



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 18 за 2013 г.



Бобылев А.В., Карпов С.А.,
Потапенко И.Ф.

Эффект убегания частиц с
дальнодействующими
потенциалами

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бобылев А.В., Карпов С.А., Потапенко И.Ф. Эффект убегания частиц с дальнодействующими потенциалами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 18. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-18>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

А.В. Бобылев, С.А. Карпов, И.Ф. Потапенко

**Эффект убегания частиц
с далекодействующими потенциалами**

Москва — 2013

Бобылев А.В., Карпов С.А., Потапенко И.Ф.

Эффект убегания частиц с дальнедействующими потенциалами

Численно рассматривается эффект убегания частиц, столкновения между которыми описываются нелинейным кинетическим уравнением Ландау–Фоккера–Планка. Численный метод, применяемый для исследования этого явления, – метод типа Монте-Карло (DSMC).

Ключевые слова: кулоновские столкновения, уравнение Ландау, уравнение Больцмана, метод Монте-Карло, внешнее электрическое поле

Bobylev A.V., Karpov S.A., Potapenko I. F.

Runaway effect for particles with long-distance interaction potentials

Runaway effect for particles with collisions described by the nonlinear kinetic Landau–Fokker–Planck equation is considered. The numerical method that is applied for the investigation is a Monte Carlo method (DSMC).

Key words: Coulomb collisions, Landau equation, Boltzmann equation, Monte Carlo method, external electrical field

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 11-07-93939-G8_a.

Оглавление

Введение	3
Постановка задачи.....	5
Аппроксимация интеграла Ландау интегралом Больцмана.....	8
Реализация метода Монте-Карло для двухкомпонентной плазмы	11
Результаты численных расчетов.....	14
Заключение.....	18
Список литературы	18
Рисунки.....	21

Введение

В данной работе рассматривается эффект убегания частиц, столкновения между которыми описываются нелинейным кинетическим уравнением Ландау - Фоккера - Планка (ЛФП) [1], [2]. Численный метод, применяемый для исследования этого явления, - это метод прямого дискретного моделирования типа Монте-Карло (DSMC) [3].

Термин "убегание" относится, главным образом, к электронам плазмы, находящимся под воздействием постоянного электрического поля. Как известно, сечение кулоновского столкновения заряженных частиц быстро падает (длина свободного пробега растёт) с ростом относительной энергии сталкивающихся частиц. Поэтому столкновения с ионами оказывают тормозящее действие на холодные электроны, в то время как электроны, находящиеся в горячей части спектра, переходят в режим ускорения. Этот процесс хорошо изучен на основе анализа кинетического уравнения с интегралом столкновений ЛФП (как правило, линеаризованного) для кулоновского потенциала взаимодействия $U \sim 1/r^s$, $s = 1$, и аналитически, и численно. Благодаря дальнедействующему характеру кулоновских сил, столкновения частиц происходят при сравнительно больших прицельных параметрах и сопровождаются рассеянием главным образом на малые углы, а следовательно, передаваемый при таких столкновениях импульс оказывается мал. Впервые столкновительный оператор для заряженных частиц как аппроксимация интеграла столкновений Больцмана в предположении, что преобладающим является рассеяние на малые углы, был получен Ландау [1]. Существует обширная литература, посвященная воздействию внешнего электрического поля на плазму с кулоновским взаимодействием (см., например, [4]- [7]). В некоторых работах также рассматривались и другие дальнедействующие потенциалы, например, в применении к твердотельной плазме, где $s \gtrsim 2$ [8]. В этом случае столкновения играют более существенную роль. Отметим, что в случае "жёстких" потенциалов взаимодействия, например, для модели твёрдых шаров, эффекта убегания не наблюдается.

Для численного решения данного класса задач чаще всего применяются детерминистические конечно-разностные методы (см., например, [6], [9] и ссылки в них). Целью данной работы является, главным образом, применение нового численного метода типа Монте-Карло для решения уравнения ЛФП в трёхмерном пространстве скоростей. Мы рассматриваем частицы двух сортов, взаимодействующих между собой со степенными потенциалами типа $U \sim 1/r^s$, $1 \leq s \leq 4$, и находящихся под действием внешней силы в пространственно однородной среде.

Теория столкновительных алгоритмов для решения уравнений Больцмана и ЛФП с дальнедействующими потенциалами была предложена в [10]. Во многом это было развитием более раннего, в определённой степени эмпири-

ческого, подхода Нанбу к кулоновским столкновениям [11]. Методы, предложенные в [10, 11], позднее были приложены к различным моделям задач физики плазмы, исследованы детально и далее развиты разными авторами (см., например, [12, 13] и ссылки в них). Тем не менее общий метод в [10] не был ясно понят из-за общего и формального изложения, и поэтому многие авторы используют более сложную первоначальную схему [11] со ссылками на работу [10] лишь как на доказательство соответствия уравнению ЛФП. Мы развиваем другой подход в работах [14]- [17], который приводит в своей основе к тому же общему методу [10], но делает его ясным и понятным. Заметим, что первые численные результаты для некоторых типичных задач физики плазмы в случае однокомпонентной плазмы были проделаны в [12], [9]. Численные результаты для двухкомпонентной системы, полученные на основе подобной схемы расчета, опубликованы в [14], [15]. Перечисленные работы основывались в определённой степени на интуитивном подходе к моделированию по методу Монте-Карло. Общий подход к моделированию методом Монте-Карло интеграла кулоновских столкновений дан подробно в работе [16] и кратко в [17], где метод объясняется для общего случая многокомпонентной плазмы.

Сущность метода заключается в специальном способе аппроксимации уравнения Ландау интегралом Больцмана. Математическим основанием для такого подхода служит работа [18], где получен интеграл столкновений типа Ландау для произвольных потенциалов взаимодействия для столкновений с малой передачей импульса (см., также [19], [20]). Ключевая идея метода состоит в том, чтобы аппроксимировать уравнения ЛФП уравнениями Больцмана квазимаквелловского типа. Это означает, что полное сечение рассеяния для соответствующего уравнения Больцмана не зависит от скорости. Это позволяет сделать процесс моделирования более простым, поскольку сталкивающиеся пары могут быть выбраны произвольно. В [16] аналитически получена строгая (верхняя) оценка точности аппроксимации $O(\sqrt{\varepsilon})$. Параметр аппроксимации ε эквивалентен шагу по времени Δt в других, более ранних, методах [21, 11], являющихся частным случаем нашего метода. Похожая оценка $O(\sqrt{\varepsilon})$ численно получена для методов [21, 11] в [22]. Наконец, следует упомянуть важные математические работы по уравнению Больцмана и Ландау и работы, касающиеся обоснования стохастических методов для уравнений ЛФП [23, 24].

В данной работе эффект убегания частиц со степенными потенциалами взаимодействия численно исследуется на основе решения двухкомпонентной системы нелинейных кинетических уравнений ЛФП методом Монте-Карло. Продемонстрированы возможности метода. Кроме того, дан наглядный ответ, для каких потенциалов эффект убегания наиболее выражен.

В начале работы дана постановка задачи и вкратце объяснена основная идея аппроксимации уравнения ЛФП уравнением Больцмана в общем случае.

Затем описана реализация метода Монте-Карло для двухкомпонентной плазмы. Далее следуют численные результаты исследования поведения плазмы в постоянном поле для различных степенных потенциалов взаимодействия.

Для проверки возможностей метода также решается задача для кулоновских столкновений в присутствии оператора диффузии.

