



Круковский А.Ю., Новиков В.Г.,
Цыгвинцев И.П.

Программа 3DLINE:
численное моделирование
трёхмерных нестационарных
задач радиационной газовой
динамики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Круковский А.Ю., Новиков В.Г., Цыгвинцев И.П. Программа 3DLINE: численное моделирование трёхмерных нестационарных задач радиационной газовой динамики // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 20. 24 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-20>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А.Ю.Круковский, В.Г.Новиков, И.П.Цыгвинцев

Программа 3DLINE:
численное моделирование
трёхмерных нестационарных задач
радиационной газовой динамики

Москва — 2013

Круковский А.Ю., Новиков В.Г., Цыгвинцев И.П.

Программа 3DLINE: численное моделирование трёхмерных нестационарных задач радиационной газовой динамики

В работе описана математическая модель динамики плазмы на основе полностью консервативной разностной схемы для трёхмерных уравнений радиационной газовой динамики. Модель реализована в программе 3DLINE, с использованием которой проведены расчёты физических процессов при воздействии лазерных импульсов на различные мишени с целью получения источника излучения с заданными свойствами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №12-01-00744.

Krukovskiy A.Yu., Novikov V.G., Tsygvintsev I.P.

3DLINE code: numerical simulation of three-dimensional non-stationary radiation gas dynamics problems

This paper describes mathematical model of plasma dynamics based on completely conservative difference scheme for three-dimensional equations of radiation gas dynamics. It is realized in 3DLINE code, which has been used for modeling of the laser explosion of various targets to produce the source of radiation with specified properties.

The study was supported by RFBR under Grant No. 12-01-00744.

Оглавление

Введение	3
Уравнения движения и энергии	3
Система разностных уравнений.....	5
Алгоритм численного решения.....	9
Перенос излучения	13
Уравнения состояния и коэффициенты переноса.....	14
Моделирование источников EUV излучения	16
Список литературы	23

Введение

Для изучения течений излучающей газоплазменной среды переменного ионизационного состава с частичным выходом излучения создан трёхмерный комплекс программ 3DLINE. Дискретная модель основана на двухслойной неявной полностью консервативной разностной схеме [1], записанной в смешанных эйлерово-лагранжевых (СЭЛ) переменных. Построенный в данной работе алгоритм решения разностных уравнений является двухэтапным, его версия для расчётов физических задач в двумерной постановке подробно описана в [2] – [4].

Сначала решается система нелинейных уравнений в переменных Лагранжа, затем лагранжева сетка корректируется и, наконец, выполняется пересчёт рассчитанных величин на новую разностную сетку.

Для построения алгоритма решения разностных уравнений в переменных Лагранжа используется итерационный метод с выделением групп уравнений по характеру физических процессов.

При пересчёте рассчитанных величин на новую разностную сетку сохраняется полная консервативность, т.е. на каждом временном шаге сохраняются масса, импульс, кинетическая, внутренняя и полная энергии [5].

Расчёт проводится в предположении квазистационарной ионизации. При этом ионизационное равновесие рассчитывается путём интерполяции между таблицами, рассчитанными в предположении полного выхода излучения и частично запертого излучения. Параметр интерполяции ξ находится из отношения поля излучения, полученного в результате решения уравнения переноса, к равновесному планковскому полю излучения в спектральном диапазоне, определяющем динамику плазмы.

На основе данной методики с помощью программы 3DLINE проведен ряд расчётов, моделирующих процесс взаимодействия лазерного излучения интенсивности $10^{10} - 10^{13}$ Вт/см² с веществом мишени.

В качестве вещества мишени взято олово, которое является высокоэффективным источником излучения на длине волны 13.5 нм, необходимого для нужд литографической промышленности [6].

Уравнения движения и энергии

Состояние вещества зависит от времени t и пространственных координат x, y, z . Вещество предполагается вязким. Расчетная область $D \in R^3(x, y, z)$ представляет собой в общем случае трехмерное пространство, ограниченное некой поверхностью.

Движение вещества описывается уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x}, \\
\rho \frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial y}, \\
\rho \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Лагранжева форма записи динамических уравнений получается непосредственной заменой производных по пространству на производные в плоскости лагранжевых переменных $R^3(\alpha, \beta, \gamma)$. Будем предполагать, что в любой момент времени определено отображение:

$$\begin{aligned}
x &= x(\alpha, \beta, \gamma), \quad y = y(\alpha, \beta, \gamma), \quad z = z(\alpha, \beta, \gamma), \\
(\alpha, \beta, \gamma) &\in G, \quad (x, y, z) \in D,
\end{aligned}$$

где G — единичный куб, D — криволинейная кусочно-гладкая поверхность, и якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым строго положителен:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} > 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in G.$$

Изменение координат частиц определяется соотношениями

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dy}{dt} = w; \quad \frac{dz}{dt} = v. \tag{2}$$

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial w}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Для решения динамических уравнений необходимо задать граничные и начальные условия. Граничными условиями могут быть, например, фиксированные значения скорости или давления. В начальный момент времени должны быть заданы распределения плотности и скорости.

Гидродинамическое давление, входящее в (1), равно сумме парциальных давлений

$$P = P_e + P_i,$$

где P_e и P_i — давления электронов и ионов соответственно.

Распределение по пространству и изменение со временем температур электронов T_e и ионов T_i описываются уравнениями для удельных внутренних энергий компонент:

$$\begin{aligned}\rho \frac{d\varepsilon_e}{dt} &= -\rho P_e \frac{\partial(1/\rho)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{W}_e + Q_{ei} + G_e, \\ \rho \frac{d\varepsilon_i}{dt} &= -\rho P_i \frac{\partial(1/\rho)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{W}_i - Q_{ei} + G_i.\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь G_e , G_i — источники (стоки) электронной и ионной энергии соответственно, ε_e , ε_i — внутренние энергии электронной и ионной компоненты, отнесенные к единице массы, Q_{ei} — член, определяющий теплообмен между электронами и ионами, $\mathbf{W}_{e,i} = -\chi_{e,i} \nabla T_{e,i}$ — электронный и ионный потоки тепла, χ_e , χ_i — теплопроводности электронов и ионов.

Для решения уравнений энергии на границе задаются фиксированные температуры или потоки тепла. Начальным условием является заданное распределение электронных и ионных температур.

Система разностных уравнений

Произведем дискретизацию переменных следующим образом. В кубе $G(\alpha, \beta, \gamma)$ вводится равномерная сетка:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= ih_\alpha, \quad i = \overline{1, NM}, \quad h_\alpha = 1/(NM - 1), \\ \beta_j &= jh_\beta, \quad j = \overline{1, NL}, \quad h_\beta = 1/(NL - 1), \\ \gamma_k &= kh_\gamma, \quad k = \overline{1, NN}, \quad h_\gamma = 1/(NN - 1).\end{aligned}$$

Обозначим через ω множество ячеек сетки, а через Ω — множество узлов. Соответственно введем пространства сеточных функций, определенных в ячейках H_ω и в узлах H_Ω . Для записи сеточных функций $f \in H_\Omega$ используем индексы $(i, j, k): f_{ijk} = f \in H_\Omega$. Функции $\varphi \in H_\omega$ будем отмечать индексами $(m, l, n): \varphi_{mln} = \varphi \in H_\omega$.

Сетка в области D получается отображением:

$$\begin{aligned}x_{ijk} &= x(\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk}), \\ y_{ijk} &= y(\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk}), \\ z_{ijk} &= z(\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk}),\end{aligned}$$

и состоит из шестигранников. Ячейка ω_{mln} своими вершинами имеет

$$(x, y, z)_{i,j,k}, (x, y, z)_{i+1,j,k}, (x, y, z)_{i,j+1,k}, (x, y, z)_{i+1,j+1,k}, \\ (x, y, z)_{i,j,k+1}, (x, y, z)_{i+1,j,k+1}, (x, y, z)_{i,j+1,k+1}, (x, y, z)_{i+1,j+1,k+1}.$$

Введём разностные шаблоны $III_1 - III_4$, определив их следующим образом:

III_1 — шаблон, определённый для ячейки. Состоит из восьми узлов, являющихся её вершинами;

III_2 — шаблон, определённый для узла. Состоит из восьми ячеек, имеющих его своей вершиной;

III_3 — шаблон, определённый для ячейки. Состоит из шести граней, прилегающих к ней;

III_4 — шаблон, определённый для грани. Состоит из двух ячеек, прилегающих к ней.

