ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 5 за 2013 г.

Парусников В.И.

О статистике дробных долей чисел j alpha

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Парусников В.И. О статистике дробных долей чисел j alpha // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 5. 16 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-5

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

В.И. Парусников

О СТАТИСТИКЕ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ ЧИСЕЛ j alpha

Москва, 2013 г.

УДК 511.41, 511.43

В. И. Парусников. О статистике дробных долей чисел $j\alpha$. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2013.

Пусть α – иррациональное число. При $n \in \mathbb{N}$ рассматриваются множества точек $\alpha_j = j\alpha \pmod 1 = \beta_{k(j)},\ j = 0, \ldots, n$. Точки β_k разбивают отрезок $[0, 1]$ на $n+1$ отрезков $[\beta_k, \beta_{k+1}]$ длиной $\delta_k = \beta_{k+1} - \beta_k$. В работе с помощью аппарата цепных дробей исследуется связь хронологического индекса j и порядкового индекса $k(j) = k(j, n)$ чисел $\alpha_j = \beta_{k(j)}$, для чего вводятся графы левых и правых предшественников точки α_j. Вычислены статистики длин $\delta_k = \delta_k(n+1)$, которые сравниваются со статистиками распределения длин интервалов, на которые отрезок $[0, 1]$ делят точки $(n+1)$-кратной реализации равномерно распределенной случайной величины. Средние значения сравниваемых статистик совпадают, а отношения дисперсий при больших n может быть сколь угодно велико, так же как и сколь угодно мало.

V. I. Parusnikov. About statistics of fractional parts of numbers $j\alpha$.
Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2013.

Let α be an irrational number. For $n \in \mathbb{N}$, we consider sets of points $\alpha_j = j\alpha \pmod 1 = \beta_{k(j)},\ j = 0, \ldots, n$. Points β_k divide the interval $[0, 1]$ on $n+1$ segments $[\beta_k, \beta_{k+1}]$ which lengths are $\delta_k = \beta_{k+1} - \beta_k$. In the paper, with the help of continued fractions theory, we investigate the relation of indexes j and $k(j) = k(j, n)$ of numbers $\alpha_j = \beta_{k(j)}$. For this purpose we introduce graphs of the left and of the right predecessors of a point α_j. We calculated statistics of lengths $\delta_k = \delta_k(n+1)$. The last ones are compared with statistics of the distribution of lengths of analogous segments in the case when all of numbers α_j are uniformly distributed independent random values. The means in two statistics considered coincide, but the ratio of its dispersions may take arbitrary small value and arbitrary big value as well.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 11-01-00023а, и программой фундаментальных исследований ОМН РАН "Современные проблемы теоретической математики".

§ 1. 'Левые' и 'правые' подходящие и промежуточные дроби

Пусть задано вещественное $\alpha \in \mathbb{R}$. Если специально не оговорено, будем считать, что оно – положительное иррациональное: $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \alpha > 0$. Фигурными скобками $\{\!|\ .\ |\!\}$ будем обозначать дробную часть числа

$$\{\!|\mathrm{x}|\!\} \in \mathrm{T}, \quad \mathrm{T} = [0,1[\stackrel{\text{def}}{=} \{\mathrm{y}:\ 0 \le \mathrm{y} < 1\}.$$

где $\mathrm{T} = \mathrm{T}^1$ – единичный полуинтервал и он же – одномерный тор. В этой интерпретации естественно отождествлять точки 0 и 1.

Для конечной или бесконечной последовательности $\mathbf{a}$ её j-й член будем обозначать $\mathbf{a}_j$:

$$\mathbf{a} = \left\{\mathbf{a}_j\right\}_{j=J_0}^{J}, \quad J_0 \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Элементами $\mathbf{a}_j$ будут выступать целые, рациональные или вещественные числа, J будет целым числом или бесконечностью.

Разностью последовательности (1) назовём последовательность

$$\Delta\mathbf{a} = \left\{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_{j-1}\right\}_{j=J_0+1}^{J}.$$

Число α единственным образом разлагается в (бесконечную) цепную дробь

$$c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\ddots \quad + \cfrac{1}{c_k + \cfrac{1}{\ddots}}}}, \quad c_0 \in \mathbb{Z}_+,\ c_k \in \mathbb{N}\ (k \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Число c_0 у нас лежит в $\mathbb{Z}_+$, поскольку $\alpha > 0$.

Свойства цепных дробей хорошо изложены, например, в монографиях [1], [2], [3]. По ходу изложения мы приведем доказательства только некоторых из этих свойств.

Определены последовательности *подходящих дробей* $\Pi_k = \dfrac{P_k}{Q_k}$ к (2)

$$\Pi_k = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\ddots \quad + \cfrac{1}{c_k}}}, \tag{3}$$

и *промежуточных (подходящих) дробей* $(\Pi_{k,c_k} = \Pi_k)$

$$\Pi_{k,j} = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\ddots \quad + \cfrac{1}{c_{k-1} + \cfrac{1}{j}}}}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+,\ j = 1, \ldots, c_k. \tag{4}$$

При фиксированном k формулы (4) задают *k-ю серию* промежуточных дробей. Формула (4) имеет смысл при любых $j \in \mathbb{R}$. Допустив в ней изменение индекса j от 0, а не от единицы, получим *расширенную k-ю серию промежуточных дробей*, включающую $\Pi_{k,0} = \Pi_{k-2}$ (последнее равенство легко увидеть из идущих ниже формул (5), (6). К этой же серии примыкают промежуточные подходящие дроби с индексом $j = -1$: $\Pi_{k+1,-1} = \Pi_{k,c_k-1}$ (такие объекты у нас возникнут в § 3 – см. (20).