Постановка задачи

Рассматриваем произвольную пространственно однородную смесь разреженных газов. Пусть $\{f_k(\mathbf{v}, t), k = e, i\}$ - зависящие от времени $t \geq 0$ функции распределения по скоростям $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ частиц с массами $\{m_k, k = e, i\}$ соответственно. Мы предполагаем, что плотности компонент смеси (в физическом пространстве) выражаются интегралами

$$\rho_k(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v} f_k(\mathbf{v}, t), \quad k = e, i. \quad (1)$$

Система кинетических уравнений ЛФП для плазмы в постоянном электрическом поле \mathbf{E} имеет вид

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \frac{e_k}{m_k} \mathbf{E} \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{v}} = \sum_{j=e,i}^n Q_{kj}^L(f_k, f_j), \quad k, j = e, i, \quad (2)$$

где $Q_{kj}^{(L)}(f_k, f_j)$ - интегралы столкновений ЛФП в виде

$$Q_{kj}^{(L)}(f_k, f_j) = 2\pi L \sum_{j=e,i} \frac{e_k^2 e_j^2}{m_k^2} \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} R^{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \left(\frac{\partial}{\partial v^\beta} - \frac{m_k}{m_j} \frac{\partial}{\partial w^\beta} \right) f_k(\mathbf{v}) f_j(\mathbf{w}), \quad (3)$$

с симметричным ядром

$$R^{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \frac{u^2 \delta^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta}{u^3}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}, \quad u = |\mathbf{u}|; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Функции распределения ограничены при нулевой скорости и $f \rightarrow 0$, когда $v \rightarrow \infty$, достаточно быстро, чтобы оставался конечным второй момент функции распределения - энергия частиц (в сферических координатах - четвёртый момент по v).

Мы рассматриваем уравнения (2) с интегралом столкновений (3), (4) для случая двухкомпонентной электрон-ионной плазмы в присутствии постоянного электрического поля $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$. Проведем обезразмеривание величин, входящих в задачу, используя в качестве характерных единиц ρ_0 - полную плотность числа частиц плазмы; скорость v_0 (например, тепловая скорость

электронов $v_{Te} \sim \sqrt{3T_e}$; при этом электрон-электронное время столкновений t_0 определяется выражением $2\pi L e^4 \rho_0 t_0 / m_e^2 v_0^3 = 1$. Таким образом, мы добавляем в левую часть уравнений члены для электронов и ионов

$$\tilde{E}_z \cdot \frac{\partial f_e}{\partial v_z} \quad \text{и} \quad - \frac{m_e}{m_i} \tilde{E}_z \cdot \frac{\partial f_i}{\partial v_z},$$

соответственно. Поле \tilde{E}_z - это безразмерное поле, нормированное на так называемое поле Драйзера $E_c = m_e v_{Te} / e t_0$. Значения этого безразмерного поля \tilde{E}_z в различных физических задачах могут меняться от единиц $\gtrsim 1$ в космической плазме до $\lesssim 10^{-2}$ в задачах УТС.

При решении уравнений (2) - (4) обычно используют линейное кинетическое уравнение в сферических координатах в двумерном пространстве скоростей v, μ , для численного решения которого применяется метод конечных разностей. Употребляются неявные разностные схемы и метод расщепления по координатам; на каждом полушаге по времени используется метод прогонки. Одной из целей подобных расчётов является получение пологих (ускоренных по сравнению с распределением Максвелла) высокоэнергетичных хвостов функции распределения в направлении действия поля и квазистационарного решения задачи. Поэтому зачастую в постановку задачи не граничное условие равенства нулю функции в последней точке $f_{v_{max}} = 0$, что соответствует условию $\lim_{v \rightarrow \infty} f(v, t) = 0$, а условие равенства нулю потока на правой границе при некоторой заданной скорости. Чтобы компенсировать вызванный этим граничным условием уход частиц, вводится источник частиц при нулевых энергиях $v \simeq 0$. Подобная постановка задачи обычно привязана к конкретной физической проблеме, хотя при использовании языка функций распределения для описания динамики частиц всегда найдутся частицы с бесконечной скоростью. Мы решаем нелинейную задачу в полном пространстве скоростей и не вводим в постановку задачи искусственных стоков или источников частиц.

В данной работе для численного решения уравнения (2) - (4) методом Монте-Карло также применяется метод расщепления, но уже по физическим процессам. В этом случае необходимо лишь разделить шаг по времени на два этапа. На первом этапе решается уравнение с оператором столкновений (разыгрываются кулоновские столкновения), а на втором этапе, происходит процесс переноса функции распределения в направлении действия поля. То есть,

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial t} = \sum_{j=e,i} Q^L_{kj}(f_k, f_j), & k = e, i, \\ \frac{\partial f_k}{\partial t} = q_k \frac{m_e}{m_k} \tilde{E}_z \cdot \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial v_z}, & q_k = q_{e,i} = \mp 1. \end{cases} \quad (5)$$

В данной работе в качестве начальных функций распределения, как правило, выбираются изотропные моноэнергетические $f^0 \simeq \delta(v^2 - 1)$ распределения или анизотропные распределения $f^0 \simeq \delta(v^2 - 1)\delta(\mu)$, $\mu = v_z/v$, $v = |\mathbf{v}|$.

Алгоритм расчета следующий. Допустим, задан начальный набор скоростей

$$\mathbf{V}_N(t) = \{\mathbf{v}_1^{(e)}(t), \dots, \mathbf{v}_{N_1}^{(e)}(t); \mathbf{v}_1^{(i)}(t), \dots, \mathbf{v}_{N_1}^{(i)}(t)\} \in \mathbb{R}^{3N}, \quad N = 2N_1. \quad (6)$$

При $t = 0$ все скорости электронов $\mathbf{v}_k^{(e)}(0)$ распределяются в \mathbb{R}^3 независимо в соответствии с функцией распределения $f_e^{(0)}(\mathbf{v})$ и аналогично распределяются скорости ионов $\{\mathbf{v}_k^{(i)}(0), k = 1, \dots, N_1\}$. На первом шаге в (5) разыгрываются столкновения по правилам, которые описаны ниже. После первого шага - столкновений, получается новый набор скоростей. Столкновения сохраняют импульс и энергию системы. Их действие ведёт к установлению равновесного максвелловского распределения. На втором шаге решается уравнение переноса по характеристикам, т.е. все скорости получают приращение за счет действия электромагнитного поля. Для электронов это

$$\frac{dv_z}{dt} = \tilde{E}_z(t) \rightarrow v_z^{n+1} = v_z^n + \tilde{E}_z(t)\Delta t \propto f(v_z, t) = \tilde{f}(v_z - E_z\Delta t). \quad (7)$$

Поскольку столкновения не меняют ни импульс, ни энергию частиц, то их изменение связано с действием поля. Рост импульса и энергии частиц происходит в соответствии со следующим законом

$$\begin{aligned} \int f(v, t)v^2 dv &= \int \tilde{f}(v - \tilde{E}_z\Delta t)v^2 dv = \int \tilde{f}(v)(v + \tilde{E}_z\Delta t)^2 dv = \\ &= \int \tilde{f}(v)v^2 dv + 2\tilde{E}_z\Delta t \int \tilde{f}(v)v dv + \tilde{E}_z^2\Delta t^2 \int \tilde{f}(v)dv, \end{aligned}$$

что соответствует

$$v^{n+1} = v^n + \tilde{E}_z(t) \cdot \Delta t \rightarrow (v^{n+1})^2 - (v^n)^2 = 2\tilde{E}_z \Delta t v^n + \tilde{E}_z^2 \Delta t^2.$$

Таким образом, для постоянного поля первый и второй момент (электронной) функции распределения меняется в соответствии с формулами

$$m_1(t) = m_1(0) + \tilde{E}_z \cdot t, \quad m_2(t) = m_2(0) + m_1(0) \cdot t + \frac{\tilde{E}_z^2 t^2}{2}.$$

Если электрическое поле зависит от времени, то можно использовать аппроксимацию по времени более высокого порядка, чтобы получить более точное выполнение законов изменения импульса и энергии во времени, например,

$$\frac{v_z^{n+1} - v_z^n}{\Delta t} = \frac{(\tilde{E}_z^{n+1} + \tilde{E}_z^n)}{2}.$$

