ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 37 за 2013 г.

Алероев Т.С., Зверяев Е.М., Ларионов Е.А.

Дробное исчисление и его применение

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Т.С. Алероев, Е.М. Зверяев, Е.А. Ларионов

Дробное исчисление и его применение

Москва — 2013

УДК 517.927.2

Алероев Т.С., Зверяев Е.М., Ларионов Е.А.

Дробное исчисление и его применение

Работа посвящена локальным и нелокальным дифференциальным уравнениям тепло- и массопереноса в сплошных средах с памятью и в средах с фрактальной структурой. В работе исследованы краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка, а также методами теории возмущений исследованы несамосопряженные интегральные операторы, сопутствующие этим краевым задачам.

Ключевые слова: дробная производная, дробный интеграл, функция Миттаг-Леффлера.

Temirkhan Sultanovich Aleroev, Evgeniy Mikhailovich Zveriaev, Evgeniy Alekseevich Larionov

Fractional Calculus and its Application

The local and non-local heat and mass transfer differential equations for the continuum with the memory and for the fractal structure ones are studied in the work. The boundary value problems for the fractional order differential equations are investigated. The non-conjugated integral operators and the boundary value problems connected to them are studied with the perturbation theory methods as well.

Key words: fractional derivative, fractional integral, function of Mittag-Leffler type.

Оглавление

Необходимость проведения фундаментальных исследований по краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений переноса стала очевидной после того, как выяснилось, что многие физические процессы (диффузия в средах с фрактальной геометрией и памятью, субдиффузия частиц) приводит к начальным, краевым и смешанным задачам для нелокальных дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка. Более того, оказалось, что эти уравнения относятся к классу нагруженных дифференциальных уравнений, которые, как правило, не являются самосопряженными.

Основной целью настоящей работы является исследование структурных и качественных свойств модельных, но основных типов нелокальных дифференциальных уравнений дробного порядка. В частности:

1) исследуется уравнение субдиффузии и диффузии дробного порядка;

2) уравнение колебания струны с учетом трения в среде с фрактальной геометрией.

Следует отметить, что исследование краевых задач для этих дифференциальных уравнений приводит к необходимости в построении спектральной теории для одного класса несамосопряженных интегральных операторов. Работа состоит из двух частей. В первой части развиваются принципиально новые методы для исследования краевых задач для дробных дифференциальных уравнений. Во второй части развитые методы применяются к исследованию дифференциальных уравнений состояний и переноса в системах с памятью. Показана роль дробного дифференциального и интегрального исчислений в теории фракталов и в системах с памятью.

1. Основные понятия

Пусть $f(x) \in L_1(0,1)$. Тогда функция

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \in L_1(0,1)$$

называется дробным интегралом порядка $\alpha > 0$ с началом в точке $x = 0$, и функция

$$\frac{d^{-\alpha}}{d(1-x)^{-\alpha}} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt \in L_1(0,1)$$

называется дробным интегралом порядка $\alpha > 0$ с концом в точке $x = 1$ [1].

Здесь $\Gamma(\alpha)$ является гамма-функцией Эйлера. Как известно (см. [1]), функция $g(x) \in L_1(0,1)$ называется дробной производной функции $f(x) \in L_1(0,1)$ порядка $\alpha > 0$ с началом в точке $x = 0$, если

$$f(x) = \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} g(x).$$

Обозначив тогда

$$g(x) = \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x)$$

в дальнейшем под символом $\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}$ будем подразумевать дробный интеграл при $\alpha < 0$ и дробную производную при $\alpha > 0$. Дробная производная

$$\frac{d^{\alpha}}{d(1-x)^{\alpha}}$$

порядка $\alpha > 0$ функции $f(x) \in L_1(0,1)$ с концом в точке $x = 1$ обозначается так же.

Пусть $\{\gamma_k\}_0^n$ □ некоторое множество действительных чисел, удовлетворяющих условию $0 < \gamma_j < 1, \ (0 \le j \le n)$.

Обозначим

$$\sigma_k = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j - 1;\ \mu_k = \sigma_k + 1 = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j, \quad (0 \le k \le n),$$

и предположим, что

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j - 1 = \sigma_n = \mu_n - 1 > 0.$$

Следуя М.М. Джрбащяну [1], рассмотрим интегро-дифференциальные операторы

$$D^{(\sigma_0)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}} f(x);$$

$$D^{(\sigma_1)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}} \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} f(x);$$

…………………………..

$$D^{(\sigma_n)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}} \frac{d^{\gamma_{n-1}}}{dx^{\gamma_{n-1}}} \ldots \frac{d^{\gamma_1}}{dx^{\gamma_1}} \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} f(x).$$

При этом отметим, что $\gamma_0 = \gamma_1 = \ldots = \gamma_n = 1$.

Целью нашего исследования являются краевые задачи для следующих уравнений

$$D^{(\sigma_n)} u - \{\lambda + q(x)\} u = 0, \quad 0 < \sigma_n < \infty; \tag{1}$$

$$u'' + \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} u + q(x) u = \lambda u,\ 0 < \alpha < 1, \tag{2}$$

с различными краевыми условиями.

Уравнение (1) является одним из базовых уравнений математической модели случайного блуждания точечной частицы, которая начинает двигаться от начала координат в момент $t = 0$ по самоподобному фрактальному множеству $\Omega \subset R^n$, $n \ge 2$. Уравнение (2) описывает осциллятор под действием упругой силы, характерной для вязкоупругих сред (см. [2]). В данной работе доказано, что все собственные значения задачи $u(0) = u(1) = 0$ для уравнения (2) при $q(x) = 0$ положительные.