Числители P_k и *знаменатели* Q_k подходящих дробей можно считать взаимно простыми целыми числами, удовлетворяющими формальным начальным условиям (при $k = -2, -1$) и рекуррентным уравнениям

$$\begin{array}{llll} P_{-2} = 0, & P_{-1} = 1, & P_k = c_k P_{k-1} + P_{k-2}, & \\ Q_{-2} = 1, & Q_{-1} = 0, & Q_k = c_k Q_{k-1} + Q_{k-2}, & \end{array} \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{5}$$

Числители и знаменатели промежуточных дробей задаются формулами

$$\Pi_{k,j} = \frac{P_{k,j}}{Q_{k,j}}, \quad \begin{array}{l} P_{k,j} = jP_{k-1} + P_{k-2}, \\ Q_{k,j} = jQ_{k-1} + Q_{k-2}, \end{array} \quad k \in \mathbb{Z}_+,\ j = 0, 1, \ldots, c_k. \tag{6}$$

Определим также последовательность линейных форм от α

$$D = \big\{D_k\big\}_{k=-2}^{\infty}, \quad D_k = Q_k\alpha - P_k.$$

Образуем 4 последовательности – промежуточных дробей π, их числителей $\mathbf{p}$, знаменателей $\mathbf{q}$ и линейных форм $\mathbf{d} = \mathbf{q}\alpha - \mathbf{p}$, введя сквозную одноиндексную нумерацию; индексацию начнём с 0:

$$\begin{gathered} \mathbf{p} = \big\{\mathbf{p}_i\big\}_{i=0}^{\infty} = \{P_{-2}, P_{-1}, \overbrace{P_{0,1}, \ldots, P_0}^{c_0}, \ldots, P_{k-1}, \overbrace{P_{k,1}, \ldots, P_{k,c_k-1}, P_k}^{c_k}, \ldots\}, \\ \mathbf{q} = \big\{\mathbf{q}_i\big\}_{i=0}^{\infty} = \{Q_{-2}, Q_{-1}, \overbrace{Q_{0,1}, \ldots, Q_0}^{c_0}, \ldots, Q_{k-1}, \overbrace{Q_{k,1}, \ldots, Q_{k,c_k-1}, Q_k}^{c_k}, \ldots\}, \\ \pi = \{\Pi_{-2}, \Pi_{-1}, \overbrace{\Pi_{0,1}, \ldots, \Pi_0}^{c_0}, \ldots, \Pi_{k-1}, \overbrace{\Pi_{k,1}, \ldots, \Pi_{k,c_k-1}, \Pi_k}^{c_k}, \ldots\}, \\ \pi_i = \frac{\mathbf{p}_i}{\mathbf{q}_i}, \quad \mathbf{d}_i = \mathbf{q}_i\alpha - \mathbf{p}_i \ \ (i \in \mathbb{Z}_+), \quad \Pi_{-2} = \frac{0}{1}, \ \ \Pi_{-1} = \frac{1}{0}. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь некоторые промежуточные дроби, чтобы подчеркнуть их ведущую роль, записаны как подходящие: $\Pi_{k,c_k} = \Pi_k$.

Из формул (5), (6) видно, что знаменатели $Q_k, \mathbf{q}_i$ неотрицательны и с ростом индекса возрастают.

Из рекуррентных формул (5), (6) следует ряд формул для выражений, сформированных из числителей и знаменателей последовательных подходящих и промежуточных дробей:

$$\begin{aligned} Q_{k-1}P_k - P_{k-1}Q_k &= (-1)^{k+1}, \\ Q_{k-2}P_k - P_{k-2}Q_k &= (-1)^k c_k, \\ Q_{k,j-1}P_{k,j} - P_{k,j-1}Q_{k,j} &= (-1)^k, \quad j = 1, \ldots, c_k. \end{aligned} \tag{8}$$

Из этих свойств следует, что по чётным индексам $2k$ промежуточные дроби растут, а по нечётным $2k+1$ – убывают. Число α находится между ними в промежутке, длина которого $\Pi_{2k+1} - \Pi_{2k} = 1/Q_{2k}Q_{2k+1}$ стремится к нулю. Поэтому подходящие (и промежуточные) дроби сходятся к α. Итак, число α больше, чем промежуточные дроби из серий с чётными индексами k, и меньше промежуточных дробей с нечетными k:

$$c_0 = \Pi_0 < \ldots < \overbrace{\Pi_{2k-2,1} < \ldots < \Pi_{2k-2}}^{c_{2k-2}} = \overbrace{\Pi_{2k,0} < \Pi_{2k,1} < \Pi_{2k,2} < \ldots < \Pi_{2k}}^{1+c_{2k}} < \ldots < \alpha <$$
$$\ldots < \underbrace{\Pi_{2k+1} < \ldots < \Pi_{2k+1,2} < \Pi_{2k+1,1} < \Pi_{2k+1,0}}_{c_{2k+1}+1} = \Pi_{2k-1} < \ldots < \Pi_{1,1} = c_0 + 1. \tag{9}$$