Аппроксимация интеграла Ландау интегралом Больцмана

Для моделирования кулоновских столкновений мы аппроксимируем уравнение ЛФП уравнением Больцмана в приближении рассеяния на малые углы и далее используем известный подход [3] и схемы прямого дискретного моделирования (DSMC). Система кинетических уравнений Больцмана для $f_k(\mathbf{v}, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = \sum_{j=e,i} Q_{kj}(f_k, f_j), \quad k, j = e, i, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{kj}(f_k, f_j) &= \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} d\mathbf{w} d\boldsymbol{\omega} g_{kj}\left(u, \frac{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}}{u}\right) [f_k(\mathbf{v}') f_j(\mathbf{w}') - f_k(\mathbf{v}) f_j(\mathbf{w})], \\ \mathbf{v}' &= \frac{1}{m_k + m_j} (m_k \mathbf{v} + m_j \mathbf{w} + m_j u \boldsymbol{\omega}), \\ \mathbf{w}' &= \frac{1}{m_k + m_j} (m_k \mathbf{v} + m_j \mathbf{w} - m_k u \boldsymbol{\omega}); \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{S}^2 \\ m_{kj} &= \frac{m_k m_j}{m_k + m_j}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}, \quad u \equiv |\mathbf{u}|, \quad k, j = e, i. \end{aligned} \quad (9)$$

Функция $g_{kj}(u, \mu)$ выражается формулой

$$g_{kj}(u, \mu) = g_{jk}(u, \mu) = u \cdot \sigma_{kj}(u, \mu), \quad (10)$$

где $\sigma_{kj}(u, \mu)$ - дифференциальное сечение рассеяния (в системе центра масс сталкивающихся частиц сортов k и j) на угол $\theta = \arccos(\mu)$, $|\mu| \leq 1$.

Для перехода от системы уравнений Больцмана (8), (9) к уравнениям Ландау нужно выбрать специальный вид функций $g_{kj}(u, \mu)$. Этот выбор основан на факте, доказанном много лет назад [18]. Предположим, что функции распределения бесконечно дифференцируемы и быстро убывают на бесконечности со всеми их производными. Следуя идее Ландау, проводится разложение в ряд Тейлора (по малым приращениям скоростей после столкновений $\mathbf{v}' - \mathbf{v}$ и $\mathbf{w}' - \mathbf{w}$) подынтегрального выражения в (9). Получается формальный ряд, первый член которого отвечает приближению Ландау:

$$Q_{kj}^{(1)} = \frac{m_{kj}^2}{2m_k^2} \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} g_{kj}^{(1)}(u) T^{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \left(\frac{\partial}{\partial v^\beta} - \frac{m_k}{m_j} \frac{\partial}{\partial w^\beta} \right) f_k(\mathbf{v}) f_j(\mathbf{w}), \quad (11)$$

где предполагается суммирование по повторяющимся индексам $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, с симметричным ядром

$$T^{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2 \delta^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta, \quad \text{и } g_{kj}^{(1)}(u) = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu g_{kj}(u, \mu)(1 - \mu). \quad (12)$$

Для того чтобы система уравнений Больцмана (8) аппроксимировала (на формальном уровне) соответствующую систему уравнений Ландау, т.е. системе

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = \sum_{j=e,i} Q_{kj}^{(1)}(f_k, f_j), \quad k, j = e, i, \quad (13)$$

в обозначениях (11), (12), достаточно выбрать функции $g_{kj}(u, \mu)$ в виде функций $g_{kj}(u, \mu; \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ - произвольный малый параметр, и потребовать, чтобы

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi \int_{-1}^1 d\mu g_{kj}(u, \mu; \varepsilon)(1 - \mu) &= g_{kj}^{(1)}(u), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi \int_{-1}^1 d\mu g_{kj}(u, \mu; \varepsilon)(1 - \mu)^m &= 0, \quad m \geq 2, \end{aligned} \quad (14)$$

где $g_{kj}^{(1)}(u)$ - заданные функции. В качестве простого примера такой аппроксимации можно рассмотреть δ -образные функции

$$\begin{aligned} g_{kj}(u, \mu; \varepsilon) &= \frac{1}{2\pi\varepsilon} \delta[1 - \mu - \varepsilon a_{kj}(u)], \quad \text{где} \\ a_{kj}(u) &= \begin{cases} g_{kj}^{(1)}(u), & \text{при } \varepsilon g_{kj}^{(1)}(u) \leq 2, \\ 2\varepsilon^{-1}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Такая функция g_{kj} означает, что рассеяние происходит на фиксированный угол $\theta_{kj} = \arccos[1 - \varepsilon a_{kj}(u)]$ (при столкновении частиц сорта k и j). Этот закон рассеяния очень удобен для метода Монте-Карло. Другое достоинство этой аппроксимации состоит в том, что полная частота столкновений постоянна, т.к.

$$g_{kj}^{tot}(u, \varepsilon) = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu g_{kj}(u, \mu; \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (16)$$

Подобную аппроксимацию можно назвать квазимаксвелловской, т.к. полная частота столкновений (16) (для любой пары сортов k и j , включая случай

$k = j$) не зависит от скоростей. Это также дает известные преимущества при пользовании методом Монте-Карло. Отметим, что ε имеет размерность $[t][l]^{-3}$.

Рассмотрим случай уравнения Ландау для классической плазмы для двух сортов заряженных частиц, считая кулоновский логарифм L в (3) постоянным для всех взаимодействий. Получим (см., например, [5], [25]) уравнения (11) - (13), где

$$g_{kj}^{(1)}(u) = 4\pi L \frac{e_k^2 e_j^2}{m_{kj}^2} \cdot \frac{1}{u^3}; \quad k, j = e, i. \quad (17)$$

Ясно, что уравнения (11), (13), где функция $g_{kj}(u, \mu; \varepsilon)$ вычисляется по формулам (15), (16), аппроксимируют при $\varepsilon \rightarrow 0$ систему уравнений Ландау (13) для плазмы. Естественное обобщение такой аппроксимации можно получить, подставляя в (8) не функции $g_{kj}(u, \mu; \varepsilon)$ из (15), (16), а функции $g_{kj}\left(u, \mu; \frac{\varepsilon}{\lambda_{kj}}\right)$, где $\{\lambda_{kj} = \lambda_{jk}; k, j = e, i\}$ - произвольные положительные числа. Тогда полные частоты столкновений (16)

$$g_{kj}^{tot}(u, \varepsilon) = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu g_{kj}\left(u, \mu; \frac{\varepsilon}{\lambda_{kj}}\right) = \frac{\lambda_{kj}}{\varepsilon} \quad (18)$$

будут постоянными (не зависящими от скоростей), но различными для разных сортов сталкивающихся частиц. Такой прием можно использовать для ускорения счета. Заметим, что формальная ошибка описанной выше аппроксимации интеграла столкновений Ландау $Q^{(1)}(f_k, f_j)$ интегралом Больцмана $Q(f_i, f_j)$ имеет первый порядок $O(\varepsilon)$, если используются формулы типа (15)-(17).

Описанная выше простая схема аппроксимации далеко не единственна. Важно лишь удовлетворить условиям (14) и, желательно, условиям постоянства частоты столкновений типа (15) или (18). Мы будем рассматривать ниже только простейшую схему, не пытаясь ее как-то оптимизировать, и параметр $\lambda_{kj} = 1$.

