



Иванов А.А., Мартынов А.А.,
Медведев С.Ю., Пошехонов Ю.Ю.

Вычислительный код
SPIDER. Решение задачи
равновесия плазмы с
анизотропным давлением и
вращением в токамаке.

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Вычислительный код SPIDER. Решение задачи равновесия плазмы с анизотропным давлением и вращением в токамаке. / А.А.Иванов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 24. 19 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-24>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**А.А.Иванов, А.А.Мартынов, С.Ю.Медведев,
Ю.Ю.Пошехонов**

**Вычислительный код SPIDER.
Решение задачи равновесия плазмы
с анизотропным давлением и вращением
в токамаке**

Москва — 2013

А.А.Иванов, А.А.Мартынов, С.Ю.Медведев, Ю.Ю.Пошехонов
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ КОД SPIDER. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ
ПЛАЗМЫ С АНИЗОТРОПНЫМ ДАВЛЕНИЕМ И ВРАЩЕНИЕМ
В ТОКАМАКЕ

В МГД теории плазмы в токамаках давление плазмы обычно считается изотропным. Однако нагрев плазмы с помощью инжекции нейтрального пучка и ВЧ нагрев могут приводить к сильной анизотропии плазменных параметров и вращению плазмы. Теория МГД равновесия с учётом инерции плазмы и анизотропии давления начала разрабатываться уже достаточно давно, но до последнего времени она не была последовательно применена в вычислительных кодах для инженерных расчётов равновесия и эволюции плазмы в токамаке.

В данной статье представлена версия кода SPIDER, предназначенная для численного моделирования равновесия плазмы токамака с учётом тороидального вращения плазмы и анизотропии давления; даётся подробный вывод уравнения равновесия осесимметричной плазмы в самом общем виде (с произвольным вращением и анизотропным давлением); излагается метод расчета равновесий с анизотропным давлением при заданном вращательном преобразовании. Также приводятся примеры расчетов и обсуждаются полученные результаты.

Ключевые слова: токамак, плазма, МГД равновесие, анизотропное давление

A.A.Ivanov, A.A.Martynov, S.Yu.Medvedev, Yu.Yu.Poshekhonov
THE SPIDER CODE. SOLUTION OF TOKAMAK PLASMA EQUILIBRIUM
PROBLEM WITH ANISOTROPIC PRESSURE AND ROTATION

In the MHD tokamak plasma theory plasma pressure is usually assumed to be isotropic. However, plasma heating by neutral beam injection and RF heating can lead to a strong anisotropy of plasma parameters and rotation of the plasma. The development of MHD equilibrium theory with the plasma inertia and the anisotropic pressure began a long time ago, but until now it has not been consistently applied in computational codes for engineering calculations of the plasma equilibrium and evolution in tokamak.

This paper is devoted to description of the version of the SPIDER code for numerical simulation of the tokamak plasma equilibrium with the toroidal rotation and pressure anisotropy; detailed derivation of the axisymmetric plasma equilibrium in the most general form (with arbitrary rotation and anisotropic pressure) and a method of calculation of the equilibrium with anisotropic pressure and prescribed rotational transform are given. Examples of calculations and discussion of the results are also presented.

Key words: tokamak, plasma, MHD equilibrium, anisotropic pressure

1. Введение

В МГД теории плазмы в токамаках давление плазмы обычно считается изотропным. Однако в ряде представляющих практический интерес случаев, таких, как нагрев плазмы с помощью инъекции нейтрального пучка и ВЧ нагрев, может возникать как инерциальное вращение плазмы, так и существенная анизотропия плазменных параметров [1]. Теория МГД равновесия с учётом инерции плазмы и анизотропии давления начала разрабатываться уже достаточно давно [2-5], но до последнего времени не была последовательно применена в вычислительных кодах для инженерных расчётов равновесия и эволюции плазмы в токамаке.

Данный препринт посвящен описанию версии кода SPIDER [6-7], предназначенной для численного моделирования равновесия плазмы токамака с учётом тороидального вращения плазмы и анизотропии давления.

В части 2 препринта даётся подробный вывод уравнения равновесия осесимметричной плазмы в самом общем виде (с произвольным вращением и анизотропным давлением). Уравнение равновесия плазмы с тороидальным вращением и уравнение равновесия статической плазмы с анизотропным давлением выводятся из общего уравнения. Там же излагается метод расчета равновесия плазмы с фиксированной заданной границей и с анизотропным давлением при заданном вращательном преобразовании $q(\psi)$.

В части 3 исследуется влияние тороидального вращения на положение свободной границы плазмы с пьедестальными профилями в области пьедестала в случае базового равновесия «Сценария 4» ИТЭР.

В части 4 для плазмы «Сценария 2» ИТЭР приводятся результаты расчётов равновесия с заданным профилем вращательного преобразования $q(\psi)$ при переменной анизотропии давления.

В части 5 обсуждаются полученные результаты.

2. Общая формулировка задачи равновесия плазмы с анизотропным давлением и вращением в токамаке

2.1 Уравнения идеальной МГД и некоторые их следствия

Адиабатическое течение идеально-проводящей жидкости описывается следующими уравнениями:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{div}(\hat{\pi} + \hat{T}), \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -\hat{\pi} \circ \circ \nabla \vec{v}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \right) = (\vec{B}, \nabla) \vec{v}, \quad (3)$$

где $\rho, \vec{v}, \varepsilon$ - плотность, скорость и внутренняя энергия, \vec{B} - вектор магнитного поля. Уравнения также включают максвелловский тензор напряжений $\hat{T} = \frac{B^2}{2} \hat{I} - \hat{B}\hat{B}$ и тензор давления:

$$\hat{\pi} = p_{\perp} \hat{I} + \sigma_{\parallel} \hat{B}\hat{B}, \quad \sigma_{\parallel} = \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2}. \quad (4)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div}(\vec{v}) \quad (5)$$

и условие соленоидальности магнитного поля

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (6)$$

замыкают систему уравнений (1) - (3).