Теорема 1. Число λ является собственным значением задачи A:

$$u''+\alpha D_{0x}^{\alpha}u+\lambda u=0;$$
$$u(0)=0;\ u(1)=0$$

тогда и только тогда, когда λ является нулём функции

$$u(1,\lambda)=\omega(\lambda)=1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n+1}\frac{C_n^m\alpha^m\lambda^{n-m}}{\Gamma(2n-m\alpha)}(x-t)^{2n-1-m\alpha}\right].$$

Собственные функции задачи A имеют вид

$$\chi_i(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n+1}\frac{C_n^m\alpha^m\lambda^{n-m}}{\Gamma(2n-m\alpha)}x^{2n-1-m\alpha}\right],$$

где λ_i □ корни функции $\omega(\lambda)$.

Доказательство этой теоремы следует из структуры решения задачи Коши.

Пусть $\lambda_1,\ \lambda_1,...\lambda_n,...$ □ нули функции $\omega(\lambda)$, расположенные в порядке не убывания. Показано, что первая собственная функция $\chi_1(x)$ не имеет узлов (т.е. не обращается в ноль внутри интервалов (0;1)). То есть доказана

Теорема 2. Функция $\chi_1(x)$ не имеет узлов.

Доказательство. Пусть в точке x_0 функция $\chi_1(x)$ обращается в ноль, тогда имеем

$$\chi_i(x_0)=x_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n+1}\frac{C_n^m\alpha^m\lambda^{n-m}}{\Gamma(2n-m\alpha)}x_0^{\,2n-1-m\alpha}\right]=0,$$

что невозможно, (в силу теоремы Лейбница о знакочередующихся рядах), т.к. λ_i □ наименьший нуль функции $\omega(\lambda)$.

Построенная система функций является полной. Доказательство этого факта установлено в [3,4]. Но эта система не является ортогональной. Поэтому рассмотрена сопряженная задача. Сопряженная задача ставится следующим образом: найти решение уравнения

$$u''+\alpha D_{x1}^{\alpha}u+\overline{\lambda}u=0;$$
$$u(0)=0;\ u(1)=0.$$

Здесь D_{x1}^{α} □ оператор дробного дифференцирования порядка α с началом в точке x. Установлена

Теорема 3. Число λ является собственным значением сопряженной задачи тогда и только тогда, когда λ является нулём функции $\omega(\lambda)$.

Собственные функции задачи A^* имеют вид

$$\overline{\chi_i}(x) = 1 - x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n+1}\frac{C_n^m \alpha^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n - m\alpha)}(1-x)^{2n-1-m\alpha}\right],$$

где λ_i □ корни функции $\omega(\lambda)$.

Мы будем рассматривать различные варианты уравнения (1). Начнем с уравнения

$$D^{(\sigma_2)}u + \left[\lambda + q(x)\right]u(x) = 0, \qquad (3)$$

где

$$D^{(\sigma_2)}u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{u'(t)}{(x-t)^{\gamma}}dt, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Уравнение (3) впервые было исследовано в качестве модельного уравнения дробного порядка $1 < \sigma < 2$ в [3]. В частности, в [3] было установлено, что двухточечная задача Дирихле

$$u(0) = 0,\ u(1) = 0 \qquad (4)$$

для уравнения (3) при $q(x) = 0$ эквивалентна интегральному уравнению

$$\frac{1}{\Gamma(2-\gamma)}\left[\int_0^x (x-t)^{1-\gamma}u(t)dt - \int_0^1 x^{1-\gamma}(1-t)^{1-\gamma}u(t)dt\right] = \lambda^{-1}u.$$

Мы также будем рассматривать уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^x \frac{u''(t)}{(x-t)^{\gamma}}dt + \left[\lambda + q(x)\right]u(x) = 0, \qquad (5)$$

которое называется дробным осцилляционным уравнением [2]. Двухточечная задача Дирихле $u(0)=0,\ u(1)=0$ для этого уравнения, как показано в [3], эквивалентна уравнению

$$\frac{1}{\Gamma(2-\gamma)}\left[\int_0^x (x-t)^{1-\gamma} u(t)\,dt - \int_0^x x(1-t)^{1-\gamma}\, u(t)\,dt\right] = \lambda^{-1} u\,.$$

В этой статье мы покажем, что оператор, порожденный выражением (3) и граничными условиями типа Штурма-Лиувилля, имеет осцилляционные свойства. Таким образом, уравнение (3), а не уравнение (5), естественно назвать дробным осцилляционным уравнением. Отметим также, что для уравнения

$$\frac{1}{\Gamma(2-\gamma)}\left[\int_0^x (x-t)^{1-\gamma} u(t)\,dt - \int_0^x x(1-t)^{1-\gamma}\, u(t)\,dt\right] = \lambda^{-1} u$$

в [2] изучена задача

$$u(0)=0,\ D^{(\sigma_1)}u\Big|_{x=0},\dots,\ D^{(\sigma_n-2)}u\Big|_{x=0},\ u(1)=0\,.$$

2. Области регулярности

Теорема 4. Все собственные значения задачи (3)-(4) при $q(x)\equiv 0$ лежат в угле

$$\left|\arg z\right| < \frac{\pi(1-\gamma)}{2},\ \ 0<\gamma<1.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение $\left(-D^{(\sigma_2)}f, f\right)$. Очевидно, что

$$\left(-D^{(\sigma_2)}f, f\right) = -\left(\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\right)\left(\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\gamma}}dt, f(x)\right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\right)\left(\int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\gamma}}dt, f'(x)\right) = (J_\alpha f', f'),$$

где $\alpha = 1-\gamma$ и J_α оператор дробного интегрирования порядка α:

$$\left(J_\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds.$$

По известной теореме Мацаева-Паланта ([4, С. 482]) значения формы $(J_\gamma f', f')$ лежат в угле $|\arg z| < \frac{\pi\alpha}{2}$. Это доказывает теорему 4.