Таким образом, рассматривая задачу приближенного (или численного) решения системы уравнений Ландау для плазмы

$$\frac{\partial f_k(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^n Q_{kj}^L(f_k, f_j), \quad k, j = e, i,$$

где $Q_{kj}^{(L)}(f_k, f_j)$ - интегралы столкновений (3), (4), мы на первом этапе выбираем малый параметр $\varepsilon > 0$, а затем приближенно заменяем уравнение Ландау (3) уравнениями Больцмана (8), (9), где

$$g_{kj}(u, \mu; \varepsilon) = 2\pi\delta \left[1 - \mu - \text{Min} \left\{ 4\pi \frac{e_k^2 e_j^2 L}{\lambda_{kj} m_{kj}^2} \frac{\varepsilon}{u^3}, 2 \right\} \right]. \quad (19)$$

Заметим, что фактическая разница в методах [11] и [21] - это разница в законах рассеяния. В наших терминах метод [11] основан на следующем законе рассеяния

$$g_{ij}^N(u, \mu; \varepsilon) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Ae^{A\mu}}{\sinh A}, \quad \mu \in [-1, 1], \quad \text{где}$$

$$\coth A - A^{-1} = e^{-s}, \quad s_{ij} = \frac{\varepsilon g_{ij}}{u^3}, \quad g_{ij} = 4\pi L \frac{e_i^2 e_j^2}{m_{ij}^2}.$$

Метод [21] основан, согласно [22], на гауссовом распределении $x = tg \theta/2$ данной формулой

$$f_{ij}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi s_{ij}}} e^{-x^2/s_{ij}}.$$

Следовательно, соответствующий закон рассеяния имеет вид

$$g_{ij}^{TA}(u, \mu; \varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{\pi^3 s_{ij} (1 - \mu^2)}} \frac{1}{1 + \mu} \exp \left[-\frac{1 - \mu}{s(1 + \mu)} \right], \quad \mu \in [-1, 1].$$

Легко проверить, что условия (14), (16) выполняются в обоих случаях. Таким образом, функции g^N , g^{TA} и g , данные в (14) - (16), представляют собой различные версии общей квазимаксвелловской аппроксимации. Предложенные нами δ -образные функции $g_{kj}(u, \mu; \varepsilon)$ означают, что при каждом столкновении угол рассеяния $\theta = \arccos \mu$ выражен явной формулой. Это выглядит проще, логичнее и обеспечивает определённые вычислительные преимущества по сравнению с законами рассеяния $g_{kj}^N(u, \mu; \varepsilon)$ и $g_{kj}^{TA}(u, \mu; \varepsilon)$.

Замечание. Всё сказанное выше остаётся справедливым для так называемых уравнений *типа Ландау*, то есть уравнений (11) - (13) для произвольных функций $g_{kj}^{(1)}$. Такие функции с $g_{kj}^{(1)} = c_{kj} \cdot u^{1-4/s}$ могут быть использованы как кинетические уравнения для частиц со степенными потенциалами взаимодействия $U \sim r^{-s}$, $s \geq 1$.

Реализация метода Монте-Карло для двухкомпонентной плазмы

Идея метода Монте-Карло принадлежит Бёрду [3], который предложил его в 1960-х годах, независимо от более ранней работы Каца [26], основываясь на вероятностной природе уравнения Больцмана. Мы выбираем за основу

подход Каца, потому что этот подход делает метод достаточно очевидным. Идея заключается в том, чтобы сопоставить нелинейное уравнение (8) с некоторым линейным уравнением (Master equation), описывающим относительно простой стохастический процесс.

Рассмотрим теперь конкретный пример электронейтральной водородной плазмы. Уравнения Ландау имеют вид (13), (17). Обозначим отношение массы электронов к массе ионов через $\gamma = m_e/m_i$. В результате получаем уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_e}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left[Q_1^{(L)}(f_e, f_e) + Q_\gamma^{(L)}(f_e, f_i) \right], \\ \frac{\partial f_i}{\partial t} &= \frac{\gamma^2}{2} \left[Q_1^{(L)}(f_i, f_i) + Q_{1/\gamma}^{(L)}(f_i, f_e) \right],\end{aligned}\tag{20}$$

где для любого $\theta > 0$

$$Q_\theta^{(L)}(f_1, f_2) = \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} R^{\alpha\beta}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \left(\frac{\partial}{\partial v^\beta} - \theta \frac{\partial}{\partial w^\beta} \right) f_1(\mathbf{v}) f_2(\mathbf{w}),$$

$$R^{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = (u^2 \delta^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) / u^3, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Уравнения (20) будут решаться с начальными условиями

$$f_{e,i}|_{t=0} = f_{e,i}^{(0)}(\mathbf{v}), \quad \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v} f_{e,i}^{(0)}(\mathbf{v}) = 1.$$

Для приближенного решения задачи (20) выберем малое число $\varepsilon > 0$ и большое натуральное число N_1 . Мы будем моделировать решение этой задачи эволюцией случайного вектора $\mathbf{V}_N(t)$ (6).

Для описания временной эволюции вектора $\mathbf{V}_N(t)$ будем рассматривать схему с шагом по времени

$$\tau_N = \frac{2\varepsilon}{N}, \quad N = 2N_1.\tag{21}$$

Таким образом, время t принимает дискретные значения $t_n = n\tau_N$, $n = 0, 1, \dots$. На каждом интервале $[t_n, t_{n+1})$ происходит в точности одно столкновение. Вероятности столкновений трех возможных типов в простейшем случае определяются равенствами

$$p_{ee} = p_{ii} = 1/4, \quad p_{ei} = 1/2, \quad \sum_{k,j=e,i} p_{kj} = 1.\tag{22}$$

После того, как решено, какое из трех событий, определяемых вероятностями (22), действительно произошло, выбирается случайная пара скоростей частиц соответствующих сортов и "производится столкновение". Мы кратко опишем, как это делается в случае δ -образных функций $g_{kj}(u, \mu)$ (19) в соответствующих уравнениях Больцмана.

При столкновении двух электронов выбирается пара скоростей

$$\mathbf{v}_r^{(e)} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_s^{(e)} = \mathbf{w}, \quad 1 \leq r < s \leq N_1.$$

Скорости после столкновения имеют вид

$$\mathbf{v}_r^{(e)'} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w} + |\mathbf{v} - \mathbf{w}|\boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{v}_s^{(e)'} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w} - |\mathbf{v} - \mathbf{w}|\boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{S}^2,$$

где единичный вектор $\boldsymbol{\omega}$ определяется в декартовых координатах с осью Oz вдоль вектора $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega} = \left\{ \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi, \mu \right\}, \quad (23)$$

где φ - это случайный угол, равномерно распределенный на интервале $[0, 2\pi)$,

$$\mu = \mu_{ee} = 1 - 2 \operatorname{Min} \left\{ \frac{4\varepsilon}{u^3}, 1 \right\}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}. \quad (24)$$

Столкновение двух ионов описывается совершенно аналогично. Единственная разница состоит в том, что μ определяется следующим образом:

$$\mu = \mu_{ii} = 1 - 2 \operatorname{Min} \left\{ \frac{4\varepsilon\gamma^2}{u^3}, 1 \right\}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}, \quad \gamma = m_e/m_i. \quad (25)$$

Наконец, для столкновения электрона с ионом мы выбираем скорости

$$\mathbf{v}_r^{(e)} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_s^{(i)} = \mathbf{w}, \quad 1 \leq r, s \leq N_1,$$

и преобразуем их по формулам

$$\mathbf{v}_r^{(e)'} = \frac{m\mathbf{v} + M\mathbf{w} + M|\mathbf{u}|\boldsymbol{\omega}}{m + M}, \quad \mathbf{v}_s^{(i)'} = \frac{m\mathbf{v} + M\mathbf{w} - m|\mathbf{u}|\boldsymbol{\omega}}{m + M},$$

где в системе координат с осью Oz вдоль вектора \mathbf{u} справедлива та же формула (23), в которой

$$\mu = \mu_{ei} = 1 - 2 \operatorname{Min} \left\{ \frac{\varepsilon(1 + \gamma)^2}{u^3}, 1 \right\}. \quad (26)$$

Преобразование этих формул к произвольной системе координат достаточно очевидно.

Таким образом, отправляясь от начального вектора $\mathbf{V}_N(0)$, мы получаем новый вектор $\mathbf{V}_N(\tau_N)$ после первого столкновения. Далее весь процесс вычислений повторяется без изменений и счетчик времени увеличивается при каждом столкновении на величину τ_N (21).

