



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 39 за 2013 г.



Голубев Ю.Ф.

Алгебра кватернионов в
кинематике твердого тела

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Голубев Ю.Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 39. 23 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-39>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Ю.Ф.Голубев

**Алгебра кватернионов
в кинематике твердого тела**

Москва — 2013

Голубев Ю.Ф.

Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела

Представлено лаконичное обоснование описания изометрий трёхмерного Евклидова пространства с помощью кватернионов. Разработаны методы построения кватернионов непосредственно по заданию образа и прообраза точек твердого тела при его движении. Выделено множество кватернионов, описывающих регулярные прецессии твердого тела. Проанализированы свойства кинематических уравнений для кватернионов. Некоторые положения теории проиллюстрированы конкретными примерами.

Ключевые слова: кинематика, кватернион, кинематические уравнения, регулярная прецессия

Yury Filippovich Golubev

Quaternion algebra in rigid body kinematics

The laconic substantiation of the description for isometries of the three dimensional Euclidean space by means of quaternions is presented. Methods for calculation of quaternions directly on giving image and object of rigid body points during its motion are developed. The set of quaternions corresponding to regular precessions is picked out. Features of kinematics equations for quaternions are analyzed. Some theoretical developments are illustrated by specific examples.

Key words: kinematics, quaternion, kinematic equations, regular precession

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 13-01-00184а.

Оглавление

Введение.....	3
1. Формула Родрига.....	3
2. Кватернионное описание движений твердого тела	4
3. Вычисление кватернионов по угловому положению твердого тела	6
4. Кватернионное описание регулярной прецессии	14
5. Кинематические уравнения.....	19
Заключение.....	22
Литература	23

Введение

Применение кватернионов при описании углового движения твердого тела, несмотря на значительную потерю наглядности при интерпретации результатов исследований, имеет ряд преимуществ по сравнению с угловыми переменными. В основном эти преимущества связаны с линейностью соответствующих кинематических уравнений и отсутствием особых положений тела, при которых кинематические уравнения вырождаются. Такими же преимуществами обладают направляющие косинусы осей, связанных с твердым телом. Вместе с тем соответствующие им уравнения Пуассона обладают значительной избыточностью по числу непосредственно определяемых элементов ортогональных матриц и необходимостью контролировать выполнение шести условий ортонормированности векторов связанного базиса. Кватернионы в этом смысле гораздо экономичнее. Интерес к практическому применению кватернионов возрос в связи с необходимостью разнообразного управления движением искусственных небесных тел около центра масс для различных проектов освоения космического пространства. Большую роль в популяризации идеи использования кватернионов сыграла книга [1], в которой отражены основные аспекты алгебры кватернионов применительно к практическим задачам исследования углового движения твердых тел. Много задач динамики космического полета в кватернионной постановке рассмотрено в книге [2] и в большом числе научных статей других авторов.

Существуют различные способы установить взаимно однозначное соответствие специальных преобразований кватернионов изометриям трехмерного пространства с неподвижной точкой [1-6]. В предлагаемом издании реализован справочно-лаконичный подход к описанию указанного соответствия. В основу изложения положена теорема Эйлера о конечном повороте и изоморфизм преобразований кватернионов эйлеровому повороту твердого тела. Отмечена полнота алгебры кватернионов при описании всевозможных угловых движений твердого тела. Получены формулы, непосредственно связывающие два геометрических положения твердого тела с кватернионом соответствующего эйлерового поворота. Изучены свойства кватернионного представления регулярной прецессии твердого тела.

1. Формула Родрига

Известно, что действие всякого оператора $\mathbf{A} \in \text{SO}(3)$ в евклидовом пространстве E^3 может быть реализовано одним Эйлеровым поворотом вокруг собственного вектора этого оператора [4]. Пусть \mathbf{e} — единичный собственный вектор оператора \mathbf{A} , а $\mathbf{x} \in E^3$ — вектор, подвергаемый преобразованию вращения. Действие оператора \mathbf{A} сводится к вращению вектора \mathbf{x} вокруг вектора \mathbf{e} на некоторый угол φ в положение, задаваемое вектором \mathbf{r} , что можно выразить формулой Родрига [1,4,5]

$$\mathbf{r} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} + [\mathbf{e}, \mathbf{x}]\sin\varphi + [[\mathbf{e}, \mathbf{x}], \mathbf{e}]\cos\varphi = \mathbf{x} + 2q_0[\mathbf{q}, \mathbf{x}] + 2[\mathbf{q}, [\mathbf{q}, \mathbf{x}]], \quad (1.1)$$

где $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ — векторное, а $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^3$,

$$q_0 = \cos\frac{\varphi}{2}, \quad \mathbf{q} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}\sin\frac{\varphi}{2}, \quad (1.2)$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — ортонормированный базис неподвижного пространства E^3 .
Очевидно, что

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1. \quad (1.3)$$

Скалярные величины q_0, q_1, q_2, q_3 , удовлетворяющие условию (1.3), называются параметрами Родрига-Гамильтона.

Следствие 1.1. Если заданы параметры Родрига-Гамильтона, то действие оператора \mathbf{A} на базисные векторы выражается формулами

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i + 2q_0[\mathbf{q}, \mathbf{e}_i] + 2[\mathbf{q}, [\mathbf{q}, \mathbf{e}_i]],$$

откуда однозначно можно найти матрицу $A = (a_{ij})$ направляющих косинусов векторов $\mathbf{e}'_i, i = 1, 2, 3$, жестко связанных с твердым телом [4].

$$A = \begin{array}{c} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right. = \begin{array}{c} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \\ 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{array} \right.$$

По заданной матрице A направляющих косинусов параметры Родрига-Гамильтона восстанавливаются с точностью до знака [4]. Одно и то же положение твердого тела определяется не только набором (q_0, q_1, q_2, q_3) , но также и набором $(-q_0, -q_1, -q_2, -q_3)$.

Следствие 1.2. Справедливы формулы

$$(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) + 2q_0(\mathbf{q} \cdot [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1]) - 2([\mathbf{q}, \mathbf{x}_1] \cdot [\mathbf{q}, \mathbf{x}_2])$$

$$(\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{r}_1) = (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) + 2q_0(\mathbf{q} \cdot [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]) - 2([\mathbf{q}, \mathbf{x}_2] \cdot [\mathbf{q}, \mathbf{x}_1])$$

Отсюда

$$(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{r}_2) - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{r}_1) = 2q_0(\mathbf{q} \cdot [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1]). \quad (1.4)$$

2. Кватернионное описание движений твердого тела

Множество кватернионов — это пространство \mathbf{H} линейных комбинаций вида

$$\mathbf{h} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k},$$

где q_0, q_1, q_2, q_3 — действительные числа, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — линейно независимые символы. В пространстве \mathbf{H} вводится билинейное умножение « \circ » указанных символов по правилу

$$\mathbf{i} \circ \mathbf{j} = -\mathbf{j} \circ \mathbf{i} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \circ \mathbf{k} = -\mathbf{k} \circ \mathbf{j} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \circ \mathbf{i} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{k} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1.$$

Принимается, что кватернионы, у которых $q_1 = q_2 = q_3 = 0$, коммутируют при умножении со всеми остальными кватернионами.

Каждому вектору $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \in E^3$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — правая тройка базисных ортонормированных векторов, поставим во взаимно однозначное соответствие кватернион $\mathbf{h}_x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$. Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости следующих формул

$$\mathbf{h}_x \circ \mathbf{h}_y = \mathbf{h}_{[x,y]} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}), \quad (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{h}_x \circ \mathbf{h}_y + \mathbf{h}_y \circ \mathbf{h}_x), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{h}_{[x,y]} = \frac{1}{2}(\mathbf{h}_x \circ \mathbf{h}_y - \mathbf{h}_y \circ \mathbf{h}_x), \quad \mathbf{h}_{[x,[y,z]]} = \mathbf{h}_y(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) - \mathbf{h}_z(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}), \quad \mathbf{z} \in E^3.$$

В соответствии с принятыми обозначениями можно записать $\mathbf{h} = q_0 + \mathbf{h}_q$, $\mathbf{q} \in R^3$. Кватернион \mathbf{h}_q составляет векторную часть кватерниона \mathbf{h} . Кватернион вида $\bar{\mathbf{h}} = q_0 - \mathbf{h}_q = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}$ называется сопряженным по отношению к кватерниону \mathbf{h} . Пусть заданы два кватерниона $\mathbf{h}_1 = a_0 + \mathbf{h}_a$ и $\mathbf{h}_2 = b_0 + \mathbf{h}_b$. Тогда

$$\overline{\mathbf{h}_1 \circ \mathbf{h}_2} = \overline{(a_0 + \mathbf{h}_a) \circ (b_0 + \mathbf{h}_b)} = a_0b_0 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - a_0\mathbf{h}_b - b_0\mathbf{h}_a + \mathbf{h}_{[b,a]} = \bar{\mathbf{h}}_2 \circ \bar{\mathbf{h}}_1.$$