Перепишем уравнение (3) в виде

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{B^2}{2\rho} \right) = -\hat{T} \circ \circ \nabla \vec{v}, \quad (3a)$$

после чего, комбинируя уравнения (1) и (2), получаем следующее уравнение для полной энергии на единицу массы $E = \frac{v^2}{2} + \varepsilon + \frac{1}{\rho} \frac{B^2}{2}$:

$$\rho \frac{dE}{dt} = -\operatorname{div}(\hat{\pi} \circ \vec{v} + \hat{T} \circ \vec{v}). \quad (7)$$

Используя явную форму тензора (4), можно показать, что

$$\hat{\pi} \circ \circ \nabla \vec{v} = p_{\perp} \operatorname{div} \vec{v} + \sigma_{\parallel} (\vec{B}, (\vec{B}, \nabla) \vec{v}).$$

С другой стороны из (3) следует

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{B^2}{2} \right) = B^2 \operatorname{div} \vec{v} + (\vec{B}, (\vec{B}, \nabla) \vec{v}).$$

Исключая $(\vec{B}, (\vec{B}, \nabla) \vec{v})$ из двух последних выражений, уравнение (2) можно записать следующим образом [5]:

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{p_{\parallel}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \frac{\sigma_{\parallel}}{2} \frac{dB^2}{dt}. \quad (8)$$

Уравнение (8) предполагает адиабатичность. Поэтому можно считать, что $\varepsilon = \varepsilon(\rho, B^2, S)$ есть функция трёх параметров: ρ, B и энтропии S , так как из (8) следует выполнение следующего соотношения в жидкой частице:

$$d\varepsilon = -p_{\parallel} dV - \sigma_{\parallel} V d \left(\frac{B^2}{2} \right), \quad V = \frac{1}{\rho}.$$

Забегаая вперед, в дальнейшем будем считать энтропию функцией замороженного в среду полоидального потока ψ , т.е. $\varepsilon = \varepsilon(\rho, B^2, \psi)$.

Введём функцию $h = \varepsilon + p_{\parallel}V$ в качестве аналога энтальпии. Тогда

$$dh = Vdp_{\parallel} - \sigma_{\parallel}Vd\left(\frac{B^2}{2}\right).$$

Откуда следует

$$\nabla h = V\nabla p_{\parallel} - \sigma_{\parallel}V\nabla\left(\frac{B^2}{2}\right) + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\psi}\nabla\psi. \quad (9)$$

Дивергенцию тензора $\hat{\pi}$ можно записать в виде:

$$\operatorname{div}\hat{\pi} = (\operatorname{rot}\sigma_{\parallel}\vec{B})\times\vec{B} - \sigma_{\parallel}\nabla\left(\frac{B^2}{2}\right) + \nabla p_{\parallel}, \quad (10)$$

или, с учётом (9):

$$\operatorname{div}\hat{\pi} = (\operatorname{rot}\sigma_{\parallel}\vec{B})\times\vec{B} + \rho\nabla h - \rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\psi}\nabla\psi. \quad (10a)$$

Эти соотношения будут использованы в дальнейшем для вывода аксиально-симметричного уравнения равновесия в общем виде.

Интеграл Бернулли. Умножим (1) скалярно на $\frac{\vec{B}}{\rho}$, а (3) на \vec{v} и сложим. В предположении, что $(\nabla\psi, B) = 0$, получим:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}, \vec{B}}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho}(\vec{B}, \operatorname{div}\hat{\pi}) + \left(\vec{B}, \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)\right). \quad (11)$$

Откуда, с учётом (10a)

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}, \vec{B}}{\rho}\right) = \operatorname{div}\left(\vec{B}\left(\frac{v^2}{2} - h\right)\right), \quad (12)$$

или в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V(\vec{v}, \vec{B})dV\right) = \int_{\partial V}\left(\frac{v^2}{2} - h\right)(\vec{B}, d\vec{S}), \quad (13)$$

где V - Лагранжев объём, ∂V - его граница.

2.2 Аксиально-симметричное равновесие плазмы с учётом вращения

Аксиально-симметричное магнитное поле состоит из полоидальной и тороидальной компонент:

$$\vec{B}_p = \nabla\psi \times \nabla\varphi, \quad \vec{B}_\varphi = F\nabla\varphi.$$

Уравнение равновесия плазмы со скалярным давлением с учётом сил инерции можно записать в виде:

$$\rho(\vec{v}, \nabla)\vec{v} = \text{rot } \vec{B} \times \vec{B} - \nabla p. \quad (14)$$

В стационарном случае, когда

$$(\vec{v}_p, \nabla\psi) = 0, \quad \text{div}(\rho\vec{v}_p) = 0,$$

полоидальные компоненты скорости и магнитного поля соотносятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho\vec{v}_p &= \text{rot}(\chi\nabla\varphi) = \nabla\chi \times \nabla\varphi, \\ \rho\vec{v}_p &= \chi'\vec{B}_p, \quad \chi = \chi(\psi). \end{aligned}$$

Это означает, что вектор скорости \vec{v} лежит на магнитных поверхностях $\psi = \text{const}$. Тороидальная компонента скорости выражается через угловую скорость ω :

$$\vec{v}_\varphi = \omega R^2 \nabla\varphi.$$

В предположении идеальной проводимости плазмы можно написать:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{v} \times \vec{B}, \quad \vec{E}_\varphi = -\vec{v}_p \times \vec{B}_p = 0, \\ \vec{E} &= \vec{E}_p = -\Omega \nabla\psi, \end{aligned}$$

т.е., электрическое поле ортогонально магнитным поверхностям. В стационарном случае функция Ω является потоковой величиной:

$$\text{rot } \vec{E}_p = 0 \rightarrow \nabla\Omega \times \nabla\psi = 0 \rightarrow \Omega(\psi).$$

Используя явное представление полоидального электрического поля через χ, ρ, ω, F

$$\begin{aligned} \vec{E}_p &= -\vec{v}_p \times \vec{B}_\varphi - \vec{v}_\varphi \times \vec{B}_p = -\frac{\chi'}{\rho} \vec{B}_p \times \vec{B}_\varphi - \vec{v}_\varphi \times \vec{B}_p = \\ &= \vec{B}_p \times \left(\vec{v}_\varphi - \frac{\chi'}{\rho} \vec{B}_\varphi \right) = \vec{B}_p \times \left(\omega R^2 - \frac{F\chi'}{\rho} \right) \nabla\varphi = -\left(\omega - \frac{F\chi'}{\rho R^2} \right) \nabla\psi, \end{aligned}$$

получаем

$$\Omega(\psi) = \omega - \frac{F\chi'}{\rho R^2}, \quad (15)$$

$$\vec{v} = \frac{\chi'}{\rho} \vec{B} + \Omega R^2 \nabla\varphi. \quad (16)$$

В случае стационарного аксиально-симметричного течения интеграл Бернулли даёт:

$$h + \frac{v^2}{2} - \omega\Omega R^2 = H(\psi). \quad (17)$$

Обозначим завихренность $\vec{W} = \text{rot } \vec{v}$ и плотность электрического тока $\vec{j} = \text{rot } \vec{B}$. Тогда стационарное уравнение равновесия (14) принимает вид:

$$\rho \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + \rho \vec{W} \times \vec{v} = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p. \quad (18)$$

Подставляя выражение $\rho \vec{v}$ из (16) в (18), получаем:

$$(\chi' \vec{W} - \vec{j}) \times \vec{B} + \rho \Omega R^2 (\vec{W} \times \nabla \varphi) = -\nabla p - \rho \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right). \quad (19)$$

Подстановка $\vec{W}_p = \nabla(\omega R^2) \times \nabla \varphi$ в (19) даёт:

$$\vec{l} \times \vec{B} + \rho \omega R^2 \nabla \Omega = -\nabla p - \rho \nabla \left(\frac{v^2}{2} - \omega \Omega R^2 \right), \quad (20)$$

где $\vec{l} = \chi' \vec{W} - \vec{j}$.