Результаты численных расчетов

Как было отмечено выше, уравнение типа Ландау применимо для описания динамики частиц не только с кулоновским потенциалом взаимодействия, но и с другими дальнедействующими потенциалами при условии, что рассеяние происходит исключительно на малые углы. К таким потенциалам относятся, например, диполь-дипольное взаимодействие $U \sim 1/r^3$, взаимодействие ван дер Ваальса (van der Waals) между атомами $U \sim 1/r^6$. Важным случаем является модель максвелловских молекул с $U \sim 1/r^4$, у которых произведение сечения рассеяния на относительную скорость вообще не зависит от относительной скорости сталкивающихся частиц. Эта модель лежит в основе множества теоретических и численных работ, поскольку для неё есть точные решения [27], с которыми удобно сравнивать результаты расчетов.

Ниже приводятся численные результаты расчётов уравнения (2) с помощью описанного метода для одного и двух сортов частиц.

Релаксация начального распределения частиц для $U \sim 1/r^s$

Для иллюстрации некоторых различий в динамике частиц с подобными потенциалами взаимодействия сначала приведём результаты релаксации начального распределения к равновесию для одной компоненты в одномерном случае в отсутствие внешнего поля [28, 29]. Численные результаты получены на основании полностью консервативных разностных схем для нелинейного уравнения Ландау и демонстрируют различный характер формирования хвостов распределения $g(v, t) = f/f_{Maxw}$ для различных дальнедействующих потенциалов $U \sim r^{-s}$, $s \geq 1$ с индикатриссой рассеяния $g(u)^{(1)} = u^{1-4/s}$. Для всех рассматриваемых потенциалов релаксация начальной функции распределения к монотонному максвелловскому распределению $\sim f_{Maxw}$ в тепловой области происходит за время порядка электрон-электронных столкновений - в наших единицах - за $t \lesssim t_0 = 1$. Однако формирование хвостов распределения сильно зависит от показателя степени s . Так, для кулоновского потенциала с $s = 1$ хвост имеет характер бегущей волны в сторону горячего спектра с постоянной шириной фронта, рис.1. При этом время релаксации хвоста порядка десятков времен t_0 . Для максвелловских же молекул $s = 4$ время образования хвоста распределения сравнимо со временем релаксации

в тепловой области и характер функции $g(v, t)$ уже мало напоминает волновой, рис.2. Потенциал с показателем $s = 2$, рис.3, является своего рода границей между этими двумя случаями, когда распространение хвоста распределения ещё сохраняет волновой характер. Для показателей, начиная с $s \gtrsim 2$, формирование хвостов функций распределений близко по типу.

Ускорение частиц под действием внешнего поля

Моделирование эффекта "убегания электронов" является важным этапом в процессе верификации предложенного в данной работе метода. Поскольку, с одной стороны, физическая картина явления представляется довольно ясной, что позволяет с хорошей точностью оценить качество полученных результатов, а с другой стороны, расчеты с постоянным электрическим полем служат надёжным ориентиром при моделировании поведения плазмы в переменном электромагнитном поле. В качестве отправной точки в нашем исследовании возьмем результаты расчетов для однокомпонентной плазмы в постоянном электрическом поле, поскольку они могут быть вычислены аналитически непосредственно из уравнения

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \tilde{E}_z \frac{\partial f_e}{\partial v_z} = Q_{ee}$$

для одного сорта частиц. В результате столкновений начальная функция распределения релаксирует к максвелловскому распределению. Под действием поля возникает ток, направленный по оси $j \sim \tilde{E}_z t$. То есть начальная функция распределения под действием столкновений релаксирует к равновесному распределению, которое как целое движется в направлении поля $f(\mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v} - \tilde{E}_z t, t)$. Результирующая функция распределения является распределением Максвелла с направленной скоростью $v_z = \tilde{E}_z t$, растущей во времени.

На рис. 4 представлены зависимости моментов электронной функции распределения от времени для одного сорта частиц и для двухкомпонентной плазмы $s = 1$, $m_i/m_e = 1000$, находящихся в постоянном электрическом поле с напряженностью $\tilde{E}_z = 1.0$. Из рис. 4 видно, что при достаточно большой величине поля влияние ионов на электроны заметно только на начальном этапе, пока направленная скорость электронов еще не велика, $t \lesssim 1$. Затем сила трения, действующая на электроны со стороны ионов, быстро спадает (по закону $1/v^2$), и электронный газ движется как единое целое, переходя в режим непрерывного ускорения.

Иначе обстоит дело при сравнительно небольшой величине напряженности электрического поля $\tilde{E}_z = 0.1$ (см. рис. 5). Как можно видеть из рисунка, ток (первый момент) и энергия электронов при наличии ионов значительно меньше, чем в случае однокомпонентной электронной плазмы, что вполне

оправданно с физической точки зрения. Линейное нарастание тока и "убегание" электронов начинается приблизительно с момента $t \gtrsim 20$.

На рис. 6 приведены две функции распределения электронов в декартовых координатах в момент времени, когда средняя скорость (первый момент функции электронов) частиц одинакова и равна $\langle \mathbf{v} \rangle = 0.8$. Слева - результат для одного сорта. Распределение электронов имеет вид смещённого в точку $v_z = 0.8$ максвелловского распределения. На рисунке справа представлен случай для двух компонент. Видно, что в случае двух компонент часть электронов сосредоточена в тепловой области, в то время как другая часть электронов образует ускоренный хвост распределения. Это иллюстрирует явление убегания электронов, относящееся к быстрому падению $g_{ij}^{(1)}(u) \sim u^{-3}$ фактической (подлинной) частоты электрон-ионных кулоновских столкновений для больших абсолютных величин относительной скорости.

Воспользовавшись методом прямого дискретного моделирования, можно определить, для каких дальнедействующих потенциалов имеет место явление "убегания частиц". Из приведенных выше расчётов релаксации понятно, что значение показателя $s = 2$ должно быть и в этом случае некоторым разделом "жёсткости" потенциала взаимодействия. Для сравнения мы провели вычисления для уравнения типа Ландау с потенциалами $U \sim r^{-s}$, заменив предварительно транспортное сечение рассеяния на $g_{kj}^{(1)}(u) \sim u^{1-4/s}$, $s = 2, 3, 4$. На рис. 7 представлены зависимости электронного тока от времени для различных потенциалов r^{-s} . Из рисунка видно, что для кулоновского потенциала электроны быстро переходят в режим непрерывного ускорения $j(t) \sim \text{const} \cdot \bar{\mathbf{v}}(t) \sim E_z \cdot t$. Начиная с показателей $s \gtrsim 2$ убегание резко уменьшается, а для максвелловских молекул r^{-4} совсем исчезает. Сила трения, действующая на лёгкие частицы со стороны тяжёлых частиц, не только не убывает по мере роста скорости, но и оказывается достаточной, чтобы получить стационарное решение (со статистическими флуктуациями) при $t \rightarrow \infty$.

Нагрев плазмы с помощью квазилинейной диффузии

В качестве демонстрации возможностей метода мы включили в уравнение (2) с интегралом кулоновских столкновений для одного сорта частиц вместо постоянного электрического поля оператор диффузии, действующий в направлении z :

$$\frac{\partial f}{\partial t} - D \frac{\partial^2 f}{\partial v_z^2} = Q_{ee}^L(f, f). \quad (27)$$

Для применения метода Монте-Карло в данном случае исходной является аналитическая постановка задачи - уравнение Лапласа. Затем находится и изучается (упрощенный) случайный процесс. Мы используем подход, исходя из дискретности элементарного акта диффузии - броуновское движение,

уравнение Фоккера-Планка.

Предложение. Уравнение диффузии

$$f(v, t) : \quad f_t = D f_{vv}, \quad v \in (-\infty, \infty), \quad (28)$$

можно решать следующим образом.

(а) Выбирается малое число ε (соответствует шагу по времени Δt) и большое число N точек (частиц), которые разбрасываются независимо по начальному условию $f|_0 = f_0(v)$, $\int_{-\infty}^{\infty} f_0(v) = 1$. Можно говорить об одной частице, но многих повторениях.