Величина $|\mathbf{h}| = \sqrt{\mathbf{h} \circ \bar{\mathbf{h}}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ называется нормой кватерниона. Очевидно, что

$$|\mathbf{h}_1 \circ \mathbf{h}_2| = \sqrt{(\mathbf{h}_1 \circ \mathbf{h}_2) \circ (\bar{\mathbf{h}}_1 \circ \bar{\mathbf{h}}_2)} = \sqrt{\mathbf{h}_1 \circ (\mathbf{h}_2 \circ \bar{\mathbf{h}}_2) \circ \bar{\mathbf{h}}_1} = |\mathbf{h}_1| \cdot |\mathbf{h}_2|.$$

Для каждого отличного от нуля кватерниона \mathbf{h} имеем $|\mathbf{h}| \neq 0$, и существует обратный кватернион $\mathbf{h}^{-1} = \bar{\mathbf{h}}/|\mathbf{h}|^2$, обладающий свойствами: $\mathbf{h} \circ \mathbf{h}^{-1} = 1$, $\mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{h} = 1$. Множество \mathbf{H}_1 кватернионов с нормой, равной единице, есть группа по умножению. Если $\mathbf{h} \in \mathbf{H}_1$, то $\mathbf{h}^{-1} = \bar{\mathbf{h}}$.

Пусть \mathbf{H}_0 трехмерное пространство кватернионов $\mathbf{h}_x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$. Они удовлетворяют условию $\bar{\mathbf{h}}_x = -\mathbf{h}_x$. Метрика в этом пространстве задается формулой $|\mathbf{h}_x|^2 = \mathbf{h}_x \circ \bar{\mathbf{h}}_x = -\mathbf{h}_x^2$. Пространство \mathbf{H}_0 изоморфно евклидову пространству E^3 .

Теорема 2.1. Если $\mathbf{h} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \in \mathbf{H}_1$, то преобразование

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{h} \circ \mathbf{h}_x \circ \bar{\mathbf{h}}, \quad \mathbf{h}_x \in \mathbf{H}_0 \quad (2.2)$$

изоморфно Эйлеровому повороту трехмерного евклидова пространства с параметрами Родрига-Гамильтона q_0, q_1, q_2, q_3 .

Доказательство. Представим кватернион \mathbf{h} в виде $\mathbf{h} = q_0 + \mathbf{h}_q$, где кватернион $\mathbf{h}_q = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ изоморфен вектору $\mathbf{q} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3 \in E^3$. Тогда

$$\mathbf{h}_r = (q_0 + \mathbf{h}_q) \circ \mathbf{h}_x \circ (q_0 - \mathbf{h}_q) = q_0^2\mathbf{h}_x + q_0(\mathbf{h}_q \circ \mathbf{h}_x - \mathbf{h}_x \circ \mathbf{h}_q) - \mathbf{h}_q \circ \mathbf{h}_x \circ \mathbf{h}_q. \quad (2.3)$$

В соответствии со свойствами (2.1) умножения трехмерных кватернионов найдем

$$\mathbf{h}_q \circ \mathbf{h}_x - \mathbf{h}_x \circ \mathbf{h}_q = 2\mathbf{h}_{[q,x]},$$

$$\mathbf{h}_q \circ \mathbf{h}_x \circ \mathbf{h}_q = \mathbf{h}_q \circ [\mathbf{h}_{[x,q]} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})] = -\mathbf{h}_{[q,[q,x]]} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})\mathbf{h}_q,$$

$$\mathbf{h}_q(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{h}_{[q,[q,x]]} + \mathbf{h}_x |\mathbf{q}|^2.$$

Подставив эти выражения в (2.3), с учетом равенства $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ получим

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{h}_x + 2\mathbf{h}_{[q,x]} + 2\mathbf{h}_{[q,[q,x]]},$$

что изоморфно формуле Родрига (1.1) для Эйлера поворота. \square

Следствие 2.1. Равенство

$$[\mathbf{q}, (\mathbf{r} + \mathbf{x})] = q_0(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \quad (2.4)$$

эквивалентно формуле Родрига (1.1).

Доказательство. Формулу (2.2) можно эквивалентно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_r \circ \mathbf{h} &= \mathbf{h} \circ \mathbf{h}_x \Leftrightarrow q_0(\mathbf{h}_r - \mathbf{h}_x) = \mathbf{h}_q \circ \mathbf{h}_x - \mathbf{h}_r \circ \mathbf{h}_q = \\ &= \mathbf{h}_{[q,x]} - \mathbf{h}_{[r,q]} - (\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{x})) = \mathbf{h}_{[q,(r+x)]}. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание 2.1. Формула (2.2) определяет взаимно однозначное соответствие двух векторных пространств: пространства векторов \mathbf{x} (пространство аргументов), идентифицирующих точку твердого тела, и пространства векторов \mathbf{r} — образов векторов \mathbf{x} (пространство образов), получаемых вследствие Эйлера поворота.

3. Вычисление кватернионов по угловому положению твердого тела

Произвольная ориентация твердого тела практически может быть задана образами двух его точек, выбранных в начале движения и образующих вместе с неподвижной точкой треугольник, жестко связанный с телом [4]. Тогда решение задачи об эйлера повороте дается следующей теоремой.

Теорема 3.1. Пусть заданы начальные положения двух точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R^3$ твердого тела, не лежащих на одной прямой с неподвижной точкой, и их конечные положения $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in R^3$ соответственно, причем выполнены условия

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_1| &= |\mathbf{r}_1|, \quad |\mathbf{x}_2| = |\mathbf{r}_2|, \quad (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2), \\ [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] &\neq 0, \quad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_2)^2 \neq 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда существует Эйлеров поворот, задаваемый кватернионом $\mathbf{h} = q_0 + \mathbf{h}_q$ и обеспечивающий преобразование

$$\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2.$$

При этом

1. Если $\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{x}_2 = 0$, то

$$\mathbf{q} = \frac{[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]}{|[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]|}, \quad q_0 = 0. \quad (3.2)$$

2. Если $\mathbf{r}_2 + \mathbf{x}_2 = \lambda(\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1)$ и $\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1 \neq 0$, $\lambda \in R$, то $(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{r}_2) - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{r}_1) = 0$ и

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1}{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1|}, \quad q_0 = 0. \quad (3.3)$$

3. Если $(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{r}_2) - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{r}_1) = 0$, $[(\mathbf{r}_2 + \mathbf{x}_2), (\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1)] \neq 0$ и $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1) \neq 0$, то тогда выполнено $(\mathbf{r}_1 \cdot [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1]) \neq 0$ и $\exists \mu: \mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_2 = \mu(\mathbf{x}_1 - \mathbf{r}_1)$,

$$\mathbf{q} = \eta(\mu\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2), \quad \eta = \frac{q_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1)^2}{2(\mathbf{r}_1 \cdot [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1])}, \quad q_0^{-2} = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1)^4(\mu\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)^2}{4(\mathbf{r}_1 \cdot [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1])^2} + 1. \quad (3.4)$$

4. Если $(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{r}_2) - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{r}_1) \neq 0$, то

$$\mathbf{q} = q_0 \frac{[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_2), (\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1)]}{(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{r}_2) - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{r}_1)}, \quad q_0^{-2} = \left(\frac{[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_2), (\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1)]}{(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{r}_2) - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{r}_1)} \right)^2 + 1. \quad (3.5)$$

Доказательство выполним для каждого пункта последовательно.