Кроме того, будем использовать безындексные представления сеточных функций, описанные в работе [1]. Так, f — значение сеточной величины на n -ом временном слое, $\hat{f}$ — значение сеточной величины на $(n+1)$ -ом временном

слое, $f_t = \frac{\hat{f} - f}{\Delta t_n}$, где Δt_n — шаг интегрирования по времени при переходе от временного слоя n к слою $(n+1)$, $f^{(\sigma)} = \sigma \hat{f} + (1 - \sigma)f$ ($0 \leq \sigma \leq 1$).

Разностная аппроксимация дифференциальных операторов (градиент и дивергенция) берётся согласно [7].

В этих обозначениях полностью консервативная неявная разностная схема, аппроксимирующая уравнения (1) – (4), записывается в виде

$$x_t = u^{(0.5)}; \quad y_t = w^{(0.5)}; \quad z_t = v^{(0.5)}, \quad (6)$$

$$\Delta m = \rho V = \hat{\rho} \hat{V}, \quad (7)$$

$$P = P_e + P_i + q, \quad (8)$$

$$M_* u_t = \sum_{r \in III_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_r}{\partial x} \right) \hat{P}_r, \quad M_* w_t = \sum_{r \in III_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_r}{\partial y} \right) \hat{P}_r, \quad M_* v_t = \sum_{r \in III_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_r}{\partial z} \right) \hat{P}_r, \quad (9)$$

$$M_* = \frac{1}{8} \sum_{r \in III_2} \Delta m_r,$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_e)_t &= -\hat{P}_e \left(\frac{1}{\rho} \right)_t + \hat{Q}_{ei} + \hat{G}_e + \frac{1}{\Delta m} \sum_{g \in \text{III}_3} \sum_{\alpha=x,y,z} (\hat{\mathbf{W}}_e)_{\alpha g} \hat{S}_{ag}, \\
(\varepsilon_i)_t &= -(\hat{P}_i + \hat{q}) \left(\frac{1}{\rho} \right)_t - \hat{Q}_{ei} + \hat{G}_i + \frac{1}{\Delta m} \sum_{g \in \text{III}_3} \sum_{\alpha=x,y,z} (\hat{\mathbf{W}}_i)_{\alpha g} \hat{S}_{ag}.
\end{aligned} \tag{10}$$

$\mathbf{S}_g = (S_{xg}, S_{yg}, S_{zg})$ — площади граней $g = \overline{1,6}$, прилегающих к ячейке (m, l, n) , V — объем ячейки.

Давление искусственной вязкости q вводится в разностную схему для обеспечения сквозного счета течений с возможными разрывами. Оно берется в виде комбинации линейной и квадратичной вязкости и отлично от нуля только в области волн сжатия [3].

Сеточные функции x, y, z, u, w, v определены в узлах разностной сетки, сеточные функции $\rho, p_e, p_i, q, V, T_e, T_i, G_e, Q_{ei}, \chi_e, \chi_i$ определены в ячейках (q — сумма давлений искусственной и физической вязкости), а сеточные функции $\mathbf{W}_e, \mathbf{W}_i, \mathbf{S}$ — на гранях ячеек.

Для определения потока тепла через грань ячейки, необходимо найти значение коэффициентов теплопроводности на этой грани. В соответствии с [1], это значение берётся как среднее арифметическое значений коэффициентов теплопроводности в прилегающих ячейках:

$$(\chi_{e,i})_g = \frac{1}{2} \sum_{r \in \text{III}_4} (\chi_{e,i})_r.$$

Граничные значения давления и температуры будем считать отнесенными к граням соответствующих граничных ячеек.

Под f_* понимается значение (проекция) сеточной функции f : если функция определена в узле, то её проекция f_* определена в ячейке; если же функция f определена в ячейке, то её проекция f_* определена в узле. При проецировании из одного пространства в другое используются интерполяции, аналогичные [3].

На границах могут быть заданы следующие условия: для уравнений движения задается давление или условие непротекания («жесткая стенка»), или распределение скоростей.

Для уравнений энергии на границах задается распределение температуры или потоков тепла.

Разностная схема (6) – (10) полностью консервативна, т.е., из разностных уравнений движения и энергии вытекает закон сохранения полной энергии системы. Действительно, введем сеточный функционал полной энергии следующим образом:

$$E_{tot} = \sum_{mln} \Delta m_{mln} \left((\varepsilon_e)_{mln} + (\varepsilon_i)_{mln} + \frac{u_{mln}^2 + w_{mln}^2 + v_{mln}^2}{2} \right), \quad (11)$$

где под квадратом скорости в ячейке подразумевается среднее значение квадрата скорости в узлах, принадлежащих данной ячейке:

$$u_{mln}^2 = \frac{1}{8} \sum_{r \in III_1} u_r^2, \quad w_{mln}^2 = \frac{1}{8} \sum_{r \in III_1} w_r^2, \quad v_{mln}^2 = \frac{1}{8} \sum_{r \in III_1} v_r^2.$$

На границе расчётной области вводятся фиктивные ячейки, в которых, в общем случае, может также находиться масса. Обозначим: $i, j, k \in G$ — граничные узлы, r' — приграничные, r'' — дополнительные (фиктивные) ячейки расчетной области, $r \in \bar{G}$ — грани, замыкающие граничную область. Под суммированием по индексу r будем подразумевать суммирование и по фиктивным и по приграничным ячейкам:

$$\begin{aligned} \sum_{r \in III_2} &= \sum_{r' \in III_2} + \sum_{r'' \in III_2}, \\ \sum_{r \in III_4} &= \sum_{r' \in III_4} + \sum_{r'' \in III_4}. \end{aligned}$$

Введём обозначения для относительных масс, приписанных фиктивным и приграничным ячейкам:

$$\begin{aligned} \mu'_{ijk} &= \frac{\sum_{r' \in III_2} \Delta m_{r'}}{\sum_{r \in III_2} \Delta m_r}, \quad \mu''_{ijk} = \frac{\sum_{r'' \in III_2} \Delta m_{r''}}{\sum_{r \in III_2} \Delta m_r} = 1 - \mu'_{ijk}, \\ \eta'_r &= \frac{\sum_{r' \in III_4} m_{r'}}{\sum_{r \in III_4} m_r}, \quad \eta''_r = \frac{\sum_{r'' \in III_4} m_{r''}}{\sum_{r \in III_4} m_r} = 1 - \eta'_r. \end{aligned}$$

Здесь μ'_{ijk}, μ''_{ijk} определены в граничном узле (i, j, k) , η'_r, η''_r — на принадлежащей границе области грани $r \in \bar{G}$.

В этих обозначениях изменение функционала (11) на одном шаге временного интегрирования в соответствии с (6) — (10) оказывается следующим:

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{tot} - E_{tot} = & -\Delta t \sum_{mln} \left((\hat{G}_e)_{mln} + (\hat{G}_i)_{mln} \right) \hat{V}_{mln} + \\
& + \Delta t \sum_{ijk \in G} \left[\begin{aligned} & -u_{ijk}^{(0.5)} \left(\sum_{r' \in III_2} \mu_{ijk}'' - \sum_{r'' \in III_2} \mu_{ijk}' \right) \left(\frac{\partial \hat{V}_r}{\partial x_{ijk}} \right) \hat{P}_r \\ & -w_{ijk}^{(0.5)} \left(\sum_{r' \in III_2} \mu_{ijk}'' - \sum_{r'' \in III_2} \mu_{ijk}' \right) \left(\frac{\partial \hat{V}_r}{\partial y_{ijk}} \right) \hat{P}_r \\ & -v_{ijk}^{(0.5)} \left(\sum_{r' \in III_2} \mu_{ijk}'' - \sum_{r'' \in III_2} \mu_{ijk}' \right) \left(\frac{\partial \hat{V}_r}{\partial z_{ijk}} \right) \hat{P}_r \end{aligned} \right] \\
& - \Delta t \sum_{r \in \bar{G}} \sum_{\alpha=x,y,z} \left[\begin{aligned} & \sum_{r' \in III_3} \eta_{r'}'' \hat{S}_{\alpha r'} \left((\hat{\mathbf{W}}_e)_{\alpha r'} + (\hat{\mathbf{W}}_i)_{\alpha r'} \right) - \\ & - \sum_{r'' \in III_3} \eta_{r''}' \hat{S}_{\alpha r''} \left((\hat{\mathbf{W}}_e)_{\alpha r''} + (\hat{\mathbf{W}}_i)_{\alpha r''} \right) \end{aligned} \right].
\end{aligned} \tag{12}$$

Как видно из (12), изменение полной энергии в системе, описываемой разностными уравнениями (6) – (10), определяется:

- вносом (выносом) энергии источниками (стоками);
- работой внешних сил давления;
- притоком (оттоком) тепла через границу области.