(б) Пусть частицы получили координаты

$$V(0) = v_1(0) \leq v_2(0) \leq \dots \leq v_N(0).$$

Для каждой из них выбирается случайное число $\eta \in [0, 1]$.

(в) После этого частица сдвигается направо на $\Delta v = \sqrt{2D\varepsilon}$, если $\eta \geq 1/2$, или направо на $\Delta v = -\sqrt{2D\varepsilon}$, если $\eta < 1/2$. Новые положения частиц обозначаются через (нумерация не важна) $V(\varepsilon) = v_1(\varepsilon), v_2(\varepsilon), \dots, v_N(\varepsilon)$, и процесс (б) повторяется, чтобы получить $V(\varepsilon)$. И так далее. Тогда предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ решает уравнение диффузии (28).

Доказательство. Пусть $f(v, t)$ - вероятность того, что частица находится в момент t в точке v . Ясно, что наша схема соответствует уравнению:

$$f(v, t + \varepsilon) = \frac{1}{2}[f(v + \sqrt{2D\varepsilon}, t) + f(v - \sqrt{2D\varepsilon}, t)].$$

Если функция $f(v, t)$ - "хорошая" функция, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$f(v, t) + \varepsilon f_t(v, t) + O(\varepsilon^2) = \frac{1}{2}[2f(v, t) + (\sqrt{2D\varepsilon})^2 f_{vv}(v, t) + O(\varepsilon^{3/2})].$$

Отсюда получаем $f_t(v, t) = D f_{vv}(v, t) + O(\sqrt{\varepsilon})$, то есть аппроксимацию порядка $O(\sqrt{t})$. Более строго надо предполагать, что $f(v, t)$ имеет ограниченные производные до второго порядка по t и до третьего порядка по v (но для физики это несущественно).

Решалось уравнение (27) с коэффициентом диффузии $D = 0.5$ для различных расчётных параметров. Ниже представлена таблица 1, где даны значения четырёх моментов функции распределения для времени $t = 1$. Из этой таблицы которой можно судить о зависимости необходимой точности от входных параметров. На рисунке 8 представлены функции распределения в начальный момент и в момент времени $t = 5$ для $D = 0.5$, энергия (второй момент) равна $m_2 = m_2(0) + 2Dt = 6$. В начальный момент функция распределения имеет вид типа $\delta(v - 1)$. С течением времени кулоновские столкновения приводят начальное распределение к равновесному максвелловскому, а диффузия, действующая в одном направлении, приводит к нагреву частиц.

Таблица 1.

Моменты функции распределения для различных параметров N, ε, K

N	ε	K	m_1	m_2	m_4	m_6
1000	0.1	1	-	1.95	6.5	35
1000	0.05	1	-	1.96	7.	40
5000	0.1	1	-0.02	1.994	7.35	43
500	0.1	10	0.015	2.005	7.53	46
500	0.05	10	-	1.985	7.45	46.25
500	0.1	20	-	2.02	7.55	44.85
1000	0.1	10	0.015	2.015	7.5	44.
1000	0.01	10	-	2.035	7.7	46.
250	0.1	10	-	1.97	7.35	44.5

Заключение

Обсуждается общий подход к моделированию методами типа Монте-Карло для кулоновских столкновений.

Поход основан на специальном квазимаксвелловском способе аппроксимации уравнения Ландау уравнением Больцмана. Как частные случаи этот подход включает известные методы Takizuka & Abe [21] и Nanbu [11] и обобщает подход Vobylev & Nanbu [10]. При этом предложенный метод прямого дискретного моделирования проще упомянутых выше.

Этот метод использован для моделирования плазмы, находящейся в постоянном электрическом поле. Представлены результаты, касающиеся ускорения хвостов распределений - эффекта убегания частиц.

Дан пример включения в кинетическое уравнение Ландау оператора диффузии, моделирующего нагрев частиц. Проведена серия расчётов для различных входных параметров, по которым можно судить о выборе необходимой точности вычислений.

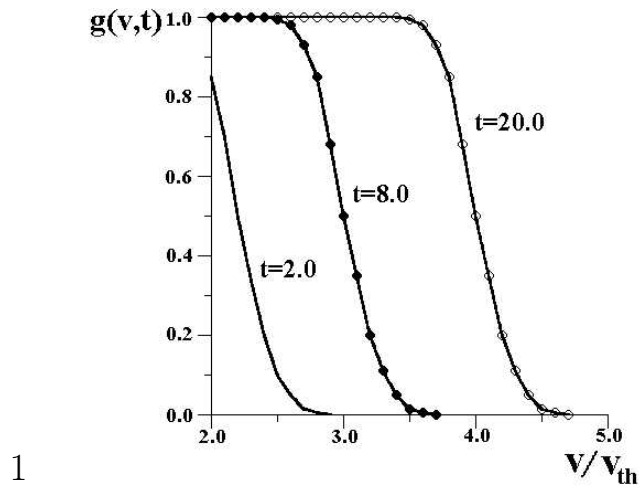
Список литературы

- [1] Ландау Л.Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // ЖЭТФ, 1937, т.7, С.203.
- [2] Rosenbluth M.N., MacDonald W.M., Judd D. Fokker-Planck equation for an inverse-square force // Phys. Rev., 1957, v.107, P.1-6.
- [3] Bird G.A. Molecular gas dynamics and direct simulation of gas flows (Clarendon Press, Oxford) 1994, 458p.

- [4] *Dreicer H.* Electron and ion runaway in a fully ionized gas. II // *Phys. Rev.*, 117, P.329-342, 1960.
- [5] *Сивухин Д. В.* Кулоновские столкновения в полностью ионизованной плазме, в сб.: Вопросы теории плазмы, в. 4, М., 1964.
- [6] *Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П.* Математическое моделирование плазмы. - М.: Наука, 1982, 338с.
- [7] *Гуревич А. В., Зыбин К. П.* Пробой на убегающих электронах и электрические разряды во время грозы // *Успехи физических наук*, 2001, т.171, вып.11, С.1177–1199.
- [8] *Stenflo L.* Runaway in weakly ionized plasmas // *Plasma Phys.*, 1966, v.8, P.665-673.
- [9] *Potapenko I.F., Bobylev A.V., Mossberg E.* Deterministic and stochastic methods for nonlinear Landau-Fokker-Planck kinetic equations with applications to plasma physics // *Transp. Theory Stat. Phys.*, 2008, v.37, P.113-170.
- [10] *Bobylev A.V., Nanbu K.* Theory of collision algorithms for gases and plasmas based on the Boltzmann equation and the Landau-Fokker-Planck equation // *Phys.Rev.E*, 2000, v.61, P.4576-4586.
- [11] *Nanbu K.* Theory of cumulative small-angle collisions in plasmas // *Phys.Rev. E*, 1997, v.55, P.4642-4652.
- [12] *Bobylev A.V., Mossberg E., Potapenko I.F.* A DSMC method for the Landau-Fokker-Planck equation // *Proceedings of XXV International symposium on RGD*, 2006, P.479-483, Eds. M.S.Ivanov, A.K.Rebrov, Novosibirsk, Publ. of the Siberian Branch of RAS.
- [13] *Dimarko G., Caflish R., Pareschi L.* Direct Simulation Monte Carlo schemes for Coulomb interactions in plasmas // *Commun. Appl. Indust. Math.*, 2010, v.1, P.72-91.
- [14] *Бобылев А.В., Карпов С.А., Потепенко И.Ф.* Метод Монте-Карло для двухкомпонентной плазмы. Препринт N 21, М.: ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, 2012, 25с.
- [15] *Бобылев А.В., Потепенко И.Ф., Карпов С.А.* Метод Монте-Карло для двухкомпонентной плазмы. - Математическое моделирование. № 9, 2012. С.35-49.

