ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 44 за 2013 г.

Гусев А.В., Малинецкий Г.Г.,
Торопыгина С.А.

Прикладная математика – проблемы и перспективы

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гусев А.В., Малинецкий Г.Г., Торопыгина С.А. Прикладная математика – проблемы и перспективы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 44. 23 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-44

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

А.В. Гусев, Г.Г. Малинецкий, С.А. Торопыгина

Прикладная математика – проблемы и перспективы

Москва — 2013

А.В. Гусев, Г.Г. Малинецкий, С.А. Торопыгина

Прикладная математика – проблемы и перспективы

АННОТАЦИЯ

Предлагается взгляд на перспективы, проблемы и тенденции развития прикладной математики. Проводится ряд исторических параллелей и обсуждаются несколько актуальных задач.

Ключевые слова: прикладная математика, тенденции развития, криптография с открытым ключом, самоорганизация, синергетика, динамические системы, клеточные автоматы

A.V. Gusev, G.G. Malinetskii, S.A. Toropygina

Applied mathematics – problems and prospects

ABSTRACT

We suggest a view on prospects, problems and trend of development of applied mathematics. We show a number of historical parallels and discuss several actual tasks.

Key words: applied mathematics, trends of development, public key cryptography, self-organization, synergetics, dynamical systems, cellular automation

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00617-а).

Содержание

Первый директор Института прикладной математики АН СССР (ИПМ), выдающийся математик, механик и организатор науки Мстислав Всеволодович Келдыш считал, что черепаха обязательно обгонит Ахиллеса, если она будет двигаться в правильном направлении, а Ахиллес — в неправильном. Стратегические ошибки, связанные с определением направления развития, являются самыми дорогими. Обычно их очень трудно исправить.

Поэтому в начале столетия для математической науки и образования очень важно увидеть набирающие силу тенденции, представить контуры будущего и пути, которые ведут к намеченным целям. Цель этих заметок — поделиться своими мыслями на этот счет и пригласить коллег к обсуждению альтернативных стратегий в области прикладной математики, а также привести ряд примеров.

Математика в контексте ключевых технологий

– Но мир! Но жизнь! Ведь человек дорос,
Чтоб знать ответ на все свои загадки.
– Что значит знать? Вот, друг мой, в чем вопрос.
На этот счет у нас не всё в порядке.

И.В. Гете, «Фауст», пер. Б. Пастернака

Анализ отношений математического творчества и реальности имеет большую традицию. Исаак Ньютон утверждал: «Гипотез не измышляю», считая, что данные наблюдений и результаты опытов естественно укладываются в некоторую логическую структуру и порождают соответствующие математические модели.

Он и предложил схему описания реальности, с развитием которой были связаны основные успехи в развитии естествознания в течение последних трех веков. Эта схема предполагает:

1) выделение переменных $x_1,...x_p$, которые однозначно определяют состояние исследуемого объекта (фазовые переменные);

2) исследование пространства всех возможных состояний (фазового пространства);

3) выяснение, как скорость изменения вектора $\vec{x} \equiv (x_1,...x_p)$, зависит от самого вектора $\vec{x}$:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 .$$

Эта математическая модель в совокупности с начальными условиями $\vec{x}_0$ (возникающими в результате измерений) и определяет дальнейшее поведение описываемого объекта. Вероятно, И. Ньютон полагал, что, приложив достаточно много усилий и проявив изобретательность, выписанное уравнение можно проинтегрировать и найти зависимость $\vec{x}(t,\vec{x}_0)$.

В отсутствие научных журналов ученые зашифровывали свои открытия в виде анаграммы и рассылали в этом виде коллегам. *Единственное* открытие, которое счёл необходимым зашифровать Ньютон: «Полезно изучить дифференциальные уравнения». Итак, основным типом математических моделей при таком подходе оказывались дифференциальные уравнения или, более широко, динамические системы.

Однако отсюда следует и картина мира, которую выдвигал Ньютон. По его мысли, вселенная подобна гигантскому часовому механизму, который сотворил Бог, и которому он дал первотолчок. В этом контексте имеет место предопределенность, мы лишены свободы воли и выполняем роль марионеток высших сил.

Неразрывную взаимосвязь между математическим описанием и физической картиной мира подчеркивал выдающийся математик XX века В.И. Арнольд: «Математика – это просто часть физики».

Альберт Эйнштейн считал, что развитие фундаментальной физической теории требует «внешнего оправдания» (связанного с необходимостью описывать новые экспериментальные данные, результаты наблюдений или выполнять своеобразный «социальный заказ») и «внутреннего совершенства» (следования внутренней логике развития этой области науки, потребности ответить на вопросы, поставленные предшествующими поколениями ученых). Вероятно, деление единой математической науки на «чистую» и «прикладную» связано с разным «удельным весом» этих мотивировок в научном исследовании.

Для дальнейшего анализа важна дискуссия, происходившая в своё время между выдающимся физиком, академиком Л.А. Арцимовичем, и академиком М.В. Келдышем. Своё отношение к развитию науки Арцимович выразил следующей шуткой: «Наука – лучший способ удовлетворения личного любопытства за государственный счет». В каждой шутке есть доля шутки, остальное – правда. По сути дела, неважно, чем заниматься. Важно делать это на высоком уровне. Науковеды называют такой подход *ценностным.*

По мысли М.В. Келдыша, наука, понимаемая как важный социальный институт, должна выделить один или несколько ключевых, понятных обществу и значимых для него приоритетов и развиваться, прежде всего, именно в этих направлениях. Это, в конечном итоге, определит пути фундаментальных исследований и наиболее важное поле научных поисков. Такой подход называется *целевым*. История развития науки в XX веке в целом, и прикладной математики в частности, подтвердила правоту М.В. Келдыша. Оказалось, что прикладная математика, компьютерное моделирование и коллективы, которые способны ставить и решать задачи на переднем крае этих областей, являются национальным достоянием и существенной частью стратегического потенциала страны.