Так как [3] число λ является собственным значением задачи (3)-(4) тогда и только тогда, когда λ является нулем функции

$$E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu), \qquad (\mu = 1+\gamma),$$

то имеет место

Следствие 1. Все нули функции $E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu)$ также лежат в угле

$$|\arg z| < \frac{\pi(1-\gamma)}{2}, \qquad 0 < \gamma < 1.$$

Здесь, $\mu = 1+\gamma$.

Теорема 5. Все нули функции $E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu)$ простые.

Доказательство. Во-первых, отметим, что задача (3)-(4) при $q(x)=0$ эквивалентна уравнению (см. [3])

$$u(x) + \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)}\left[\int_0^x (x-t)^\gamma u(t)\,dt - x^\gamma \int_0^1 (1-t)^\gamma u(t)\,dt\right] = 0 \qquad (6)$$

и что число λ является собственным значением задачи (3)-(4) при $q(x)=0$ тогда и только тогда, когда λ является нулём функции $E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu)$.

Перепишем уравнение (1) как

$$u(x) + \lambda A u = 0, \qquad (7)$$

где

$$A = A_0 - A_1;$$

$$A_0 u = \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} \int_0^x (x-t)^\gamma u(t)\,dt$$

и

$$A_1 u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^x x^{\gamma} \left(1-t\right)^{\gamma} u\left(t\right) dt .$$

Ясно, что A_0 и A_1 являются ядерными операторами. Таким образом, имеет смысл определитель

$$\det(I - \lambda A) = \Pi(1 - \lambda \lambda_j(A)),$$

который называется характеристическим определителем оператора A, и обозначается через $D_A(\lambda)$. В [3] было доказано, что геометрическая кратность собственных значений задачи (3)-(4) равна 1. Теперь покажем, что и алгебраическая кратность этих собственных значений равна 1 или, что то же самое, все нули функции $E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu)$ простые. Так как $E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu)$ является функцией рода ноль, то мы можем ее представить как

$$E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu) = C \prod \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right),$$

где λ_j — нули функции $E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu)$. Предположим, что $E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu)$ имеет кратные нули. Для определенности и сохранения общности пусть λ_1 будет нулем кратности 2, а все остальные нули будут простыми. Тогда мы имеем

$$E_{\frac{1}{\mu}}(-\lambda;\mu) = C * \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) * D_A(\lambda),$$

где

$$C = \frac{1}{\Gamma(\mu)},$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{\Gamma(\mu + k\mu)} = C\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \sum a_n \lambda^n , \qquad a_0 = 1 . \tag{8}$$

где коэффициенты a_n получаются из рекуррентных соотношений (см. [5])

$$(n+1)a_{n+1} + \sum_{s=1}^{n} a_n \chi_{n+1-s} = \chi_{n+1} = sp(A^{n+1}) .$$

В частности,

$$a_1 = -\chi_1 = spA = sp(A_0) + sp(A_1) .$$

Т.к. $sp(A_0) = 0$, то $spA = sp(A_1) = \dfrac{1}{\Gamma(2\mu)}$, то отсюда $a_1 = -\chi_1 = -\dfrac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(2\mu)}$. Для выполнения выражения (8) нужно, чтобы

$$a_1 - \frac{1}{\lambda_1} a_{01} = -\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(2\mu)}$$

или

$$-\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(2\mu)} - \frac{1}{\lambda_1} a_0 = -\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(2\mu)} .$$

Последнее равенство показывает, что предположение, что λ_1 имеет кратность, равную 2, неправильно. Это доказывает теорему 7.

Теорема 6. Задача (3)-(4) при $q(x) \equiv 0$ не имеет собственных значений внутри круга радиуса $\dfrac{\Gamma(4-2\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)}$ с центром в начале координат.

Доказательство. Известно, [3] что задача (3)-(4) при $q(x) \equiv 0$ эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) + \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \left[\int_0^x (x-\xi)^{1-\gamma} u(\xi) d\xi - x^{1-\gamma} \int_0^1 (1-\xi)^{1-\gamma} u(\xi) d\xi \right] = 0 \qquad (9)$$

и, что число λ является собственным числом задачи (3), (4) тогда и только тогда, когда оно является нулем функции Миттаг-Леффлера $E_{\frac{1}{2-\gamma}}(-\lambda; 2-\gamma)$.

Перепишем оператор

$$Au = \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \left[\int_0^x (x-\xi)^{1-\gamma} u(\xi) d\xi - x^{1-\gamma} \int_0^1 (1-\xi)^{1-\gamma} u(\xi) d\xi \right]$$

в виде

$$Au = A_0 u - A_1 u,$$

где

$$A_0 u = \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \int_0^x (x-\xi)^{1-\gamma} u(\xi) d\xi$$

и

$$A_1 u = \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \int_0^x x^{1-\gamma} (x-\xi)^{1-\gamma} u(\xi) d\xi .$$

Ясно, что при $0 < \gamma < 1$ операторы A_0 и A_1 ядерные [6].

Итак,

$$spA = sp(A_0 - A_1) = sp(A_0) - sp(A_1).$$

Более того, ясно, что $sp(A_0) = 0$ поэтому $sp(A) = -sp(A_1)$.