Случай 1. Рассмотрим преобразование (1.1):

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{x}_1 + \frac{2}{[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]^2} [[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2], [[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2], \mathbf{x}_1]] = -\mathbf{x}_1,$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{x}_2 + \frac{2}{[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]^2} [[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2], [[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2], \mathbf{x}_2]] = -\mathbf{x}_2$$

Случай 2. Аналогично случаю 1 с учетом $\mathbf{x}_1^2 = \mathbf{r}_1^2$, $\mathbf{x}_2^2 = \mathbf{r}_2^2$, имеем

$$\mathbf{x}_1 + \frac{2}{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1|^2} [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1), [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1), \mathbf{x}_1]] = \mathbf{r}_1.$$

Если $\lambda \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 + \frac{2}{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1|^2} [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1), [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2]] &= \\ &= \mathbf{x}_2 + \frac{2}{|\mathbf{r}_2 + \mathbf{x}_2|^2} [(\mathbf{r}_2 + \mathbf{x}_2), [(\mathbf{r}_2 + \mathbf{x}_2), \mathbf{x}_2]] = \mathbf{r}_2. \end{aligned}$$

Если $\lambda = 0$, то тогда $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{x}_2$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 + \frac{2}{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1|^2} [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1), [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2]] &= \\ &= \frac{2(\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1)((\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_2 |\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1|^2}{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1|^2} = -\mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1)(\mathbf{r}_2 + \mathbf{x}_2) &= (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{r}_1) - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) = \\ &= (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{r}_1) - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \lambda(\mathbf{r}_1^2 - \mathbf{x}_1^2) = 0. \end{aligned}$$

Случай 3. С учетом рассмотренных выше случаев будем считать, что векторы $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1)$ и $(\mathbf{r}_2 + \mathbf{x}_2)$ не равны нулю. Тогда они не коллинеарны. Возьмем скалярные произведения:

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1) = \mathbf{r}_1^2 - \mathbf{x}_1^2 = 0,$$

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 + \mathbf{x}_2) = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x}_2) - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) = 0,$$

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1) = (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1) - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{r}_1) + (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{x}_1) - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1) = 0,$$

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{r}_2 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{r}_2^2 - \mathbf{x}_2^2 = 0$$

Следовательно, векторы $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1)$ и $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_2)$ параллельны. Предположим, что $(\mathbf{r}_1 \cdot [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1]) = 0$. Тогда и $(\mathbf{r}_2 \cdot [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1]) = 0$. Поэтому векторы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , а вместе с ними и векторы $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1)$ и $(\mathbf{r}_2 + \mathbf{x}_2)$ принадлежат плоскости векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Это противоречит неколлинеарности векторов $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1)$ и $(\mathbf{r}_2 + \mathbf{x}_2)$. Отсюда $(\mathbf{r}_1 \cdot [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1]) \neq 0$. Далее можно записать $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_2) = \mu(\mathbf{x}_1 - \mathbf{r}_1)$ или $(\mathbf{r}_2 + \mu\mathbf{r}_1) = (\mathbf{x}_2 + \mu\mathbf{x}_1)$. Кроме того, $\mathbf{r}_2 + \mathbf{x}_2 + \mu(\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1) = 2(\mathbf{x}_2 + \mu\mathbf{x}_1)$. Поэтому векторы $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1)$ и $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_2)$ оба перпендикулярны вектору $\mathbf{q} = \eta(\mu\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$, и справедливы равенства.

$$[\eta(\mu\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2), (\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1)] = q_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1), [\eta(\mu\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2), (\mathbf{r}_2 + \mathbf{x}_2)] = q'_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_2). \quad (3.6)$$

Умножив первое из этих равенств скалярно на $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1)$, а второе на $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_2)$, получим

$$2\eta(\mathbf{r}_1 \cdot [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1]) = q_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1)^2, \quad 2\eta\mu^2(\mathbf{r}_1 \cdot [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1]) = \mu^2 q'_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1)^2.$$

Таким образом, если $\mu \neq 0$, то $q_0 = q'_0$, а если $\mu = 0$, то можно принять $q_0 = q'_0$. В результате с учетом нормировки параметров Родрига-Гамильтона будем иметь

$$\eta = \frac{q_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1)^2}{2(\mathbf{r}_1 \cdot [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1])}, \quad q_0^{-2} = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1)^4 (\mu\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)^2}{4(\mathbf{r}_1 \cdot [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1])^2} + 1,$$

а равенства (3.6) можно представить в виде

$$[\mathbf{q}, (\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1)] = q_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1), \quad [\mathbf{q}, (\mathbf{r}_2 + \mathbf{x}_2)] = q_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_2).$$

Далее работает следствие 2.1.

Случай 4. Прямой подстановкой с использованием свойств смешанных произведений можно убедиться в том, что

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_1) = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_1), \quad (\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_2) = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_2), \quad (3.7)$$

то есть проекции векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ на направление вектора \mathbf{q} при указанном повороте сохраняются. С учетом (3.1) получим

$$[\mathbf{q}, (\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1)] = -q_0 \frac{[(\mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_1), (\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_2), (\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1)]}{(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{r}_2) - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{r}_1)} = q_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1),$$

$$[\mathbf{q}, (\mathbf{r}_2 + \mathbf{x}_2)] = q_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_2).$$

Далее можно воспользоваться следствием 2.1. Теорема доказана. \square

Замечание 3.1. В соответствии с формулой (1.4) равенство $(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{r}_2) - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{r}_1) = 0$ означает либо справедливость равенства $q_0 = 0$ (поворот на угол, равный π), либо компланарность векторов \mathbf{q} , \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 . В связи с тем, что вектор \mathbf{q} определяет ось Эйлера поворота, это условие означает также компланарность векторов \mathbf{q} , \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 .

Замечание 3.2. Теорема 3.1 дает возможность найти Эйлеров поворот (кватернион поворота) напрямую по заданным начальному и конечному положениям твердого тела без привлечения матриц из группы $SO(3)$.

Пример 3.1. Пусть задано

$$\mathbf{x}_1 = (1,0,0), \quad \mathbf{r}_1 = (0,1,0), \quad \mathbf{x}_2 = (0,0,1), \quad \mathbf{r}_2 = (1,0,0).$$

Требуется найти кватернион, обеспечивающий преобразование

$$\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2.$$

Решение: Проверяем условие $(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{r}_2) - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{r}_1) = 1 \neq 0$. Следовательно, имеем случай 4 теоремы 3.1. Далее

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_2 = (1,0,-1), \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1 = (-1,1,0), \quad [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_2), (\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1)] = (1,1,1),$$

$$q_0 = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2}(1,1,1).$$

Поэтому искомым кватернион имеет вид

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

и ему отвечает поворот вокруг вектора $(1,1,1)$ на угол $2\pi/3$. \diamond

Пример 3.2. Пусть задано

$$\mathbf{x}_1 = (1,0,0), \quad \mathbf{r}_1 = (0,1,0), \quad \mathbf{x}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathbf{r}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Требуется найти кватернион, обеспечивающий преобразование

$$\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2.$$

Решение: Проверяем условие $(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{r}_2) - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{r}_1) = 0$. Далее

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{r}_1 = (1,1,0), \quad \mathbf{x}_2 + \mathbf{r}_2 = (0,0,\sqrt{2}), \quad [(\mathbf{x}_1 + \mathbf{r}_1), (\mathbf{x}_2 + \mathbf{r}_2)] = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) \neq 0, \\ (\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_1) = (-1,1,0) \neq 0.$$

Следовательно, имеем случай 3 теоремы 3.1. Последовательно находим

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_2) = (1,-1,0), \quad (\mathbf{x}_1 - \mathbf{r}_1) = (1,-1,0), \quad \mu = 1, \quad \mu\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$(\mu\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)^2 = 1, \quad (\mathbf{r}_1 \cdot [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1]) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \eta = q_0\sqrt{2}, \quad q_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \mathbf{q} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Искомый кватернион имеет вид

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}\right). \diamond$$

Пример 3.3. Пусть задано

$$\mathbf{x}_1 = (1,0,0), \quad \mathbf{r}_1 = (0,1,0), \quad \mathbf{x}_2 = (1,0,1), \quad \mathbf{r}_2 = (0,1,-1).$$

Требуется найти кватернион, обеспечивающий преобразование

$$\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2.$$

Решение: видим, что $(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{r}_2) - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{r}_1) = 0$ и $\mathbf{x}_1 + \mathbf{r}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{r}_2 = (1,1,0) \neq 0$.

Следовательно, имеем случай 2 теоремы 3.1. Поэтому

$$q_0 = 0, \quad \mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \quad \mathbf{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}). \diamond$$

Пример 3.4. Пусть задано

$$\mathbf{x}_1 = (1,0,0), \quad \mathbf{r}_1 = (-1,0,0), \quad \mathbf{x}_2 = (0,0,1), \quad \mathbf{r}_2 = (0,0,-1).$$

Требуется найти кватернион, обеспечивающий преобразование

$$\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2.$$

Решение: находим $(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{r}_2) - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{r}_1) = 0$ и $\mathbf{x}_1 + \mathbf{r}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{r}_2 = (1,1,0) = 0$.

Следовательно, имеем случай 1 теоремы 3.1. Поэтому

$$q_0 = 0, \quad \mathbf{q} = (0,-1,0), \quad \mathbf{h} = -\mathbf{j}. \diamond$$

Теорема 3.1 требует строгого выполнения условий (3.1). Вместе с тем, если значения векторов \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 , отвечающих начальному положению твердого тела, можно выбрать произвольно, то их желаемые прообразы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , задающие Эйлеров поворот, могут оказаться известными с некоторыми ошибками: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 + \Delta_1$ и $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 + \Delta_2$, так что векторы \mathbf{r}'_1 и \mathbf{r}'_2 не удовлетворяют условиям (3.1). В предположении, что

$$\frac{|\Delta_1|}{|\mathbf{r}_1|} \ll 1, \quad \frac{|\Delta_2|}{|\mathbf{r}_2|} \ll 1,$$

найдем векторы Δ_1 и Δ_2 , обеспечивающие выполнение условий (3.1) и минимизирующие критерий

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 \rightarrow \min \tag{3.8}$$

при условиях

$$2(\mathbf{r}'_1 \cdot \Delta_1) = \mathbf{r}'_1{}^2 - \mathbf{x}_1^2; \quad 2(\mathbf{r}'_2 \cdot \Delta_2) = \mathbf{r}'_2{}^2 - \mathbf{x}_2^2; \quad (\mathbf{r}'_2 \cdot \Delta_1) + (\mathbf{r}'_1 \cdot \Delta_2) = (\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2) - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2), \tag{3.9}$$

выражающих в линейном приближении равенство модулей радиус-векторов образов и прообразов и совпадение скалярных произведений образов и прообразов.