Именно для решения стратегических задач, требовавших использования прикладной математики, в 1953 году и был создан ИПМ. В те годы это были задачи освоения и использования атомной энергии в различных целях, разработки и баллистического сопровождения космических систем, создания компьютеризированных систем управления.

По мнению М.В. Келдыша, чтобы во второй половине XX века страна обладала реальным, а не «бумажным» суверенитетом, была сверхдержавой, она должна обладать

– *ядерными технологиями;*
– *космическими системами различного назначения;*
– *надежными шифрами.*

В разных научных дисциплинах в термин «понимание» вкладывается различный смысл. В области технологий это чаще всего: «Понимаю – значит могу сделать». Видимо, так же следует подходить к пониманию и в области прикладной математики.

Этот взгляд согласуется и с оценкой математических итогов XX века, данной В.И. Арнольдом [1]:

«Вся математика делится на три части: криптография (оплачиваемая ЦРУ, КГБ и им подобными), гидродинамика (поддерживаемая производителями подводных лодок) и небесная механика (финансируемая военными и другими организациями, типа НАСА, имеющими отношения к ракетам).

Криптография привела к созданию теории чисел, алгебраической геометрии над конечными полями, комбинаторики и компьютеров.

Гидродинамика породила комплексный анализ, уравнения в частных производных, теорию групп и алгебр Ли, теорию когомологий и методы вычислений.

Небесная механика дала начало теории динамических систем, линейной алгебре, топологии, вариационному исчислению и симплектической геометрии…

Существование таинственных связей между всеми этими различными областями – самая поразительная и прекрасная сторона математики (не имеющая никакого разумного объяснения).

Опыт прошедших столетий показывает, что развитие математики было обусловлено не столько техническим прогрессом (больше всего поглощавшим усилия математиков во все времена), сколько неожиданными открытиями взаимосвязей между её различными областями (которые сделались возможными благодаря этим усилиям)».

Нынешняя ситуация в математике во многом схожа с той, которая имела место в начале XX века, когда определялась стратегия будущих исследований и вопрос об основах науки – алгебраических, как считал Д. Гильберт, или геометрических, как полагал А. Пуанкаре. Итог этого спора, который решил XX век, В.И. Арнольд видит таким: «Гильберт пытался предсказать будущее развитие математики и повлиять на это своими Проблемами. Развитие математики в XX веке следует другим путём. Наиболее важные достижения – расцвет гомотопической теории и дифференциальной топологии, геометризация всех ветвей математики, её слияние с теоретической физикой, открытие алгоритмически неразрешимых проблем и появление компьютеров – всё это пошло в другом (если не в противоположном) направлении.

Влияние А. Пуанкаре и Г. Вейля на науку XX века было более глубоким. Для Пуанкаре, который создал современную математику, топологию и теорию динамических систем, будущее математики лежало в развитии математической физики, ориентированной на описание релятивистских и квантовых явлений. Между прочим, Пуанкаре объяснял, что *только неинтересные задачи могут быть сформулированы четко и решены полностью.* Согласно Пуанкаре, надо постараться понять, что может быть *изменено* в формулировке проблемы» [1].

Другими словами, «проросло» и оказалось плодотворным в «чистой математике» именно то, что было наиболее близко к самым важным и интересным приложениям.

Прошедший век позволяет проследить и ещё одну важную и интересную тенденцию. Огромным стимулом для математического творчества были в течение XX века задачи, вытекающие из «внутреннего совершенства» – «вечные» или «неразрешимые проблемы». Математики Античности оставили в наследство следующим поколениям ученых три классические задачи, которые следовало решить с помощью циркуля и линейки:

– деление произвольного угла на три равные части (трисекция угла);
– построение ребра куба объёма, вдвое превышающего объём данного куба (удвоение куба);
– построение квадрата, площадь которого равна площади данного круга (квадратура круга).

Нарочитая «шероховатость» в формулировке пятого постулата евклидовой геометрии показывает их неудовлетворенность созданной системой аксиом.

Первая и вторая проблема, решенные П.Л. Ванцелем в 1837 г. во Франции дали начало современной алгебре (по сути, он показал, что с помощью циркуля и линейки можно «решать» квадратные уравнения, но нельзя кубические). Вопрос о квадратуре круга потребовал очень высокого уровня развития математического анализа и был разрешен только в 1882 г. Ф. Линдеманом [2]. Намёк, брошенный античными математиками, относительно аксиоматики, воплотился в неевклидовых геометриях и заставил пересмотреть вопрос об отношении математики и реальности [3]. Известно, что Гаусс занимался триангуляцией удаленных объектов, чтобы измерить, действительно ли сумма внутренних углов треугольника больших размеров на земной поверхности составляется 180°, чтобы убедиться, что евклидова геометрия является хорошим приближением нашей реальности.

Однако в XX веке ситуация существенно меняется – «неразрешимые задачи», требующие построения новых математических теорий, всё чаще приходят из прикладных областей. Наглядным примером является *проблема морфогенеза* – одна из главных задач биологии XX века, оставленных в наследство следующему столетию.

Вначале у оплодотворённой клетки оказывается два одинаковых потомка, затем четыре, затем после множества делений развивается сложная целостная система – организм. Как же одни клетки узнают, что их потомкам суждено стать клетками мозга, сердца или желудка? В соответствии с основной догмой молекулярной биологии все клетки имеют одну и ту же наследственную информацию, одну и ту же ДНК. Как и на каком этапе вырабатывается информация, необходимая для развития организма?

В связи с открытием стволовых клеток эта фундаментальная проблема, называемая проблемой морфогенеза, приобрела огромное прикладное значение. Качественный скачок в этой области произошел благодаря японскому ученому Синъе Ямонаке (Нобелевская премия по биологии и медицине 2012 года). Он смог вернуть взрослые клетки в состояние плюрипотентности, когда они могут превратиться в разные клетки организма. Это, видимо, начало магистрального пути к созданию «запасных частей» для организма человека и к радикальному повышению продолжительности жизни.