Тороидальная часть уравнения (20) даёт $\vec{l}_p \times \vec{B}_p = 0$, откуда следует:

$$\begin{aligned} F - \chi' \omega R^2 &= \Lambda(\psi), \\ \vec{l}_p &= -\nabla \Lambda \times \nabla \varphi + \omega R^2 \chi'' \vec{B}_p, \end{aligned} \quad (21)$$

т.е., вектор \vec{l} лежит на магнитных поверхностях. Полоидальная часть (20):

$$\vec{l}_p \times \vec{B}_\varphi + \vec{l}_\varphi \times \vec{B}_p = -\rho \omega R^2 \nabla \Omega - \nabla p - \rho \nabla \left(\frac{v^2}{2} - \omega \Omega R^2 \right). \quad (22)$$

Раскроем оба члена в левой части уравнения (22):

$$\vec{l}_\varphi \times \vec{B}_p = (\chi' \vec{W}_\varphi - \vec{j}_\varphi) \times \vec{B}_p = \left(\left(\chi' \text{rot} \left(\frac{\chi'}{\rho} \nabla \psi \times \nabla \varphi \right) - \text{rot}(\nabla \psi \times \nabla \varphi) \right), \nabla \varphi \right) \nabla \psi,$$

$$\vec{l}_p \times \vec{B}_\varphi = -F(\nabla \Lambda \times \nabla \varphi) \times \nabla \varphi + F \omega R^2 \chi'' (\nabla \psi \times \nabla \varphi) \times \nabla \varphi = \frac{F}{R^2} \nabla \Lambda - F \omega \chi'' \nabla \psi.$$

Теперь уравнение (22) может быть переписано, как:

$$\begin{aligned} \chi' \left(\text{rot} \left(\frac{\chi'}{\rho} \nabla \psi \times \nabla \varphi \right), \nabla \varphi \right) \nabla \psi - (\text{rot}(\nabla \psi \times \nabla \varphi), \nabla \varphi) \nabla \psi = \\ = -\frac{F}{R^2} \nabla \Lambda + F \omega \chi'' \nabla \psi - \rho \omega R^2 \nabla \Omega + \rho \nabla \left(\omega \Omega R^2 - \frac{v^2}{2} \right) - \nabla p. \end{aligned} \quad (23)$$

Если энтропия S является потоковой функцией, т.е. $S = S(\psi)$,

$\nabla h = V \nabla p + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi} \nabla \psi$, где $h = \varepsilon + pV$. Тогда с учётом (17) и (9) уравнение (23)

принимает вид:

$$\begin{aligned} \chi' \left(\text{rot} \left(\frac{\chi'}{\rho} \nabla \psi \times \nabla \varphi \right), \nabla \varphi \right) - (\text{rot}(\nabla \psi \times \nabla \varphi), \nabla \varphi) = \\ = -\frac{F}{R^2} \Lambda' + F \omega \chi'' - \rho \omega R^2 \Omega' - \rho H' + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (24)$$

Если плотность является потоковой функцией, т.е. $\rho = \rho(\psi)$, то с учётом $\nabla p = \rho \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{p \nabla \rho}{\rho}$ последние два члена в правой части (23) принимают вид:

$$\rho \nabla \left(\omega \Omega R^2 - \frac{v^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right) + \frac{p \nabla \rho}{\rho}, \quad \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \omega \Omega R^2 = \tilde{H}(\psi).$$

Соответственно, последние два члена в правой части (24) преобразуются к виду:

$$-\rho \tilde{H}' + \frac{p \rho'}{\rho}.$$

2.3 Аксиально-симметричное равновесие плазмы с анизотропным давлением

С учётом выражения (10) для дивергенции тензора давления, статическое ($\bar{v} = 0$) уравнение равновесия с анизотропным давлением может быть переписано в виде:

$$\operatorname{div} \hat{\pi} = (\operatorname{rot} \sigma_{\parallel} \bar{B}) \times \bar{B} - \sigma_{\parallel} \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) + \nabla p_{\parallel} = \bar{j} \times \bar{B}, \quad (25)$$

где $\hat{\pi} = p_{\perp} \hat{I} + \sigma_{\parallel} \hat{B} \hat{B}$, $\sigma_{\parallel} = \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2}$,

или

$$\bar{k} \times \bar{B} = \nabla p_{\parallel} - \sigma_{\parallel} \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right),$$

где $\bar{k} = \operatorname{rot}(\sigma \bar{B})$, $\sigma = 1 - \sigma_{\parallel}$. Проекция уравнения (25) на тороидальное направление $\nabla \varphi$ даёт $F \sigma = \Lambda(\psi)$.