Если фиктивным ячейкам приписана нулевая масса, выражение (12) принимает более простой вид

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{tot} - E_{tot} = & -\Delta t \sum_{mln} \left((\hat{G}_e)_{mln} + (\hat{G}_i)_{mln} \right) \hat{V}_{mln} + \Delta t \sum_{r' \in \bar{G}} \sum_{\alpha=x,y,z} \left((\hat{\mathbf{W}}_e)_{\alpha r'} + (\hat{\mathbf{W}}_i)_{\alpha r'} \right) \hat{S}_{\alpha r'} + \\
& + \Delta t \sum_{ijk \in G} \left[\begin{aligned} & u_{ijk}^{(0.5)} \sum_{r' \in III_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_{r'}}{\partial x_{ijk}} \right) \hat{P}_{r'} + w_{ijk}^{(0.5)} \sum_{r' \in III_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_{r'}}{\partial y_{ijk}} \right) \hat{P}_{r'} + v_{ijk}^{(0.5)} \sum_{r' \in III_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_{r'}}{\partial z_{ijk}} \right) \hat{P}_{r'} \end{aligned} \right].
\end{aligned}$$

Алгоритм численного решения

Разностные уравнения (6) – (10) представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений, для решения которых используется итерационный метод с раздельным расчетом двух групп уравнений: уравнений динамики и уравнений энергии. При этом уравнение состояния является уравнением-связкой между уравнениями «первой группы» и «второй группы».

Структура алгоритма состоит в следующем.

1. Считая известными значения физических величин на n -м временном слое, задаём приближенные значения скорости, плотности, температуры на

$(n+1)$ -м временном слое. В качестве начального приближения берутся значения с n -ого временного слоя.

2. При фиксированном значении температуры решаются уравнения движения и находятся приближенные значения скорости и плотности.

3. При полученных фиксированных значениях скорости и плотности решается система уравнений энергии и находятся приближенные значения электронной и ионной температур на $(n+1)$ -ом слое.

4. Проверяется выполнение закона сохранения энергии (12). Если он выполнен с требуемой точностью, то значения функций на момент времени t^{n+1} для лагранжевого этапа считаются найденными. В противном случае необходимо вернуться к выполнению пункта 2 и снова повторить описанный выше процесс, используя в качестве начальных полученные значения переменных.

5. Производится (если нужно) коррекция лагранжевой сетки, и выполняется пересчет всех величин на новую разностную сетку. (Алгоритм пересчета подробно описан в [5].)

Разностные уравнения движения (6) – (9) решаются методом Ньютона с редукцией неизвестных величин [4]. Вначале, при переходе от итерации « s » к итерации « $s+1$ », мы полагаем, что все переменные, входящие в уравнения, зависят только от компонент скорости $u_{ijk}, w_{ijk}, v_{ijk}$ («основных» переменных в уравнениях первой группы). Предполагается также, что давление вещества в ячейках изменяется локально-баротропно, т.е. температура фиксирована. Отмечая верхним индексом номер итерации, запишем для каждой функции в уравнениях движения формулу перехода от s -ой итерации к $(s+1)$ -ой:

$$u_{ijk}^{s+1} = u_{ijk}^s + \delta u_{ijk},$$

$$w_{ijk}^{s+1} = w_{ijk}^s + \delta w_{ijk},$$

$$v_{ijk}^{s+1} = v_{ijk}^s + \delta v_{ijk},$$

$$x_{ijk}^{s+1} = x_{ijk}^s + \delta x_{ijk} = x_{ijk}^s + \frac{\partial x_{ijk}}{\partial u_{ijk}} \delta u_{ijk},$$

$$y_{ijk}^{s+1} = y_{ijk}^s + \delta y_{ijk} = y_{ijk}^s + \frac{\partial y_{ijk}}{\partial w_{ijk}} \delta w_{ijk},$$

$$z_{ijk}^{s+1} = z_{ijk}^s + \delta z_{ijk} = z_{ijk}^s + \frac{\partial z_{ijk}}{\partial v_{ijk}} \delta v_{ijk},$$

$$\Phi_{mln}^{s+1} = \Phi_{mln}^s + \delta \Phi_{mln} = \Phi_{mln}^s + \sum_{r \in III_1} \left(\frac{\partial \Phi_{mln}}{\partial u_r} \delta u_r + \frac{\partial \Phi_{mln}}{\partial w_r} \delta w_r + \frac{\partial \Phi_{mln}}{\partial v_r} \delta v_r \right),$$

где Φ_{mln} — функции в ячейке (т.е., P_{mln} или q_{mln}).

Подставляя значения функций на $(s+1)$ -ой итерации в уравнения движения системы (6) – (10) и пренебрегая квадратами приращений функций, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно приращений компонент скорости $\delta u_{ijk}, \delta w_{ijk}, \delta v_{ijk}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k_1, k_2, k_3=-1}^1 \left(a_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta u_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + b_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta w_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + c_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta v_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} \right) &= F_{ijk}^{(1)}, \\ \sum_{k_1, k_2, k_3=-1}^1 \left(a_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta u_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + b_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta w_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + c_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta v_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} \right) &= F_{ijk}^{(2)}, \\ \sum_{k_1, k_2, k_3=-1}^1 \left(a_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta u_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + b_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta w_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + c_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta v_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} \right) &= F_{ijk}^{(3)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $a_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}, b_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}, c_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}, F_{ijk}^{(1,2,3)}$ — коэффициенты, определяемые физическими величинами и геометрией сетки. Система уравнений (13) имеет матрицу блочной структуры. Для её решения используются итерационные методы [8].

После нахождения приращения скорости на $(s+1)$ -ой итерации определяются величины $u_{ijk}, w_{ijk}, v_{ijk}, x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}, V_{mln}, \rho_{mln}, P_{mln}, q_{mln}$.

Система уравнений движения считается решенной, если приращения скоростей на итерации удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} |\delta u_{ijk}| &\leq \varepsilon_u |u_{ijk}| + u_{min}, \\ |\delta w_{ijk}| &\leq \varepsilon_w |w_{ijk}| + w_{min}, \\ |\delta v_{ijk}| &\leq \varepsilon_v |v_{ijk}| + v_{min}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_u, \varepsilon_w$ и ε_v — относительные, а u_{min}, w_{min} и v_{min} — абсолютные погрешности скорости. В расчётах полагалось $\varepsilon_u = \varepsilon_w = \varepsilon_v = 10^{-4}$ и $u_{min} = w_{min} = v_{min} = 10^{-5}$ см/мкс.

При решении уравнений энергии (10) полагаем, что все функции, входящие в эти уравнения, зависят только от температур электронной и ионной компонент. Запишем для функций в уравнениях энергии формулу перехода от s -ой итерации к $(s+1)$ -ой итерации:

$$\begin{aligned} (T_{e,i})_{mln}^{s+1} &= (T_{e,i})_{mln}^s + \delta(T_{e,i})_{mln}, \\ (P_{e,i})_{mln}^{s+1} &= (P_{e,i})_{mln}^s + \delta(P_{e,i})_{mln} = (P_{e,i})_{mln}^s + \left(\frac{\partial P_{e,i}}{\partial T_{e,i}} \right)_{mln} \delta(T_{e,i})_{mln}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Q_{ei})_{mln}^{s+1} &= (Q_{ei})_{mln}^s + \left(\frac{\partial Q_{ei}}{\partial T_e} \right)_{mln} \delta(T_e)_{mln} + \left(\frac{\partial Q_{ei}}{\partial T_i} \right)_{mln} \delta(T_i)_{mln}, \\
(\chi_{e,i})_g^{s+1} &= (\chi_{e,i})_g^s + \sum_{q \in III_4} \frac{(\partial \chi_{e,i})_g}{(\partial T_{e,i})_q} \delta(T_{e,i})_q.
\end{aligned}$$