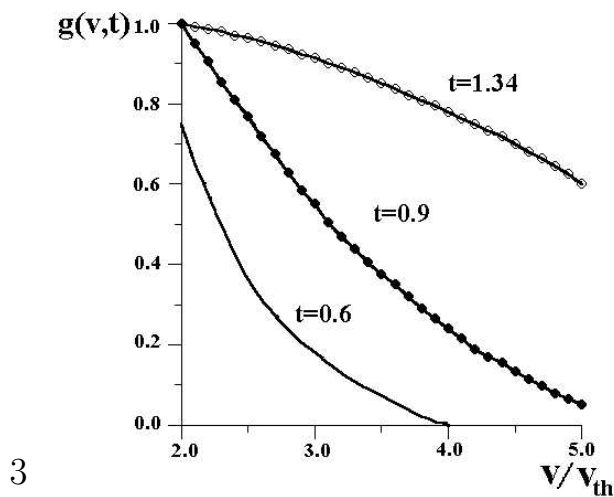
- [16] *Бобылев А.В., Карпов С.А., Потапенко И.Ф.* Методы типа Монте-Карло для моделирования кулоновских столкновений в многокомпонентной плазме. - Препринт ИПМ № 26, 2012 г. - 32с.
- [17] *Бобылев А.В., Потапенко И.Ф., Карпов С.А.* DSMC methods for multicomponent plasmas . - AIP Conference Proceedings. v. 1501, p.541-548; doi:<http://dx.doi.org/10.1063/1.4769589>
- [18] *Бобылев А.В.* О разложении интеграла столкновений Больцмана в ряд Ландау // ДАН СССР, 1975, т.225, вып.3, С.535-538; *Бобылев А.В.* Приближение Ландау в кинетической теории газов и плазмы. - Москва: ИПМ им. М.В.Келдыша, АН СССР, 1974, препринт N 76, 49с.
- [19] *Degond P., Lucquin-Desreux B.* The Fokker-Planck asymptotics of the Boltzmann collision operator in the Coulomb case // Math. Models Methods Appl. Sci., 1992, v.2, P.167-182.
- [20] *Desvillettes L.* On asymptotics of the Boltzmann equation when collisions became grazing // Transp. Th. Stat. Phys., 2002, v.2, P.259-276.
- [21] *Takizuka T., Abe H.* A binary collision model for plasma simulation with a particle code // J. Comput. Phys., 1977, v.25, P.205-219.
- [22] *Wang C., et al.* Particle simulation of Coulomb collisions: Comparing the methods of Takizuka & Abe and Nanbu // J. Comput. Phys., 2008, v.227, P.4308-4329.
- [23] *Arsen'ev A.A.* Approximation of the Boltzmann equation by stochastic equations // ЖВМ и МФ, 1988, т.28, С.560-567; перевод в U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys., 1988, v.28, P.164-169.
- [24] *Arsen'ev A.A.* On the relation between Boltzmann equation and Landau-Fokker-Planck equations // ДАН СССР, 1989, т.305, с.322-324; перевод в Sov. Phys. Dokl., v.34, 1989, P.212-214.
- [25] *Силлин В.П.* Введение в кинетическую теорию газов. -М.: Наука, 1971, 332с.
- [26] *Кас М.* Probability and related topics in physical sciences. Interscience Publishers, Ltd., London, Inc., New York, 1957, 266p.
- [27] *Бобылев А.В.* О точных решениях уравнения Больцмана // ДАН СССР, 1975, т. 225, вып.6, С.1296-1299.

- [28] Бобылев А.В., Потепенко И.Ф., Чуянов В.А. Кинетические уравнения типа Ландау как модель уравнения Больцмана и полностью консервативные разностные схемы // Ж. вычисл. матем. и мат. физ., 1980, т. 20, С.993-1004.
- [29] Potapenko I.F., Bobylev A.V., Azevedo C.A., Assis A.S. Evolution of the distribution function tails for the power law interaction potentials // Phys. Rev. E. 1997, v.56, P.7159-7166.



1

Рис. 1. Зависимость распространения хвоста электронной функции распределения $g(v,t)$ от скорости в различные моменты времени; скорость нормирована на тепловую, $s = 1$



3

Рис. 2. Зависимость распространения хвоста электронной функции распределения $g(v,t)$ от скорости в различные моменты времени; $s = 4$

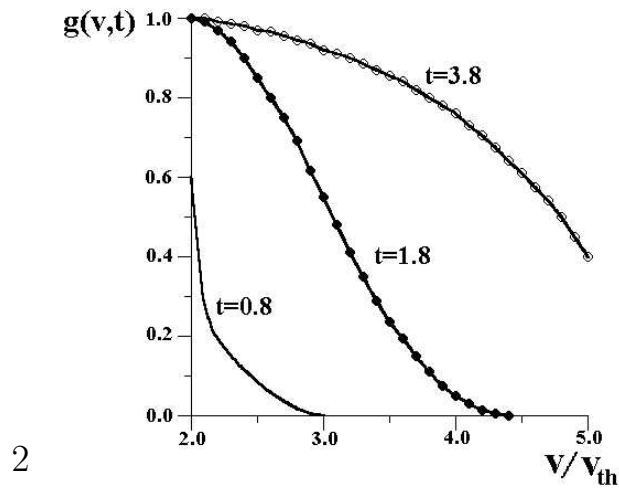


Рис. 3. Зависимость распространения хвоста электронной функции распределения $g(v, t)$ от скорости в различные моменты времени; $s = 2$

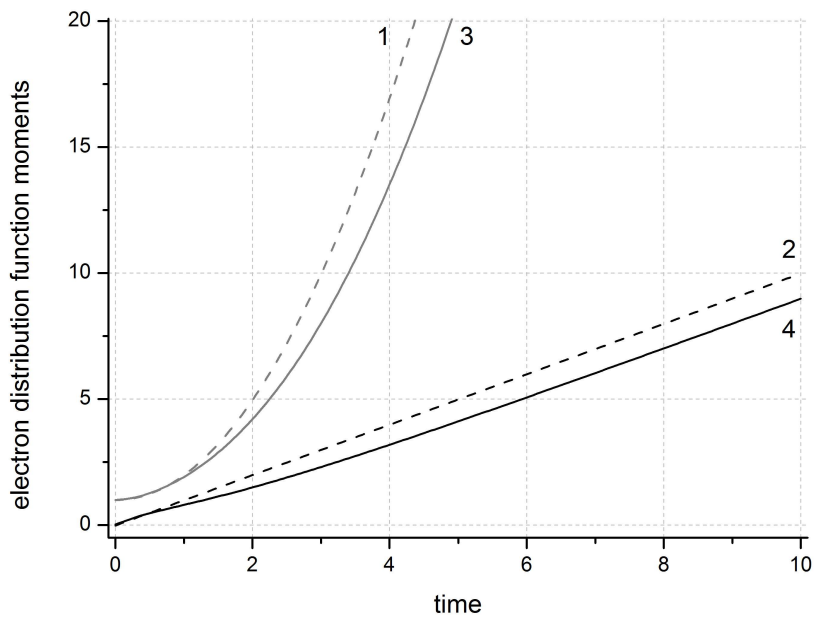


Рис. 4. Сравнение зависимостей моментов электронной функции распределения от времени для одно- и двухкомпонентной плазмы, находящейся в постоянном электрическом поле при $E_z = 1.0$, $\gamma = 1/1000$, $N_1 = 1000$, $K = 20$, $\varepsilon = 0.01$; 1, 2 - энергия и ток электронов в однокомпонентной плазме, 3, 4 - энергия и ток электронов в двухкомпонентной плазме