По мысли Алана Тьюринга, позиционная информация (о месте и роли этой клетки и её потомков в организме) вырабатывается в ходе развития организма благодаря химическим реакциям и диффузионным процессам. В качестве простейшей модельной задачи он предложил в 1952 году описывать расположение листьев на стебле, используя системы типа реакция–диффузия

$$\begin{aligned} u_t &= D_1 \Delta u + f(u, v, \lambda) \\ v_t &= D_2 \Delta v + f(u, v, \lambda)' \end{aligned}$$

где u и v – концентрации неких гипотетических веществ, названных активатором и ингибитором, λ – некоторый параметр, меняющийся в ходе развития организма. Идея оказалась весьма плодотворной, и последующие 60 лет принесли много десятков тысяч работ, посвящённых этой модели, а также её приложениям в разных областях. С ней, в частности, связаны основные надежды на построение качественной теории систем нелинейных параболических уравнений [4].

По мнению выдающегося математика Рене Тома, развитие организма, как и любое развитие, в ходе которого количественные изменения переходят в качественные, связано с последовательностью бифуркаций, с «катастрофами». В ходе таких «катастроф» в ответ на бесконечно малое изменение управляющего параметра происходит изменение состояния системы на конечную величину. И с этой точки зрения, ключевое значение приобретает классификация возможных катастроф, например, для некоторого класса математических моделей (так называемых градиентных систем):

$$\dot{x} = -\frac{\partial U(x, \vec{\lambda})}{\partial x}, \ \vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots \lambda_p),.$$

Если размерность пространства параметров p меньше 5, то типичными оказываются 7 элементарных катастроф. В пространствах большей размерности возникают принципиальные трудности [5].

Взгляд выдающегося математика XX века Джона фон Неймана состоял в том, что следует сосредоточиться не на процессе развития, а на его результате – возникновении системы, способной к *самовоспроизведению*. Именно это и является главным свойством живого. Для моделирования этого феномена он предложил новый математический язык – *язык клеточных автоматов* [4]

$$\{S\}_{t+1} = F\{S_t\}.$$

Эти модели описывают процессы, развивающиеся в дискретном пространстве и времени. В двумерном случае вместо непрерывных пространственных (x и y) и временной t координат мы имеем дискретные координаты (i, j), $i = 1,2,...$, $j = 1,2,...$, характеризующие пространственное расположение и временную последовательность $n = 1,2,...$. Кроме того, функция, определяющая состояние данной ячейки-клетки $S(i, j, n)$, может принимать одно из значений из дискретного набора $\{S^1, S^2, ... S^m\}$ (как правило, это просто целые числа $\{0,1,...m-1\}$). Около каждой ячейки-клетки определяется её окрестность $M(i, j)$ (например, ячейки, которые имеют общие с ней ребра или вершины, либо соседство задается более сложным образом, оставаясь локальным)

$$S(i, j, n+1) = \sum_{p,q \in M(i,j)} S(p,q,n)\alpha(p,q).$$

Эту модель можно рассматривать как некоторую динамическую систему в дискретном пространстве-времени, либо как аналог уравнения в частных производных (в силу локальности и однородности правил, которые задают коэффициенты $\alpha(p,q)$), либо как «испорченную» разностную схему, в которой сеточная функция может принимать одно из конечного набора значений.

Дж. Нейману удалось показать, что модель такого типа может описывать феномен самовоспроизведения, и построить соответствующий клеточный автомат. Сейчас, в эпоху компьютерных вирусов, этот результат представляется очевидным. Однако не стоит забывать, что он был получен за полвека до наступления этой эпохи. На новом уровне идея самовоспроизведения возникла в нанотехнологиях как угроза «серой слизи» – самовоспроизводящихся микророботов, начавших перерабатывать всё доступное в себе подобных.

Математика, так же как поэзия или фантастика, обладает удивительной способностью к пров*и*дению. В 1970 году кембриджский профессор Джон Конвей предложил клеточный автомат «Жизнь» – по-видимому, наиболее известный автомат на сегодняшний день. Он задан на бесконечном листе бумаги в клетку. Соседями данной клетки являются 8 ближайших, которые имеют с ней общие ребра или вершины. $S^1 = 0$ – «мертвая клетка», $S^2 = 1$ – «живая клетка». Правила также удивительно просты:

– «правила смерти»: живая клетка в момент $t+1$ становится мертвой, когда у неё меньше двух живых соседей («от скуки») или более трёх («от перенаселения») в момент t.

– «правила жизни»: мертвая клетка становится живой в момент времени $t+1$, если в момент времени t она имеет 3-х живых соседей.

Эта игра обладает многими замечательными свойствами и детально исследовалась. Однако центральный результат был получен самим Дж. Конвеем. Оказалось, что она *эквивалентна универсальной машине Тьюринга* – с её помощью можно проводить вычисления любой сложности.

Идеи теории клеточных автоматов сегодня уже активно используются в распознавании образов, при проектировании графических процессоров, в ряде алгоритмов компьютерной графики, вычислительных системах с высокой степенью параллельности («машинах клеточных автоматов») [6]. Однако, возможно, самые важные и интересные приложения ещё впереди.

В самом деле, компьютер представляет собой набор элементов, осуществляющих простейшие логические операции И и ИЛИ, и набор проводов. Когда логические элементы будут иметь размеры, сравнимые с атомными, именно «провода» станут камнем преткновения. Вычисления, по необходимости, должны будут стать локальными. Тут клеточные автоматы и могут пригодиться.

Таким образом, работа над решением фундаментальной прикладной проблемы оказалась удивительно плодотворной.

Вернемся к исходному вопросу: около каких технологий, скорее всего, вырастет новая математика в XXI веке?