Здесь под $(\chi_{e,i})_g$ понимается проекция коэффициента электронной или ионной теплопроводности, определённого в ячейках, на грань g . Подставляя значения функций на $(s+1)$ -ой итерации в уравнения энергии и пренебрегая квадратами приращений функций, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно приращений температур $\delta(T_e)_{mln}$, $\delta(T_i)_{mln}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k_1, k_2, k_3 = -1}^1 \left(\bar{a}_{mln}^{(k_1 k_2 k_3)} (\delta T_e)_{m+k_1, l+k_2, n+k_3} \right) + \bar{b}_{mln}^{(0,0,0)} (\delta T_i)_{mln} &= \bar{F}_{mln}^{(1)}, \\
\bar{c}_{mln}^{(0,0,0)} (\delta T_e)_{mln} + \sum_{k_1, k_2, k_3 = -1}^1 \left(\bar{d}_{mln}^{(k_1 k_2 k_3)} (\delta T_i)_{m+k_1, l+k_2, n+k_3} \right) &= \bar{F}_{mln}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $\bar{a}_{mln}^{(k_1 k_2 k_3)}$, $\bar{d}_{mln}^{(k_1 k_2 k_3)}$ — коэффициенты, возникающие вследствие теплообмена между ячейками, $\bar{b}_{mln}^{(0,0,0)}$, $\bar{c}_{mln}^{(0,0,0)}$ — коэффициенты, возникающие вследствие теплообмена между электронами и ионами в пределах одной ячейки, $\bar{F}_{mln}^{(1)}$, $\bar{F}_{mln}^{(2)}$ — правая часть. В отличие от системы (13), в системе (14) используется неполный шаблон, и ненулевыми являются только коэффициенты с индексами $(k_1 k_2 k_3) = (0, 0, \pm 1), (0, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, 0), (0, 0, 0)$.

Аналогичные уравнения на границе получаются в соответствии с типом граничных условий. Например, при заданной температуре все приращения температур на границе тождественно равны нулю.

Система разностных уравнений (14) решается аналогично системе (13).

Уравнения энергии считаются решенными, если приращения температур на итерации удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
|\delta(T_e)_{mln}| &\leq \varepsilon_e (T_e)_{mln} + T_e^{min}, \\
|\delta(T_i)_{mln}| &\leq \varepsilon_i (T_i)_{mln} + T_i^{min},
\end{aligned}$$

где ε_e и ε_i — относительные, а T_e^{min} и T_i^{min} — абсолютные погрешности температур. В расчётах полагалось $\varepsilon_e = \varepsilon_i = 10^{-4}$ и $T_e^{min} = T_i^{min} = 10^{-5}$ кэВ.

Перенос излучения

Величина G_e , входящая в уравнение энергии (10), определяется в рассматриваемой постановке задачи двумя процессами: переносом излучения в плазме и поглощением лазерного излучения.

$$G_e = G_e^{rad} + G_e^{las}.$$

Для описания процессов излучения и перепоглощения используется уравнение переноса в многогрупповом диффузионном приближении.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_g}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{W}_g + \kappa_g c U_g &= 4\pi j_g, \\ \mathbf{W}_g &= -\frac{c}{3\kappa_g} \nabla U_g. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь индекс g определяет спектральную группу, U — поле излучения, W — поток энергии, j — излучательная способность, κ — коэффициент поглощения, усреднённый по соответствующей группе, c — скорость света в вакууме. На границе ставятся граничные условия Маршака:

$$\mathbf{W}_g = \vec{n} \frac{c}{2} U_g \quad (16)$$

($\vec{n}$ — вектор внешней нормали к границе).

Разностная аппроксимация уравнения (15) для каждой спектральной группы имеет вид

$$\sum_{k_1, k_2, k_3=-1}^1 \left(\bar{\bar{\bar{a}}}_{mln}^{(k_1 k_2 k_3)} U_{m+k_1, l+k_2, n+k_3} \right) = \bar{\bar{\bar{F}}}_{mln}. \quad (17)$$

Подобно системе (14), в системе (17) используется семиточечный шаблон «крест», и ненулевыми являются только коэффициенты $\bar{\bar{\bar{a}}}_{mln}^{(\pm 1, 0, 0)}$, $\bar{\bar{\bar{a}}}_{mln}^{(0, \pm 1, 0)}$, $\bar{\bar{\bar{a}}}_{mln}^{(0, 0, \pm 1)}$ и $\bar{\bar{\bar{a}}}_{mln}^{(0, 0, 0)}$. Система (17) решается аналогично системам (13) и (14).

При малых значениях коэффициента поглощения κ матрица коэффициентов $\bar{\bar{\bar{a}}}$ оказывается плохо обусловленной, что накладывает ограничения на временной шаг. С другой стороны, если коэффициент поглощения достаточно мал, то процессами поглощения можно пренебречь и решение уравнения переноса не требуется. Ввиду этих обстоятельств производится «обрезание» области, в которой решается уравнение (17). Граница, на которой ставится условие (16), определяется так, чтобы за её пределами выполнялся критерий $L\kappa_g \ll 1$ (L — характерный размер расчётной

области, κ_g — характерный коэффициент поглощения в группе g). Тогда внутри границы решается уравнение (17), а вне её полагается $\kappa_g c U_g = 0$.

Вклад излучения в изменение энергии электронов определяется по формуле:

$$G_e^{rad} = - \sum_g (4\pi j_g - \kappa_g c U_g).$$

Этот вклад в отдельных ячейках может быть как отрицательным (в области, где вещество высвечивает больше энергии, чем поглощает), так и положительным, но в целом вещество всегда теряет энергию на излучение.

Для моделирования процесса поглощения лазерной энергии в данной работе используется простейший подход, основанный на приближении геометрической оптики в пренебрежении эффектами рефракции:

$$G_e^{las} = \frac{\partial P_{las}(t, x, y, z)}{\partial z} = P_{las}(t, x, y, z) \cdot \kappa(t, x, y, z),$$

$$P_{las}(t, x, y, z) = P_0(t, x, y) \cdot \exp \left(- \int_z^{z_{max}} \kappa(t, x, y, z) dz \right), \quad (18)$$

где κ — коэффициент поглощения лазерного излучения, $P_0(t, x, y)$ — заданное распределение лазерной мощности на верхней границе области D (лазерное излучение распространяется вдоль оси z). Формула (18) используется в области, где применимо приближение геометрической оптики. Когда расчёт подходит к ячейке, в которой плотность электронов превышает критическое значение, то в этой ячейке полагается $(G_e^{las})_{mln} = \alpha (P_{las})_{m,l,n+1} \cdot S_{mln}^{up} / V_{mln}$, где S_{mln}^{up} — площадь верхней грани ячейки (m, l, n) , а коэффициент поглощения α зависит от угла падения и определяется с помощью эмпирических соотношений.

Такой алгоритм позволяет учесть неполное поглощение лазерной энергии на начальном этапе испарения, но из-за пренебрежения рефракцией и отражением количество поглощённой энергии оказывается несколько завышенным.

Более точная методика учёта, включающая эффекты отражения, рефракции и резонансного поглощения, предлагается в работе [9].

Уравнения состояния и коэффициенты переноса

Для обеспечения полноты системы уравнений (1) – (4) к ней необходимо добавить уравнения, связывающие термодинамические характеристики вещества. В описываемой методике независимыми переменными полагаются температуры электронов и ионов T_e, T_i и плотность вещества ρ . Добавочными

уравнениями являются уравнения состояния для электронной и ионной компоненты. Для ионов используется приближение идеального газа:

$$\varepsilon_i = \frac{3}{2} \frac{kT_i}{M},$$

$$P_i = \frac{kT_i \rho}{M},$$

где M — масса одного иона вещества, k — постоянная Больцмана. Теплопроводность ионов χ_i и обменный член Q_{ei} в уравнении (4) вычисляются по формулам из работы [10]. Средний заряд иона $Z_0(\rho, T_e)$, входящий в выражения для ионной теплопроводности и обменного члена, электронная теплопроводность $\chi_e(\rho, T_e)$ и электронное уравнение состояния

$$\varepsilon_e = \varepsilon_e(\rho, T_e),$$

$$P_e = P_e(\rho, T_e),$$

при температурах $T_e \geq 1$ эВ берутся из таблиц, рассчитанных по модели Хартри-Фока-Слэтера, подробно описанной в монографии [11]. При температурах $T_e < 1$ эВ используются полуэмпирические зависимости [12], обеспечивающие гладкую монотонную сшивку табличных значений, соответствующих $T_e = 1$ эВ, с уравнениями состояния твёрдого тела при температуре меньшей температуры сублимации.