Рациональную дробь p/q (p, q – целые, $q \geq 1$) назовём *наилучшим приближением к* α, если не существует целых p', q' с $1 \leq q' \leq q$, для которых $|p' - q'\alpha| < |p - q\alpha|$. Согласно этому определению, наилучших приближений к полуцелым α ($\alpha + 1/2 \in \mathbb{Z}$) со знаменателем $q = 2$ существует ровно два. Во всех остальных случаях с фиксированным знаменателем q имеется не более одного наилучшего приближения. Наилучшее приближения – несократимые дроби.

Для не полуцелых α и, в частности, для иррациональных α подходящие дроби к α суть его наилучшие приближения (см. [1, § 2]).

Часть промежуточных дробей расположена левее α, а часть – правее него. Учитывая свойство (9), определим *левую* и *правую последовательности промежуточных дробей* π^L и π^R, в которые мы включим промежуточные дроби (включая подходящие) серий с чётными и нечётными номерами соответственно; нас будут интересовать также последовательности их знаменателей

$\mathbf{q}^L$, $\mathbf{q}^R$, числителей $\mathbf{p}^L$, $\mathbf{p}^R$, и линейных форм $\mathbf{d}^L$, $\mathbf{d}^R$:

$$\mathbf{q}^L=\{1,\overbrace{Q_{0,1},\ldots,Q_{0,c_0}}^{c_0},Q_{2,1},\ldots,Q_{2k-2,c_{2k-2}},\overbrace{Q_{2k,1},\ldots,Q_{2k,c_{2k}}}^{c_{2k}},\ldots\},$$

$$\mathbf{q}^R=\{0,\overbrace{Q_{1,1},\ldots,Q_{1,c_1}}^{c_1},Q_{3,1},\ldots,Q_{2k-1,c_{2k-1}},\overbrace{Q_{2k+1,1},\ldots,Q_{2k+1,c_{2k+1}}}^{c_{2k-1}},\ldots\},$$

$$\mathbf{p}^L=\{0,\overbrace{P_{0,1},\ldots,P_{0,c_0}}^{c_0},P_{2,1},\ldots,P_{2k-2,c_{2k-2}},\overbrace{P_{2k,1},\ldots,P_{2k,c_{2k}}}^{c_{2k}},\ldots\},$$

$$\mathbf{p}^R=\{1,\overbrace{P_{1,1},\ldots,P_{1,c_1}}^{c_1},P_{3,1},\ldots,P_{2k-1,c_{2k-1}},\overbrace{P_{2k+1,1},\ldots,P_{2k+1,c_{2k+1}}}^{c_{2k-1}},\ldots\},$$

$$\pi_i^L=\frac{\mathbf{p}_i^L}{\mathbf{q}_i^L},\qquad \pi_i^R=\frac{\mathbf{p}_i^R}{\mathbf{q}_i^R},\qquad \mathbf{d}_i^L=\mathbf{q}_i^L\alpha-\mathbf{p}_i^L,\qquad \mathbf{d}_i^R=\mathbf{q}_i^R\alpha-\mathbf{p}_i^R,\qquad i\in\mathbb{Z}_+.$$

Здесь, в соответствии со здравым смыслом, если $c_0\le 0$, группа из c_0 членов последовательностей пропадает. Для наглядности приведём явный вид рациональных чисел – начальных членов последовательностей промежуточных дробей

$$\pi^L=\ \{0,\overbrace{1,2,\ldots,c_0}^{c_0},\overbrace{c_0+\frac{1}{c_1+1},c_0+\frac{1}{c_1+1/2},\ldots,c_0+\frac{1}{c_1+1/c_2}}^{c_2},\ldots\},$$

$$\pi^R=\ \{\frac{1}{0},\overbrace{c_0+1,c_0+\frac{1}{2},\ldots,c_0+\frac{1}{c_1}}^{c_1},c_0+\frac{1}{c_1+1/(c_2+1)},\ldots\},$$

и несколько первых линейных форм

$$\mathbf{d}^L=\ \{\alpha,\overbrace{\alpha-1,\ \ldots,\alpha-c_0}^{c_0},\overbrace{(c_1+1)(\alpha-c_0)-1,\ \ldots.(c_1c_2+1)(\alpha-c_0)-c_2}^{c_2},\ldots\},$$

$$\mathbf{d}^R=\ \{-1,\overbrace{\alpha-c_0-1,2\alpha-(2c_0+1),\ \ldots,c_1\alpha-(c_1c_0+1)}^{c_1},\ldots\}.$$

При этом члены последовательностей $\mathbf{d}^L$ и

$$\mathbf{d}^R+1=\ \{0,\alpha-c_0,2(\alpha-c_0),\ \ldots,c_1(\alpha-c_0),(c_1(c_2+1)+1)(\alpha-c_0)+c_2,\ldots\}$$

лежат на промежутке $[0,1[$. Отметим, что единственная величина $\alpha-c_0$, встречающаяся в обеих этих последовательностях, происходит от различных – правой и левой – форм.