Так как оператор A_1 одномерный, то легко можно найти его след. Для этого рассмотрим уравнение

$$u(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(2-\gamma)} \int_0^1 x^{1-\gamma} (1-\xi)^{1-\gamma} u(\xi) d\xi = 0.$$

Ему соответствующий определитель Фредгольма

$$d(\lambda) = \left|1 - \lambda K_{11}\right|,$$

где

$$K_{11} = \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \int_0^1 \xi^{1-\gamma} (1-\xi)^{1-\gamma} d\xi = \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(4-2\gamma)}.$$

Отсюда, $sp(A_0) = \dfrac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(4-2\gamma)}$. Таким образом,

$$\lambda_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i = \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(4-2\gamma)}.$$

Так как ядро нашего оператора неотрицательно, то λ_1 является положительным числом. Далее, в силу теоремы 7, сумма $\sum_{i=2}^{\infty}\lambda_i$ также является положительным числом. Поэтому $\lambda_1 < \dfrac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(4-2\gamma)}$, что и доказывает теорему 8. Или, что то же самое, функция $E_{\frac{1}{2-\gamma}}(-\lambda, 2-\gamma)$ не имеет нулей внутри круга с радиусом $\dfrac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(4-2\gamma)}$ и с центром в начале координат.

Замечание. В [3] были изучены операторы вида

$$A_{\gamma}^{[\alpha,\beta]}u(x) = c_\alpha \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{\alpha}-1} u(t)\,dt + c_{\beta,\gamma}\int_0^1 x^{\frac{1}{\beta}-1}(1-t)^{\frac{1}{\gamma}-1}u(t)\,dt,$$

порождаемые краевыми задачами для дифференциальных уравнений дробного порядка. В частности, оператор

$$Bu = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\int_0^x (x-\xi)^{1-\alpha}u(\xi)\,d\xi - x\int_0^1 (1-\xi)^{1-\alpha}u(\xi)\,d\xi\right],$$

сопутствующий задаче

$$u'' + \lambda\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}u = 0, \qquad 0<\alpha<1;$$

$$u(0)=0, \qquad u(1)=0.$$

Заметим, что в [3] было показано, что этот оператор не имеет собственных значений внутри круга радиуса $\Gamma(2-\alpha)$ или, что то же самое, что функция $E_{\frac{1}{2-\gamma}}(-\lambda, 2)$ не имеет нулей внутри круга радиуса $\Gamma(2-\alpha)$ и с центром в начале координат.

Отметим, что такой же результат, но другими методами получен в [7] для $0<\alpha<1$ (для нашей методики такие ограничения не требуются).

Рассмотрим оператор, который изучался в работах [4] и [5]:

$$Au = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\left[\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)\,dt - \int_0^1 x^{\frac{1}{\beta}-1}(1-t)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)\,dt\right].$$

В этом пункте, и везде далее мы будем иметь в виду $\dfrac{1}{\rho} = \alpha > 2.$

В [3] было заявлено, что многие из результатов, представленных в работе [8], могут быть распространены на операторы вида $A_\gamma^{[\alpha,\beta]}$. В самом деле, пусть K □ конус неотрицательных функций в $L^2(0,1)$. Оператор A называется u_0-*положительным,* если существует ненулевой элемент $u_0 \in K$, такой, что для всякого ненулевого $x \in K$, можно указать числа $\alpha(x),\ \beta(x) > 0$ при которых

$$\alpha(x)u_0 \le Ax \le \beta(x)u_0 .$$

Оператор A называется u_0-*ограниченным сверху*, если каждому ненулевому элементу $x \in K$, соответствует такое $\beta(x) \ge 0$, что $Ax \le \beta(x)u_0$.

В [9] (см. также [7]) было показано, что оператор A u_0-ограничен и что $u_0(t)$ в этом случае можно взять функцию

$$u_0(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left[t^{\alpha-1}(1-s) - (t-s)^{\alpha-1} \right] ds +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^1 t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} ds = \frac{t^{\alpha-1}(1-t)}{\varepsilon\Gamma(\alpha)} .$$

В [5] было показано, что если ядро оператора удовлетворяет неравенствам

$$u_0(t)b_1(s) \le K(t,s) \le u_0(t)b_2(s) ,$$

то за $\alpha(u_0)$ и $\beta(u_0)$, мы можем взять следующие величины:

$$\alpha(u_0) = \int_0^1 b_1(t)u_0(t)dt, \qquad \beta(u_0) = \int_0^1 b_2(t)u_0(t)dt .$$

Оператор $K(t,s)$ обладает многими полезными свойствами. В частности, как было показано в [3], $K(t,s) = K(1-s,1-t)$. С помощью этого довольно очевидного свойства можно показать [7], что за b_1 мы можем взять

$$b_1(s) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} s(1-s)^{\alpha-1},$$

а за $b_2(s)$ можем взять $\alpha(\alpha-1)$.

Теорема 7. (частичная проблема собственных значений). Для первого собственного значения λ_1 оператора

$$Au = \frac{1}{\Gamma\left(\rho^{-1}\right)}\left[\int_0^x \left(x-t\right)^{\frac{1}{\rho}-1} u\left(t\right)dt - \int_0^1 x^{\frac{1}{\rho}-1}\left(1-t\right)^{\frac{1}{\rho}-1} u\left(t\right)dt\right],$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right) = \alpha > 2$$

справедливы неравенства

$$\frac{\alpha^2}{\Gamma(2+2\alpha)} \le \lambda_1 \le \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} B(2;\,\alpha),$$

где B – бета-функция Эйлера.