Спектральные коэффициенты поглощения κ_g и излучательная способность j_g при температурах $T_e \geq 1$ эВ также берутся из таблиц, рассчитанных по методике [11]. При температурах $T_e < 1$ эВ коэффициенты поглощения берутся соответствующими табличным значениям при $T_e = 1$ эВ. Излучательная способность полагается равной нулю при $T_e \leq 0.1$ эВ и монотонно меняющейся от нуля до табличного значения в области 0.1 эВ $< T_e < 1$ эВ.

Для учёта влияния выхода излучения на ионизационное равновесие используется следующий подход. Рассчитываются две таблицы: одна в предположении запертого излучения, а вторая в предположении свободного выхода излучения. Далее, для всех табличных характеристик, кроме излучательной способности, проводится следующая интерполяция [13]

$$f = \frac{f^{(1)} f^{(0)}}{(1 - \xi) f^{(1)} + \xi f^{(0)}},$$

где под $f^{(1)}$ понимается значение величины f , полученное в приближении запертого излучения, а под $f^{(0)}$ — в предположении свободного выхода

излучения. Коэффициент интерполяции ξ определяется после решения уравнения переноса отдельно для каждой ячейки по формуле:

$$\xi = \frac{\sum_g c U_g}{\sum_g 4\pi \frac{j_g^{(1)}}{\kappa_g^{(1)}}}.$$

Таким образом, если практически всё излучение остаётся в плазме и поле излучения близко к планковскому, то $\xi \approx 1$ и $f \approx f^{(1)}$. Если же перепоглощается пренебрежимо малая доля излучения, $\xi \approx 0$ и $f \approx f^{(0)}$.

Для излучательной способности используется иная интерполяция:

$$j = \frac{(1-\xi)j^{(0)}Z_0^{(1)} + \xi j^{(1)}Z_0^{(0)}}{(1-\xi)Z_0^{(1)} + \xi Z_0^{(0)}}.$$

Моделирование источников EUV излучения

На основе приведенной выше методики был создан комплекс программ 3DLINe, позволяющий проводить численное моделирование физических процессов в широком диапазоне параметров, в частности, для задач с сильно неоднородным пространственным распределением вещества.

С использованием комплекса был проведен ряд расчётов, моделирующих воздействие лазерного импульса на следующие мишени:

- бесконечная плоскость;
- провод (цилиндр диаметра 100 мкм, лазерный импульс направлен перпендикулярно проводу и сфокусирован на ось симметрии);
- два параллельных провода (цилиндры диаметра 100 мкм, зазор между ними 20 мкм, лазерный импульс направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат их оси симметрии, и сфокусирован между проводами).

Веществом мишени во всех трёх случаях является олово при температуре 0.1 эВ (1160 К) и плотности 7 г/см³. За пределами мишени полагался «вакуум» той же температуры с плотностью 2·10⁻⁶ г/см³. Параметры лазера использовались следующие:

- длина волны $\lambda = 1.064$ мкм,
- полная энергия в импульсе $E = 100$ мДж,
- гауссов профиль по пространству и времени,
- ширина на полувысоте по времени $\tau = 1.5$ нс,
- момент максимума импульса $t_0 = 2$ нс,
- диаметр лазерного пятна (падение на границе в e^2 раз) $d = 200$ мкм.

Во всех расчётах использовалось 20 групп по энергии фотонов.

Размерность расчётной сетки составила $50 \times 50 \times 50$ для неосесимметричных задач и $40 \times 40 \times 40$ для осесимметричной (падение на плоскость).

В осесимметричном случае проведено сравнение с двумерными кодами [2] – [4] и [14]. Для расчёта по коду [2] – [4], представляющему собой двумерную версию кода 3DLINE, использовалась разностная сетка размерностью 20×40 , построенная аналогично сетке, использовавшейся в трёхмерном расчёте. На рис. 1 – 3 продемонстрированы некоторые результаты осесимметричного расчёта для двумерной и трёхмерной версий 3DLINE. Так, на рис. 1 показан график зависимости мощности излучения от времени для двумерного (красная кривая) и трёхмерного (зелёная кривая) расчётов. Видно, что результаты расчётов хорошо согласуются. Также на рис. 1 представлен график мощности лазера (синяя кривая). Из рис. 1 видно, что задержка излучения составляет ~ 0.5 нс: максимум интенсивности лазера приходится на время 2 нс, а максимум мощности излучения плазмы на время 2.5 нс.

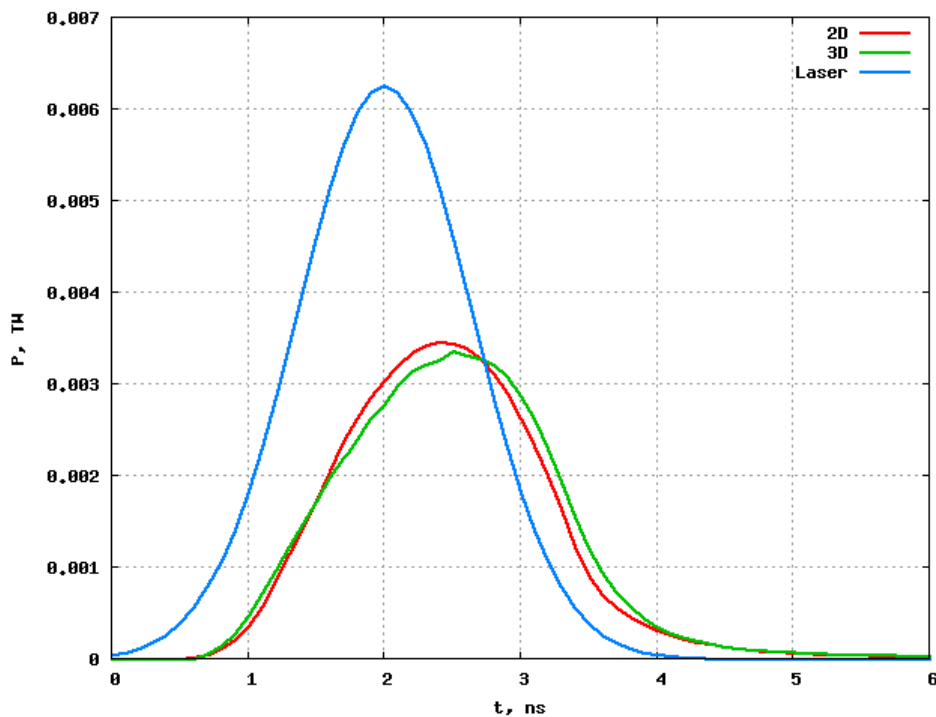


Рис. 1. Мощность лазера и излучения плазмы в зависимости от времени

Распределение электронной температуры и плотности вещества на момент максимума лазерного импульса для двумерного расчёта представлено на рис. 2, а для трёхмерного — на рис. 3. В основной части расчётной области отличие составляет менее 5%. Отличие в последних двух ячейках объясняется различиями в геометрии расчётной области: для 2D-кода расчётной областью был цилиндр, для 3D-кода — куб. На рис. 4 продемонстрированы изолинии температуры в срезе поверхностью постоянной плотности для трёхмерного расчёта. Из рис. 3 и 4 видно, что трёхмерный код с приемлемой точностью держит симметрию в области, где влияние неосесимметричной границы мало.