Полоидальная часть уравнения (25) даёт

$$\nabla \psi (\operatorname{rot}(\sigma \nabla \psi \times \nabla \varphi), \nabla \varphi) - \nabla \Lambda \frac{F}{R^2} - \rho \nabla h + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi} \nabla \psi = 0. \quad (26)$$

Таким образом, мы имеем:

$$h(p_{\parallel}(\rho, B^2, \psi), B^2, \psi) = H(\psi). \quad (27)$$

Из соотношения (27) следует, что ρ , а следовательно и p_{\parallel} , являются функциями двух переменных (B^2, ψ) . Тогда (9) принимает вид:

$$\nabla h = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \psi} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi} \right) \nabla \psi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{\parallel}}{\partial B^2} - \frac{\sigma_{\parallel}}{2} \right) \nabla (B^2).$$

С учётом (27) получаем:

$$\nabla h = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \psi} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi} \right) \nabla \psi, \quad \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial B^2} = \frac{\sigma_{\parallel}}{2}, \quad (28)$$

и уравнение равновесия (26) записывается в виде:

$$(\text{rot}(\sigma \nabla \psi \times \nabla \varphi), \nabla \varphi) - \Lambda' \frac{F}{R^2} - \frac{\partial p_{\parallel}(\psi, B^2)}{\partial \psi} = 0. \quad (29)$$

Усреднение (29) по объёму dV_{ψ} между магнитными поверхностями $\psi = \text{const}$ даёт:

$$dK_{\varphi} d\psi - d\Phi d\Lambda = \left\langle \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \psi} \right\rangle_{V_{\psi}} dV_{\psi} d\psi, \quad (30)$$

или

$$dK_{\varphi} + q d\Lambda = \left\langle \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \psi} \right\rangle_{V_{\psi}} dV_{\psi}, \quad (31)$$

где $K_{\varphi} = \int_{S_{\psi}} k_{\varphi} dS$, S_{ψ} - площадь внутри линии уровня $\psi = \text{const}$ в тороидальном поперечном сечении, $q = -\frac{d\Phi}{d\psi}$ - фактор запаса устойчивости.

Получим выражение для $\langle (\vec{j}, \vec{B}) \rangle$, которое может понадобиться для вывода уравнения диффузии, усредненного по магнитным поверхностям:

1) Интегрируя выражение

$$(\vec{j}, \vec{B}) = (\vec{j}_{\varphi}, \vec{B}_{\varphi}) + (\vec{j}_p, \vec{B}_p) = F(\vec{j}_{\varphi}, \nabla \varphi) + (\vec{j}_p, \vec{B}_p), \quad (32)$$

по объёму dV_F между полоидальными токовыми поверхностями $F = \text{const}$, получаем:

$$dV \langle (\vec{j}, \vec{B}) \rangle_{V_F} = F dI_F - I_F dF,$$

где $I_F = \int_{S_F} \vec{j}_{\varphi} dS$, S_F - площадь внутри линии уровня $F = \text{const}$ в тороидальном поперечном сечении плазмы.

2) Из выражения

$$(\vec{k}, \vec{B}) = (\text{rot}(\sigma \vec{B}), \vec{B}) = (\sigma \vec{B}, \text{rot} \vec{B}) = \sigma (\vec{j}, \vec{B}) \quad (33)$$

получаем $(\vec{k}, \sigma \vec{B}) = \sigma^2 (\vec{j}, \vec{B}) = (\vec{k}_{\varphi}, \sigma \vec{B}_{\varphi}) + (\vec{k}_p, \sigma \vec{B}_p) = \Lambda (\vec{k}_{\varphi}, \nabla \varphi) + (\vec{k}_p, \sigma \vec{B}_p)$. Интегрирование последнего по объёму между магнитными поверхностями приводит к

$$\Lambda dK_{\varphi} - K_{\varphi} d\Lambda = \langle (\vec{k}, \sigma \vec{B}) \rangle_{V_{\psi}} dV_{\psi}. \quad (34)$$

Токи и потоки. Тороидальный ток I через поперечное сечение магнитной поверхности $\psi = \text{const}$ и полоидальный поток магнитного поля ψ связаны между собой следующим образом [8]:

$$I = \alpha_{22} \frac{d\psi}{dV_{\psi}}, \quad (35)$$

$$\alpha_{22} = \oint_{\psi=\text{const}} \frac{|\nabla V_{\psi}|}{R} dl, \quad (36)$$

где V_ψ - объём внутри магнитной поверхности. В общем случае равновесия с анизотропным давлением, когда магнитные и токовые поверхности не совпадают, аналогичное соотношение между полоидальным током F и тороидальным потоком Φ_F может быть записано через поверхность $F = const$, не являющуюся магнитной поверхностью:

$$F = \alpha_{33} \frac{d\Phi_F}{dV_F}, \quad (37)$$

$$\alpha_{33} = \left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle_{V_F}^{-1}, \quad (38)$$

где V_F - объём внутри токовой поверхности $F = const$. Кроме того, для потоков вектора \vec{k} имеем:

$$K_\phi = C_{22} \frac{d\psi}{dV_\psi}, \quad (39)$$

$$C_{22} = \oint_{\psi=const} \sigma \frac{|\nabla V_\psi|}{R} dl, \quad (40)$$

где V_ψ - объём, ограниченный поверхностью $\psi = const$,

$$\Lambda = C_{33} \frac{d\Phi}{dV_\psi}, \quad (41)$$

$$C_{33} = \left\langle \frac{1}{\sigma R^2} \right\rangle_{V_\psi}^{-1}. \quad (42)$$

Уравнение равновесия с анизотропным давлением при условии вмороженности потоков. Определим, как может быть решено уравнение равновесия (29) с предписанными функциями $q(\psi)$, $\frac{\partial p_\parallel}{\partial \psi}(\psi, B^2)$ и полным полоидальным потоком в плазме $\delta\psi = \psi_m - \psi_b$ (см. раздел 4).

Усреднённое уравнение равновесия (31) с использованием (39) - (42) может быть переписано в виде:

$$\frac{d}{dV_\psi} \left(C_{22} \frac{d\psi}{dV_\psi} \right) - q \frac{d}{dV_\psi} \left(C_{33} q \frac{d\psi}{dV_\psi} \right) = \left\langle \frac{\partial p_\parallel}{\partial \psi} \right\rangle_{V_\psi}. \quad (43)$$

Для решения задачи равновесия используется итерационная процедура, аналогичная процедуре из [7]. На каждой итерации решается одномерное уравнение (43). Опираясь на его решение можно определить величину

$$\Lambda \Lambda' = -q C_{33} \frac{d}{dV_\psi} \left(C_{33} q \frac{d\psi}{dV_\psi} \right). \quad (44)$$

После чего решается двумерное уравнение (29) с Λ' из (44) и заданной функцией $\frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \psi}(\psi, B^2)$.

Замечание. Нетрудно показать, что уравнение равновесия с анизотропным давлением и с учётом вращения плазмы может быть записано в следующем виде:

$$\chi' \left(\text{rot} \left(\frac{\chi'}{\rho} \nabla \psi \times \nabla \varphi \right), \nabla \varphi \right) - (\text{rot}(\sigma \nabla \psi \times \nabla \varphi), \nabla \varphi) = -\frac{F}{R^2} \Lambda' + F \omega \chi'' - \rho \omega R^2 \Omega' - \rho H' + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi} \quad (45)$$

3. Влияние тороидального вращения на равновесие плазмы для базовых сценариев ИТЭР

В случае чисто тороидального вращения уравнение равновесия (23) существенно упрощается и принимает форму [4]:

$$-\frac{1}{R^2} (\Delta^* \psi + FF') = \frac{\partial p(\psi, R)}{\partial \psi} \quad (46)$$

Полоидальный ток F и ω зависят только от функции полоидального потока ψ , то есть токовые и магнитные поверхности совпадают.

