



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 31 за 2013 г.



Зенюк Д.А., [Митин Н.А.](#),
[Орлов Ю.Н.](#)

Моделирование случайного
блуждания на Канторовом
множестве

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Зенюк Д.А., Митин Н.А., Орлов Ю.Н. Моделирование случайного блуждания на Канторовом множестве // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 31. 18 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-31>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Д.А. Зенюк, Н.А. Митин, Ю.Н. Орлов

**Моделирование случайного блуждания
на Канторовом множестве**

Москва — 2013

УДК 519.21

Зенюк Д.А., Митин Н.А., Орлов Ю.Н.

Моделирование случайного блуждания на Канторовом множестве

Предложен метод построения случайного блуждания на обобщенном множестве Кантора с помощью случайных бинарных последовательностей конечной длины. Рассчитаны некоторые характеристики построенного случайного процесса, приведены примеры его траекторий. Обсуждается связь с дробной диффузией и соответствующим уравнением Фоккера-Планка.

Ключевые слова: случайные блуждания, фрактальные множества, аномальная диффузия

Dmitry Alexeyevich Zenyuk, Nikolay Alexeyevich Mitin, Yurii Nikolaevich Orlov

Random walks modeling on Cantor set

The method for constructing a random walk on generalized Cantor set in terms of finite random binary sequences is proposed. Some characteristics and examples of sample paths of described stochastic process are obtained. Connection to fractional diffusion and corresponding Fokker-Planck equation are discussed.

Key words: random walks, fractal sets, anomalous diffusion

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ, проекты № 11-01-00887, № 13-01-00617

Содержание

1. Введение.....	3
2. Множество Кантора и схожие фрактальные структуры.....	3
3. Случайное блуждание: однородные цепи	4
4. Случайное блуждание: неоднородные цепи	9
5. Дальнейшие обобщения	10
6. Дробная диффузия и уравнение Фоккера-Планка.....	13
Литература	17

1. Введение

В последнее время все большее внимание привлекают процессы переноса в фрактальных структурах сложной конфигурации. Детально исследована связь таких процессов с уравнениями в производных дробного порядка и стохастическими процессами Леви; указано большое число приложений к описанию феноменов «странной кинетики» (см., например, [1, 2] и цитированную там литературу). В связи с этим задача построения случайного блуждания на множествах с такой структурой весьма актуальна. Некоторые подходы к решению этой задачи приведены в [2-6]; в большинстве случаев предлагается рассмотрение случайных блужданий на графах, порождаемых соответствующим фрактальным множеством.

В представляемой работе предложен более простой, но вместе с тем весьма эффективный метод, опирающийся на использование случайных последовательностей символов над некоторым алфавитом. Рассмотрение будет проведено для обобщенного множества Кантора; тем не менее, развитый подход может быть расширен и на другие фрактальные множества.

С целью моделирования решений стохастических дифференциальных уравнений будет обсуждена также связь с аномальной диффузией.

2. Множество Кантора и схожие фрактальные структуры

Простейшим способом определения обобщенного множества Кантора C_λ [7-9] является следующая геометрическая итерационная процедура: из замкнутого отрезка $[0; 1]$ исключается открытый интервал длины λ , составляющий среднюю часть исходного отрезка; затем аналогичная операция применяется к каждому из оставшихся замкнутых отрезков. Таким образом, длина каждого из 2^{n-1} удаляемых на n -ой итерации интервалов равна β^{n-1} , где $\beta = (1 - \lambda)/2$, так что на n -ом шаге удаляются интервалы совокупной длины l_n , равной

$$l_n = \lambda(2\beta)^{n-1}, \quad \beta = \frac{1-\lambda}{2}. \quad (1)$$

Суммарная длина этих интервалов, как легко видеть, равна единице, поэтому мера Лебега множества C_λ равна нулю. Размерность Хаусдорфа [9] такого множества определяется выражением $-\log_\beta 2$, поскольку C_λ является объединением двух подобных ему множеств с масштабным коэффициентом β и может принимать любые значения между 0 и 1. Точки обобщенного множества Кантора могут быть представлены в виде

$$x = (1 - \beta) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \beta^k, \quad b_k \in \{0, 1\}. \quad (2)$$

Одним из наиболее известных примеров множеств вида C_λ является тернарное множество Кантора с параметрами $\lambda = \beta = 1/3$, которое может быть описано в явном виде как

$$C_{1/3} = [0; 1] \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^{m-1}-1} \left] \frac{3k+1}{3^m}; \frac{3k+2}{3^m} \right[. \quad (3)$$

Точки тернарного множества Кантора, как следует из (3), при записи в троичной системе счисления не содержат цифры 1. При этом следует учитывать, что любое троично-рациональное число (знаменатель которого является степенью 3) имеет несколько представлений: например, число $1/3$ может быть представлено как $0,1(0)_3$ и $0,0(2)_3$.

Множество Смита-Вольтерра-Кантора, называемое также \mathcal{E} -множеством Кантора [10], имеющее структуру, весьма близкую к C_λ , может быть получено с помощью аналогичной итерационной процедуры с той лишь разницей, что на n -ой итерации из каждого замкнутого множества исключается открытая средняя часть длины 2^{-2n} . Мера Лебега получающегося множества в этом случае положительна и равна $1/2$, а размерность Хаусдорфа равна 1.

При построении множества Кантора можно также отказаться от требования симметрии, исключив, например, из отрезка $[0; 1]$ интервал $]1/4; 1/2[$, после чего аналогичное правило применяется к каждому из оставшихся замкнутых множеств.

3. Случайное блуждание: однородные цепи

Представление (2) устанавливает соответствие между точками обобщенного множества Кантора и бинарными последовательностями, что позволяет использовать последние для построения случайного блуждания на таком множестве. Будем рассматривать случайный процесс c_t с дискретным временем $t \in \mathbb{N}$

$$c_t = (1 - \beta) \sum_{k=0}^{\infty} \xi_t^{(k)} \beta^k, \quad (4)$$

где $\xi_t^{(k)}$ – дискретные случайные величины с распределением Бернулли (принимающие лишь два значения – 0 и 1).

Один из простейших вариантов случайного блуждания можно получить, считая, что $\xi_t^{(k)}$ при любом фиксированном k образуют однородную цепь Маркова, и при любом фиксированном t случайные величины $\xi_t^{(k_1)}$ и $\xi_t^{(k_2)}$ независимы. Не ограничивая общности, будем считать, что рассматриваемый случайный процесс выходит из точки 0, т.е. $\forall k P(\xi_1^{(k)} = 0) = 1$. Будем также

считать, что вероятности переходов не зависят от k . Граф переходов для такой цепи изображен на рис. 1.