Верны неравенства, более сильные, чем (9). Для промежуточных линейных форм четных и нечетных серий верно:

$$\begin{aligned} (\mathbf{d}_0^L = \alpha \ \geq\ )\mathbf{d}_{c_0}^L = \ \{\!|\alpha|\!\} \ > \ldots > \ \mathbf{d}_i^L \ > \ \mathbf{d}_{i+1}^L \ > \ldots > \ 0, \\ -\mathbf{d}_0^R = 1 \ > \ -\mathbf{d}_1^R = 1 - \{\!|\alpha|\!\} \ > \ldots > \ -\mathbf{d}_i^R \ > \ -\mathbf{d}_{i+1}^R \ > \ldots > \ 0. \end{aligned} \tag{10}$$

(Взятое в скобки левое неравенство в первой строке выполнено лишь при $c_0 \geq 0$, т.е. лишь при $\alpha \geq 0$.) Действительно, учитывая, что две последовательные промежуточные дроби $\mathbf{q}_i^L$ (или $\mathbf{q}_i^R$) всегда можно считать принадлежащими одной расширенной k-й серии, для их разности, взятой с соответствующим знаком, имеем

$$(-1)^{k+1}((Q_{k,j+1}\alpha - P_{k,j+1}) - (Q_{k,j}\alpha - P_{k,j})) = (-1)^{k+1}(Q_{k-1}\alpha - P_{k-1}) =$$

$$(-1)^{k-1}Q_{k-1}(\alpha - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}) > 0.$$

Попутно мы установили структуру разностей последовательностей знаменателей, числителей и линейных форм промежуточных дробей одной чётности:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{q}^L &= \{\overbrace{Q_{-1}, \ldots, Q_{-1}}^{c_0}, \overbrace{Q_1, \ldots, Q_1}^{c_2}, \ldots, \overbrace{Q_{2k-1}, \ldots, Q_{2k-1}}^{c_{2k}}, \ldots\}, \\ \Delta\mathbf{q}^R &= \{\overbrace{Q_0, \ldots, Q_0}^{c_1}, \ldots, \overbrace{Q_{2k}, \ldots, Q_{2k}}^{c_{2k+1}}, \ldots\}, \\ \Delta\mathbf{d}^L &= \{\overbrace{D_{-1}, \ldots, D_{-1}}^{c_0}, \overbrace{D_1, \ldots, D_1}^{c_2}, \ldots, \overbrace{D_{2k-1}, \ldots, D_{2k-1}}^{c_{2k}}, \ldots\}, \\ \Delta\mathbf{d}^R &= \{\overbrace{D_0, \ldots, D_0}^{c_1}, \ldots, \overbrace{D_{2k}, \ldots, D_{2k}}^{c_{2k+1}}, \ldots\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Рациональную дробь p/q (p, q – целые, $q \geq 1$) назовём *наилучшим левым (*соответственно *правым) приближением к* α, если число $q\alpha - p$ лежит в $[0, 1[$ (соответственно $q\alpha - p \in\,]-1, 0]$) и для всех целых p', q' с $1 \leq q' \leq q$ выполнено $q'\alpha - p' \notin\ [0, q\alpha - p[$ (соответственно $q'\alpha - p' \notin\,]q\alpha - p, 0]$). Односторонние наилучшие приближения, в отличие от обычных, двусторонних наилучших приближений, единственны.

Методами, аналогичными использованным в [1, § 2], можно доказать следующий известный факт:

Предложение 1. *Левые (правые) наилучшие приближения суть левые (правые) промежуточные дроби.*

В заключение параграфа для указания того, каким сериям принадлежат введенные здесь величины, введём функцию $\mathrm{Kj} : \ \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{N}$, сопоставляющую индексу i пару индексов $k \in \mathbb{Z}_+,\ j \in \mathbb{N}$, таких, что $\Pi_{k,j} = \pi_i$: $\mathrm{Kj}(l) = (k, j)$. Аналогично $\Pi_{k,j}^L = \pi_i^L$: $\mathrm{Kj}^L(l) = (k, j), \Pi_{k,j}^R = \pi_i^R$: $\mathrm{Kj}^R(l) = (k, j)$.

Введём также числа членов последовательностей в первых сериях

$$S_k = 2 + \sum_{i=1}^{k} c_i, \quad S_k^L = 1 + \sum_{i=1}^{k} c_{2i}, \quad S_k^R = 1 + \sum_{i=1}^{k} c_{2i+1}.$$

§ 2. Обмотка окружности. Графы левых и правых предшественников точки

При обмотке тора (окружность – одномерный тор T) естественным образом возникают *остатки*

$$\alpha_j = \{\!|\alpha \mathrm{j}|\!\} \in \mathrm{T}, \quad \mathrm{j} \in \mathbb{Z}_+.$$

Видно, что если $0 < \alpha < 1$, то $\alpha = \alpha_1$.