Если мы предположим, что плотность ρ постоянна на магнитных поверхностях, то есть, $\rho = \rho(\psi)$, то выражение для давления p может быть записано в виде:

$$p(\psi, R) = p_0(\psi) + \frac{\rho(\psi) \omega^2 R^2}{2} \quad (47)$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} = p_0' + \frac{(\rho \omega^2)' R^2}{2} \quad (48)$$

Для исследования влияния тороидального вращения на равновесие плазмы была выполнена следующая серия вычислений с различными значениями скорости вращения v равновесной конфигурации токамака ИТЭР (рис.1):

- в качестве базовой равновесной конфигурации была выбрана конфигурация плазмы “Сценарий 4” из базы данных ИТЭР с величиной $\beta_{ax} = 2\mu_0 p_0 / B_0^2 = 6.2\%$;
- нормализованный полоидальный поток $\bar{\psi} = (\psi - \psi_b) / (\psi_a - \psi_b)$ меняется от 1 на магнитной оси до 0 на границе плазмы;
- профиль $(\rho \omega^2)' = A_0 (1 - (1 - \bar{\psi})^{\alpha_1})^{\alpha_2}$ с $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0.5$ полагается заданным;

- максимальная скорость $v_{\varphi_{\max}} = \omega_{\max} R_0$ изменяется в пределах 100-300 км/с, $\rho_{\max} = 1.5 \cdot 10^{-10}$ Г/см³, что соответствует $n = 10^{14}$ см⁻³ для водородной плазмы; величина $\mu_0 \rho_{\max} v_{\varphi_{\max}}^2 / B_0^2 = 0.0075\%$ для $v_{\varphi_{\max}} = 100$ км/с.

Рис.2 показывает профили основных потоковых функций в плазме. Для серии расчётов с различными значениями скорости тороидального вращения таб.1 демонстрирует зависимость радиальной координаты магнитной оси и X-точки - $R_m(m)$ и $R_x(m)$ соответственно – от величины скорости вращения. Для тех же значений величин скорости на рис.3 изображено положение границы равновесной плазмы на внешнем обводе тора.

Таб. 1. Радиальные координаты магнитной оси и X-точки в равновесии со свободной границей и тороидальным вращением плазмы в зависимости от величины скорости вращения

$v(km/sec)$	0	100	200	300
$R_m(m)$	6.690	6.6920	6.696	6.7056
$R_x(m)$	5.085	5.086	5.088	5.0908

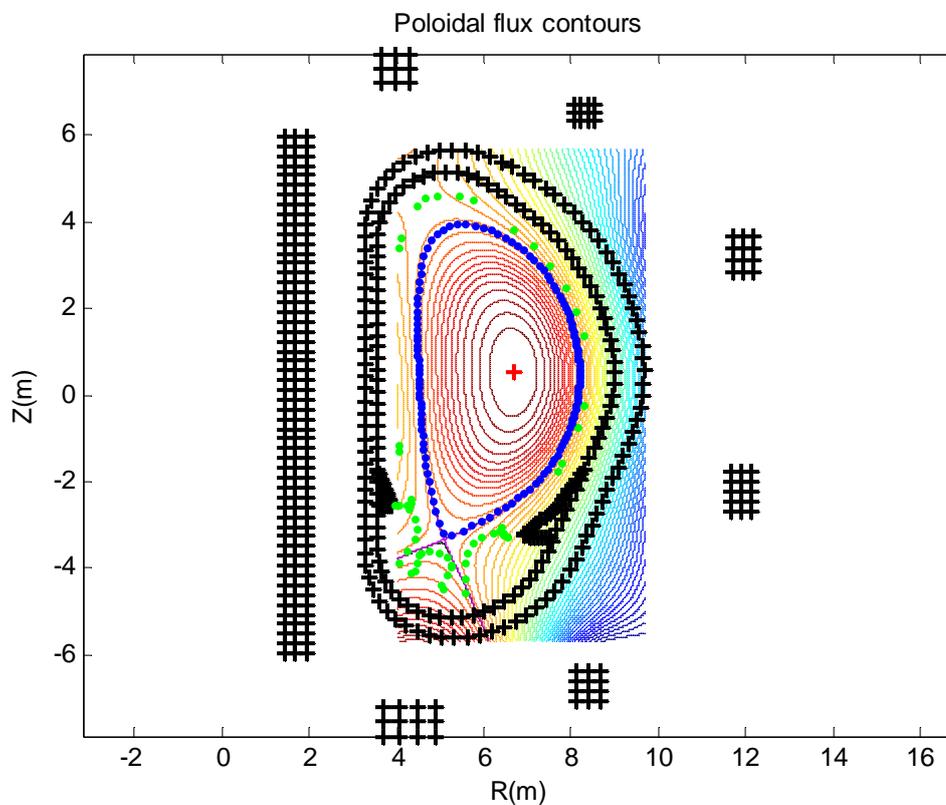


Рис. 1. Базовое равновесие плазмы со свободной границей ($\bar{v} = 0$).
Сценарий 4, ИТЭР