Наш третий директор, специалист в области прикладной математики и междисциплинарных исследований, член-корреспондент РАН Сергей Павлович Курдюмов полагал, что к трем технологиям, обозначенным М.В. Келдышем в XXI веке, добавятся ещё три:

– *технологии проектирования будущего;*
– *высокие гуманитарные технологии;*
– *технологии сборки и разрушения социальных субъектов;*

Кратко прокомментируем их существо. Все эти технологии связаны с *самоорганизацией* – с выделением с течением времени нескольких ведущих переменных, называемых *параметрами порядка*, к которым подстраиваются остальные фазовые переменные. Математические образы этого – выход на притягивающее множество или аттрактор. В современной теории динамических систем говорят, что траектории изучаемой системы стремятся к *инерциальному многообразию* (которому принадлежат параметры порядка), а динамика на этом многообразии определяется *инерциальной формой* [7].

Во всех этих технологиях возникают проблемы *управления* соответствующими системами, которые кардинально отличаются от классических задач, связанных с физическими или технологическими системами.

Все эти проблемы, как правило, относят к нетрадиционным областям прикладной математики и моделирования, *описывающим действия людей, принятие ими решений, их восприятие и взаимодействие.* Нетрудно предположить, что анализ этих задач и их решение потребует новой математики.

И успехи математического моделирования, и представления теории самоорганизации – *синергетики* – во многом связаны с моделями естествознания и, прежде всего, физики [8,9]. Именно математическую физику мы преподаем студентам университетов и технических вузов. Математическая химия и биология активно развиваются всего несколько десятилетий. Основы математической экологии, социологии, психологии, географии, истории, медицины закладываются на наших глазах. В XX веке многие точки роста прикладной математики будут стимулироваться гуманитарными науками.

Проектирование будущего неразрывно связано со стратегическим прогнозом и управлением рисками, с анализом тех небольших изменений в сегодняшней реальности, которые могут существенно изменить траектории стран, регионов, человечества в целом в перспективе 20-30 лет, уберечь от бедствий и катастроф.

Выдающийся математик XX века, сотрудник ИПМ, академик И.М. Гельфанд обращал внимание на два архетипа в истории человечества. Первый связан со знанием и умением, второй – с мудростью. Первый ориентирован на поиск и разработку способов сделать какие-либо дела. Второй – на понимание того, следует ли это делать. Их разницу иллюстрирует известная пословица: умный найдет выход из любого трудного положения, а мудрый в такое положение просто не попадет.

Почти всю историю, включая XX век, люди следовали в основном первому архетипу. Наука стремилась развиваться во всех возможных направлениях, а технологии – использовать всё, до чего удавалось дотянуться. Однако будущее, его проектирование и воплощение выработанных решений, видимо, будет требовать развития второго архетипа и ставить соответствующие математические проблемы.

Высокие гуманитарные технологии ориентированы на осознание, развитие и использование возможностей людей и коллективов. И главные угрозы, и основные риски начавшегося столетия, вероятно, будут связаны с человеком. Понимание принципов работы мозга представляет собой один из главных вызовов для современной науки. Действительно, проблема возникает уже на «техническом уровне». Скорость срабатывания нервной клетки – нейрона – *в миллионы раз меньше*, чем скорость срабатывания элементарного логического элемента – триггера – в микросхеме. Скорость передачи сигналов в первой системе *в миллион раз меньше*, чем в персональном компьютере. Кроме того, нейробиологи утверждают, что с годами человек теряет до 90% нервных клеток без существенной потери запомненной информации. Очевидно, речь идет о других принципах, об иных когнитивных технологиях, кардинально отличающихся от тех алгоритмов, которые реализованы в современных компьютерах.

Поэтому неудивительно, что на этапе поиска принципов большие надежды возлагаются именно на математику и на построение простейших качественных моделей, показывающих, как это могло бы быть устроено. До недавнего времени большие надежды возлагали на теорию нейронных сетей [7], однако сейчас внимание всё чаще привлекает концепция выдающегося специалиста в области математической физики Роджера Пенроуза, получившая название «теней сознания», рассматривающая *отдельную* нервную клетку как квантовый компьютер, и считающая сознание квантовым феноменом [10].

От войн, связанных с разрушением городов, уничтожением огромного числа людей, человечество переходит к стратегиям «мягкой силы», к «организационному оружию». Не надо уничтожать общество, если его можно «перепрограммировать», разрушив один социальный субъект и создав другой.

В настоящее время в практике управления общественными процессами всё шире используют *информационное управление*. Борьба в пространстве информации, смыслов, ценностей, проектов будущего имеет свои законы и приобретает всё большее значение. Значит, и в этой важной сфере должны появиться свои модели и своя математика.

Иными словами, перед математическим моделированием раскинулись огромное поле деятельности. Новые области, которыми раньше занимались гуманитарные дисциплины, требуют новых идей и подходов. Вероятно, «математический ландшафт» конца XX века будет кардинально отличаться от той картины, которую мы видим сейчас.

Простота, лезвие Оккама, научные революции

Все должно быть сделано настолько просто, насколько это возможно, но не проще.

А. Эйнштейн

В родстве со всем, что есть, уверясь
И знаясь с будущим в быту,
Нельзя не впасть к концу, как в ересь,
В неслыханную простоту.
Но мы пощажены не будем,
Когда ее не утаим.
Она всего нужнее людям,
Но сложное понятней им.

Б. Пастернак

Простота основополагающих принципов может рассматриваться как важнейшее достижение современной науки. Действительно, все основные законы физики могут быть выписаны на нескольких тетрадных листах.

С другой стороны, это надежда на более глубокое понимание картины мира в будущем, на успех междисциплинарных подходов.

В 1950-х годах историк и философ науки Томас Кун (1922–1996) предложил свою схему развития научного знания. Он ввёл понятие *парадигмы* – беспрецедентного, выдающегося научного достижения в данной области науки, которое обладает двумя принципиальными чертами:

– оно задает стандарт научных исследований в некой области и схему объяснения явлений, которые в ней исследуются;

– оно может рассматриваться как «генератор головоломок», порождающий набор задач разного уровня, масштаба и сложности.