Из формул (10) следует, что линейные формы, отвечающие промежуточным цепным дробям, суть числа из интервала $]-1\ ,1\ [$, положительные для чётных номеров серий и отрицательные для нечётных. Отсюда для индексов j, равных знаменателям промежуточных подходящих дробей, верно

$$\alpha_{\mathbf{q}_i^L} = \mathbf{d}_i^L, \quad \alpha_{\mathbf{q}_i^R} = \mathbf{d}_i^R + 1, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

Так как α иррационально, при разных $j \in \mathbb{Z}$ все остатки α_j не равны друг другу. Присоединив к последовательности остатков

$$\mathcal{A}^{(n)} = \left\{\alpha_j\right\}_{j=1}^{n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

тривиальный остаток $\alpha_0 = 0$ и дублирующий его остаток $\alpha_0' = 1$, получим последовательность $\bar{\mathcal{A}}^{(n)} = \left\{\alpha_j\right\}_{j=0}^{n} \bigcup \left\{1\right\}$. Переупорядочив по возрастанию последовательность $\mathcal{A}^{(n)}$ ($\bar{\mathcal{A}}^{(n)}$), получим последовательность $\mathcal{B}^{(n)} = \left\{\beta_j^{(n)}\right\}_{j=1}^{n}$ ($\bar{\mathcal{B}}^{(n)} = \left\{\beta_j^{(n)}\right\}_{j=0}^{n+1}$):

$$0 = \beta_0^{(n)} < \beta_1^{(n)} < \cdots < \beta_n^{(n)} < \beta_{n+1}^{(n)} = 1. \tag{12}$$

Множество $\mathcal{B}^{(0)}$ состоит из двух точек: 0 и 1.

Перенумерация точек $\mathcal{A}^{(n)}$ в точки $\mathcal{B}^{(n)}$ даётся некоторой перестановкой $S^{(n)}$ n элементов:

$$\alpha_j = \beta_{S^{(n)}(j)}^{(n)}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Пусть $n > 0$. Точка α_n лежит в множестве $\mathcal{B}^{(n)}$. В $\mathcal{B}^{(n)}$ она имеет номер $S^{(n)}(n)$: $\alpha_n = \beta_{S^{(n)}(n)}^{(n)}$, где $1 \le S^{(n)}(n) \le n$. Далее, левый сосед точки α_n в множестве $\bar{\mathcal{B}}^{(n)}$, т.е. точка множества $\bar{\mathcal{B}}^{(n)}$ с номером $S^{(n)}(n) - 1$, это какая-то точка α_l с индексом l, отличным от n: $\beta^{(n)}_{S^{(n)}(n)-1} = \alpha_l$. Индекс l назовём *левым предшественником* индекса n, а n для l будет *потомком первой очереди левой ветви*. Итак, левый предшественник по n определен однозначно и тем самым на множестве $n \in \mathbb{N}$ задана принимающая целые неотрицательные значения функция, которую мы обозначим $l = j_L(n)$. Мы видели, что $n > j_L(n) \geq 0$. Если $j_L(n) > 0$, можно рассмотреть $j_L(j_L(n)) = j_L^2(n) < j_L(n) < n$ и продолжать далее *процесс отыскания левых предшественников*, пока на каком-то шаге, который мы обозначим $\nu_L(n) > 0$, не окажется $j_L^{\nu_L(n)}(n) = 0$ (при этом $j_L^{\nu_L(n)-1}(n) > 0$). Число $\nu_L(n)$ назовём *числом левых предшественников (индекса) n*.

Соберем всех предшественников в последовательность, которую назовём *кланом $\overleftarrow{\mathcal{L}} = \overleftarrow{\mathcal{L}}(n)$ левых предшественников индекса n*:

$$\overleftarrow{\mathcal{L}}(n) = \{0, j_L^{\nu_L(n)-1}(n), \ldots, j_L^2(n), j_L(n), n\}, \quad \#\overleftarrow{\mathcal{L}}(n) = \nu_L(n)+1 \in \mathbb{N}.$$

Здесь # – число элементов множества.

Для пока не рассматривавшегося $n = 0$ положим $\overleftarrow{\mathcal{L}}(0) = \{0\}$ и $\nu_L(0) = 0$.

Можно ввести множество *потомков очереди ν левой линии* к какому-то числу n (множество $\overrightarrow{\mathcal{L}}^{(\nu)}(n)$) и множество всех *потомков левой линии* $\overrightarrow{\mathcal{L}}(n) = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \overrightarrow{\mathcal{L}}^{(\nu)}(n)$. Для различных n множества $\overrightarrow{\mathcal{L}}(n)$ либо не пересекаются, либо содержатся одно в другом.

Мы видим, что иррациональное число α задаёт на множестве всех неотрицательных целых чисел $n \in \mathbb{Z}_+$ ориентированный (в сторону предшествования) древовидный граф $\mathcal{L}$ с рёбрами $(n, \nu_L(n))$. Множества $\overleftarrow{\mathcal{L}}(n)$, $\overrightarrow{\mathcal{L}}^{(\nu)}(n)$, $\overrightarrow{\mathcal{L}}(n)$ будут его подграфами.

Замечание. Не только для иррационального, но и для рационального $\alpha = p/q$ при $n < q$ тоже корректно определены n-элементное множество $\mathcal{B}^{(n)}$, перестановка $S^{(n)}$ и функция $\nu_L(n)$. Далее, при $n > q$ можно положить по определению, например, $\nu_L(n) = n - q$ и ввести остальные связанные с α функции и множества.