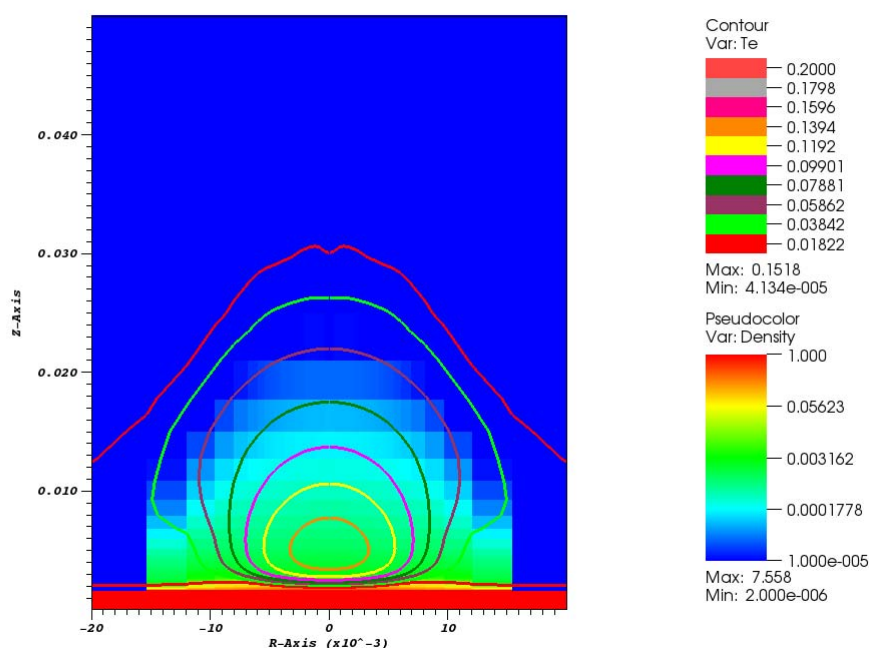


Рис.2. Распределение электронной температуры (изображена контурами) и плотности (изображена цветом) на момент максимума лазерного импульса (2 нс) в двумерном расчёте. Правая сторона рисунка получена симметричным отображением левой

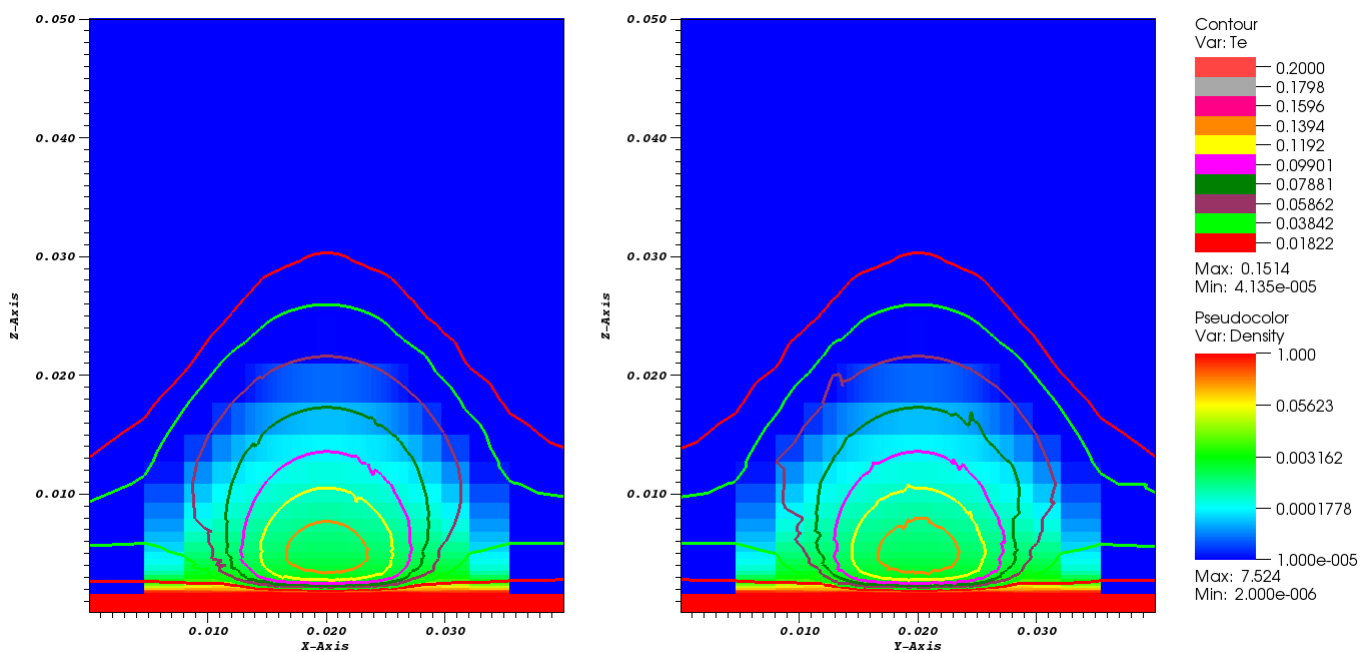


Рис.3. Распределение температуры и плотности на момент максимума лазерного импульса (2 нс) в трёхмерном расчёте плоской мишени. Представлены срезы в плоскостях xOz (слева) и yOz (справа)

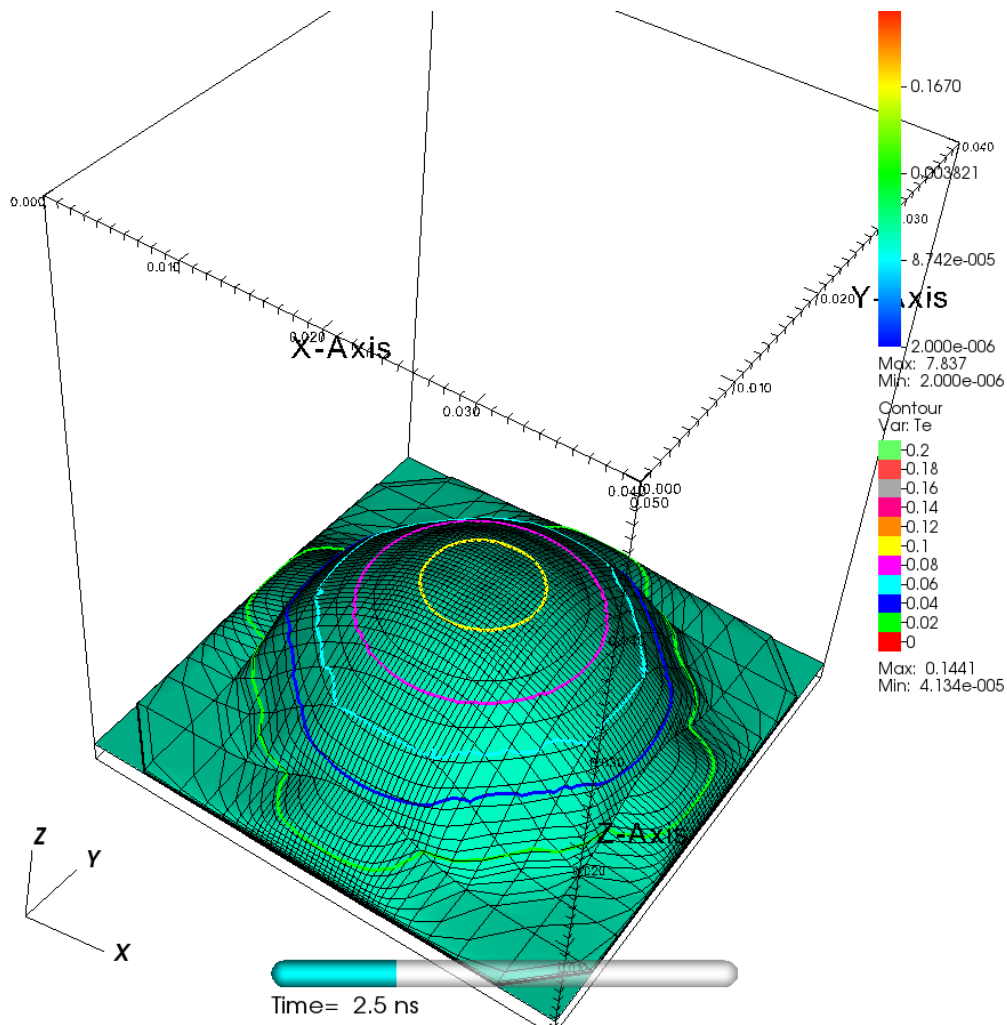


Рис.4. Распределение температуры и плотности на момент максимума излучения (2.5 нс) в расчёте плоской мишени. Представлен срез по изоповерхности $\rho = 2 \cdot 10^{-4} \text{ г/см}^3$

На рис. 5 – 8 представлены распределения электронной температуры и плотности на различные моменты времени для расчётов с проволочными мишенями.

На рис. 5 изображено начальное распределение плотности в расчёте с одним проводом. Цветом выделена граница провода.

На рис. 6 представлены распределения температуры и плотности на момент максимума импульса в двух ортогональных срезах, проходящих через ось симметрии лазерного пучка.

На рис. 7 изображено начальное распределение плотности в расчёте с двумя проводами. Цветом выделена граница провода.

На рис. 8 представлены распределения температуры и плотности на момент максимума импульса в двух ортогональных срезах. Один срез проходит через ось симметрии лазерного пучка и перпендикулярен проводам. Второй срез проходит через ось симметрии правого провода и параллелен оси симметрии лазерного пучка.