После того как парадигма получила признание, она начинает разрабатываться научным сообществом – развиваться, уточняться, расширяться. Затем появляются явления, факты, результаты наблюдений и измерений, которые не укладываются в эту парадигму. Количество переходит в качество, рождается следующая парадигма. Происходит научная революция. Например, таким образом осуществлялся переход от птолемеевой к коперниковской картине Солнечной системы. Примерно так же происходило развитие квантовой механики [11].

Однако вторая половина XX века и развитие прикладной математики показало, что возможны «научные революции второго рода». На них обратил внимание выдающийся специалист по философии науки, академик В.С. Стёпин [12]. По его мысли, пересмотр основ одной науки может, воздействуя на исследования в другой научной области, привести к научной революции и в ней. Яркий пример дает развитие химии в XX веке. Становление квантово-механической картины мира, осуществленное физиками, кардинально изменило основы химии, поставило новые вопросы и позволило выйти на иной, более высокий уровень химических исследований.

«Уравнение Шредингера не было открыто, оно было угадано», – писал один из основоположников квантовой теории. Но это уравнение позволило собрать воедино и объяснить множество результатов наблюдений и измерений – головоломка сложилась…

Однако прикладная математика показала, что научные революции и переход к более глубокому пониманию реальности может происходить совсем по другому сценарию.

Вначале строится набор *простых* математических объектов, как правило, без намерения описывать какие-то реальные феномены. Затем исследователям (иногда через несколько десятилетий) в некоторой конкретной области становится понятно, «что они говорят прозой», что схематичная, грубая и «неправильная» математическая конструкция может оказаться ключом к тому явлению, которое они пытаются понять. И если «замок» открывается этим ключом, то в некоторой области происходит научная революция, а иногда меняется и сам взгляд на реальность.

Один пример позволяет проследить этот путь познания. Закладывая основы имитационного моделирования в 1946 году, Дж. Нейман с соавторами ввел в рассмотрение одномерное отображение, переводящее отрезок $[-1;1]$ в себя

$$x_{n+1} = 1 - 2|x_n|, \qquad x_1 = \widetilde{x}, \qquad -1 \le x_1 \le 1,$$

получившее название «тент» или «палатка».

Учитывая, что инвариантная мера этого отображения имеет постоянную плотность на всем отрезке

$$\rho(x) = 1/2 \text{ при } -1 \le x_1 \le 1,$$

это отображение рассчитывали использовать в качестве генератора случайных чисел. Оно имеет много замечательных свойств (хотя для генерации случайных чисел лучше использовать более сложные отображения). Однако принципиальным с точки зрения прикладной математики оказалось свойство *чувствительности к начальным данным*, связанное с экспоненциальными разбеганием бесконечно близких траекторий с течением времени.

В самом деле, рассмотрим две последовательности чисел, представляющих итерации этого отображения: $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, $x'_1 = \tilde{x}$, $x''_1 = \tilde{x} + \varepsilon$. При этом будем считать, что ε очень мало $\varepsilon = (1/2)^N$, так, чтобы в течение первых N итераций при подходящем выборе $\tilde{x}$ числа $\{x'_1,...x'_N\}$ и $\{x''_1,...x''_N\}$ принадлежали одной ветви отображения. Тогда, непосредственной подстановкой в формулу, задающую отображение, можем убедиться, что

$$|x'_1 - x''_1| = \varepsilon, \ |x'_2 - x''_2| = 2\varepsilon, \ldots \ |x'_n - x''_n| = \varepsilon \cdot 2^n .$$

Иными словами: после каждой итерации расстояние между траекториями $d_n \equiv |x'_n - x''_n|$ удваивается $d_n = \varepsilon \cdot 2^{n-1}$. Если рассматривать $\{x'_n\}$ как траекторию исследуемой системы, а $\{x''_n\}$ как предсказания её математической модели, то начиная с N-го шага, зная $\{x''_n\}$, мы ничего не можем сказать о состоянии системы $\{x'_n\}$ в моменты $N+1, N+2, \ldots$.

Иными словами, этот простейший нелинейный математический объект показывает, что в элементарных динамических системах, описывающих детерминированные процессы (в которых будущее состояние системы *однозначно* определяется настоящим), существует *горизонт прогноза*, начиная с которого идеальная модель перестает описывать состояние объекта. Причем увеличение точности измерения начального состояния системы (уменьшение величины ε) не меняет этого факта.

С другой стороны, это простейшее отображение описывает *эффект бабочки* – если мы можем изменить состояние системы в начальный момент на малую величину ε (взмах крыльев бабочки), то с течением времени (через N итераций) состояние системы может измениться кардинально (например, вызвать через 2–3 недели ураган в тысяче километров того места, где бабочка взмахнула крылышками).

Однако это модель – одна из многих – предложенная, собственно, в вычислительной математике…ничего не означает. Всё описанное может быть странным, экзотическим, нетипичным свойством во многих отношениях уникального объекта.

Осознание того, что наша реальность может быть устроена похожим, неустойчивым образом вначале возникло в художественной культуре (фантастический рассказ Рэя Брэдбери «И грянул гром»), затем в ходе размышлений о природе турбулентности («Феймановские лекции по физике» 1963). И, наконец, аналогичную картину увидел, поверил ей и объяснил с помощью «палатки» американский метеоролог Эдвард Лоренц (1963), изучивший *простейшую* математическую модель конвекционной неустойчивости. Когда работа Лоренца была прочтена и понята (1971), наблюдаемая нелинейная динамика осмыслена как результат последовательности бифуркаций (Д. Рюэль, Ф. Такенс, 1971), хлынула лавина работ по динамическому хаосу и странным аттракторам в самых разных областях – от гидродинамики до экономики и от астрофизики до медицины. Они помогли осознать, что простейшая математическая модель даёт образ и понимание важного свойства нашей реальности.