Теорема 3.2. Искомые поправки выражаются формулами

$$\Delta_1 = \frac{\mathbf{r}'_1}{\mathbf{r}'_1{}^2} \left(\frac{\mathbf{r}'_1{}^2 - \mathbf{x}_1^2}{2} - \lambda(\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2) \right) + \lambda \mathbf{r}'_2, \quad \Delta_2 = \frac{\mathbf{r}'_2}{\mathbf{r}'_2{}^2} \left(\frac{\mathbf{r}'_2{}^2 - \mathbf{x}_2^2}{2} - \lambda(\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2) \right) + \lambda \mathbf{r}'_1, \tag{3.10}$$

$$\lambda = (\mathbf{r}'_1{}^2 + \mathbf{r}'_2{}^2)^{-1} \left[1 - \frac{(\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2)^2}{\mathbf{r}'_1{}^2 \mathbf{r}'_2{}^2} \right]^{-1} \left[\frac{(\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2)}{2\mathbf{r}'_1{}^2 \mathbf{r}'_2{}^2} (\mathbf{x}_1^2 \mathbf{r}'_2{}^2 + \mathbf{x}_2^2 \mathbf{r}'_1{}^2) - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) \right].$$

Доказательство. В соответствии с методом множителей Лагранжа найдем безусловный минимум вспомогательного критерия

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 - 2\mu(\mathbf{r}'_1 \cdot \Delta_1) - 2\nu(\mathbf{r}'_2 \cdot \Delta_2) - 2\lambda[(\mathbf{r}'_2 \cdot \Delta_1) + (\mathbf{r}'_1 \cdot \Delta_2)] \rightarrow \min,$$

где μ, ν, λ — множители Лагранжа. Условия минимума примут вид

$$\Delta_1 = \mu\mathbf{r}'_1 + \lambda\mathbf{r}'_2, \quad \Delta_2 = \nu\mathbf{r}'_2 + \lambda\mathbf{r}'_1.$$

Подставив эти выражения в условия (3.9), получим систему алгебраических уравнений для определения множителей:

$$\mu\mathbf{r}'_1 + \lambda(\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2) = \frac{\mathbf{r}'_1{}^2 - \mathbf{x}_1^2}{2}, \quad \nu\mathbf{r}'_2 + \lambda(\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2) = \frac{\mathbf{r}'_2{}^2 - \mathbf{x}_2^2}{2},$$

$$(\mu + \nu)(\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2) + \lambda(\mathbf{r}'_1{}^2 + \mathbf{r}'_2{}^2) = (\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2) - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2).$$

Разрешив эту систему, найдем выражения (3.10). \square

Замечание 3.1. В том случае, когда считается, что, например, образ \mathbf{r}_1 задан точно, поправка, обеспечивающая выполнение требований теоремы 3.1, может касаться только образа \mathbf{r}_2 . Решая аналогичную задачу о минимуме вектора Δ_2 , найдем

$$\Delta_2 = \frac{\mathbf{r}'_2}{\mathbf{r}'_2{}^2} \left(\frac{\mathbf{r}'_2{}^2 - \mathbf{x}_2^2}{2} - \lambda(\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2) \right) + \lambda\mathbf{r}'_1,$$

$$\lambda = \mathbf{r}'_1{}^{-2} \left[1 - \frac{(\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2)^2}{\mathbf{r}'_1{}^2 \mathbf{r}'_2{}^2} \right]^{-1} \left[\frac{(\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2)}{2\mathbf{r}'_2{}^2} (\mathbf{r}'_2{}^2 + \mathbf{x}_2^2) - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) \right].$$

Кватернионное представление движения вокруг неподвижной точки удобнее, чем формула Родрига при описании композиции движений или при представлении заданного движения в виде композиции нескольких эйлеровых поворотов. Пусть $\mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)} \in \mathbf{H}_1$ тогда по теореме 2.1 композиция движений сначала в соответствии с кватернионом $\mathbf{h}^{(2)}$, а затем — с кватернионом $\mathbf{h}^{(1)}$ выразится формулой

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{h}^{(1)} \circ \mathbf{h}^{(2)} \circ \mathbf{h}_x \circ \overline{\mathbf{h}^{(2)}} \circ \overline{\mathbf{h}^{(1)}} = (\mathbf{h}^{(1)} \circ \mathbf{h}^{(2)}) \circ \mathbf{h}_x \circ \overline{(\mathbf{h}^{(1)} \circ \mathbf{h}^{(2)})}.$$

Это означает, что кватернион \mathbf{h} , отвечающий композиции вращений, имеет вид

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}^{(1)} \circ \mathbf{h}^{(2)}. \quad (3.11)$$

Формула (3.11) существенно облегчает вычисление кватернионов. Пусть, например, кватернион $\mathbf{h}^{(1)} \in \mathbf{H}_1$ задает начальное угловое положение твердого тела, а кватернион $\mathbf{h} \in \mathbf{H}_1$ — конечное угловое положение. Требуется найти конечный поворот (кватернион $\mathbf{h}^{(2)} \in \mathbf{H}_1$), переводящий тело из начального положения в конечное. В соответствии с правилом композиции вращений найдем

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}^{(2)} \circ \mathbf{h}^{(1)} \Rightarrow \mathbf{h}^{(2)} = \mathbf{h} \circ \overline{\mathbf{h}^{(1)}}.$$

Следствие 3.1. Воспользовавшись формулами (1.2), получим следующие соотношения для кватернионов, соответствующих каждому из углов Эйлера [4]

$$\mathbf{h}^{(\psi)} = \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{k} \sin \frac{\psi}{2}, \quad \mathbf{h}^{(\vartheta)} = \cos \frac{\vartheta}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{\vartheta}{2}, \quad \mathbf{h}^{(\varphi)} = \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{k} \sin \frac{\varphi}{2},$$

где ψ — угол прецессии, ϑ — угол нутации, φ — угол собственного вращения. В соответствии с (3.11) кватернион \mathbf{h} , задающий движение твердого тела в этом случае, определится формулой $\mathbf{h} = \mathbf{h}^{(\psi)} \circ \mathbf{h}^{(\vartheta)} \circ \mathbf{h}^{(\varphi)}$. Выполнив преобразования и приведя подобные члены, найдем [4]

$$q_0 = \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}, \quad q_1 = \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}, \\ q_2 = \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}, \quad q_3 = \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}.$$

С помощью этих формул нетрудно найти тригонометрические функции углов Эйлера по заданным значениям параметров Родрига-Гамильтона [4]:

$$\cos \vartheta = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2, \quad \sin \vartheta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta}.$$

Оказывается, что угол ϑ определяется неоднозначно даже в пределах одного оборота. Далее, при $\sin \vartheta \neq 0$, получим

$$\sin \vartheta \cos \varphi = 2(q_0 q_1 + q_2 q_3), \quad \sin \vartheta \cos \psi = 2(q_0 q_1 - q_2 q_3),$$

$$\sin \vartheta \sin \varphi = 2(q_1 q_3 - q_0 q_2), \quad \sin \vartheta \sin \psi = 2(q_1 q_3 + q_0 q_2).$$

При $\sin \vartheta = 0$, будет выполнено: либо $q_1 = q_2 = 0$, либо $q_0 = q_3 = 0$. В этих случаях решение получается также неоднозначно. Если $q_1 = q_2 = 0$, то $\cos \vartheta = 1$, и $\cos(\psi + \varphi) = q_0^2 - q_3^2$, $\sin(\psi + \varphi) = 2q_0 q_3$. В данном случае в пределах одного оборота однозначно определена только сумма $(\psi + \varphi)$.

Если $q_0 = q_3 = 0$, то $\cos \vartheta = -1$, и $\cos(\psi - \varphi) = q_1^2 - q_2^2$, $\sin(\psi - \varphi) = 2q_1 q_2$. Следовательно, здесь в пределах одного оборота однозначно определена только разность $(\psi - \varphi)$.

Вместе с тем приведенные формулы свидетельствуют, что всегда найдутся углы Эйлера, обеспечивающие перевод твердого тела из одного заданного положения в другое.