Подобно только что проделанному, функцию $j_R(n)$ – *правого предшественника* можно определить, основываясь на соотношении $\beta^{(n)}_{S^{(n)}(n)+1} = \alpha_{j_R(n)}$. И далее, если $\alpha_{j_R(n)} \neq \alpha'_0 = 1$, организовать процесс отыскания правых предшественников, получить для n *правый клан предшественников*

$$\overleftarrow{\mathcal{R}}(n) = \{0, j_R^{\nu_R(n)-1}(n), \ldots, j_R^2(n), j_R(n), n\}, \quad \#\overleftarrow{\mathcal{R}}(n) = \nu_R(n)+1 \in \mathbb{N},$$

и *множества правых потомков ν-й очереди* и *(всех) потомков правой ветви*

$$\overrightarrow{\mathcal{R}}^{(\nu)}(n) = \{l \in \mathbb{Z}_+ :\ j_R^{\nu}(l) = n\},\ \nu \in \mathbb{Z}_+, \quad \overrightarrow{\mathcal{R}}(n) = \bigcup_{\nu \in \mathbb{Z}_+} \overrightarrow{\mathcal{R}}^{(\nu)}(n).$$

Вспоминая соотношения (10), связь наилучших правых (левых) приближений и правых (левых) промежуточных дробей (Предложение 1), в новой терминологии получаем:

$$\vec{\mathcal{L}}^{(1)}(0) = \ \{1 = \mathbf{q}_{c0}^L,\ \ \mathbf{q}_{c0+1}^L,\ \ \dots\ \ , \mathbf{q}_i^L,\ \ \dots\},$$

$$\vec{\mathcal{R}}^{(1)}(0) = \ \{1 = \mathbf{q}_1^R,\quad \mathbf{q}_2^R,\quad \dots\ \ , \mathbf{q}_i^R,\ \ \dots\}.$$

Последнее утверждение эквивалентно следующему:

Предложение 2. *Для индексов n, равных знаменателям промежуточных дробей $n = \mathbf{q}_i^L,\ i \geq c_0$, или $n = \mathbf{q}_i^R, i \geq 1$, справедливо*

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\mathcal{L}}(\mathbf{q}_i^L) = &\ \{0, 1 = \mathbf{q}_{c0}^L, \dots, \mathbf{q}_{i-1}^L, \mathbf{q}_i^L\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{R}}(\mathbf{q}_i^R) = &\ \{0, 1 = \mathbf{q}_1^R, \dots, \mathbf{q}_{i-1}^R, \mathbf{q}_i^R\}. \end{aligned} \tag{13}$$

§ 3. Статистика интервалов между точками множества $\mathcal{B}^{(n)}$

Известно, что остатки α_j равномерно распределены на окружности. Наша задача – описать, как распределены интервалы между этими точками. Рассмотрим равномерно распределенную на отрезке величину ξ. Ее функция распределения равна $F(x) = x$. Функция распределения n-мерной случайной величины $\xi^{(n)}$ это отображение $\Xi^{(n)}$ n-мерного единичного куба в себя: $\Xi^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$. $\Xi^{(n)}$ также можно считать отображением в себя n-мерного тора T^n.

По $\xi^{(n)}$ построим другое отображение $\eta^{(n)}$. Сначала в том торе T^n, куда идет отображение, перенесем начало координат так, чтобы одна из координат ξ_k была нулём. Затем перенумеруем в этом торе координаты j в порядке возрастания $(\xi_j - \xi_k) \bmod 1$. Получим $\eta^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (0, \eta_2, \dots, \eta_n)$. Неравенство $0 = \eta_1 \leq \eta_2 \dots \leq \eta_n \leq 1$ между координатами отвечает тому, что $(\eta_2, \dots, \eta_n)$ – это точка $(n-1)$-мерного симплекса. Разности координат $\xi_j - \xi_k$ равномерно распределены на торе T^1. Распределение величины η_2 даст распределение расстояния от проекции какой-то (k-й) точки при проекции тора T^n в отрезок T^1 до расположенной непосредственно справа от неё проекции другой точки. Функция распределения равна x^n. Вместо распределения функции η_2 удобнее рассмотреть совпадающее с ним распределение $1 - \eta_n$, т.е. расстояние от k-й точки ξ_k до предшествующей ей по величине.

Для нужного нам случая не n, а $n+1$ точек среднее значение величины η_2 (первый момент) и второй момент даются интегралами

$$\hat{M}_{1,n+1} = \int_0^1 n(1-x)x^{n-1}dx = \frac{1}{n+1},$$
$$\hat{M}_{2,n+1} = \int_0^1 n(1-x)^2x^{n-1}dx = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Итак, в соответствии со здравым смыслом, среднее значение расстояния между соседними точками при n-кратном 'бросании' точки в отрезок при помощи равномерно распределенной случайной величины равно $1/(n+1)$, т.е. соответствует действительно равномерному расположению этих точек на отрезке. Дисперсия равна

$$\hat{D}_{n+1} = \hat{M}_{2,n+1} - \hat{M}^2_{1,n+1} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{n}{n+2}\hat{M}^2_{1,n+1}. \tag{14}$$

Перейдём теперь снова к рассмотрению псевдо-равномерно распределенных величин, $(n+1)$-элементный ансамбль которых (включая точку 0) реализуется в виде множества $\mathcal{B}^{(n)}$. Среднее значение между этими точками, понятно, также равно $1/(n+1)$. Изучим среднеквадратичное отклонение расстояния между соседними точками и последней величиной.