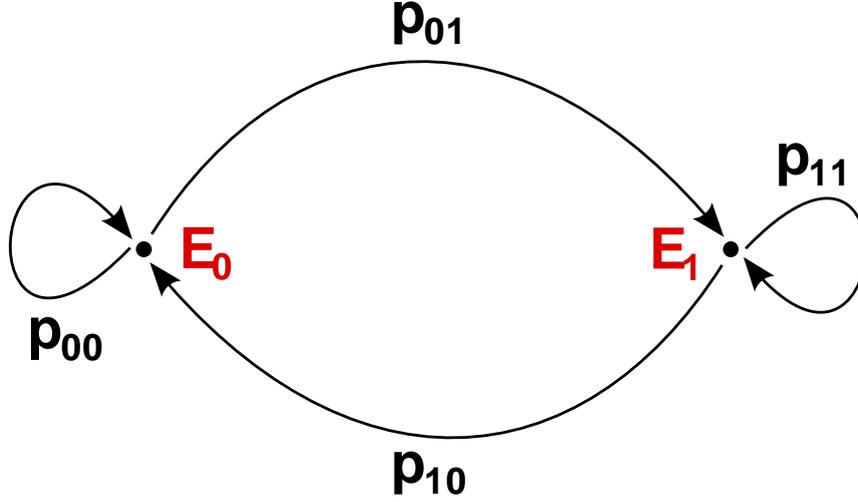


Рис. 1. Граф переходов в цепи Маркова

Вероятности состояний обозначим следующим образом:

$$P(\xi_t^{(k)} = 0) = u_t, \quad P(\xi_t^{(k)} = 1) = w_t, \quad u_t + w_t = 1. \quad (5)$$

Для u_t и w_t получаем систему линейных разностных уравнений

$$\begin{pmatrix} u_{t+1} \\ w_{t+1} \end{pmatrix} = \Pi^T \begin{pmatrix} u_t \\ w_t \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Если $p_{00} = p_{11} = 1$, то решением, очевидно, будет $u_t = 1$, $w_t = 0$ и $c_t \equiv 0$. В противном случае решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{p_{01}}{p_{01} + p_{10}} + \frac{p_{11}}{p_{01} + p_{10}} (\text{Tr} \Pi - 1)^t, \\ w_t &= \frac{p_{01}}{p_{01} + p_{10}} - \frac{p_{11}}{p_{01} + p_{10}} (\text{Tr} \Pi - 1)^t. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, если $\text{Tr} \Pi = 1$, то процесс c_t является строго стационарным.

Статистические характеристики случайной последовательности $\xi_t^{(k)}$ могут быть легко найдены:

$$E \xi_t^{(k)} = w_t, \quad D \xi_t^{(k)} = u_t w_t. \quad (8)$$

Совместное распределение $\xi_t^{(k)}$ и $\xi_s^{(k)}$ при фиксированных t и s таких, что $|t - s| = 1$, имеет вид

$$\begin{aligned} P(\xi_t^{(k)} = 0, \xi_{t+1}^{(k)} = 0) &= u_t p_{00}, & P(\xi_t^{(k)} = 0, \xi_{t+1}^{(k)} = 1) &= u_t p_{01}; \\ P(\xi_t^{(k)} = 1, \xi_{t+1}^{(k)} = 0) &= w_t p_{10}, & P(\xi_t^{(k)} = 1, \xi_{t+1}^{(k)} = 1) &= w_t p_{11}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) следует, что

$$E \xi_t^{(k)} \xi_{t+1}^{(k)} = w_t p_{11}. \quad (10)$$

Математическое ожидание и дисперсия процесса c_t даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} E c_t &= (1 - \beta) \sum_{k=0}^{\infty} E \xi_t^{(k)} \beta^k = w_t, \\ D c_t &= (1 - \beta)^2 \sum_{k=0}^{\infty} D \xi_t^{(k)} \beta^{2k} = u_t w_t \frac{1 - \beta}{1 + \beta}. \end{aligned} \quad (11)$$

Выражение для автоковариационной функции процесса имеет вид

$$K(t, s) = \begin{cases} p_{11} w_{\min\{t, s\}} \frac{1 - \beta}{1 + \beta} - w_t w_s, & |t - s| = 1; \\ u_t w_t \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, & |t - s| = 0; \\ 0, & |t - s| > 1. \end{cases} \quad (12)$$

Для того чтобы получить траектории случайного процесса c_t , в сумме (2) необходимо удержать лишь конечное число n слагаемых. Разумеется, построенная таким образом траектория будет лишь приближением к истинной траектории c_t ; тем не менее, точностью аппроксимации можно управлять, задавая достаточно большим n .

На рис. 2-5 приведены несколько траекторий c_t для различных матриц переходных вероятностей Π для тернарного множества Кантора, $n = 5000$. Из них первые два графика отвечают стационарным процессам, когда след матрицы Π равен единице.

На рис. 2 приведен пример равновероятного случайного блуждания между точками 0 и 1.

На рис. 3 траектория c_t «притягивается» к точке 1. Поскольку p_{00} мало, а p_{11} велико, то все символы 0 достаточно быстро изменятся на символы 1, а символы 1, наоборот, будут меняться редко.

Аналогично можно моделировать поведение случайного процесса с любыми стационарными вероятностями, лишь бы выполнялось условие $\text{Tr} \Pi = 1$.