Следствие 3.2. В технике при построении систем ориентации часто используется система самолетных (корабельных) углов, задающая угловое положение тела в опорной системе координат $OXYZ$ с помощью последовательности элементарных поворотов на углы Крылова ϑ, ψ, γ . Пусть ось OY направлена по местной вертикали, а ось OX по курсу. Тогда

ϑ — угол тангажа, определяет вращение тела вокруг оси OZ опорной системы координат против хода часовой стрелки, от оси OX к оси OY . Получаем систему координат $OX'Y'Z$.

ψ — угол рыскания, задает вращение вокруг оси OY' от оси OZ к оси OX' . Получаем систему координат $OX''Y'Z'$.

γ – угол крена, определяет вращение вокруг оси OX'' от оси OY' к оси OZ' . После последовательного выполнения этих поворотов получается связанная телом система координат.

Выпишем соотношения для кватернионов, соответствующих каждому из углов Крылова (самолетных углов)

$$\mathbf{h}^{(\psi)} = \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{j} \sin \frac{\psi}{2}, \quad \mathbf{h}^{(\vartheta)} = \cos \frac{\vartheta}{2} + \mathbf{k} \sin \frac{\vartheta}{2}, \quad \mathbf{h}^{(\gamma)} = \cos \frac{\gamma}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Кватернион \mathbf{h} , задающий движение твердого тела относительно опорной системы координат в этом случае, выразится формулой: $\mathbf{h} = \mathbf{h}^{(\vartheta)} \circ \mathbf{h}^{(\psi)} \circ \mathbf{h}^{(\gamma)}$. Выполнив преобразования и приведя подобные члены, найдем

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ q_1 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \\ q_2 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ q_3 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Из этих формул следует, что

$\cos \vartheta \cos \psi = 2(q_0^2 + q_1^2) - 1$, $\cos \psi \cos \gamma = 2(q_0^2 + q_3^2) - 1$, $\sin \psi = 2(q_0 q_2 - q_1 q_3)$
 $\cos \psi \sin \vartheta = 2(q_1 q_2 + q_0 q_3)$, $\cos \psi \sin \gamma = 2(q_2 q_3 + q_0 q_1)$. Отсюда видно, что по заданным значениям кватернионов величина $\sin \psi$ находится без осложнений.

Если оказывается, что $2(q_0^2 + q_1^2) - 1 \neq 0$ и $2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \neq 0$, то будут справедливы формулы

$$\tan \vartheta = \frac{2(q_1 q_2 + q_0 q_3)}{2(q_0^2 + q_1^2) - 1}, \quad \tan \gamma = \frac{2(q_2 q_3 + q_0 q_1)}{2(q_0^2 + q_3^2) - 1},$$

которые в пределах $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$, $-\pi/2 < \gamma < \pi/2$ однозначно определяют значения соответствующих углов.

Для того, чтобы проанализировать, например, случай $2(q_0^2 + q_3^2) - 1 = 0$, воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \sin \gamma + \cos \vartheta \sin \psi \cos \gamma &= 2(q_1 q_3 + q_0 q_2), \\ \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma - \cos \vartheta \sin \gamma &= 2(q_2 q_3 - q_0 q_1). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Равенство $2(q_0^2 + q_3^2) - 1 = 0$ означает, что либо $\cos \psi = 0$, либо $\cos \gamma = 0$, либо оба косинуса обнуляются вместе. Случай, когда оба косинуса вместе равны нулю, процедурно совпадает со случаем, когда только $\cos \gamma = 0$. Тогда $\sin \gamma = \pm 1$ и $\sin \vartheta = \pm 2(q_1 q_3 + q_0 q_2)$, $\cos \vartheta = \mp 2(q_2 q_3 - q_0 q_1)$. Верхний знак выбирается, когда $\gamma = \pi/2$, и нижний — когда $\gamma = -\pi/2$.

Пусть теперь только $\cos \psi = 0$. Тогда формулы (3.12) примут вид

$$\cos(\vartheta \pm \gamma) = 2(q_1q_3 + q_0q_2), \quad \sin(\vartheta \pm \gamma) = 2(q_2q_3 - q_0q_2),$$

и можно определить лишь сумму или разность углов тангажа и крена.

4. Кватернионное описание регулярной прецессии

Пусть в E^3 произвольно выбраны два единичных неколлинеарных направляющих вектора \mathbf{e}_α , \mathbf{e}_β . Поставим им во взаимно однозначное соответствие трехмерные кватернионы $\mathbf{e}_\alpha \leftrightarrow \mathbf{h}_\alpha$, $\mathbf{e}_\beta \leftrightarrow \mathbf{h}_\beta$, $\overline{\mathbf{h}_\alpha} = -\mathbf{h}_\alpha$, $\overline{\mathbf{h}_\beta} = -\mathbf{h}_\beta$. Прецессией называется угловое движение, представляемое как композиция вращений вокруг постоянных векторов \mathbf{e}_α , \mathbf{e}_β .

Теорема 4.1. Для того, чтобы Эйлеров поворот, заданный кватернионом $\mathbf{h} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \in \mathbf{H}_1$, мог быть представлен как композиция кватернионов вида

$$\mathbf{h} = \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{h}_\alpha \sin \frac{\alpha}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\beta}{2} + \mathbf{h}_\beta \sin \frac{\beta}{2} \right),$$

или

$$\mathbf{h} = \left(\cos \frac{\beta_1}{2} + \mathbf{h}_\beta \sin \frac{\beta_1}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\alpha_1}{2} + \mathbf{h}_\alpha \sin \frac{\alpha_1}{2} \right)$$

необходимо и достаточно, чтобы вектор $\mathbf{q} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3$ удовлетворял соотношениям

$$\frac{\mathbf{q} \cdot [\mathbf{e}_\beta, [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]]}{[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]^2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}, \quad \frac{\mathbf{q} \cdot [\mathbf{e}_\alpha, [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]]}{[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]^2} = \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2},$$

$$\frac{\mathbf{q} \cdot [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]}{[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]^2} = \pm \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2},$$

где знак «+» соответствует первому равенству (4.1), а знак «-» — второму при некоторых значениях углов α , β .

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существуют углы α , β , обеспечивающие выполнение первого, либо второго равенства (4.1). Выполним соответствующее умножение в (4.1) с учетом соотношений (2.1)

$$\mathbf{h} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \mathbf{h}_\alpha +$$

$$+ \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \mathbf{h}_\beta \pm \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \mathbf{h}_{[\alpha, \beta]}.$$

Отождествив коэффициенты кватерниона \mathbf{h} , найдем

$$\mathbf{h}_q = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \mathbf{h}_\alpha + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \mathbf{h}_\beta \pm \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \mathbf{h}_{[\alpha, \beta]},$$

$$q_0 = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta).$$

Видим, что компоненты вектора \mathbf{q} суть коэффициенты разложения

$$\mathbf{q} = q_\alpha \mathbf{e}_\alpha + q_\beta \mathbf{e}_\beta + q_{\alpha\beta} [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta].$$

Эти коэффициенты находятся из системы уравнений

$$q_\alpha + q_\beta (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_\alpha),$$

$$q_\alpha (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) + q_\beta = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_\beta),$$

$$q_{\alpha\beta} [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]^2 = (\mathbf{q} \cdot [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]).$$

Отсюда

$$q_\alpha = \frac{\mathbf{q} \cdot [\mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\beta (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta)]}{1 - (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta)^2}, \quad q_\beta = \frac{\mathbf{q} \cdot [\mathbf{e}_\beta - \mathbf{e}_\alpha (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta)]}{1 - (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta)^2}, \quad q_{\alpha\beta} = \frac{(\mathbf{q} \cdot [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta])}{[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]^2},$$

$$1 - (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta)^2 = [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]^2,$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть задан кватернион $\mathbf{h} = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \in \mathbf{H}_1$ и для вектора $\mathbf{q} = q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3$ существуют углы α, β , обеспечивающие, например, выполнение формул (4.2), где взят «+». Тогда кватернион \mathbf{h}_q представится в виде (4.3) с таким же знаком «+». Параметр q_0 представится в виде (4.3), либо будет иметь противоположный знак. Если q_0 представляется формулой (4.3), то будет справедлива первая композиция (4.1). Если q_0 имеет знак, противоположный тому, который получается из (4.3), тогда следует подобрать подходящие углы α_1, β_1 , обеспечивающие выполнение формул (4.2), где взят знак «-». Такими могут быть, например, значения $\alpha_1 = -\alpha, \beta_1 = 2\pi - \beta$, и для них будет справедлива вторая композиция (4.1). Теорема доказана. \square