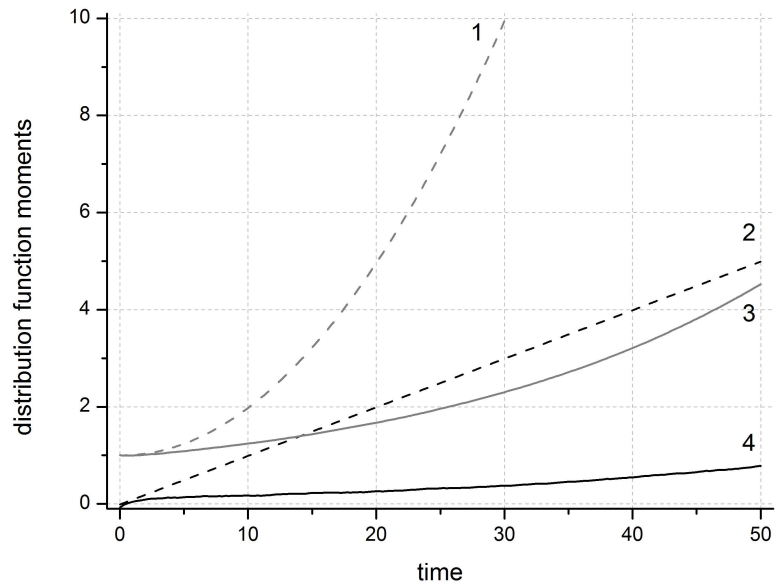


Рис. 5. Сравнение зависимостей моментов электронной функции распределения от времени для одно- и двухкомпонентной плазмы, находящейся в постоянном электрическом поле при $E = 0.1$, $\gamma = 1/1000$, $N_1 = 1000$, $K = 20$, $\varepsilon = 0.01$; 1, 2 - энергия и ток электронов в однокомпонентной плазме, 3, 4 - энергия и ток электронов в двухкомпонентной плазме

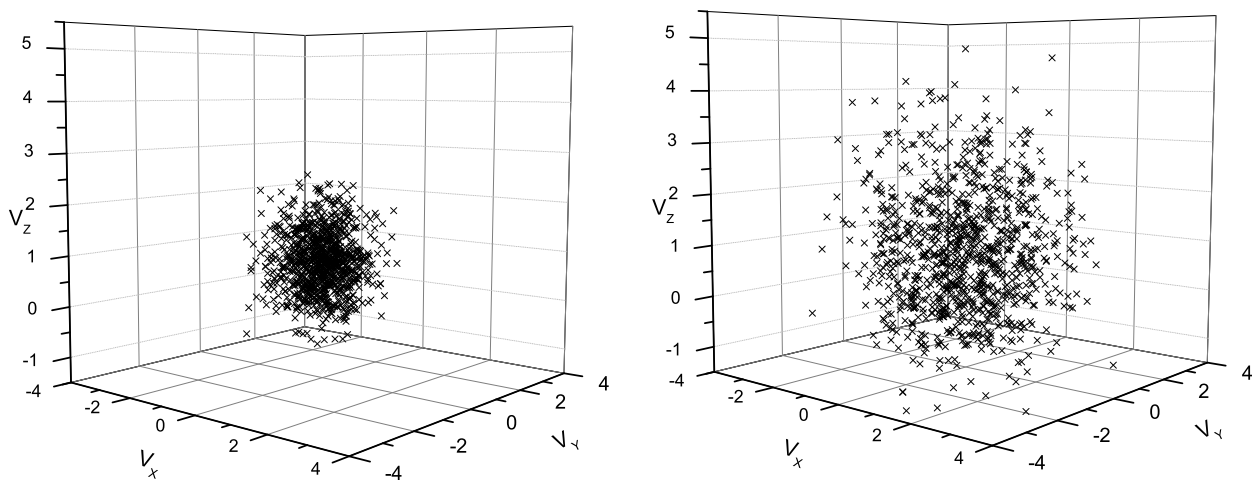


Рис. 6. Убегающие электроны со средней скоростью $\langle v \rangle = 0.8$ для одного сорта частиц (слева) и в случае двух сортов (справа), $\gamma = 1/1000$

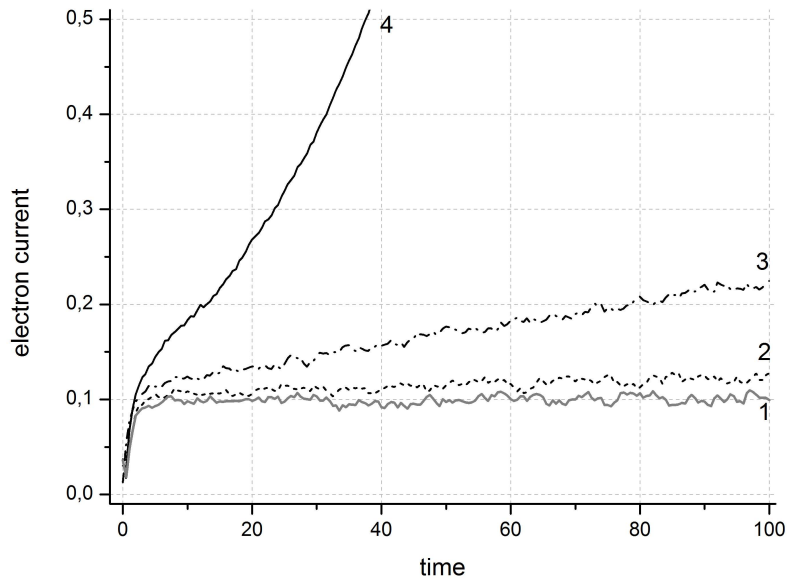


Рис. 7. Зависимость электронного тока от времени для далекодействующих потенциалов взаимодействия $1/r^{-s}$ ($1 \leq s \leq 4$) и параметров $E = 0.1$, $\gamma = 1/1000$, $N = 1000$, $K = 20$, $\varepsilon = 0.05$; 1 - $s=4$, 2 - $s=3$, 3 - $s=2$, 4 - $s=1$

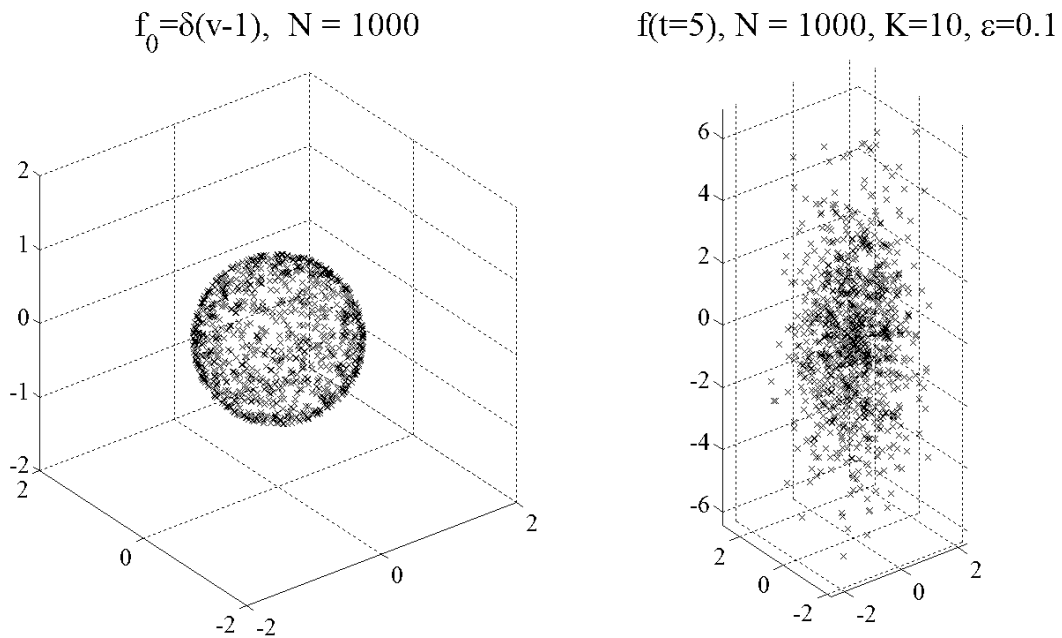


Рис. 8. Начальное распределение (слева) и функция распределения в момент времени $t = 5$, $D = 0.5$