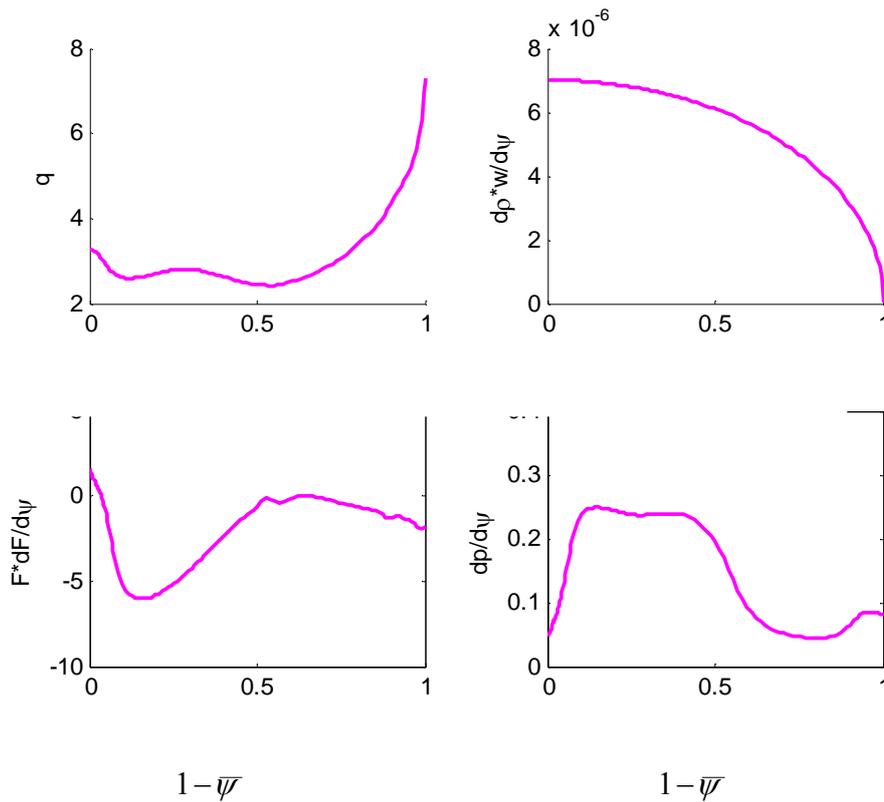


Рис. 2. Профили потоковых функций в плазме для базовой равновесной конфигурации рис.1 как функции нормализованного полоидального потока. Входные потоковые функции для расчёта - p' , FF' , $(\rho\omega^2)'$

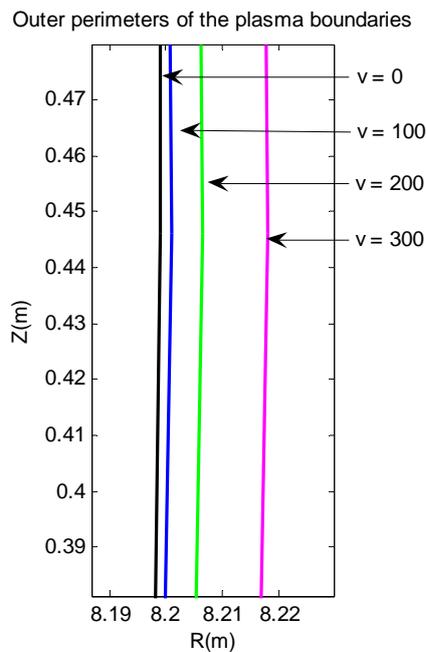


Рис. 3. Положение границы равновесной плазмы на внешнем обводе тора в зависимости от величины скорости тороидального вращения (подписи соответствуют максимальным скоростям вращения в км/с)

4. Расчет аксиально-симметричных равновесий плазмы с анизотропным давлением в режимах с большой долей энергичных частиц

Соотношение (28) удобно преобразовать к виду [9]:

$$\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{p_{\parallel}}{B} \right) = -\frac{p_{\perp}}{B^2}. \quad (49)$$

Предположим, что $p_{\perp} = p_{\perp}(\psi)$ есть функция ψ . Тогда интегрирование (49) даёт:

$$p_{\parallel}(\psi, B) = p_{\perp}(\psi) + f(\psi) \cdot B. \quad (50)$$

Без ограничения общности выражение (50) можно переписать в виде:

$$p_{\parallel} = p_{\perp}(\bar{\psi}) + f_0(\bar{\psi}) \frac{B}{B_{\max}}, \quad (51)$$

где нормализованный полоидальный поток магнитного поля $\bar{\psi} = (\psi - \psi_b) / (\psi_a - \psi_b)$ меняется от 1 на магнитной оси до 0 на границе плазмы. Расчёты проводились с заданными профилями $p_{\parallel}(\bar{\psi}, B)$ вида (51). В качестве исходного бралось равновесие плазмы из базы данных ИТЭР, Сценарий 2 с током плазмы $I_{pl} = 15 \text{ MA}$ в предположении совпадения перпендикулярного давления с полным давлением исходного равновесия $p_{\perp} = p_0$. Рис.4 показывает профили основных потоковых функций в плазме. На рис.5 приводится расчётная сетка, адаптированная к магнитным поверхностям $\psi = const$ исходной равновесной конфигурации. Были заданы следующие параметры:

- фактор запаса устойчивости q и полный полоидальный поток в плазме из исходной равновесной конфигурации, что означает выполнение условия сохранения потоков;
- $f_0(\bar{\psi}) = A_0 \left(1 - (1 - \bar{\psi})^{\alpha_1} \right)^{\alpha_2}$;
- $p_{\perp}(\bar{\psi}) = p_0(\bar{\psi})$;
- $A_0 = 2p_0(1)$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 0.25$.

Расчёты показывают, что качественные изменения равновесия происходят при высоких значениях продольного бета. Для сильной анизотропии давления при величине продольного бета примерно в три раза превышающем величину поперечного бета сдвиг магнитной оси ($R_m = 6.568 \text{ м}$) достаточно велик в сравнении с соответствующим сдвигом для исходного равновесия ($R_{m_0} = 6.418 \text{ м}$). Линии уровня $\psi = const$ (магнитные поверхности) сильно

отклоняются от линий уровня $\frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \psi} = const$ (рис.6). Кроме того, токовые поверхности $F = const$ существенно отклоняются от магнитных потоковых поверхностей (рис.7). Для равновесия с $A_0 = p_0(1)$ (продольное бета меньше в два раза) расхождение между токовыми и потоковыми поверхностями остается существенным (рис.8).