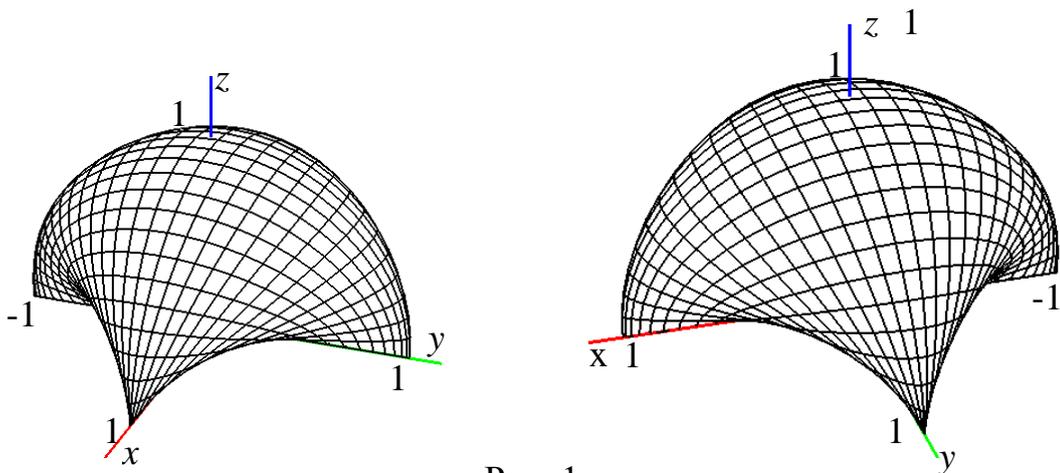


Рис. 1

На рис. 1 представлена часть поверхности, определенной координатами

$$x = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}, \quad y = \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}, \quad z = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2},$$

расположенная в области $z \geq 0$ и отнесенная к вспомогательным декартовым осям (x, y, z) . Часть этой поверхности, расположенная в области $z < 0$, симметрична относительно плоскости (x, y) части, показанной на рис. 1. Из рисунка, например, видно, что если вектор \mathbf{q} принадлежит плоскости векторов $(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta)$, то он должен быть коллинеарен либо вектору \mathbf{e}_α , либо вектору \mathbf{e}_β .

Следствие 4.1. Если исключить α и β , то уравнение поверхности примет вид

$$z^4 - z^2(1 - x^2 - y^2) + x^2y^2 = 0. \quad (4.4)$$

Вычислив координаты

$$x = \frac{\mathbf{q} \cdot [\mathbf{e}_\beta, [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]]}{[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]^2}, \quad y = \frac{\mathbf{q} \cdot [\mathbf{e}_\alpha, [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]]}{[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]^2}, \quad z = \frac{\mathbf{q} \cdot [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]}{[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]^2}$$

и подставив их в левую часть уравнения поверхности (4.4), можно проверить, что в случае выполнения равенства (4.4) возможно представление кватерниона \mathbf{h} в виде какой-нибудь композиции (4.1), а в случае нарушения этого равенства — невозможно. Если уравнение (4.4) удовлетворяется, то углы α и β определены посредством выражений

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{z}{y}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{z}{x}.$$

Пример 4.1. Пусть задан кватернион $\mathbf{h} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$, причем

$$q_0 = -\frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad q_1 = -\frac{\sqrt{6}}{8}, \quad q_2 = \frac{\sqrt{2}}{8}, \quad q_3 = \frac{1}{4} \left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Требуется, если это возможно, представить его в виде

$$\mathbf{h} = \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{h}_\alpha \sin \frac{\alpha}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\beta}{2} + \mathbf{h}_\beta \sin \frac{\beta}{2} \right), \quad \mathbf{h}_\alpha = \mathbf{k}, \quad \mathbf{h}_\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Решение. Сопоставим указанным кватернионам векторы трехмерного пространства:

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3), \quad \mathbf{e}_\alpha = (0, 0, 1), \quad \mathbf{e}_\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} (0, 1, 1).$$

Вычислим

$$x = \frac{\mathbf{q} \cdot [\mathbf{e}_\beta, [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]]}{[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]^2} = \frac{3}{4}, \quad y = \frac{\mathbf{q} \cdot [\mathbf{e}_\alpha, [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]]}{[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]^2} = -\frac{1}{4}, \quad z = \frac{\mathbf{q} \cdot [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]}{[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Подставив эти значения в равенство (4.4), видим, что оно удовлетворяется. Следовательно, возможно какое-нибудь из представлений (4.1). Далее

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{z}{y} = -\sqrt{3}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{z}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Возьмем, например, $\alpha = 4\pi/3$, $\beta = \pi/3$. Вычислим выражение

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Оно отличается от заданного значения q_0 знаком. Поэтому искомое представление невозможно. Однако, возможно представление заданного кватерниона в виде

$$\mathbf{h} = \left(\cos \frac{\beta_1}{2} + \mathbf{h}_\beta \sin \frac{\beta_1}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\alpha_1}{2} + \mathbf{h}_\alpha \sin \frac{\alpha_1}{2} \right),$$

где $\alpha_1 = -4\pi/3$, $\beta_1 = 5\pi/3$. \diamond

Дадим еще один критерий представимости кватерниона в виде заданной композиции двух кватернионов.

Теорема 4.2. Для того чтобы кватернион

$$\mathbf{h} = \cos \frac{q}{2} + \mathbf{h}_q \sin \frac{q}{2}, \quad \mathbf{h}_q \Leftrightarrow \mathbf{e}_q, \quad \mathbf{e}_q \in R^3, \quad \mathbf{e}_q^2 = 1,$$

можно было представить в виде одной из композиций (4.1), необходимо и достаточно выполнение условия компланарности, т.е. существования чисел λ_α , λ_β , $\lambda_{\beta q}$, таких что

$$\mathbf{e}_\alpha \lambda_\alpha + \mathbf{q} \lambda_q + \left(\mathbf{e}_\beta \cos \frac{q}{2} \pm [\mathbf{q}, \mathbf{e}_\beta] \right) \lambda_{\beta q} = 0, \quad \lambda_\alpha^2 + \lambda_q^2 + \lambda_{\beta q}^2 \neq 0, \quad (4.5)$$

причем должно быть выполнено

$$\lambda_\alpha^2 \leq \lambda_q^2 + \lambda_{\beta q}^2. \quad (4.6)$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что возможна первая композиция (4.1). Тогда справедливо равенство

$$\left(\cos \frac{q}{2} + \mathbf{h}_q \sin \frac{q}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\beta}{2} - \mathbf{h}_\beta \sin \frac{\beta}{2} \right) = \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{h}_\alpha \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

Выполнив умножение в левой части, найдем

$$\begin{aligned} \sin \frac{q}{2} \cos \frac{\beta}{2} \mathbf{h}_q - \left(\cos \frac{q}{2} \mathbf{h}_\beta + \sin \frac{q}{2} \mathbf{h}_{[q, \beta]} \right) \sin \frac{\beta}{2} &= \mathbf{h}_\alpha \sin \frac{\alpha}{2}, \\ \cos \frac{q}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{q}{2} \sin \frac{\beta}{2} (\mathbf{e}_q \cdot \mathbf{e}_\beta) &= \cos \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Отсюда видно, что векторы

$$\mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{q} = \sin \frac{q}{2} \mathbf{e}_q, \quad \left(\cos \frac{q}{2} \mathbf{e}_\beta + [\mathbf{q}, \mathbf{e}_\beta] \right) \quad (4.8)$$

компланарны. В итоге получится равенство (4.5), в котором выбирается знак «+» и

$$\lambda_\alpha = -\sin \frac{\alpha}{2}, \quad \lambda_q = \cos \frac{\beta}{2}, \quad \lambda_{\beta q} = -\sin \frac{\beta}{2}. \quad (4.9)$$

Эти коэффициенты одновременно не равны нулю, и выполнение равенства (4.6) для них очевидно.

Предположим, что возможна вторая композиция (4.1). Тогда будет выполнено

$$\begin{aligned} \sin \frac{q}{2} \cos \frac{\beta}{2} \mathbf{h}_q - \left(\cos \frac{q}{2} \mathbf{h}_\beta - \sin \frac{q}{2} \mathbf{h}_{[q,\beta]} \right) \sin \frac{\beta}{2} &= \mathbf{h}_\alpha \sin \frac{\alpha}{2}, \\ \cos \frac{q}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{q}{2} \sin \frac{\beta}{2} (\mathbf{e}_q \cdot \mathbf{e}_\beta) &= \cos \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

В итоге получится равенство (4.6), в котором выбирается знак «-», а коэффициенты выражаются формулами (4.9). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для какой-то комбинации знаков выполнены соотношения (4.5), (4.6). Условие (4.6) обеспечивает выполнение неравенства $\lambda_q^2 + \lambda_{\beta q}^2 \neq 0$. Поэтому существуют углы α_1 и β такие, что

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{\lambda_q}{\sqrt{\lambda_q^2 + \lambda_{\beta q}^2}}, \quad \sin \frac{\beta}{2} = -\frac{\lambda_{\beta q}}{\sqrt{\lambda_q^2 + \lambda_{\beta q}^2}}, \quad \sin \frac{\alpha_1}{2} = -\frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{\lambda_q^2 + \lambda_{\beta q}^2}}.$$

Предположим, что в равенстве (4.5) фигурирует знак «+». Тогда это равенство можно представить в виде (4.7), где $\sin(\alpha/2) = \sin(\alpha_1/2)$, а левая часть соответствует векторной части умножения кватернионов

$$\left(\cos \frac{q}{2} + \mathbf{h}_q \sin \frac{q}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\beta}{2} - \mathbf{h}_\beta \sin \frac{\beta}{2} \right).$$

Поскольку перемножаемые кватернионы принадлежат подпространству \mathbf{H}_1 и выполнено равенство (4.7), то справедливо выражение

$$\cos \frac{q}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{q}{2} \sin \frac{\beta}{2} (\mathbf{e}_q \cdot \mathbf{e}_\beta) = \pm \cos \frac{\alpha_1}{2}.$$

Если в правой части этого равенства стоит знак «+», тогда следует выбрать $\alpha = \alpha_1$. Если в правой части стоит знак «-», то тогда должно быть $\alpha = 2\pi - \alpha_1$.