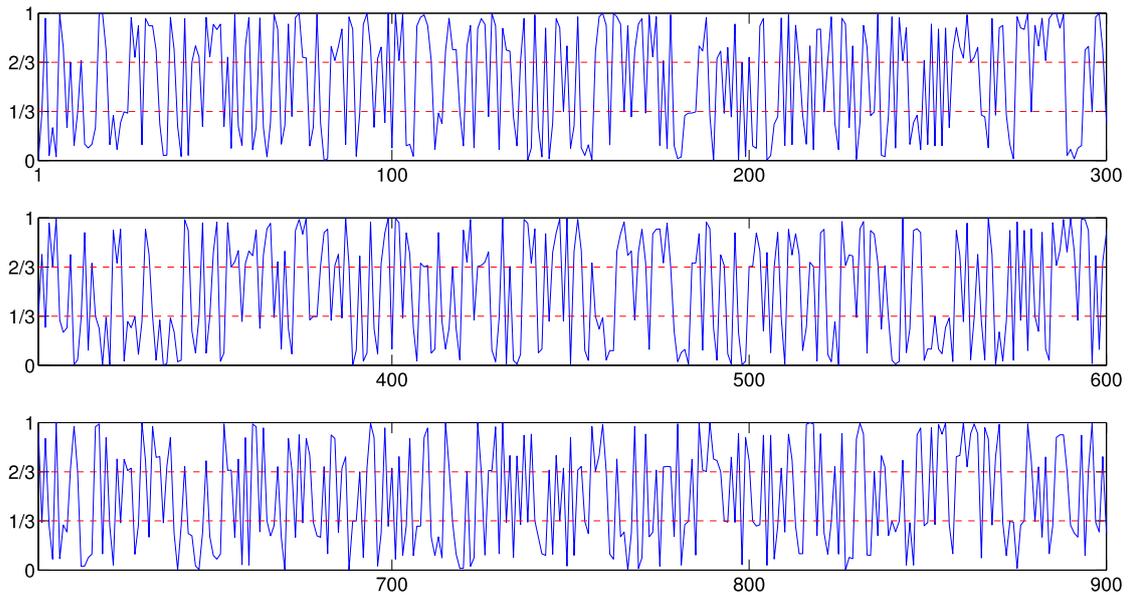


Рис. 2. Траектория c_t с $p_{00} = 0,5$ и $p_{11} = 0,5$

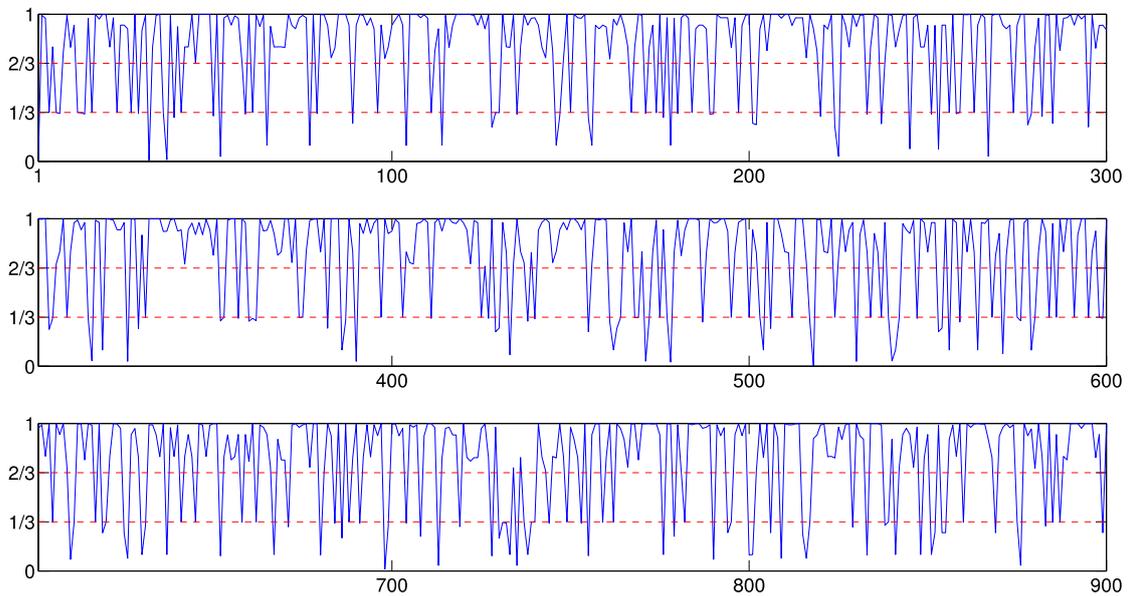


Рис. 3. Траектория c_t с $p_{00} = 0,25$ и $p_{11} = 0,75$

На рис. 4 и 5 приведены примеры траекторий нестационарных процессов, которые получаются тогда, когда условие $\text{Tr}\Pi = 1$ не выполнено.