Исследуем теперь структуру последовательностей $\Delta\overleftarrow{\mathcal{L}}(n)_k, \Delta\overleftarrow{\mathcal{R}}(n)_k$, для чего потребуется детально изучить множество разностей $\Delta\bar{\mathcal{B}}^{(n)}$ множества $\bar{\mathcal{B}}^{(n)}$.

Дополним последовательности $\overrightarrow{\mathcal{L}}^{(1)}(0), \overrightarrow{\mathcal{R}}^{(1)}(0)$ слева нулём, т.е. тем элементом, непосредственные потомки которого в них стоят; введем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{L}} &= \{0,\ \mathbf{q}^L_{c0},\ \mathbf{q}^L_{c0+1},\ \dots\ ,\mathbf{q}^L_i,\ \dots\}, \\ \overrightarrow{\mathcal{R}} &= \{0,\ \mathbf{q}^R_1,\ \ \mathbf{q}^R_2,\ \ \dots\ ,\mathbf{q}^R_i,\ \dots\} = \mathbf{q}^R. \end{aligned} \tag{15}$$

Из (11) следует, что разности последовательностей (15) равны

$$\Delta\overrightarrow{\mathcal{L}} = \{Q_0 = 1, \overbrace{Q_1, \dots, Q_1}^{c_2}, \dots, \overbrace{Q_{2k-1}, \dots, Q_{2k-1}}^{c_{2k}}, \dots\},$$

$$\Delta\overrightarrow{\mathcal{R}} = \{\overbrace{Q_0, \dots, Q_0}^{c_1}, \dots, \overbrace{Q_{2k}, \dots, Q_{2k}}^{c_{2k+1}}, \dots\}.$$

Элементы последовательностей (15) – индексы остатков, если они отличны от нуля, однозначно определяют сами остатки. Для нулей – начальных элементов последовательностей (15) – остатки следует выбрать так, чтобы сохранилась монотонность получившейся последовательности остатков: чтобы левые остатки убывали, стремясь к нулю, а правые – возрастали, стремясь к единице. Мы получим две последовательности

$$\begin{aligned} \alpha^L = &\ \{\alpha'_0 = 1,\ \alpha_{\mathbf{q}_{c0}^L},\ \alpha_{\mathbf{q}_{c0+1}^L},\ \dots\ ,\alpha_{\mathbf{q}_i^L},\ \dots\},\\ \alpha^R = &\ \{\alpha_0 = 0,\ \alpha_{\mathbf{q}_1^R},\ \alpha_{\mathbf{q}_2^R},\ \dots\ ,\alpha_{\mathbf{q}_i^R},\ \dots\}. \end{aligned}$$

Разности последних последовательностей равны

$$\Delta\alpha^L = \{1-\alpha_1, \overbrace{\alpha_{Q1},\dots,\alpha_{Q1}}^{c_2},\dots,\overbrace{\alpha_{Q2k-1},\dots,\alpha_{Q2k-1}}^{c_{2k}},\dots\},$$

$$\Delta\alpha^R = \{\overbrace{\alpha_{Q_0}=\alpha_1,\dots,\alpha_{Q_0}}^{c_1},\dots,\overbrace{\alpha_{Q_{2k}},\dots,\alpha_{Q_{2k}}}^{c_{2k+1}},\dots\}.$$

Введём множество $\Delta\bar{\mathcal{B}}^{(n)}$ разностей между точками множества $\bar{\mathcal{B}}^{(n)}$. Элементы этого множества обозначим $\delta_j^{(n)}$:

$$\delta_j^{(n)} = \beta_j^{(n)} - \beta_{j-1}^{(n)},\quad j = 1,\dots,n+1.$$

Все эти $n+1$ элементов положительны (у нас α – иррациональное). Оказывается, различных значений, которые могут принимать $\delta_j^{(n)}$, может быть три либо два. Для $n = 1$ это очевидно – варианты значений суть $\{\!|\alpha|\!\}$ и $1 - \{\!|\alpha|\!\}$.

Далее в формулах будет встречаться не индекс n, а число $n+1$ интервалов в $\Delta\bar{\mathcal{B}}^{(n)}$. За ним мы и будет следить.

Для множества $\Delta\bar{\mathcal{B}}^{(n)}$ обозначим возможные варианты длин интервалов в порядке их убывания через $G_j = G_{j,n+1}, j = 1,2,3$ (оговоримся, что интервалов длины $G_{2,n+1}$ может и не быть). Количества интервалов такой длины обозначим соответственно $F_j = F_{j,n+1}$. Опишем алгоритм вычисления этих величин.