Следовательно, будет справедлива первая композиция (4.1).

Пусть теперь в равенстве (4.5) фигурирует знак «-». Тогда его можно представить в виде (4.10), левая часть которого соответствует векторной части умножения кватернионов

$$\left(\cos \frac{\beta}{2} - \mathbf{h}_\beta \sin \frac{\beta}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{q}{2} + \mathbf{h}_q \sin \frac{q}{2} \right).$$

Выбирая подходящее значение угла α , убеждаемся в справедливости второй композиции (4.1). Достаточность доказана. \square

Пример 4.2. Возьмем кватернионы примера 4.1 и составим необходимые векторы. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{1}{4} \left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}, & \mathbf{e}_\beta \cos \frac{q}{2} &= -\frac{\sqrt{6}}{8} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (0,1,1), \\ \mathbf{e}_\alpha &= (0,0,1), & [\mathbf{q}, \mathbf{e}_\beta] &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{6}}{8}, -\frac{\sqrt{6}}{8} \right). \end{aligned}$$

Сначала рассмотрим вектор

$$\mathbf{e}_\beta \cos \frac{q}{2} + [\mathbf{q}, \mathbf{e}_\beta] = \frac{\sqrt{6}}{8} (\sqrt{3}, [\sqrt{2} - 1], -1).$$

Составим смешанное произведение

$$(\mathbf{e}_\alpha \cdot [\mathbf{q}, (\mathbf{e}_\beta \cos \frac{q}{2} + [\mathbf{q}, \mathbf{e}_\beta])]) = -\frac{\sqrt{6}}{8} \neq 0.$$

Поэтому полученные векторы

$$\mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{q} = \sin \frac{q}{2} \mathbf{e}_q, \quad \left(\cos \frac{q}{2} \mathbf{e}_\beta + [\mathbf{q}, \mathbf{e}_\beta] \right)$$

не компланарны. Рассмотрим вектор

$$\mathbf{e}_\beta \cos \frac{q}{2} - [\mathbf{q}, \mathbf{e}_\beta] = \frac{\sqrt{6}}{8} (\sqrt{3}, -1, [\sqrt{2} - 1]).$$

Возьмем для него смешанное произведение

$$(\mathbf{e}_\alpha \cdot [\mathbf{q}, (\mathbf{e}_\beta \cos \frac{q}{2} - [\mathbf{q}, \mathbf{e}_\beta])]) = 0.$$

Поэтому векторы

$$\mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{q} = \sin \frac{q}{2} \mathbf{e}_q, \quad \left(\cos \frac{q}{2} \mathbf{e}_\beta - [\mathbf{q}, \mathbf{e}_\beta] \right)$$

компланарны с коэффициентами

$$\lambda_\alpha = -\sqrt{3}, \quad \lambda_q = \sqrt{3}, \quad \lambda_{\beta q} = 1$$

Отсюда

$$\sin \frac{\beta}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{1}{2}.$$

Чтобы выяснить, какой должен быть знак в последнем равенстве, рассмотрим выражение

$$\cos \frac{q}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_\beta) = -\frac{3}{8} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4} \left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{h} = \left(\cos \frac{\beta_1}{2} + \mathbf{h}_\beta \sin \frac{\beta_1}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\alpha_1}{2} + \mathbf{h}_\alpha \sin \frac{\alpha_1}{2} \right),$$

где $\alpha_1 = 4\pi/3$, $\beta_1 = -\pi/3$.

5. Кинематические уравнения

Кинематические уравнения для кватернионов проще всего получить, продифференцировав выражение (2.2) по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{h}_r}{dt} &= \frac{d\mathbf{h}}{dt} \circ \mathbf{h}_x \circ \bar{\mathbf{h}} + \mathbf{h} \circ \mathbf{h}_x \circ \frac{d\bar{\mathbf{h}}}{dt} = \frac{d\mathbf{h}}{dt} \circ \bar{\mathbf{h}} \circ \mathbf{h} \circ \mathbf{h}_x \circ \bar{\mathbf{h}} + \mathbf{h} \circ \mathbf{h}_x \circ \bar{\mathbf{h}} \circ \mathbf{h} \circ \frac{d\bar{\mathbf{h}}}{dt} = \\ &= \frac{d\mathbf{h}}{dt} \circ \bar{\mathbf{h}} \circ \mathbf{h}_r + \mathbf{h}_r \circ \mathbf{h} \circ \frac{d\bar{\mathbf{h}}}{dt}. \end{aligned}$$

Учтем, что $\mathbf{h} \circ \bar{\mathbf{h}} = 1$.

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} \circ \bar{\mathbf{h}} + \mathbf{h} \circ \frac{d\bar{\mathbf{h}}}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{h}}{dt} \circ \bar{\mathbf{h}} = -\mathbf{h} \circ \frac{d\bar{\mathbf{h}}}{dt} = -\left(\overline{\frac{d\mathbf{h}}{dt} \circ \bar{\mathbf{h}}}\right).$$

Отсюда ясно, что существует вектор $\boldsymbol{\sigma} \in R^3$ такой, что

$$\mathbf{h}_\sigma = \frac{d\mathbf{h}}{dt} \circ \bar{\mathbf{h}} = -\overline{\mathbf{h}_\sigma} \in \mathbf{H}_0. \quad (5.1)$$

С учетом (2.1) формула для скорости \mathbf{v} преобразуется к виду

$$\mathbf{h}_v = \frac{d\mathbf{h}_r}{dt} = \mathbf{h}_\sigma \circ \mathbf{h}_r - \mathbf{h}_r \circ \mathbf{h}_\sigma = 2\mathbf{h}_{[\sigma, r]} = \mathbf{h}_{[2\sigma, r]} = \mathbf{h}_{[\boldsymbol{\omega}, r]} \Rightarrow \mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}],$$

где $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3$ — вектор угловой скорости тела в проекциях на неподвижные оси. Воспользовавшись определением (5.1), получим *кинематическое уравнение для кватернионов*

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{h}_\omega \circ \mathbf{h}. \quad (5.2)$$

В скалярной форме равенство (5.2) приводит к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 &= -\frac{1}{2}(\omega_1 q_1 + \omega_2 q_2 + \omega_3 q_3), \\ \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}(\omega_1 q_0 + \omega_2 q_3 - \omega_3 q_2), \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}(\omega_2 q_0 + \omega_3 q_1 - \omega_1 q_3), \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{2}(\omega_3 q_0 + \omega_1 q_2 - \omega_2 q_1). \end{aligned}$$

Для того, чтобы применить компоненты угловой скорости, взятые относительно движущегося тела, достаточно воспользоваться уравнением

$$\bar{\mathbf{h}} \circ \frac{d\mathbf{h}_r}{dt} \circ \mathbf{h} = \bar{\mathbf{h}} \circ \frac{d\mathbf{h}}{dt} \circ \mathbf{h}_x + \mathbf{h}_x \circ \frac{d\bar{\mathbf{h}}}{dt} \circ \mathbf{h} = \mathbf{h}_\Sigma \circ \mathbf{h}_x - \mathbf{h}_x \circ \mathbf{h}_\Sigma = 2\mathbf{h}_{[\Sigma, x]} = \mathbf{h}_{[\boldsymbol{\Omega}, x]},$$

где $\mathbf{h}_\Sigma = \bar{\mathbf{h}} \circ \frac{d\mathbf{h}}{dt} = -\frac{d\bar{\mathbf{h}}}{dt} \circ \mathbf{h} = -\overline{\mathbf{h}_\Sigma} = \frac{1}{2} \mathbf{h}_\Omega$, а \mathbf{h}_Ω — кватернион, отвечающий угловой скорости, взятый в проекциях на оси, связанные с движущимся телом $\boldsymbol{\omega} = \Omega_1 \mathbf{e}'_1 + \Omega_2 \mathbf{e}'_2 + \Omega_3 \mathbf{e}'_3$. Отсюда