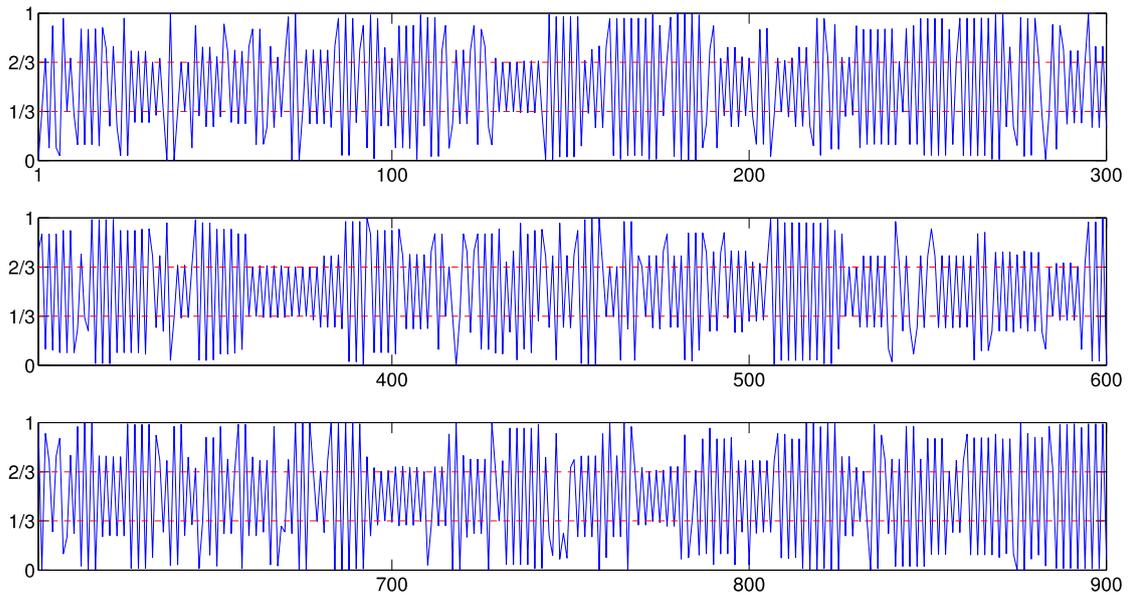


Рис. 4. Траектория c_t с $p_{00} = 0,1$ и $p_{11} = 0,1$

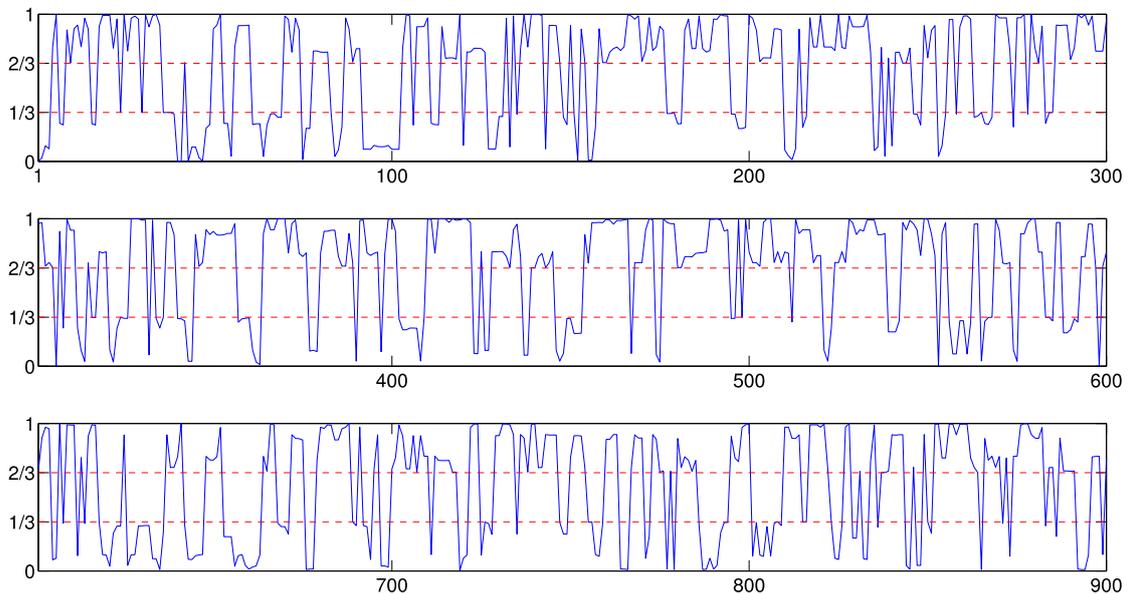


Рис. 5. Траектория c_t с $p_{00} = 0,7$ и $p_{11} = 0,8$

Отличие между этими двумя последними процессами в том, что при значениях $\text{Tr}\Pi < 1$ следа матрицы (6) траектория представляет собой случайную последовательность периодических фрагментов («банчей»), а при значениях $\text{Tr}\Pi > 1$ траектория почти вся состоит из резких скачков.

4. Случайное блуждание: неоднородные цепи

Естественным обобщением описанной конструкции является случайное блуждание, где $\xi_t^{(k)}$ образуют неоднородную цепь Маркова, т.е. вероятности переходов зависят от времени t . Для простоты будем по-прежнему считать, что переходные вероятности не зависят от k . Но даже и в этом случае получить выражения вероятностей состояний при произвольном t , подобные (7), в общем случае весьма затруднительно.

Среди всевозможных видов функциональной зависимости переходных вероятностей от времени интерес представляют периодические $\theta(t,s;L)$ и «триггерные» $\tau(t,s;L)$ зависимости, которые могут быть описаны, например, следующими семействами функций:

$$\begin{aligned}\theta(t,s;L) &= \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{2\pi}{L} (t-s) \right) + 1 \right); \\ \tau(t,s;L) &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{t-s}{L\sqrt{2}} \right) + 1 \right).\end{aligned}\tag{13}$$

На рис. 6 показана траектория случайного процесса c_t с вероятностями переходов $p_{00}(t) = \theta(t,1;250)$ и $p_{11}(t) = \theta(t,126;250)$. Поскольку

$$\theta(t,s+L/2;L) = 1 - \theta(t,s;L),$$

локальным максимумам $p_{00}(t)$ соответствуют локальные минимумы $p_{11}(t)$ и наоборот. Вследствие этого траектория обладает ярко выраженной периодичностью – области «притяжения» траектории к 0 или 1 перемежаются с областями резких осцилляций.

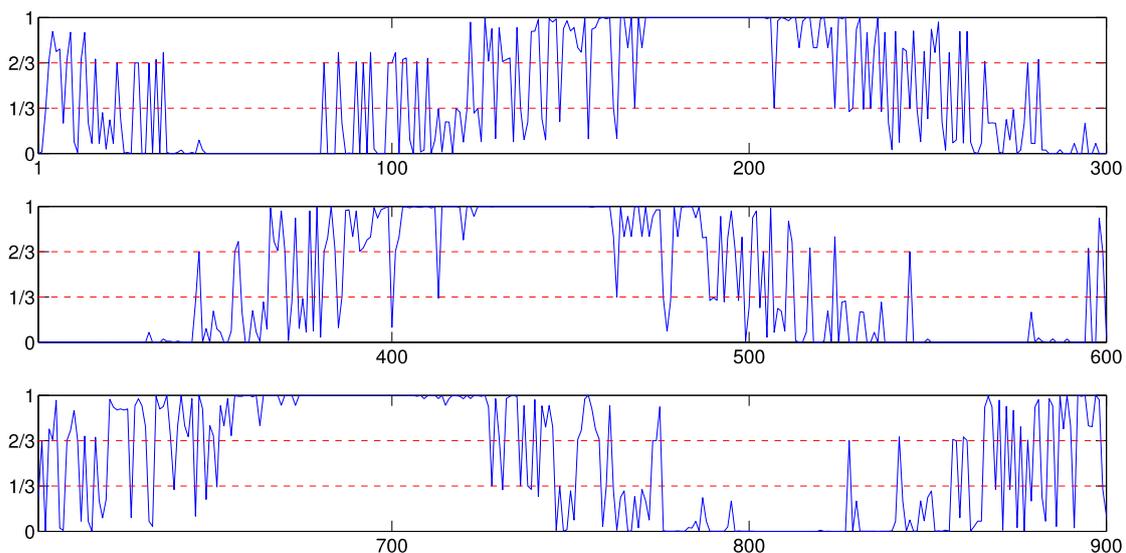


Рис. 6. Траектория c_t с периодическими переходными вероятностями

На рис. 7 показана траектория с триггерными вероятностями перехода $p_{00}(t) = \tau(t, 200; 350)$ и $p_{11}(t) = \tau(t, 150; 100)$. Качественно характер траектории здесь можно объяснить следующим образом: при относительно небольших t вероятности сохранения символов в последовательностях $p_{00}(t)$ и $p_{11}(t)$ малы, а с ростом t эти вероятности, напротив, стремятся к 1. Вследствие этого траектория в итоге «устанавливается» на некотором постоянном уровне.