Ньютон и Лаплас делали явно нереалистичное предположение о возможности сколь угодно точно определить начальное состояние изучаемого объекта ($\varepsilon = 0$, взгляд с точки зрения Бога), откуда и следовало представление о гигантском часовом механизме и отсутствии свободы воли. Более реалистичное предположение о том, что $\varepsilon \neq 0$ приводит к концепции горизонта прогноза, очерчивает наши пределы в области предсказания (вероятно, какими бы мощными ни были используемые компьютеры, мы никогда не получим среднесрочного – 2–3 недели – прогноза погоды). Отсюда следует и оптимистический вывод – мир пока не создан в законченном, завершенном виде, а находится в процессе творения, и мы можем оказаться активными участниками этого процесса.

Обратим внимание на путь, который привёл к новому пониманию реальности: *простейшая математическая конструкция, возникающая в чистой математике или при построении алгоритма $\rightarrow$ модель, предложенная в прикладной математике, в которой с помощью этой конструкции удаётся достичь понимания $\rightarrow$ поток прикладных работ, позволяющий осознать эту ситуацию как общую $\rightarrow$ новый уровень математического понимания проблемы и новые конструкции.*

Если вдуматься, то такой же путь параллельно прошли качественная теория динамических систем и теория колебаний в контексте развития радиофизики. Сходным путем шло становление и развитие фрактальной геометрии. При этом в случае динамического хаоса первый переход был пройден довольно быстро – примерно за 20 лет. В случае фрактальной геометрии это заняло почти целый век.

Простые, успешные и хорошо понятные модели – золотой фонд прикладной математики позволяют говорить о «математическом понимании реальности». В этой связи появление книги В.И. Арнольда, в которой таким образом предлагается взглянуть на природу и ряд инженерных решений, представляется очень важным [13].

Опыт понимания многих важных и интересных явлений показывает, что математика не только смотрит на звезды, но и прочно стоит на земле.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Математика – это больше, чем наука, это язык.

Н. Бор

В XX веке было понято, что во множестве случаев надо осмысливать или создавать не отдельные элементы, а *системы*. Под системой (от греч. system – составленное из частей, соединенное) понимают целостный, организованный объект, в котором связи между элементами системы более важны и значимы, чем их связи с элементами других систем. Понятия «связь», «элемент», «целое», «единство», «структура» перекочевали из философских трактатов в труды математиков и инженеров (создатель современной алгебры Виет был криптографом короля Генриха IV).

Сложность системы определяется разнообразием её элементов, типом и количеством связей, количеством уровней организации, которое следует учесть, чтобы понять принципы её действия и механизмы функционирования.

С начала 1920-х годов биологи, географы, филологи, геофизики, астрономы обращали внимание на замечательный «системный закон». В географии его часто называют законом Ципфа, но в разных науках ему присвоены различные названия. Упорядочим элементы системы в порядке убывания. Первому по размеру элементу присвоили ранг r_0 (r_0 – удобный подгоночный коэффициент), второму r_0+1, третьему r_0+2 и т.д. Пусть $N(r)$ – размер элемента ранга r. Закон Ципфа утверждает, что для целостных систем расселения численность жителей города N зависит от его ранга степенным образом

$$N(r) \sim r^{-1}.$$

Подобный закон характеризует и крупные страны, и распределение крупнейших мегаполисов мира по численности [14]. Он же описывает распределение слов по частоте их употребления в большом прозаическом произведении. Он же отражает распределение родов по числу входящих в них видов.

Однако ещё более важно, что подобные степенные законы с показателями, близкими к 1, характерны для землетрясений, наводнений, катастроф на атомных электростанциях, биржевых крахов и ущербов от утечки конфиденциальной информации.

Чтобы осознать парадоксальность и необычность сложного, надо вернуться к простому. Два века развития теории вероятностей показали, что в этой области математики особую роль играет нормальное распределение с плотностью распределения вероятности

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}},$$

где M – математическое ожидание случайной величины, σ^2 – дисперсия. Это распределение освящено авторитетом центральной предельной теоремы [15].

Пусть ξ_1, $\xi_2 ... \xi_n$ – независимые случайные величины, имеющие одинаковое распределение со средним значением M и дисперсией σ^2. Тогда случайная величина $x_n = (\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n - nM)/\sqrt{n} + M$ сходится по распределению к случайной величине с плотностью $\rho(x)$, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием M и дисперсией σ^2.

Наша интуиция полностью согласуется с этим математическим результатом. Исследования физиологов и психологов показывают, что физические характеристики людей (рост, вес и т.д.) и их способности прекрасно описываются нормальным распределением (справедливости ради надо сказать, что «отстающих» по части способностей чуть больше, чем «выдающихся»). Смысл распределения прекрасно выражает фраза: «Чудес не бывает!» Действительно, за 3σ в таких выборках выходят в среднем 3 случая из 1000, а за 5σ – один случай из миллиона. Это означает, что мы можем с лёгкостью пренебречь вероятностью встречи с гигантом в 2,5 метра роста и 30-сантиметровым карликом.

Однако для тех случаев, в которых имеет место закон Ципфа и его аналоги, типичны степенные законы

$$\rho(x) \sim x^{-(1+\alpha)}.$$

При $0 < \alpha \le 1$ их называют «распределениями с тяжелыми хвостами». Принципиально отличие степенных распределений от нормальных (гауссовых) состоит в том, что в последнем случае есть характерные масштабы – M и σ^2. В случае степенных распределений таких масштабов нет (так же, как фракталы, они являются масштабно-инвариантными).

Это гораздо ближе к страшному и прекрасному миру восточных сказок. В них встречаются джины ростом 30 метров, дэвы – 100 метров, ифриты – 150. Встречаются они нечасто, но уже если встречаются, то всё меняется кардинально. Но именно в этом мире мы с вами и живем во всём, что касается бедствий, кризисов и катастроф!

Большие успехи прикладной математики на рубеже XXI века были связаны с моделированием, описанием и пониманием этой новой реальности.

Собственно, основных механизмов два. Первый очевиден – это положительная обратная связь, описываемая пословицей: «На деньгу деньга бежит».