Доказательство. Вычислим $\alpha(u_0)$ и $\beta(u_0)$:

$$\alpha(u_0) = \int_t^1 \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} s(1-s)^{\alpha-1} \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} ds = \frac{1}{\left|\Gamma(\alpha)\right|^2}\int_0^1 s^{\alpha}(1-s)^{\alpha} = \frac{\alpha^2}{\Gamma(2+2\alpha)};$$

$$\beta(u_0) = \int_0^1 \alpha(\alpha-1)\frac{s^{\alpha-1}(1-s)}{\alpha\Gamma(\alpha)} ds = \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} B(2;\alpha).$$

Теорема 7 доказана.

Следствие 2. Пусть $\left(\frac{1}{\rho}\right) = \alpha > 2$, тогда для первого нуля λ_1 функции $E_\rho\left(\lambda, \frac{1}{\rho}\right)$ справедливы двусторонние оценки

$$\frac{\alpha^2}{\Gamma(2+2\alpha)} \le \lambda_1 \le \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} B(2;\,\alpha).$$

Утверждение следствия 2 следует из теоремы 4 и из того факта, что число λ – собственное значение оператора A тогда и только тогда, когда λ является нулем функции $E_\rho\left(\lambda, \frac{1}{\rho}\right)$.

3. Методы теории возмущений для дифференциальных уравнений дробного порядка

В [10] методами теории возмущений исследован оператор

$$Bu = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\int_0^x (x-\xi)^{1-\alpha} u(\xi)\,d\xi - x\int_0^1 (1-\xi)^{1-\alpha} u(\xi)\,d\xi\right], \qquad (10)$$

порожденный задачей

$$\begin{gathered} u'' + \lambda \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} u = 0, \;\; 0 < \alpha < 1, \\ u(0) = 0, \qquad u(1) = 0. \end{gathered} \qquad (11)$$

Здесь проводится спектральный анализ операторов A_ρ и B. Так как задача (10), (11) находится в центре внимания многих авторов [10], то особое внимание уделено исследованию оператора B.

Теорема 8. Пусть $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$. Тогда все собственные числа оператора A_ρ положительные.

Доказательство теоремы 8 проводится точно так же как и в [4].

Теорема 9. Все собственные значения задачи $u(0) = 0,\ u(1) = 0$ для уравнения (2) при $q(x) \equiv 0$ положительные.

Доказательство этого важного утверждения изложено в [3].

4. Спектральный анализ интегрального оператора

Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ оператор, который изучался в работах [4] и [5]:

$$A_\rho(u) = \int_0^1 G(x,t)u(t)dt = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\left[\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{\rho}-1} u(t)\,dt - \int_0^1 x^{\frac{1}{\rho}-1} (1-t)^{\frac{1}{\rho}-1} u(t)\,dt\right],$$

где $0 < \rho < 2$, а $G(x,t)$ □ функция Грина задачи

$$\begin{gathered} D^{(\sigma_n)} u - \lambda u = 0; \\ u(0) = 0,\ u'(0), \ldots,\ u(1) = 0. \end{gathered}$$

Отметим, что [5] если $\gamma_0 = \gamma_1 = \ldots = \gamma_n = 1$, то оператор B примет вид

$$Bu = \begin{cases} u^{(n)} \\ u(0)=0, u'(0)=0,\dots,u^{(n-2)}(0)=0,\ u(1)=0 \end{cases},$$

и функция Грина $H(x,s)$ соответствующего обратного оператора может быть переписана в виде

$$H(x,\,s)=\begin{cases} \dfrac{(1-s)^{n-1}x^{n-1}-(x-s)^{n-1}}{(n-1)!},\ 0\le x\le s\le 1 \\ \dfrac{(1-s)^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!} \end{cases}.$$

Последняя функция достаточно хорошо изучена, и этим мы будем пользоваться в дальнейшем.

Оператор A изучен в работе [6]. Мы не сосредоточили бы внимания на этом операторе, если бы не обнаружилось, что уравнение Минарди (дробное осцилляционное уравнение) не обладает многими основными осцилляционными свойствами. Поиск уравнения дробного порядка, обладающего этими свойствами, и привел нас к исследованию оператора A.

Выпишем наиболее важные свойства этого оператора, установленные нами ранее:

1. при $\rho > 1$ оператор A вполне несамосопряженный;
2. при $\rho \le 1$ оператор A секториальный;
3. при $0<\rho<2$ все собственные числа оператора A простые;
4. при $0<\rho<2$ система собственных функций оператора A полна в $L^2(0,1)$;
5. при $0<\rho<\frac{1}{2}$ все собственные числа оператора A вещественны.

Теперь приведем один из основных результатов данной работы.

Теорема 10. Если $|\varepsilon|<\frac{3}{2}$, то оператор

$$A_\varepsilon u=\frac{1}{\Gamma(2+\varepsilon)}\left[\int_0^x (x-t)^{1+\varepsilon}u(t)\,dt-\int_0^1 x^{1+\varepsilon}(1-t)^{1+\varepsilon}u(t)\,dt\right]$$

образует голоморфное семейство типа A [11].

