_\nu=0$. Используя (4), имеем:

$$v'_\nu=\frac{p'_\nu}{\sqrt{1+p'^2_\nu+p'^2_\tau}}=\frac{p'_\nu}{E'}=\frac{2V}{1+V^2},$$

что соответствует (6) при $v_\nu=0$. Пусть теперь $p'_\nu=0$. Требуется доказать, что из (6) следует равенство $v'_\nu=0$. Но это следует из (33). Равенство (35) также справедливо в обоих случаях, так, оно выводится, используя соотношение для энергии в большей степени, чем для импульса.

Лемма 2.1 доказана. ◁

Доказательство леммы 2.2. ▷ Из (6) следует, что

$$\begin{aligned}1-\|v'\|^2&=\frac{(1-2Vv_\nu+V^2)^2-(v_\nu-2V+V^2v_\nu)^2-\|v_\tau\|^2(1-V^2)^2}{(1-2Vv_\nu+V^2)^2}=\\&=\frac{1+2V^2v_\nu^2+V^4-2V^2-V^4v_\nu^2-\|v\|^2-\|v_\tau\|^2V^4+2\|v_\tau\|^2V^2}{(1-2Vv_\nu+V^2)^2}=\\&=\frac{(V^4-2V^2+1)(1-\|v\|^2)}{(1-2Vv_\nu+V^2)^2}.\end{aligned}$$

Лемма 2.2 доказана. ◁

Доказательство предложения 2.1. ▷ Левая часть уравнения (16) имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{1-\|v\|^2}}\,\frac{dv^a}{d\tau}+\frac{v^a}{2\sqrt{(1-\|v\|^2)^3}}\,\frac{d\|v\|^2}{d\tau}+\lambda^a_{bc}\frac{v^bv^c}{\sqrt{1-\|v\|^2}}. \tag{36}$$

Так как энергия частицы (17) есть константа, то

$$0 = \frac{d}{d\tau}\,\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\|v\|^2}} = \frac{\sqrt{g_{00}}}{2(1-\|v\|^2)^{3/2}}\,\frac{d\|v\|^2}{d\tau} + \frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial x^a}\,\frac{v^a}{\sqrt{1-\|v\|^2}}.$$

Выразим член $\dfrac{d\|v\|^2}{d\tau}$ из последнего равенства и подставим это выражение в (36) и (16). Тогда из (36) и (15) следует, что все слагаемые в (16) имеют один и тот же знаменатель $\sqrt{1-\|v\|^2}$. Умножая уравнение (16) на $\sqrt{1-\|v\|^2}$, получим эквивалентное уравнение, которое разрешимо относительно $\dfrac{dv^a}{d\tau}$ и регулярно, когда скорость частицы стремится к скорости света. Действительно, все члены — гладкие функции от x и v, и $\dfrac{dv}{d\tau}$ корректно определён, так как $d\tau$ корректно определён, когда $\|v\|^2 \to 1$.

Предложение 2.1 доказано. $\triangleleft$

Доказательство леммы 6.2. $\triangleright$ Пусть $O \in (x_1, x_2)$. Покажем, что положение равновесия $(0,0)$ устойчиво по Ляпунову. Рассмотрим δ-окрестность нуля, которая расположена внутри интервала (x_1, x_2). Пусть $x \in (-\delta, \delta)$. Рассмотрим итерации отображения A. Для любого $\tilde\sigma > \sigma$, $\tilde\sigma < 1$, существует $\tilde\delta > 0$такое, что если $|y| < \tilde\delta$ и $x \in (x_1, x_2)$, то $|y'| < \tilde\sigma|y|$. Пусть $|y| < \tilde\delta$. Предположим, что при $n \leqslant N$ x-компонента n-ой степени отображения $A^n(x) \in (x_1, x_2)$, и, следовательно, y-компонента удовлетворяет неравенству $\bigl|A^n(y)\bigr| < \tilde\sigma^n|y|$, а при $n = N+1$ $A^{N+1}(x) \notin (x_1, x_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}\bigl|A^{N+1}(x)\bigr| &\leqslant |x| + c_1|y| + \ldots + c_1\bigl|A^N(y)\bigr| \leqslant \delta + c_1|y|(1+\tilde\sigma+\ldots+\tilde\sigma^N) \leqslant \\ &\leqslant \delta + c_1\tilde\delta\,\frac{1}{1-\tilde\sigma}.\end{aligned}$$

Эта оценка не зависит от N. Если константы $\delta, \tilde\delta$ достаточно малы, то $A^n(x) \in (x_1, x_2)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ при условии, что $x \in (-\delta, \delta)$. Но в этом случае $\bigl|A^n(y)\bigr|$ убывает экспоненциально быстро: $\bigl|A^n(y)\bigr| \leqslant \tilde\sigma^n|y|$ (это означает асимптотическую устойчивость), и

$$\bigl|A^n(x)\bigr| \leqslant \delta + c_1\tilde\delta\cdot\frac{1}{1-\tilde\sigma},$$

что доказывает устойчивость по Ляпунову.

Лемма 6.2 доказана. $\triangleleft$

Список литературы

[1] Д. Биркгоф. Динамические системы. М.–Л.: Гостехиздат, 1940.

[2] M. V. Deryabin, L. D. Pustyl'nikov. On generalized relativistic billiards in external force fields // Letters in Math. Physics, (2003), 63 (3), p. 195–207.

[3] M. V. Deryabin, L. D. Pustyl'nikov. Generalized relativistic billiards // Regular and Chaotic Dynamics, (2003), V. 8, N 3, p. 283–296.

[4] M. V. Deryabin, L. D. Pustyl'nikov. Exponential attractors in generalized relativistic billiards // Communications in Math. Physics, (2004), 248, p. 527–552.