В самом деле, представим, что вы оказались в стране, где есть N городов. Вероятность прийти в данный город, очевидно, пропорциональна числу жителей в нем (и заметней он, и информации о нем больше, и если там уже много жителей, значит им неплохо живется). Другими словами, речь идет о делении общего ресурса в пропорции, определяемой размерами существующих объектов в данный момент времени. Оказывается, этой очевидной гипотезы достаточно, чтобы описать наблюдаемую картину и построить соответствующие математические модели [20].

С бедствиями и катастрофами ситуация сложнее. И простейшие динамические системы, и традиционные модели теории вероятностей не приводят к подобным эффектам. Очевидно, стоит искать «на кромке хаоса», где есть место и случайности и динамике.

Основные идеи и результаты в данной области были выдвинуты датским исследователем Пером Баком, много лет работавшим в США. Он с коллегами построил *теорию самоорганизованной критичности*, объясняющую эту грань сложности. «И цель науки о самоорганизованной критичности – внести ясность в фундаментальный вопрос о том, почему природа сложна, а не проста, как то подразумевают законы физики», – писал Пер Бак [17].

Собственно, полученное понимание связано с несколькими моделями, представляющими клеточные автоматы. Следуя традиции, считают, что они описывают динамику кучи песка.

Модель кучи песка, с которой началась теория самоорганизованной критичности, формулируется как двумерный клеточный автомат. Имеется решетка размерами $L \times L$, в ячейках которой может находиться некоторый дискретный ресурс, по традиции именуемый песчинками. Ячейки, содержащие 1,2,3 и 4 песчинки, считаются устойчивыми, а более 4 – неустойчивыми. Неустойчивые ячейки опрокидываются, передавая 4 песчинки своим соседкам – ячейкам, имеющим с ними общую сторону (в случае ячеек, находящихся на краю решетки, происходит потеря песчинок, переданных за край). Вариант модели кучи песка, предложенный П. Баком, Ч. Тангом и К. Визенфельдом (БТВ), предполагает строго детерминированную передачу песчинок – по одной каждой соседке. Однако имеется и стохастический вариант модели, предложенный С. Манной, в котором каждая передаваемая песчинка выбирает соседку случайным образом.

Передача песчинок в другие ячейки может нарушить их устойчивость и вызвать цепную реакцию опрокидываний. До тех пор, пока в системе имеются неустойчивые ячейки, говорят, что идет лавина. Когда она завершается, случайным образом выбирается ячейка и в неё добавляется песчинка, которая инициирует новую лавину. Интерес представляют общие, интегральные характеристики всего процесса «лавины» – например, размер лавины N (полное число опрокидываний) или «площадь» S (число клеток, хотя бы раз опрокинувшихся) и т.д.

В результате наблюдения за большим числом лавин накапливается статистика, по которой строится функция распределения их характеристик. Независимо от начальной конфигурации системы через некоторое время она самоорганизуется в критическое состояние, где эти распределения имеют степенной вид. Это свойство не зависит от деталей правил, которые определяют динамику системы. Однако от них может зависеть показатель степени α, определение которого и является результатом серии компьютерных экспериментов и теоретического анализа.

Что в этом случае представляет собой «понимание» построенной модели? Ровно то же, что и в теоретической физике. Эксперимент дает нам набор данных, по которым мы определяем наиболее важные характеристики системы. Теория, которая, опираясь на первые принципы или другие модели, дает нам те же числа без проведения эксперимента, и есть подтверждение того, что мы понимаем исследуемые процессы.

Одной из наиболее важных и плодотворных идей в математике является идея симметрии. В статистической физике тип симметрии, как правило, определяет критические показатели в соответствующей математической модели.

Свои удивительные симметрии были обнаружены в 2012 году в моделях самоорганизованной критичности А.В. Подлазовым [17]. Оказалось, что показатели, характеризующие величину лавины, ее продолжительность, общее число опрокидывания и другие величины в модели БТВ и модели Манны существенно различаются несмотря на то, что они обладают одинаковой симметрией. Однако в первом случае при каждом осыпании неустойчивая ячейка раздает *строго* по одной песчинке соседкам. Во втором она раздает *в среднем* по одной песчинке. Ответ на вопрос о причинах этой необычной симметрии связан с существенно различной динамикой лавин.

По-видимому, путь к математическому пониманию реальности в XXI веке всё чаще будет проходить через модели, описываемые клеточными автоматами.

Революция в криптографии и компьютерные войны

> Криптография с открытым ключом рассчитана на людей, которые очень не доверяют друг другу, но очень доверяют своим компьютерам.
>
> *Из выступления на семинаре*

Математика всегда, со времен Архимеда, была самым тесным образом связана с военным делом. На неё надеялись – достаточно вспомнить легенду об Архимеде, который сжег вражеский флот с помощью параболического зеркала.

Тем не менее, сейчас математика, с одной стороны, становится всё ближе к изобретательству, к инженерным дисциплинам, а с другой – непосредственно выходит на поле боя. Алгоритмы решения сложных вычислительных задач, так же, как во времена космического и ядерного проекта, вновь становятся стратегическим ресурсом. Только в этот раз появляется удивительная возможность использовать их напрямую, без посредства ракет и бомб.

В теории вычислительной сложности задачи считаются *простыми*, если для их решения требуется не более, чем $Q \approx N^{\alpha}$ операций, где N – объём входных данных, α – постоянный, не зависящий от N, показатель степени. При сложении двух чисел $\alpha = 1$. При перемножении двух матриц размера $L \times L$ требуется $\approx L^3$ действий, поэтому $N \approx L^2$, $Q \approx N^{3/2}$, $\alpha = 3/2$.

Однако есть *сложные* задачи, например, задача коммивояжера, задача об укладке рюкзака, проблема разложения на простые множители и другие, в которых число операций растет быстрее, чем любой полином (например, $Q \approx N^N$).