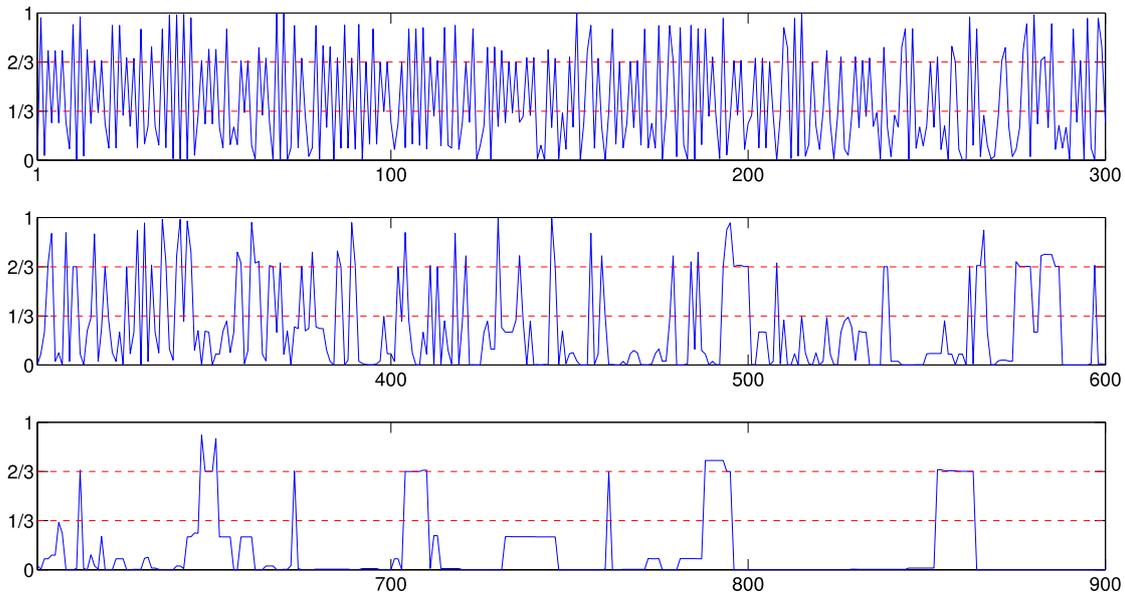


Рис. 7. Траектория c_t с «триггерными» переходными вероятностями

В обоих вышеприведенных примерах модели нестационарного блуждания рассматривалось тернарное множество Кантора для $n = 5000$ (формула (4)).

5. Дальнейшие обобщения

В рассмотренную выше конструкцию случайного процесса можно также включить зависимость между случайными величинами $\xi_t^{(k)}$ при различных k . Например, значение величины $\xi_t^{(k)}$ может быть связано не только с ее предыдущим значением $\xi_{t-1}^{(k)}$, но и с предыдущими значениями $\xi_{t-1}^{(k\pm 1)}$; такая система в целом будет весьма похожа на одномерную модель Изинга [11].

При фиксированном t последовательность $\xi_t^{(k)}$ образует цепь Маркова (в общем случае неоднородную), имеющую с учетом всех возможных контекстов k -ого символа в бинарной последовательности восемь состояний; граф переходов здесь имеет 4 компоненты связности, эквивалентные графу, изображенному на рис. 1. Для того чтобы правила перехода применялись

одинаково ко всем символам бинарной последовательности, можно считать, что последовательности $\xi_t^{(l)}$ предшествует последовательность $\xi_{t-1}^{(k)}$.

На рис. 8 показана траектория случайного процесса вышеописанного типа для обобщенного множества Кантора с параметром $\lambda = 1/9$. Как и ранее, было взято 5000 слагаемых в формуле (4).

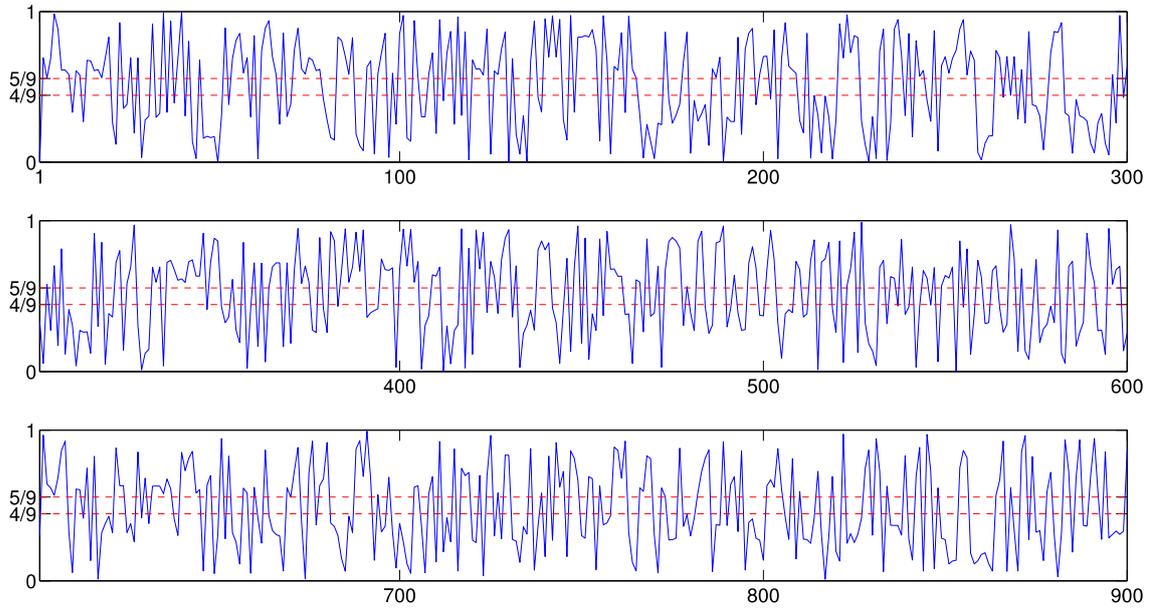


Рис. 8. Траектория c_t на множестве Кантора $C_{1/9}$ для «контекстно-зависимой» последовательности