Доказательство. Введем обозначения

$$\mathrm{M}_\varepsilon u(x) = \int_0^x (x-t)^{1+\varepsilon} u(t)\,dt;$$

$$N_\varepsilon u(x) = \int_0^1 x^{1+\varepsilon} (1-t)^{1+\varepsilon} u(t)\,dt\,;$$

$$\mathrm{M}_0 u(x) = \int_0^x (x-t)\,u(t)\,dt\,;$$

$$N_0 u(x) = \int_0^1 x(1-t)\,u(t)\,dt\,.$$

Очевидно, что

$$\mathrm{A}_\varepsilon u = \mathrm{M}_\varepsilon u(x) - N_\varepsilon u(x), \qquad \mathrm{A}_0 u = \mathrm{M}_0 u(x) - N_0 u(x).$$

Как и в работах [1,2], для оператора A_ε получим представление

$$A_\varepsilon = A_0 u + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots + \varepsilon^n A_n\,.$$

Для получения представления (1) поступим следующим образом: изучим разность операторов $(A_\varepsilon - A_0)$, что равносильно $(\mathrm{M}_\varepsilon - \mathrm{M}_0)$ и $(N_\varepsilon - N_0)$. Введем обозначения: ядро оператора M_ε обозначим символом $\mathrm{K}_\varepsilon(x,t)$, а ядро оператора M_0 символом $\mathrm{K}_0(x,t)$. Очевидно, что

$$\mathrm{K}_\varepsilon(x,t) = \begin{cases} (x-t)^{1+\varepsilon} & t < x \\ 0 & t \geq x \end{cases};$$

$$\mathrm{K}_0(x,t) = \begin{cases} (x-t) & t < x \\ 0 & t \geq x \end{cases}.$$

Аналогично ядра операторов N_ε и N_0 обозначим символами $\tilde{\mathrm{K}}_\varepsilon(x,t)$ и $\tilde{\mathrm{K}}_0(x,t)$ соответственно, где

$$\tilde{\mathrm{K}}_{\varepsilon}(x,t)=x^{1+\varepsilon}(1-t)^{1+\varepsilon};$$

$$\tilde{\mathrm{K}}_{0}(x,t)=x(1-t).$$

Очевидно, что

$$(\mathrm{A}_0-\mathrm{A}_{\varepsilon})u=(\mathrm{M}_0-\mathrm{M}_{\varepsilon})u-(N_0-N_{\varepsilon})u.$$

Ясно, что

$$(\mathrm{M}_0-\mathrm{M}_{\varepsilon})u=\int_0^1\left[\mathrm{K}_0(x,t)-\mathrm{K}_{\varepsilon}(x,t)\right]u(t)\,dt.$$

Причем

$$\mathrm{K}_0(x,t)-\mathrm{K}_{\varepsilon}(x,t)=\begin{cases}(x-t)\left[1-(x-t)^{\varepsilon}\right] & t<x\\ 0 & t\geq x\end{cases}.$$

Т.к.

$$a^x=e^{x\ln a}=1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{(x\ln a)^2}{2!}+\ldots$$

$$|x|<\infty,\quad a>0,$$

то

$$\mathrm{K}_0(x,t)-\mathrm{K}_{\varepsilon}(x,t)=\begin{cases}(x-t)\left[1-1-\dfrac{\varepsilon\ln(x-t)}{1!}-\dfrac{(\varepsilon\ln(x-t))^2}{2!}\right] & t<x\\ 0 & t\geq x\end{cases}=$$

$$\begin{cases}-(x-t)\left[\varepsilon\dfrac{\ln(x-t)}{1!}+\varepsilon^2\dfrac{\ln^2(x-t)}{2!}+\ldots+\varepsilon^n\dfrac{\ln^n(x-t)}{n!}+\ldots\right] & t<x\\ 0 & t\geq x\end{cases}.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\mathrm{M}_0-\mathrm{M}_\varepsilon\right)u=-\varepsilon\int_0^1 \mathrm{K}_1\left(x,t\right)u\left(t\right)dt-\varepsilon^2\int_0^1 \mathrm{K}_2\left(x,t\right)u\left(t\right)dt-...-\varepsilon^n\int_0^1 \mathrm{K}_n\left(x,t\right)u\left(t\right)dt-...$$

Из последнего соотношения следует

$$\mathrm{M}_\eta u=\int_0^1 \mathrm{K}_0\left(x,t\right)u\left(t\right)dt+\varepsilon\int_0^1 \mathrm{K}_1\left(x,t\right)u\left(t\right)dt+ \qquad (12)$$

$$\varepsilon^2\int_0^1 \mathrm{K}_2\left(x,t\right)u\left(t\right)dt+...+\varepsilon^n\int_0^1 \mathrm{K}_n\left(x,t\right)u\left(t\right)dt+...$$

где

$$\mathrm{K}_n\left(x,t\right)=\begin{cases}\dfrac{x\left(1-t\right)\ln^n\left(x-t\right)}{n!} & t<1\\ 0 & t\ge 1\end{cases},$$

$n=1,2,3...$

Точно также можно получить представление вида (12) и для оператора N_ε:

$$N_\varepsilon u=\int_0^1 \tilde{\mathrm{K}}_0\left(x,t\right)u\left(t\right)dt+\varepsilon\int_0^1 \tilde{\mathrm{K}}_1\left(x,t\right)u\left(t\right)dt+$$

$$\varepsilon^2\int_0^1 \tilde{\mathrm{K}}_2\left(x,t\right)u\left(t\right)dt+...+\varepsilon^n\int_0^1 \tilde{\mathrm{K}}_n\left(x,t\right)u\left(t\right)dt+...$$

$$\tilde{\mathrm{K}}_n\left(x,t\right)=\begin{cases}\dfrac{x\left(1-t\right)\ln^n\left(x-t\right)}{n!} & t<1\\ 0 & t=1\end{cases},$$

$n=1,2,3...$

Таким образом, формально имеем представление (6)

$$\mathrm{A}_\varepsilon u = \mathrm{A}_0 u + \varepsilon \mathrm{A}_1 + \varepsilon^2 \mathrm{A}_2 + \ldots + \varepsilon^n \mathrm{A}_n + \ldots$$

где

$$\mathrm{A}_0 = \mathrm{M}_0 - N_0, \quad \mathrm{A}_1 = \mathrm{M}_1 - N_1, \ldots \mathrm{A}_n = \mathrm{M}_n - N_n, \ldots$$

Можно показать, что

$$\left\| \mathrm{A}_n u \right\| L_2\left(0,1\right) \le 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{2}{3}\left\| u \right\|.$$

Теперь из критерия голоморфности следует, что ряд (6) для

$$\left| \varepsilon \right| < \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$$

образует голоморфное семейство типа (A).