Революция в криптографии связана с изобретением *односторонних функций*, обладающих следующими свойствами [18, 19]:

– шифрование сообщения x с помощью этой функции F_k, зависящей от параметра k, $y = F_k(x)$ является простой задачей.

– расшифровка сообщения y при известной функции F_k без знания ключа $x = F_k^{-1}(x)$ является сложной задачей.

– Расшифровка сообщения y при известном ключе k вновь является простой задачей.

При наличии односторонних функций закрытую информацию можно передавать по открытым каналам (например, по интернету). В самом деле, достаточно адресату (и всем желающим) сообщить функцию $F_k(x)$ (без знания ключа). Адресат может зашифровать свое сообщение x и то, что получилось $y = F_k(x)$, вновь предоставить всем желающим. Тот, кому предназначено сообщение и кто знает ключ k, его легко расшифрует, а все остальные – навряд ли.

При этом следует позаботиться, чтобы задача нахождения $x = F_k^{-1}(y)$ была достаточно сложна (например, настолько, что всех вычислительных ресурсов Земли и времени существования Вселенной оказалось бы недостаточно для ее решения).

Был предъявлен ряд функций, которые, скорее всего, являются односторонними, и это превратило криптографию из ремесла, созданного, чтобы обслуживать военных, дипломатов и государственных руководителей, в огромную индустрию, обслуживающую банки, предпринимателей и очень широкий круг других пользователей. Стремительное развитие в этой связи получили теория чисел, алгебраическая геометрия, теория сложности и ряд других разделов математики.

С другой стороны, всё более важным фактором жизни в виртуальном пространстве и средством нападения становятся компьютерные вирусы, теория и технологии создания которых развиваются очень активно. Достаточно напомнить о вирусе, который, попав в систему управления заводов по разделению изотопов в Натанзе (Иран), разрушил центрифуги и отбросил ядерную программу этой страны на несколько лет назад…

По мнению многих экспертов и аналитиков, следующая война начнётся, прежде всего, в киберпространстве. В виду этой реальной перспективы компьютерные войска были созданы в США, Китае, Южной Корее. В 2013 году этому примеру последовала и Россия. По-видимому, этот военно-промышленный аспект математических наук будет в ближайшие десятилетия становится всё более важным и значимыми.

Заключение

В 1950-х годах известный английский писатель и физик Чарльз Сноу сетовал на пропасть двух культур – естественнонаучной и гуманитарной. Первая обращена в будущее, опирается на теорию и эксперимент и даёт *средства*. Вторая смотрит в прошлое, опирается на традицию и авторитет и даёт *цели*. Разрыв и непонимание между этими ветвями культуры – серьёзная угроза для всей цивилизации.

Важнейшие перемены в науке конца XX и начала XXI века связаны с развитием междисциплинарных подходов и синергетики, которые связывают, строят мост между этими двумя ветвями культуры. Но синергетика говорит на языке математических моделей, из них черпая идеи, понятия, представления. Единство мира в синергетике видится в единстве математических моделей, описывающих различные его стороны. Исследователям всё чаще задают вопросы не о средствах, а о целях, которые следует ставить.

Это даёт надежду на то, что будущее состоится, и на то, что прикладной математике в XXI веке предстоит решать много новых, важных и глубоких проблем.

Литература

1. Арнольд В.И. Полиматематика: является математика единой наукой или набором ремёсел / Математика: границы и перспективы. М.: ФАЗИС, 2005. С.1-18.
2. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. Изд. 2-е. – М.: Просвещение, 1967. – 560 с.
3. Смилга В.П. В погоне за красотой. – М.: Молодая гвардия, 1968. – 288 с.
4. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Структуры и хаос в нелинейных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 488 с.
5. Постон Т., Стюарт Е. Теория катастроф и её применения. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
6. Майнцер К. Сложносистемное мышление: Материя, разум, человечество. – М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2003. – 464 с.
7. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды. – М.: КомКнига, 2006. – 280 с.
8. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. Изд. 6-е. – М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009. – 312 с. (Синергетика: от прошлого к будущему).
9. Будущее прикладной математики. Лекции для молодых исследователей / Под ред. Г.Г.Малинецкого. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 512 с.
10. Пенроуз Р. Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики. Изд. 4-е. – М.: УРСС: Издательство ЛКИ, 2011. – 400 с. (Синергетика: от прошлого к будущему).
11. Кун Т. Структура научных революций. – М.: ООО "Издательство АСТ": ЗАО НПП "Ермак", 2003. – 365 с. (Философия, психология).
12. Стёпин B.C. Беседа третья. Культура и типы рациональности / Человек. Наука. Цивилизация. К семидесятилетию академика B.C.Стёпина. – М.: Канон+, 2004. С.34-53.
13. Арнольд В.И. Математическое понимание природы: Очерки удивительных физических явлений и их понимания математики (с рисунками автора). Изд. 3-е. – М.: МЦИМО, 2011. – 144 с.
14. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. Изд. 3-е. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 288 с. (Синергетика: от прошлого к будущему).
15. Босс В. Лекции по математике. Т.4. Вероятность, информация, статистика. Изд. 2-е. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 216 с.
16. Бак П. Как работает природа. Теория самоорганизованной критичности. – М.: URSS, 2013. – 276 с.
17. Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В. Сравнение двумерных изотропных консервативных самоорганизованно-критических моделей типа куча песка // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Естественные науки, 2012, спец.выпуск №2, Математическое моделирование в технике, с.119-128.
18. Введение в криптографию/ Под общ. ред. В.В.Ященко/ 3-е изд. – М.: МЦНМО, ЧеРо, 2000. – 288 с.
19. Мао Венбо. Современная криптография: теория и практика. – М.: Вильямс, 2005. – 768 с.
20. Подлазов А.В. Закон Ципфа и модели конкурентного роста// Новое в синергетике. Нелинейность в современном естествознании/ Ред. Г.Г.Малинецкий/ Синергетика: от прошлого к будущему. – М.: ЛИБРОКОМ, 2009. С. 229-256.