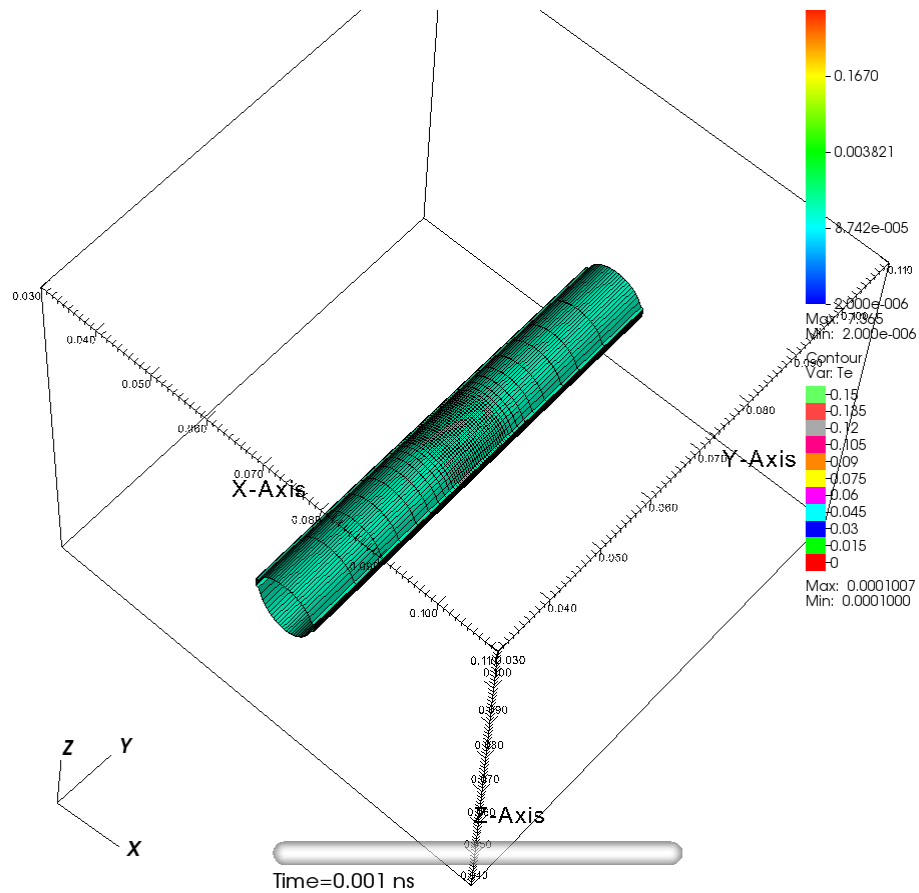


Рис.5. Начальное распределение плотности в расчёте падения лазерного импульса на провод (представлена часть расчётной области)

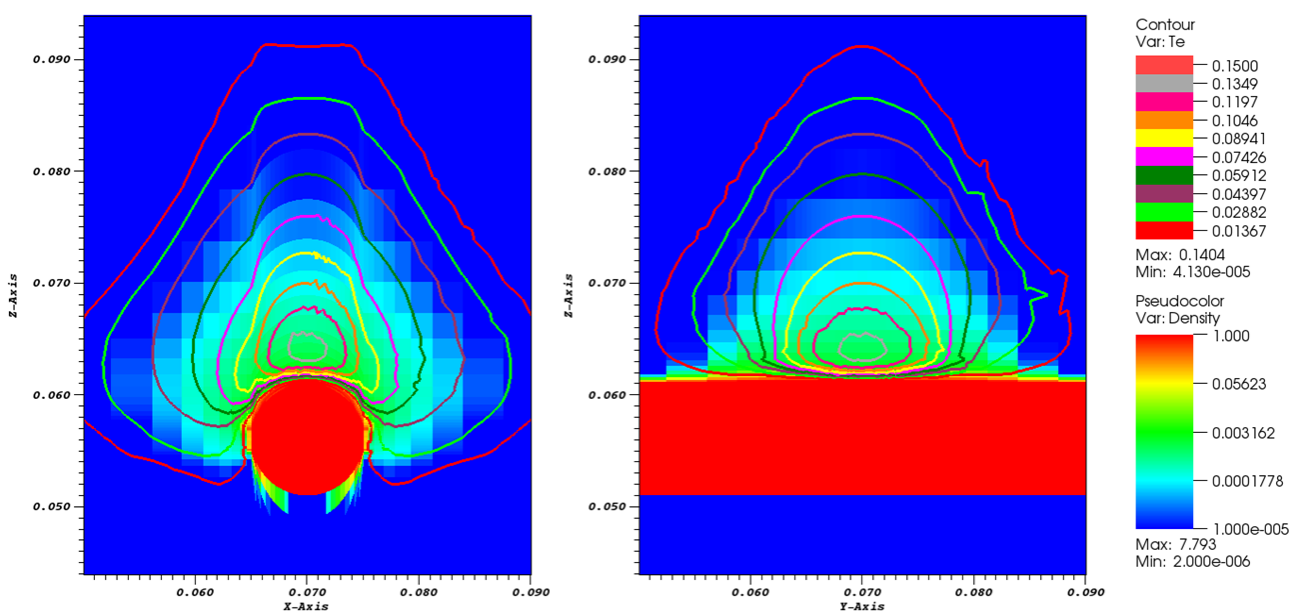


Рис.6. Распределение температуры и плотности на момент максимума лазерного импульса (2 нс) в расчёте падения лазерного импульса на провод

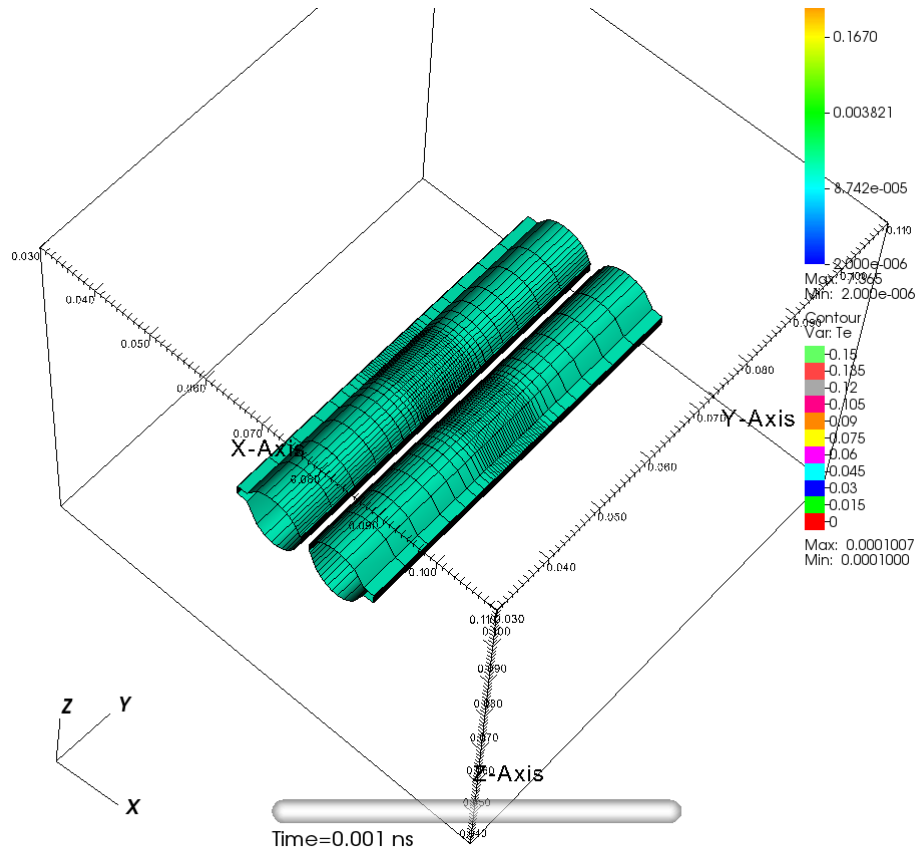


Рис.7. Начальное распределение плотности в расчёте падения лазерного импульса на два провода (представлена часть расчётной области)