Как уже отмечалось выше, существует сюръективное отображение множества бесконечных бинарных последовательностей на обобщенное множество Кантора; при этом элементы этих последовательностей являются коэффициентами в представлении (4). Однако возможна другая интерпретация бинарной последовательности, которая также позволяет описать множество Кантора. Рассмотрим отображения

$$F_0(x) = \beta x, \quad F_1(x) = F_0(x) + 1 - \beta = 1 - \beta(1 - x). \quad (14)$$

Очевидно, они являются сжимающими в метрическом полном пространстве \mathbf{R} . Множество Кантора является единственным решением уравнения

$$C_\lambda = F_0(C_\lambda) \cup F_1(C_\lambda) \quad (15)$$

или, в эквивалентной формулировке

$$C_\lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n, \quad I_n = F_0(I_{n-1}) \cup F_1(I_{n-1}), \quad I_0 = [0; 1]. \quad (16)$$

Следовательно, если задана некоторая бинарная последовательность $b_k \Big|_1^n$ и величина $x \in C_\lambda$, то результат n -кратного применения отображения (14) также принадлежит C_λ :

$$H_n(x) \in C_\lambda, \quad H_n = F_{b_n} \circ F_{b_{n-1}} \circ \dots \circ F_{b_1}.$$

Таким образом, случайное блуждание на C_λ можно описать в терминах случайных бинарных последовательностей, определяющих порядок применения отображений (14) к произвольной точке $x \in C_\lambda$ (например, к точке $x = 0$). Построение обобщенного множества Кантора с помощью системы сжимающих отображений является примером использования метода IFS (iterated function system), который, с некоторыми вариациями, применяется для создания различных фрактальных структур [12, 13].

В качестве примера на рис. 9 показана траектория случайного блуждания, задаваемого однородной цепью Маркова на асимметричном множестве Кантора, порождаемом отображениями

$$F_0(x) = \frac{x}{4}, \quad F_1(x) = \frac{x+1}{2}. \quad (17)$$

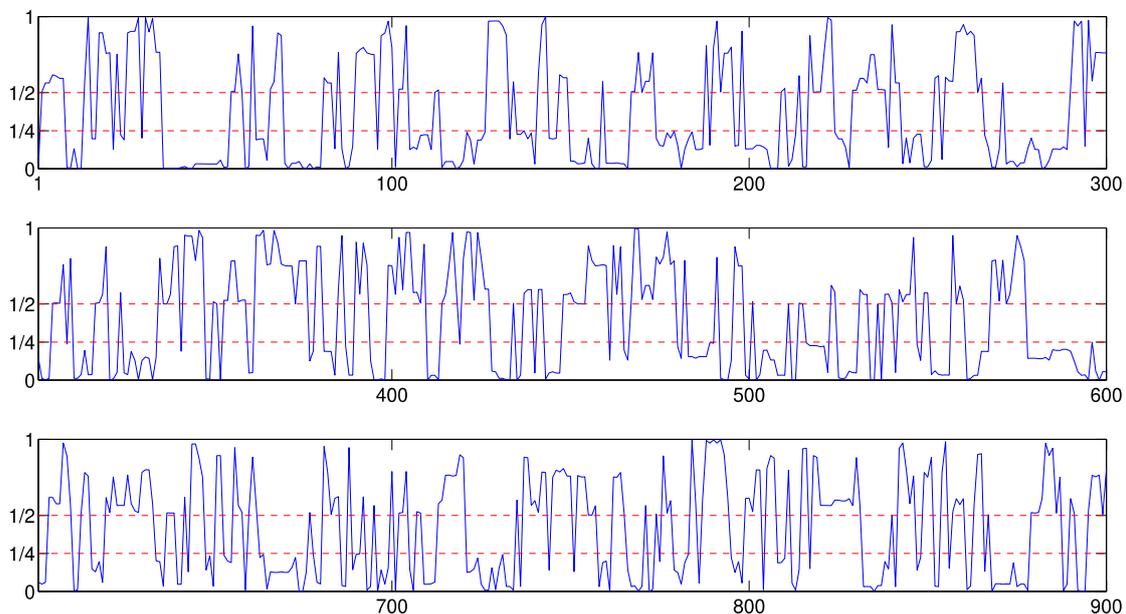


Рис. 9. Траектория c_t на асимметричном множестве Кантора,
 $p_{00} = 0,75$ и $p_{11} = 0,75$

Таким образом, мы рассмотрели различные численные модели блужданий по «разреженным» множествам – стационарные и нестационарные. Полученные временные ряды полезны тем, что они представляют собой набор эталонов, свойства которых известны, и на которых следует тестировать

различные методы идентификации эмпирических случайных процессов, относительно которых может быть выдвинута гипотеза о реализации фрактальной диффузии.

6. Дробная диффузия и уравнение Фоккера-Планка

Поставим вопрос о том, каким уравнением следует описывать эволюцию плотности функции распределения (ПФР) случайного процесса, реализованного на Канторовом множестве. Пусть $f(x, t)$, $x \in C_\lambda$ есть ПФР процесса, так что

$$\int_{C_\lambda} f(x, t) \mu_\alpha(dx) = 1. \quad (18)$$

Тот факт, что интеграл по множеству C_λ вычисляется с мерой $\mu_\alpha(dx)$, отвечающей размерности Хаусдорфа множества, обоснован в работе Нигматуллина [14]. Интеграл (18) вычисляется в соответствии с интегральной формулой Римана-Лиувилля. Именно, интеграл с переменным верхним пределом по множеству с ненатуральной размерностью $0 < \alpha \leq 1$ определяется формулой (см., напр., [15])

$$\left(I_{a+}^\alpha y \right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{y(\xi) d\xi}{(x - \xi)^{1-\alpha}}. \quad (19)$$

В терминах интеграла I_{a+}^α условие нормировки может (18) имеет вид $\left(I_{0+}^\alpha f \right)(1, t) = 1$. В частности, если рассматривается отрезок $[0; 1]$, на котором «живет» множество C_λ , то фрактальная мера этого множества есть

$$\mu_\alpha C_\lambda = \left(I_{0+}^\alpha 1 \right)(1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{d\xi}{(1 - \xi)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)}. \quad (20)$$

Величина, обратная мере (20), есть плотность равномерного распределения на множестве Кантора.