Теорема 10 доказана.

Следствие 3. Пусть $\lambda_1\left(\varepsilon\right)$ — первое собственное число оператора A_ε, а $\varphi_1\left(\varepsilon\right)$ — ей соответствующая собственная функция. Тогда при

$$\left| \varepsilon \right| < \frac{1}{\frac{16}{3} + \frac{4}{\pi^2}}$$

справедливы соотношения

$$\left| \lambda_1\left(\varepsilon\right) - \frac{1}{\pi^2} \right| \le \frac{3}{\pi^2}\left[\left| \varepsilon \right| \left(\frac{16}{3} + \frac{4}{\pi^2} \right) \right]^2;$$

$$\left| \varphi_1\left(\varepsilon\right) - \sin x\pi \right| \le \frac{1}{2}\left[\left| \varepsilon \right| \left(\frac{16}{3} + \frac{4}{\pi^2} \right) \right]^2.$$

Доказательство. Так как B_ε образует голоморфное семейство типа $\left(\mathrm{A}\right)$, то в окрестности точки $\varepsilon = 0$ определены функции

$$\lambda_n\left(\varepsilon\right) = \lambda_n^0 + \varepsilon \lambda_n^1 + \varepsilon^2 \lambda_n^2 + \ldots + \varepsilon^n \lambda_n^n + \ldots;$$

$$\varphi_n\left(\varepsilon\right) = \varphi_n^0 + \varepsilon \varphi_n^1 + \varepsilon^2 \varphi_n^2 + \ldots + \varepsilon^n \varphi_n^n + \ldots$$

Имеются различные формулы для вычисления нижней границы радиусов сходимости этих рядов [11].

Воспользуемся формулами Логинова

$$\left|\lambda(\varepsilon)-\left(\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+\varepsilon^2\lambda_2+\ldots+\varepsilon^n\lambda_n\right)\right|\le\frac{d}{2}\left(\|c\|\varepsilon\right)^{n+1},$$

$$\left|\varphi(\varepsilon)-\left(\varphi_0+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+\ldots+\varepsilon^n\varphi_n\right)\right|\le\frac{1}{2}\left(\|c\|\varepsilon\right)^{n+1},$$

где

$$|\varepsilon|\le\left(1/c\right),\quad c=\max\left\{8\frac{a+mb}{d};8p+4\frac{a+mb}{d}\right\},\quad \frac{1}{d}=\|R\|$$

(R — приведенная резольвента оператора A_0 относительно первого собственного числа.) В нашем случае $b=0,\quad a=\frac{4}{3}$.

Найдем значение указанных параметров. Т.к. $\frac{1}{d}=\|R\|$, и оператор A_0 самосопряженный, то норма $\|R\|$ находится по формуле

$$\|R\|=\frac{1}{\min\limits_{\kappa\ne1}\left|\lambda_1-\lambda_\kappa\right|}=\frac{1}{\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4\pi^2}}=\frac{4\pi^2}{3}.$$

Далее находим m. Т.к. оператор A_0 — самосопряженный, то $m=\|\mathrm{A}_0\|=spr\mathrm{A}_0$, где $spr\mathrm{A}_0$ — спектральный радиус оператора A_0. Наибольшее по модулю собственное значение A_0 равно $\frac{1}{\pi^2}$, поэтому $\|\mathrm{A}_0\|=spr\mathrm{A}_0=\frac{1}{\pi^2}$. Таким образом, $m=\frac{1}{\pi^2}$.

Итак, если

$$|\varepsilon|<\left(\frac{16}{3}+\frac{4}{\pi^2}\right)^{-1},$$

то

$$\left|\lambda(\varepsilon)-\left(\lambda_0-\varepsilon\lambda_1+\varepsilon^2\lambda_2+\ldots+\varepsilon^n\lambda_n\right)\right|\le\frac{3}{\pi^2}\left(|\varepsilon|s\right)^{n+1}=\frac{3}{\pi^2}\left[|\varepsilon|\left(\frac{16}{3}+\frac{4}{\pi^2}\right)\right]^{n+1};$$

$$\left|\varphi(\varepsilon)-\left(\varepsilon_0+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+\ldots+\varepsilon^n\varphi_n\right)\right|\le\frac{1}{2}\left(|\varepsilon|s\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\left[|\varepsilon|\left(\frac{16}{3}+\frac{4}{\pi^2}\right)\right]^{n+1}.$$

Из полученных соотношений, в частности, следует, что

$$\left|\lambda_1-\frac{1}{\pi^2}\right|\le\frac{3}{\pi^2}\left[|\varepsilon|\left(\frac{16}{3}+\frac{4}{\pi^2}\right)\right]^{n+1}.$$

Здесь λ_1 □ первое собственное число функции оператора A_ε. Точно так же

$$\left|\varphi(\varepsilon)-\sin x\pi\right|\le\frac{1}{2}\left[|\varepsilon|\left(\frac{16}{3}+\frac{4}{\pi^2}\right)\right]^{2}.$$

Здесь φ_1 □ первая собственная функция оператора A_ε. Теорема доказана полностью.