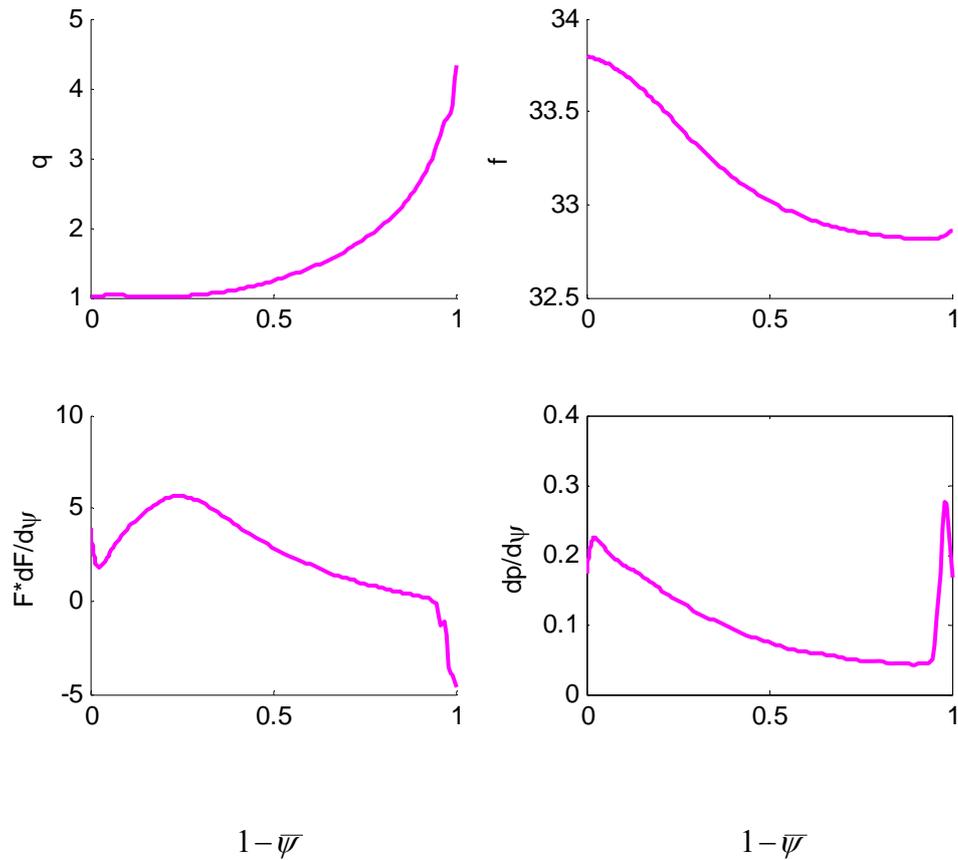


Рис. 4. Профили потоковых функций в плазме для базовой равновесной конфигурации рис.5 как функции нормализованного полоидального потока. Входные параметры задачи - p' , FF'

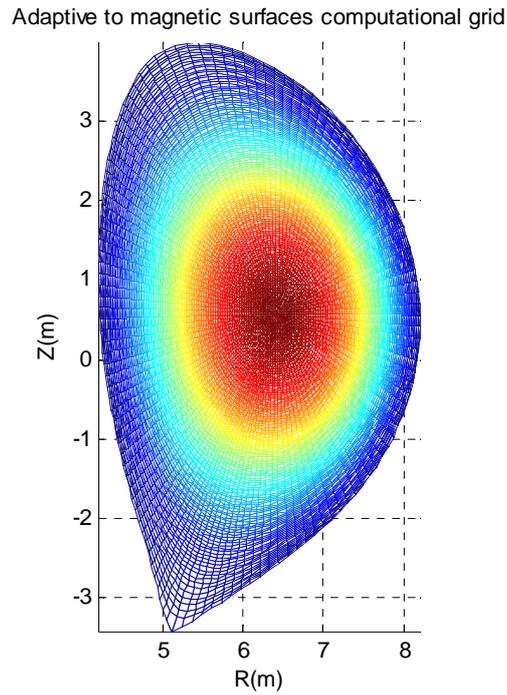


Рис. 5. Расчётная сетка, адаптированная к магнитным поверхностям $\psi = const$, для исходной равновесной конфигурации ИТЭР, Сценарий 2

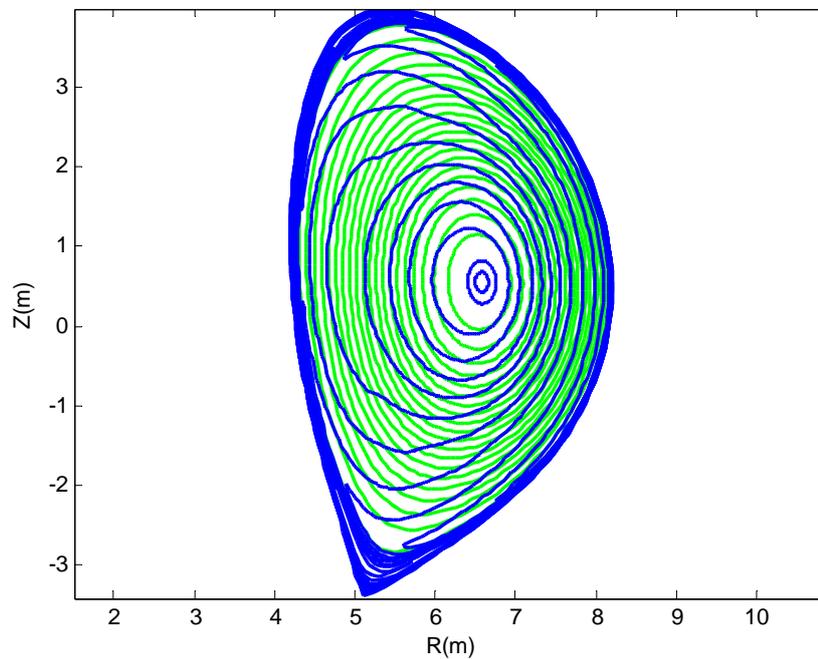


Рис. 6. Равновесная конфигурация с большим продольным бета. Линии уровня $\psi = const$ (магнитные поверхности) – зелёные, линии уровня $\frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \psi} = const$ – синие

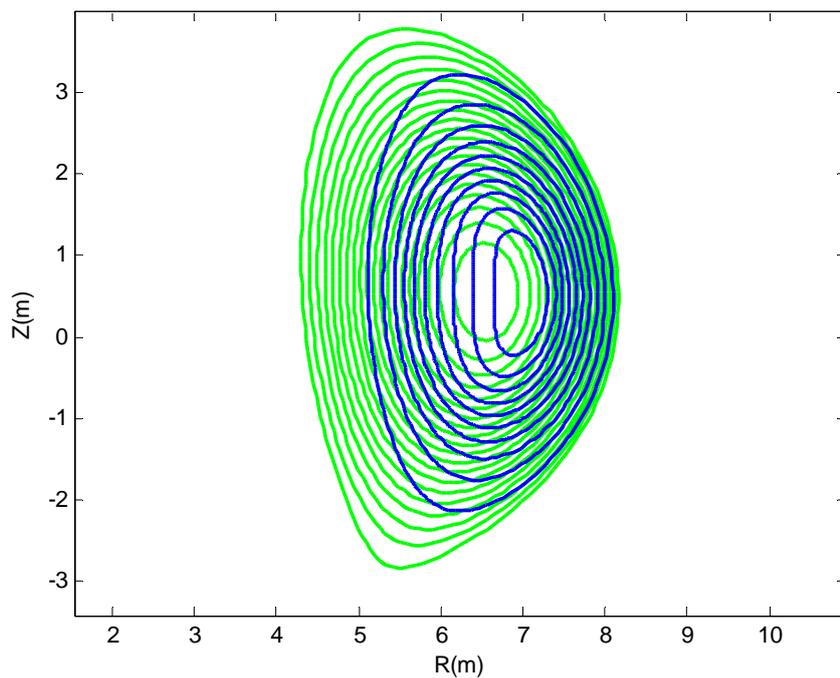


Рис. 7. Равновесная конфигурация с большим продольным бета.
Линии уровня $\psi = const$ (магнитные поверхности) – зелёные,
линии уровня $F = const$ (токовые поверхности) – синие