Для вывода уравнения Лиувилля, выражающего закон сохранения нормировки (22), надо ввести оператор дробного дифференцирования. Оператор, обратный дробному интегралу Римана-Лиувилля (19) слева, является дробной производной Римана-Лиувилля [15] того же порядка:

$$\left(D_{a+}^\alpha y \right)(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{y(\xi) d\xi}{(x - \xi)^\alpha}, \quad \left(D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha y \right)(x) = y(x). \quad (21)$$

В частности, когда $0 < \alpha \leq 1$, результат дробного дифференцирования представляется в виде

$$\left(D_{a+}^\alpha y \right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{y(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{y'(\xi) d\xi}{(x-\xi)^\alpha} \right). \quad (22)$$

Заметим теперь, что для вывода уравнения эволюции ПФР требуется вычислять интеграл от дивергенции, т.е. применять оператор интегрирования слева от оператора дифференцирования. Но интеграл (19) является правым обратным, а не левым обратным оператором для производной (21). Поэтому нужно определить коммутатор этих двух операторов. Соответствующая формула имеет вид [15]

$$\left(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = y(x) - \sum_{j=1}^n \frac{y_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha - j}, \quad n = [\alpha] + 1, \quad (23)$$

где $y_{n-\alpha}(x) = \left(I_{a+}^{\alpha} y\right)(x)$, т.е. в сумму (25) входят производные дробного интеграла в начальной точке (нуле). В частности, при $0 < \alpha \leq 1$ имеем

$$\left(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = y(x) - \frac{(x - a)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} \left(I_{a+}^{1-\alpha} y\right)(a). \quad (24)$$

В результате оказывается, что уравнение Лиувилля для ПФР на множестве C_{λ} формально содержит функцию источника, определенную с точностью до произвольной функции $\varphi(x, t)$ такой, что для нее выполняется условие (18) нормировки на единицу $\int_{C_{\lambda}} \varphi(x, t) \mu_{\alpha}(dx) = 1$.

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \left(D_{0+}^{\alpha} u f\right)(x, t) = J(t) \varphi(x, t), \quad J(t) = u(1, t) f(1, t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(I_{0+}^{1-\alpha} u f\right)(0, t). \quad (25)$$

Здесь $u(x, t)$ – вообще говоря, произвольная функция на C_{λ} , к которой можно применить операцию дробного дифференцирования. По своему смыслу эта функция представляет среднюю скорость изменения координаты x случайной траектории.

Именно такое уравнение отвечает условию сохранения нормировки (18). В обычном случае натуральной размерности для отсутствия источника в правой части уравнения Лиувилля достаточно потребовать естественного «условия непротекания» $u(0, t) f(0, t) = u(1, t) f(1, t) = 0$. Теперь же в правую часть добавляются неочевидные члены от производной (обычной) дробного интеграла от потока $u(x, t) f(x, t)$ в начальной точке. При нулевом граничном условии $u(1, t) f(1, t) = 0$ и аналогичном условии на интеграл дробного порядка в нуле правая часть (25) обращается в ноль. Только при этом условии снимается неопределенность правой части в (25). Будем считать его далее выполненным.

Поскольку для корректного использования уравнения Лиувилля нужна динамическая система, а на практике случайный процесс порождается динамической системой лишь приближенно, то более естественным для описания случайных траекторий на фрактальных множествах является уравнение Колмогорова и следующее из него уравнение Фоккера-Планка. Однако формальное обобщение на фракталы классического вывода уравнения Фоккера-Планка из уравнения Колмогорова (см. [16]) встречает определенные

трудности. Дело в том, что при его выводе используется характеристическая функция переходной вероятности, т.е. делается преобразование Фурье плотности вероятности, заданной на фрактале. Но с формальной точки зрения преобразование $f(x) \rightarrow \tilde{f}(k) = \int \exp(ikx)f(x)d^n x$ содержит под знаком экспоненты скалярное произведение в n -мерном пространстве, а на фрактале его определить затруднительно. Кажется естественным, что случайное блуждание на множестве нецелой размерности будет описываться уравнением вида

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + (D_{0+}^\alpha uf)(x,t) = \frac{1}{2} (D_{0+}^\alpha D_{0+}^\alpha \sigma^2 f)(x,t), \quad (26)$$

с учетом граничных условий «непротекания», однако корректный вывод «правильного» уравнения эволюционного типа авторам не известен.

Существующие же математические модели фрактальных блужданий выведены из эвристических соображений и не имеют строгого обоснования. Они опираются на представление о том, что если распределение, например, приростов некоторой случайной величины (допустим, цен на какой-либо финансовый инструмент) имеет степенные «хвосты», то модельным уравнением должно быть уравнение с дробными производными, что, в свою очередь, ассоциируется с движением по фрактальному множеству. По поводу таких моделей следует сделать замечание, касающееся вероятности не просто больших, а очень больших скачков: вероятность эта не близка к нулю. Но тогда модель становится не адекватна действительности, ибо ни в каких фантазиях суточная цена на нефть не изменится на 1000 долларов за баррель за один шаг, т.е. такой «полет Леви» совершенно невозможен. Между тем по плотности распределения, спадающей, например, как $1/x^2$, вероятность такого события равна $1/1000$, и потому «должна» наблюдаться в среднем раз в три-четыре года. Такие эффекты связаны с неоправданной интерполяцией степенного «хвоста» в область несуществующих значений. На самом деле все распределения финитны не в философском, а совершенно в практическом смысле, так как отношение суточного изменения цены к тиковому приросту имеет порядок 100 или меньше, что не может считаться «бесконечностью». Тем не менее, уравнения эволюции, трактуемые как «фрактальная динамика», используются рядом авторов для моделирования некоторых реальных ситуаций. Не обсуждая здесь практическую полезность таких моделей, обратимся к математической стороне вопроса о корректности вывода модельного уравнения.