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{h} \circ \mathbf{h}_\Omega,$$

а соответствующая система скалярных уравнений принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{q}_0 &= -\frac{1}{2}(\Omega_1 q_1 + \Omega_2 q_2 + \Omega_3 q_3), \\ \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}(\Omega_1 q_0 - \Omega_2 q_3 + \Omega_3 q_2), \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}(\Omega_2 q_0 - \Omega_3 q_1 + \Omega_1 q_3), \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{2}(\Omega_3 q_0 - \Omega_1 q_2 + \Omega_2 q_1).\end{aligned}$$

5.1. Кинематические уравнения Эйлера. Обратимся к формулам следствия

3.1. Имеем

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{h}} &= \bar{\mathbf{h}}^{(\varphi)} \circ \bar{\mathbf{h}}^{(\mathcal{G})} \circ \bar{\mathbf{h}}^{(\psi)}, \\ \frac{d\mathbf{h}}{dt} &= \frac{d\mathbf{h}^{(\psi)}}{dt} \circ \mathbf{h}^{(\mathcal{G})} \circ \mathbf{h}^{(\varphi)} + \mathbf{h}^{(\psi)} \circ \frac{d\mathbf{h}^{(\mathcal{G})}}{dt} \circ \mathbf{h}^{(\varphi)} + \mathbf{h}^{(\psi)} \circ \mathbf{h}^{(\mathcal{G})} \circ \frac{d\mathbf{h}^{(\varphi)}}{dt}.\end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}\mathbf{h} \circ \frac{d\mathbf{h}}{dt} &= \bar{\mathbf{h}}^{(\varphi)} \circ \bar{\mathbf{h}}^{(\mathcal{G})} \circ \bar{\mathbf{h}}^{(\psi)} \circ \frac{d\mathbf{h}^{(\psi)}}{dt} \circ \mathbf{h}^{(\mathcal{G})} \circ \mathbf{h}^{(\varphi)} + \\ &+ \bar{\mathbf{h}}^{(\varphi)} \circ \bar{\mathbf{h}}^{(\mathcal{G})} \circ \frac{d\mathbf{h}^{(\mathcal{G})}}{dt} \circ \mathbf{h}^{(\varphi)} + \bar{\mathbf{h}}^{(\varphi)} \circ \frac{d\mathbf{h}^{(\varphi)}}{dt}.\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что

$$\bar{\mathbf{h}}^{(\psi)} \circ \frac{d\mathbf{h}^{(\psi)}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\psi}{dt} \mathbf{k}, \quad \bar{\mathbf{h}}^{(\mathcal{G})} \circ \frac{d\mathbf{h}^{(\mathcal{G})}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\mathcal{G}}{dt} \mathbf{i}, \quad \bar{\mathbf{h}}^{(\varphi)} \circ \frac{d\mathbf{h}^{(\varphi)}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{k}.$$

Выполнив формальные преобразования над кватернионами, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_\Omega &= 2\bar{\mathbf{h}} \circ \frac{d\mathbf{h}}{dt} = \left(\frac{d\psi}{dt} \sin \mathcal{G} \sin \varphi + \frac{d\mathcal{G}}{dt} \cos \varphi \right) \mathbf{i} + \\ &+ \left(\frac{d\psi}{dt} \sin \mathcal{G} \cos \varphi - \frac{d\mathcal{G}}{dt} \sin \varphi \right) \mathbf{j} + \left(\frac{d\psi}{dt} \cos \mathcal{G} + \frac{d\varphi}{dt} \right) \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Переходя в векторное пространство, получим кинематические уравнения Эйлера.

5.2. Теорема о сложении скоростей. Произвольное движение твердого тела можно выразить формулой

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{h}_p + \mathbf{h} \circ \mathbf{h}_x \circ \bar{\mathbf{h}}, \quad \mathbf{h}_p, \mathbf{h}_x \in \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{h}(t) \in \mathbf{H}_1,$$

где $\mathbf{p}(t)$ — радиус-вектор некоторого полюса в теле. Приняв $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, получим теорему о сложении скоростей:

$$\mathbf{h}_v^{(a)} = \frac{d\mathbf{h}_r}{dt} = \mathbf{h}_v^{(e)} + \mathbf{h}_v^{(r)}, \quad \mathbf{h}_v^{(e)} = \frac{d\mathbf{h}_p}{dt} + \frac{d\mathbf{h}}{dt} \circ \mathbf{h}_x \circ \bar{\mathbf{h}} + \mathbf{h} \circ \mathbf{h}_x \circ \frac{d\bar{\mathbf{h}}}{dt}, \quad \mathbf{h}_v^{(r)} = \mathbf{h} \circ \frac{d\mathbf{h}_x}{dt} \circ \bar{\mathbf{h}}.$$

Здесь кватернион $\mathbf{h}_v^{(a)}$ отвечает абсолютной скорости, $\mathbf{h}_v^{(e)}$ — переносной скорости точки твердого тела, совпадающей в данный момент времени с точкой \mathbf{x} , совершающей относительное движение, а кватернион $\mathbf{h}_v^{(r)}$ — относительной

скорости, пересчитанной из пространства векторов \mathbf{x} в пространство векторов \mathbf{r} . В векторном пространстве получаем изоморфное соотношение, выражающее теорему сложения скоростей

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r, \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_p + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}], \quad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{p}.$$

5.3. Теорема о сложении угловых скоростей может быть получена как следствие теоремы о сложении скоростей или путем непосредственного вычисления кватерниона, отвечающего угловой скорости. Возьмем композицию $\mathbf{h} = \mathbf{h}^{(1)} \circ \mathbf{h}^{(2)}$, выражающую сложное вращение. Найдем соответствующий ей кватернион

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_\sigma &= \frac{d\mathbf{h}}{dt} \circ \bar{\mathbf{h}} = \left(\frac{d\mathbf{h}^{(1)}}{dt} \circ \mathbf{h}^{(2)} + \mathbf{h}^{(1)} \circ \frac{d\mathbf{h}^{(2)}}{dt} \right) \circ \bar{\mathbf{h}}^{(2)} \circ \mathbf{h}^{(1)} = \\ &= \frac{d\mathbf{h}^{(1)}}{dt} \circ \bar{\mathbf{h}}^{(1)} + \mathbf{h}^{(1)} \circ \frac{d\mathbf{h}^{(2)}}{dt} \circ \bar{\mathbf{h}}^{(2)} \circ \mathbf{h}^{(1)}. \end{aligned}$$

Видим, что первое слагаемое правой части есть непосредственно $\mathbf{h}_\sigma^{(1)}$, а второе слагаемое есть $\mathbf{h}_\sigma^{(2)}$ с учетом перехода, выражаемого кватернионом $\mathbf{h}^{(1)}$, в пространство образов, изоморфное векторам \mathbf{r} . В пространстве образов находим соответствующую *формулу сложения угловых скоростей* $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.

Заключение

Данное издание не претендует на полноту изложения всех существующих методов алгебры кватернионов. В нем представлены лишь элементы, облегчающие быстрое проникновение в существо этих методов и моделей с целью их первоначального применения в кинематике твердого тела. Элементы алгебры кватернионов, собранные в препринте, оказались весьма эффективными при лаконичном обосновании полноты кватернионного описания изометрий трехмерного пространства и могут быть полезными при решении конкретных задач кинематики твердого тела. Предложенный метод формирования кватерниона непосредственно по заданному начальному положению точек твердого тела и их образам, которые желательно получить в результате поворота, может быть удобен для записи краевых условий в практических задачах управления движением около центра масс. Наконец, потеря наглядности при кватернионном описании движений типа регулярной прецессии по сравнению описанием в подходящих угловых переменных в некоторой мере компенсируется найденными в работе условиями представимости заданного кватерниона композицией двух кватернионов вида, соответствующего регулярной прецессии. Иллюстративные примеры, содержащиеся в работе, призваны сделать наглядными возможности предлагаемых методов.

Литература

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука. 1973. — 320 с.
2. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. — М.: Физматлит, 2006. — 512 с.
3. Голубев Ю.Ф. Тождественность параметров Эйлера и Кэли-Клейна в кинематике абсолютно твердого тела. Изв. РАН: МТТ № 1, 1999, с. 19-25.
4. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. Учебник. 2-е изд., перераб. и дополн. — М.: Изд-во МГУ, 2000. — 719 с.
5. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. Изд. 2-е, перераб. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.
6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука. 1979, 760 с.
7. Мартыненко Ю.Г. Методика изложения кинематики твердого тела с одной неподвижной точкой // Сб. научно-методических статей. Теоретическая механика./ Под редакцией академика МАН ВШ Ю.Г. Мартыненко — М.: Изд-во МГУ, 2003 г., вып. 24, с. 3-15.