5. Спектральный анализ осцилляционного дробного дифференциального уравнения

Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ оператор, который изучался в работах [4] и [5]:

$$Bu=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\int_0^x(x-\xi)^{1-\alpha}u(\xi)\,d\xi-x\int_0^1(1-\xi)^{1-\alpha}u(\xi)\,d\xi\right].$$

Проанализируем ядро оператора, чтобы понять, насколько правильно в качестве осцилляционного уравнения выбрано уравнение (2). Можно показать, что это ядро не является знакопостоянным. Несмотря на это, имеет место:

Теорема 11. Оператор

$$B_\varepsilon u=\frac{1}{\Gamma(2+\xi)}\left[\int_0^x(x-t)^{1+\varepsilon}u(t)\,dt-\int_0^1 x(1-t)^{1+\varepsilon}u(t)\,dt\right]$$

при $|\varepsilon| < \dfrac{3}{2}$ также образует голоморфное семейство типа А.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 6, оператор $B_\varepsilon u$ запишем следующим образом:

$$B_\varepsilon u = M_\varepsilon u(x) - C_\varepsilon u(x),$$

где

$$C_\varepsilon u(x) = \int_0^1 x(1-t)^{1+\varepsilon} u(t)dt,$$

а оператор M_ε изучен выше.

Для оператора M_ε представление по степеням ε мы уже получили, и теперь подобное представление получим для оператора C_ε. Точно так же, как и для оператора (теорема 6), запишем представление N_ε

$$C_\varepsilon u = C_0 u + \varepsilon C_1 u + \ldots + \ldots$$

Далее,

$$\|C_n\|_{L_2}^2 = \int_0^1\int_0^1 x^2(1-t)^2\left[\ln(1-t)\right]^{2n} dtdx = \int_0^1 x^2\left\{\int_0^1 (1-t)^2[\ln(1-t)]^{2n} dt\right\}dx.$$

Для интеграла

$$\int_0^x (x-t)^2[\ln(x-t)]^{2n} dt$$

оценка сверху для любого $x \in (0,1)$ нами уже получена, так что

$$\|C_n\|_{L_2} \le \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Поэтому

$$\|M_n u\|_{L_2(0,1)} + \|C_n u\|_{L_2(0,1)} \le 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\frac{2}{3}\|u\|.$$

Конечно, эта оценка является весьма грубой. Но мы не ставили перед собой задачи уточнить эту оценку. В данной статье развивается метод. Что и доказывает теорему 7.

Следствие 4. Пусть

$$|\varepsilon| < \left(\frac{16}{3} + \frac{4}{\pi^2} \right)^{-1},$$

тогда первое собственное число оператора B_ε положительное.

Доказательство. Так как B_ε образуют голоморфное семейство типа (А), то в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ определены функции

$$\lambda_n(\varepsilon) = \lambda_n^0 + \varepsilon\lambda_n^1 + \varepsilon^2\lambda_n^2 + \ldots + \varepsilon^n\lambda_n^n + ..$$

$$\varphi_n(\varepsilon) = \varphi_n^0 + \varepsilon\varphi_n^1 + \varepsilon^2\varphi_n^2 + \ldots + \varepsilon^n\varphi_n^n + ..$$

Коэффициенты λ_n^i и φ_n^i будем вычислять по формулам

$$\lambda^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} (A_k\varphi^{(n-k)}, \phi_0)\phi^{(n)} = \sum_{k=1} R(\lambda^{(k)} - A_k)\phi^{(n-k)} .$$

Здесь R, как было замечено выше, приведенная резольвента оператора B_0, соответствующая собственному значению πn^2, является интегральным оператором с ядром S_n:

$$S(x,y) = \left[-\frac{y}{n}\cos ny \sin nx + \frac{1-x}{n}\sin ny \cos nx + \frac{1}{2n^2}\sin ny \sin nx \right],$$

$y \le x$.

При $y > x$ в нулевой части этой середины нужно поменять местами y и x. Ясно, что R преобразовывает взаимно однозначно H_0 (H_0– ортогональное дополнение функции $\sin \pi nx$) в себя и аннулирует $\sin \pi nx$.

Из (61) следует, что

$$\lambda_1 = (A_1 \sin nx, \sin x),$$

и т.к. ядро оператора A_1 является вещественнозначным, то $\operatorname{Im}\lambda_1 = 0$.

Библиографический список

1. Джрбащян М.М. Краевая задача для дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля дробного порядка // Известия АН Армянской ССР. Серия "Математика", Т. 5, 1970. № 2. С. 71-96.
2. Aleroev T.S., Aleroeva H.T., Ning-Ming Nie, Yi-Fa Tang. Boundary Value Problems for Differential Equations of Fractional Order // Mem. Differential Equations Math. Phys. 49. 2010. P. 19-82.
3. Алероев Т.С. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными. // Дисс. доктора физ.-мат. наук. МГУ. 2000.
4. Гохберг И.К., Крейн М.Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и их приложения // М.: Наука, 1967. 508 с.
5. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. // М.: Издательство иностранной литературы, 1958. Т. 2. 942 с.
6. Гохберг И. К., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.
7. Попов А.Ю. О количестве вещественных собственных значений краевой задачи для уравнения второго порядка с дробной производной // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12. № 6. С. 137-155.
8. Красносельский М.А., Вайнико Г.М. Приближенные решения операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 457 с.
9. Джрбащян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Известия АН Армянской ССР. Сер. “Математика”. 1968. Т. 3. № 1. С. 3-29.
10. Алероев Т.С. О полноте собственных функций одного дифференциального оператора дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 6. С. 829-830.
11. Алероев Т.С. О собственных значениях одной краевой задачи для дифференциального уравнения дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 10, С. 1422-1423.