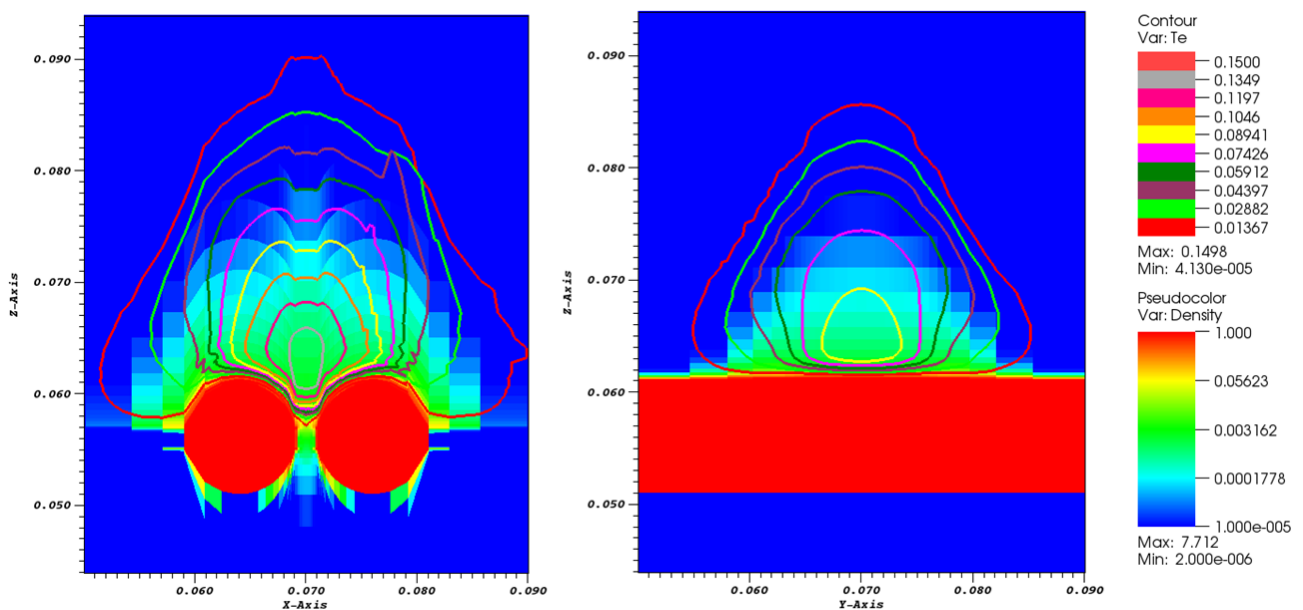


Рис.8. Распределение температуры и плотности на момент максимума лазерного импульса (2 нс) в расчёте падения лазерного импульса на два провода

Таблица 1

Результаты расчётов по программе 3DLINE

Мишень	Поглощено, мДж	Излучено, мДж	Излучено EUV in band, мДж
Плоскость (2D версия)	98	64	6.9
Плоскость	97	66	7.3
Провод	81	54	6.5
Два провода	93	66	7.4

В таблице 1 отражены интегральные данные о поглощении лазерного излучения, полной энергии излучения и энергии, излученной in-band, т.е. в диапазоне $\lambda = 13.500 \pm 0.135$ нм.

Экспериментально наблюдаемый выход энергии в 2% EUV диапазоне для моделируемого Nd лазера с длиной волны 1.064 мкм на плоской мишени составляет, как известно, $\sim 2 - 3\%$ [6]. Завышенный результат расчёта можно объяснить следующими факторами.

Прежде всего, из-за упрощённой модели лазера сильно завышено значение поглощённой лазерной энергии ($\sim$ в 1.5 раза). Сравнительные расчёты в осесимметричной 2D геометрии для плоской мишени, проведенные как по 2D версии программы 3DLINE, так и по известной программе RZLINE [14], приведены в таблице 2. Как видно из таблицы, чтобы согласовать с 3DLINE поглощённую энергию, необходимо в RZLINE увеличить исходную энергию лазера примерно в 1.5 раза.

Вторым по значению фактором, сильно влияющим на точность вычислений, является использование диффузионного приближения при наличии достаточно грубой пространственной сетки. Для проверки влияния этого фактора были проведены расчёты как в диффузионном приближении, так и в лучевом приближении [15]. При использовании диффузионного приближения в 3DLINE граничные условия полного выхода излучения (16) ставились двумя способами: с «сильным обрезанием», когда отступление от границы области составляло одну длину пробега фотонов, и со «слабым обрезанием», когда такое отступление составляло $\sim 1/10$ пробега фотонов.

Из таблицы 2 видно, что лучевое приближение даёт разумные результаты, в то время как диффузионное приближение является в данном случае слишком грубым. По-видимому, требуется либо уточнить пространственную сетку в 3D расчёте, либо перейти к характеристическому методу решения уравнений переноса излучения. Полученное в итоге отличие с RZLINE $\sim 20\%$ можно списать на различие в разбиении излучения по группам: в коде RZLINE используется сетка на 100 групп, а в 3DLINE — на 20.

Таблица 2

Сравнение двумерных расчётов для плоской мишени

2D код	Энергия лазера, мДж	Поглощено, мДж	Излучено, мДж	Излучено EUV in band, мДж
RZLINE	100	66	36	2.4
RZLINE	150	106	52	3.5
3DLINE (сильное обрезание)	100	98	64	6.9
3DLINE (слабое обрезание)	100	98	61	5.8
3DLINE (лучевой алгоритм)	100	98	57	4.2

Интересно отметить, что все вышеназванные факторы наиболее сильно влияют на выход EUV, в то время как интегральная излученная энергия (и динамика плазмы, как следствие) зависит от этих факторов существенно слабее.

Авторы благодарны В.В.Иванову и А.С.Грушину за многочисленные обсуждения и предоставленные результаты расчётов по программе RZLINE.

Список литературы

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М., Наука. 1992.
2. Гасилов В.А., Гуськов С.Ю., Круковский А.Ю., Новикова Т.П. Двухэтапная разностная схема для численного решения задач магнитной газовой динамики. // Препринт ФИАН №51. — М., 1998.
3. Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Оточин А.А. Комплекс программ РАЗРЯД. Решение задач магнитной гидродинамики в R-Z геометрии в двухтемпературном приближении. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 1990, №150.
4. Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Новикова Т.П., Оточин А.А. Об алгоритмах решения двумерных уравнений магнитной гидродинамики в комплексе программ РАЗРЯД. // Препринт ИММ РАН, 1993, № 36.
5. Круковский А.Ю., Попов И.В. Полностью консервативные разностные схемы в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для расчета трехмерных уравнений газовой динамики. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2012, № 23, 11 с. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_23.pdf
6. V.Bakshi EUV Sources for Lithography, SPIE Press, Bellingham, WA (2005).

7. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Вариационный подход к построению конечно-разностных математических моделей в гидродинамике. // ДАН СССР, 1977, т. 235, № 6, С. 1285 – 1288.
8. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., Наука, 1978.
9. Цыгвинцев И.П., Круковский А.Ю., Новиков В.Г., Попов И.В. Трёхмерное моделирование поглощения лазерного излучения в приближении геометрической оптики. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2012, № 41. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_41.pdf
10. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме. // Вопросы теории плазмы. Вып. 1, М., Атомиздат, 1964, С. 183 – 272.
11. Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчёта росселандовых пробегов и уравнений состояния. М.: Физматлит, 2000, 400 с.
12. B.Benattar, V.A.Gasilov, A.Yu.Krukovskiy, A.F.Nikiforov, V.G Novikov, S.V.Zakharov, V.S.Zakharov. Influence of magnetohydrodynamic Rayleigh-Taylor instability on radiation of imploded heavy ion plasmas // Physics of Plasmas, January 1999, vol. 6, №1, pp. 175 – 187.
13. Новиков В.Г., Соломянная А.Д. Спектральные характеристики плазмы, согласованные с излучением // ТБТ, 1998, т. 36, вып. 6, С. 858 – 864.
14. Konstantin N. Koshelev, Vladimir V. Ivanov, Vladimir G. Novikov, Viacheslav Medvedev, Alexander S. Grushin, et al. RZLINE code modeling of distributed tin targets for laser-produced plasma sources of extreme ultraviolet radiation // J. Micro/Nanolith. MEMS MOEMS. 11(2), 021112 (May 21, 2012).
15. Гасилов В.А., Захаров С.В., Круковский А.Ю., Новикова Т.П., Тарасов Д.С. Алгоритм расчёта радиационного теплообмена в импульсной магнитоускоряемой плазме // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технологических систем: Сборник научных трудов. — Вып. 3. — М.: МГТУ СТАНКИН, 2000, С 73 – 76.