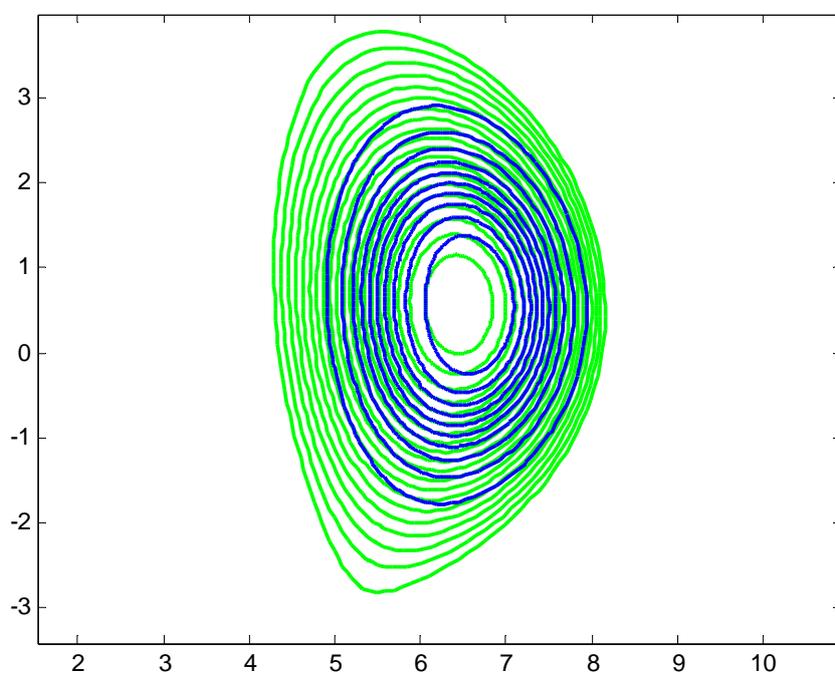


Рис. 8. Равновесная конфигурация с меньшим, чем на рис.7, продольным бета.
Линии уровня $\psi = const$ (магнитные поверхности) – зелёные,
линии уровня $F = const$ (токовые поверхности) – синие

5. Заключение

Расчёты равновесия плазмы токамака с тороидальным вращением подтверждают слабое влияние вращения на положение свободной границы плазмы: при возможных в ИТЭР величинах скорости вращения плазмы – до 100 км/сек ($\mu_0 \rho_{\max} v_{\varphi \max}^2 / B_0^2 = 0.0075\%$) – смещение границы плазмы на внешнем обводе тора не превышает нескольких миллиметров. Рис.3 показывает, что эффект смещения усиливается пропорционально квадрату скорости, в то время как положение магнитной оси и X-точки меняется слабо (см. таб.1).

Для равновесий с сохранением потоков и анизотропным давлением при большой доле энергичных частиц (давление энергичных частиц сравнимо с полным давлением плазмы) наблюдается существенное отклонение токовых поверхностей от магнитных поверхностей. Этот факт предполагает некоторые ограничения на выбор реалистичной модели равновесия с анизотропным давлением в ИТЭР.

Благодарности. Авторы благодарят В.В.Дроздова за плодотворные обсуждения и воодушевляющий интерес к основополагающим принципам МГД. Очень ценными были советы и предложения В.Д.Пустовитова.

Литература

1. Fasoli A. et al. - Nucl.Fusion, 2007, v.47, p.128.
2. Grad H. - Phys.Fluids, 1967, v.10, p.137.
3. Л.Е.Захаров, В.Д.Шафранов, Вопросы теории плазмы. Атомиздат, 1982, вып. 11, с. 118.
4. E.K.Maschke and H.Perrin - Plasma Phys.1980, v. 22, p. 579.
5. R.Iacono A.Bondeson et al. - Phys.Fluids 1990 B vol. 2 No. 6 p. 1794.
6. A.A.Ivanov, R.R.Khayrutdinov, S.Yu.Medvedev, Yu.Yu.Poshekhonov - The SPIDER code-axisymmetric fixed boundary plasma equilibrium solver, KIAM preprint No7, Moscow, 2006.
URL: http://www.keldysh.ru/papers/2006/source/prep2006_07.doc
7. A.A.Ivanov, R.R.Khayrutdinov, S.Yu.Medvedev, Yu.Yu.Poshekhonov - The SPIDER code – solution of direct and inverse problems for free boundary tokamak plasma equilibrium, KIAM preprint No39, Moscow, 2009.
URL: http://www.keldysh.ru/papers/2009/prep39/prep2009_39.pdf
8. Л.М.Дегтярев, В.В.Дроздов, С.Ю.Медведев – Численное моделирование равновесия и устойчивости тороидальной плазмы - Монография Института прикладной математики им.М.В.Келдыша, Москва, 1989.
9. V.D.Pustovitov - AIP Conf. Proc. 2012, v.1478, p.50.
10. V.D.Pustovitov - Plasma Physics Reports, 2003, v.29, p.105. (Translated from Fizika Plazmy, Vol. 29, No. 2, 2003, pp. 124–130).

Содержание

1. Введение.....	3
2. Общая формулировка задачи равновесия плазмы с анизотропным давлением и вращением в токамаке	3
2.1 Уравнения идеальной МГД и некоторые их следствия	3
2.2 Аксиально-симметричное равновесие плазмы с учётом вращения.....	5
2.3 Аксиально-симметричное равновесие плазмы с анизотропным давлением	8
3. Влияние тороидального вращения на равновесие плазмы для базовых сценариев ИТЭР	11
4. Расчет аксиально-симметричных равновесий плазмы с анизотропным давлением в режимах с большой долей энергичных частиц	14
5. Заключение	18
Литература	18