[5] M. V. Deryabin, L. D. Pustyl'nikov. Non-equilibrium gas and generalized billiards // Journal of Statistical Physics, (2007), 126, N. 1, p. 117–132.

[6] С. А. Довбыш. Колмогоровская устойчивость, невозможность разгона Ферми и существование периодических решений в некоторых системах типа гамильтоновых // Прикладная математика и механика, (1992), Т. 56, с. 218–229.

[7] E. Fermi. On the origin of the cosmic radiation // Phys. Rev., (1949), 75, c. 1169–1174.

[8] J. Guckenheimer, P. Holms. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields // Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1983.

[9] V. V. Kozlov, D. V. Treschev. Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts // Trans. Math. Monographs 89. Providence, RI: American Mathematical Society, 1991.

[10] И. П. Конфелььд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

[11] T. Krüger, L. D. Pustyl'nikov, S. E. Troubetzkoy. Acceleration of bouncing balls in external fields. // Nonlinearity, (1995), 8, p. 397–410.

[12] Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. Теория поля. М.: Физматгиз, 1962.

[13] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman. Regular and Chaotic Dynamics // New York, Springer, 1992.

[14] H. Poincaré. Réflexions sur la théorie cinétique des gaz // J. Phys. Theoret. et Appl., (1906), (4) 5, p. 349–403.

[15] Л. Д. Пустыльников. О механизме возникновения необратимости и неограниченном росте энергии в одной модели статистической механики // ТМФ, (1991), Т. 86, N. 1, с. 120–129.

[16] Л. Д. Пустыльников. Модели Пуанкаре, строгое обоснование второго начала термодинамики из механики и механизм ускорения Ферми // УМН, (1995), Т. 50, вып. 1 (301), с. 144–186.

[17] Л. Д. Пустыльников. Закон возрастания энтропии и обобщённые биллиарды // УМН, (1999), Т. 54, вып. 3, с. 654–655.

[18] Л. Д. Пустыльников. Устойчивые и осциллирующие движения в неавтономных динамических системах. II. // Труды ММО, (1977), Т. 34, с. 3–103.

[19] Л. Д. Пустыльников. Об одной задаче Улама // ТМФ, (1983), Т. 57, N 1, 128–132.

[20] Л. Д. Пустыльников. О модели Ферми–Улама // ДАН ССР, (1987), т.292, No3, с. 549- 553.

[21] Л. Д. Пустыльников. Существование инвариантных кривых для отображений, близких к вырожденным, и решение проблемы Ферми–Улама // Матем. сб., (1994), Т. 185, N 6, с. 1–12.

[22] Л. Д. Пустыльников. Новый механизм ускорения частиц и релятивистский аналог модели Ферми–Улама // ТМФ, (1988), Т. 77, N 1, с. 154–160.

[23] Л. Д. Пустыльников. Новый механизм ускорения частиц и числа вращения // ТМФ, (1990), Т. 82, N 2, с. 257–267.

[24] Я. Г. Синай. Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих биллиардов // УМН, (1970), Т. 25, N 2 (152), с. 141–192.

[25] Ya. G. Sinai (ed) Dynamical Systems 2. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1989, pp. 281.

[26] S. M. Ulam. On some statistical properties of dynamical systems // In: Proc. 4^{th} Berkeley Sympos. on Math. Statist. and Prob., Vol. III, Berkeley, CA: Univ. California Press, pp. 315–320 (1961).

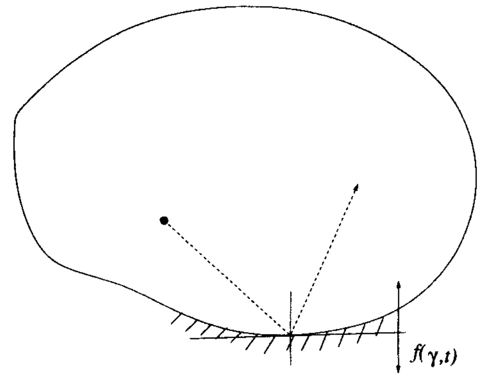

Рис. 1. Обобщенный биллиард

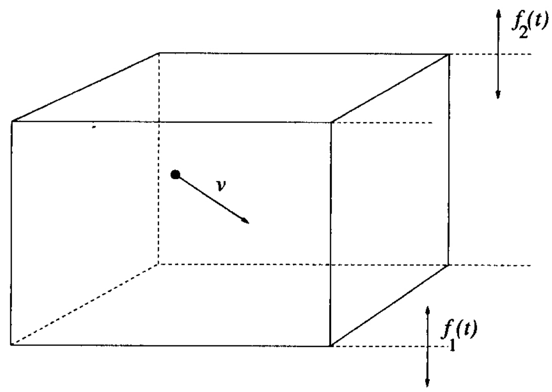

Рис. 2. Обобщенный релятивистский биллиард в параллелепипеде

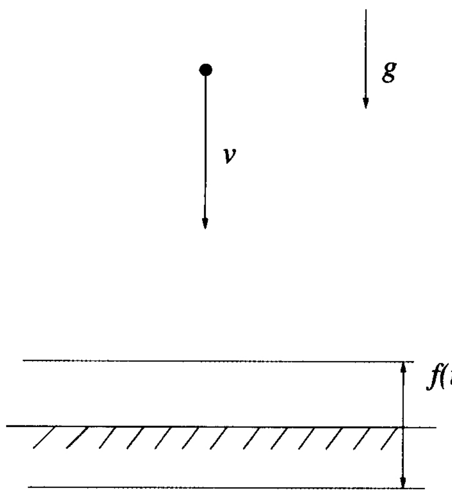

Рис. 3. Ускорительная модель с одной стенкой