Так, в работе [17] делается вывод уравнения Фоккера-Планка из уравнения Колмогорова на множестве фрактальной размерности, но уравнение получено, на наш взгляд, с неточностью. Оно имеет вид

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (uf)(x,t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^{2\alpha}} (\sigma^2 f)(x,t),$$

где автором введена производная $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{|x|^{\alpha-1}}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}$. Следует заметить, что это не производная Римана-Лиувилля, и так записанное уравнение эволюции не обладает свойством закона сохранения нормировки при интегрировании по множеству C_λ . Это связано с тем, что автор [17] ввел неверное обобщение усреднения по множеству с нецелой размерностью, определив интеграл по нему как сумму

$$\langle y \rangle = (I_{0+}^\alpha y)(x) + (I_{1-}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{y(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 \frac{y(\xi) d\xi}{(\xi-x)^{1-\alpha}},$$

что, очевидно, не есть обобщение «обычного среднего» в силу того, что второй интеграл в вышеприведенном выражении имеет ядро, отличное от первого.

В работе [18] стационарное фрактальное блуждание описывается уравнением Фоккера-Планка с линейным сносом и дробной диффузионной производной, понимаемой в смысле Римана-Лиувилля:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (u(x,t)f(x,t)) + D \frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial x^\alpha}.$$

Производная первого порядка для описания сноса в этом уравнении неверна, так как при интегрировании по C_λ опять-таки не будет выполнен закон сохранения нормировки.

В работе [19] описана модель диффузионного типа без сноса, которая также, на наш взгляд, не имеет достаточного кинетического обоснования:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -D(-\Delta)^{\alpha/2} f(x,t),$$

где диффузионная часть записывается в виде производной Рисса, определяемой через Фурье-образ оператора Лапласа.

В работе [20] при выводе уравнения Колмогорова рассматривается эволюция переходной вероятности в виде $\frac{\partial^\beta f(x,t)}{\partial t^\beta}$, где производная по времени понимается в смысле Римана-Лиувилля порядка β , $0 < \beta \leq 1$. Но заметим, что «дробная эволюция» не является естественным обобщением для динамической системы, если бы пришлось задавать таковую на фрактале, так как скорость по-прежнему определяется обычной, а не дробной производной по времени.

В работе [21] исследуется случайное блуждание с непрерывным временем, но дискретными координатами, связанное с фрактальным процессом Пуассона. Изучается эволюционное уравнение типа Лиувилля с фрактальной эволюцией по времени и с линейным сносом

$$\frac{\partial^\beta f(k,t)}{\partial t^\beta} = -\kappa(f(k+1,t) - f(k,t)),$$

где производная по времени понимается в смысле Капуто (несколько измененный вид производной Римана-Лиувилля):

$$\frac{d^\beta f}{dt^\beta} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1+\beta-n}} \frac{d^n f}{ds^n} ds \\ \frac{d^n f}{dt^n}, \quad \beta = n \in N \end{cases}$$

Таким образом, существует довольно много именно моделей фрактальной случайной динамики, но доказательных среди них пока что нет. В большинстве случаев авторы, по большому счету, просто постулируют некоторое удобное им уравнение. Существенно, что во всех описанных моделях частица блуждает по обычному множеству (действительной прямой), и лишь дробная производная ассоциируется с фрактальной динамикой на уровне интерпретации результатов. Это показывает, что проблема строгого вероятностного вывода уравнения Фоккера-Планка на множестве нецелой размерности является актуальной и, по-видимому, требует неординарных подходов к своему решению.

Литература

- [1] Зеленый Л.М., Милованов А.В. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // УФН. – 2004. – Т. 174, № 8. – С. 809-852.
- [2] Burioni R. et al. Levy-type diffusion on one-dimensional directed Cantor Graphs // Phys. Rev. E. – 2010. – Vol. 81, No. 1 – P. 011127.
- [3] Hoffmann K.H., Grossmann S., Wegner F. Random walk on a fractal: Eigenvalue analysis // Zeitschrift für Physik B, Condensed Matter. – 1985. – Vol. 60, No. 2-4. – P. 401-414.
- [4] Jones O.D. Transition probabilities for the simple random walk on the Sierpinski graph // Stochastic Processes and their Applications. – 1996. – Vol. 61, No. 1. – P. 45-69.
- [5] Hambly B.M. Brownian motion on a homogeneous random fractal // Probability Theory and Related Fields. – 1992. – Vol. 94, No 1. – P. 1-38.
- [6] Rammal R. Random walk statistics on fractal structures // Journal of Statistical Physics. – 1984. – Vol. 36, No. 5-6. – P. 547-560.
- [7] Li W., Xiao D. On the intersection of translation of middle- α Cantor sets // in Fractals and beyond (ed. M.N. Novak). – NJ.: World Sci. Publ., 1998.
- [8] Peres Y., Solomyak B. Self-similar measures and intersections of Cantor sets // Trans. AMS. – 1998. – Vol. 350, No. 10. – P. 4065-4087.

- [9] Cherny A.Y. et al. Scattering from generalized Cantor fractals // *J. Appl. Cryst.* – 2010. – Vol. 43, No. 4. – P. 790-797.
- [10] Aliprantis C., Burkinshaw O. *Principles of Real Analysis.* – San Diego: Academic Press, 1998.
- [11] Займан Д. Модели беспорядка – М.: Мир, 1982.
- [12] Hutchinson J. Fractals and self Similarity // *Indiana University Mathematics Journal.* – 1981. – Vol. 30. – P. 713-747.
- [13] Barnsley M., Demko S.G., Elton J.H. et al. Invariant measure for Markov processes arising from iterated function systems with place-dependent probabilities // *Ann. Inst. Henri Poincaré , Sect. A* 24. – 1988. – Vol. 24. P.367-394.
- [14] Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация. // *ТМФ.* – 1992. – Т. 90. – № 3. – С. 354-368.
- [15] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника. 1987.
- [16] Кузнецов Д.Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. – М.: Мир, 1999. 463 с.
- [17] Tarasov V.E. Fractional Fokker-Planck equation for fractal media // *Chaos.* – 2005. – Vol. 15. – № 2.
- [18] Dubkov A.A., Spagnolo B. Stationary Probability Characteristics of Superdiffusion // *Modern Problems of Statistical Physics.* – 2006. – V. 5.
- [19] Золотарев В.М., Учайкин В.В., Саенко В.В. Супердиффузия и устойчивые законы // *ЖЭТФ.* – 1999. – Т. 115. – № 4. – С. 1411-1425.
- [20] Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics and anomalous transport // Elsevier, *Physics Report* 371. – 2002. – P. 461-580.
- [21] Beghin L. and Orsingher E. Fractional Poisson Processes and Related Planar Random Motion // *Electronic Journal of Probability.* – 2009. – Vol. 14. – P. 1790-1826.