Пусть $n+1 > 2$ лежит в между двумя знаменателями подходящих дробей, а именно, в диапазоне

$$1 \le Q_{k-1} \le n+1 < Q_k,\quad k \ge 1. \tag{16}$$

Тогда положим параметр b равным целой части отношения $((n+1) - Q_{k-2})/Q_{k-1}$:

$$b = \left[\frac{(n+1) - Q_{k-2}}{Q_{k-1}}\right]. \tag{17}$$

Индекс b это номер в k-й расширенной серии (4) промежуточных цепных дробей, для которого $Q_{k,b} \le n+1 < Q_{k,b+1}$. При этом $0 \le b < c_k$.

Положим

$$\begin{aligned} F_{1,n+1} &= -(n+1) + Q_{k-2} + (1+b)\ Q_{k-1}, \\ F_{2,n+1} &= \quad (n+1) - Q_{k-2} \quad\quad - b\ \ Q_{k-1}, \\ F_{3,n+1} &= \quad (n+1) \quad\quad\quad\quad\quad - \quad Q_{k-1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Отметим следующие свойства этих величин. Их сумма равна $n+1$: $F_1+F_3+F_3 = n+1$. Величины F_1, F_3 положительны, а F_2 неотрицательны, причём равенство $F_{2,n+1} = 0$ означает, что $n+1$ равно некоторому знаменателю $Q_{k,b}$ промежуточной дроби k-й серии.

Обозначим

$$\sigma = Q_{k-1}P_{k-2} - Q_{k-2}P_{k-1} = (-1)^k.$$

Величины $G_j = G_{j,n+1},\ j = 1,2,3$, с точностью до знаков $s_{j,n+1}$ будут линейными формами $f_{j,n+1}\alpha - g_{j,n+1}$, знаменатели $f_{j,n+1}$ которых являются знаменателями некоторых других промежуточных дробей:

$$G_{j,n+1} = s_{j,n+1}\alpha_{f_{j,n+1}}, \quad j = 1,2,3. \tag{19}$$

При $b = 0$ упомянутые величины равны

$$\begin{aligned} f_{1,n+1} &= -\ Q_{k-2} + Q_{k-1}, & s_{1,n+1} &= \ \ \sigma, \\ f_{2,n+1} &= \quad Q_{k-2}, & s_{2,n+1} &= -\sigma, \\ f_{3,n+1} &= \quad\quad\quad\quad Q_{k-1}, & s_{3,n+1} &= \ \ \sigma, \end{aligned} \tag{20}$$

$(f_{1,n+1} = Q_{k-1} - Q_{k-2} = Q_{k-3} + (c_{k-1}-1)Q_{k-2})$, а при $0 < b < c_k$ – равны

$$\begin{aligned} f_{1,n+1} &= Q_{k-2} + (b-1)\ Q_{k-1}, & s_{1,n+1} &= -\sigma, \\ f_{2,n+1} &= Q_{k-2} \quad + \ b \quad Q_{k-1}, & s_{2,n+1} &= -\sigma, \\ f_{3,n+1} &= \quad\quad\quad\quad\quad\quad Q_{k-1}, & s_{3,n+1} &= \ \ \sigma. \end{aligned} \tag{21}$$

Из того, что подходящие дроби дают наилучшие приближения числа α

$$\alpha - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{\sigma r}{Q_{k-1}Q_k}, \quad \alpha - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = -\frac{\sigma r_1}{Q_{k-2}Q_{k-1}}, \quad \text{где } r, r_1 \in [0,1[,$$

вытекает, что для элементов подходящих дробей верны следующие представления

$$P_{k-1} = \alpha Q_{k-1} - \frac{\sigma r}{Q_k}, \quad P_{k-2} = \alpha Q_{k-2} + \frac{\sigma r_1}{Q_{k-1}}, \quad Q_{k-2} = \frac{(1-r_1)Q_{k-1}}{r}.$$

Отсюда можно получить вид величин $G_{j,n+1}$, одинаковый для всех b диапазона $0 \le b < c_k$:

$$G_{1,n+1} = \frac{r_1 - b\ r + r}{Q_{k-1}}, \quad G_{2,n+1} = \frac{r_1 - b\ r}{Q_{k-1}}, \quad G_{3,n+1} = \frac{r}{Q_{k-1}}.$$

Видно, что одна из возможных длин отрезков равна сумме двух других: $G_{1,n+1} = G_{2,n+1} + G_{3,n+1}$. Простой выкладкой проверяется, что действительно из данных количеств $F_{j,n+1}$ отрезков длин $G_{j,n+1}$ можно составить единичный отрезок,

$$\sum_{j=1}^{3} F_{j,n+1} G_{j,n+1} = 1.$$

На знаменателях промежуточных дробей равны нулю частоты: $F_{3,n+1} = 0$ при $b = 0$ и $n+1 = Q_{k-1}$, а также $F_{2,n+1} = 0$ при $b > 0$ и $n+1 = Q_{k-1} + bQ_{k-1}$.

Справедлива следующая теорема, детально описывающая статистику интервалов между точками $\bar{\mathcal{B}}^{(n)}$.

Теорема 1. *Для каждого n множество $\bar{\mathcal{B}}^{(n)}$ разбиение отрезка задают величины, определенные равенствами* (16), (17), (18), (19), (20), (21).

Теорема доказывается методом математической индукции. Несмотря на элементарность, доказательство весьма громоздко. Приведём его идею.

Отслеживание величин F_j, G_j происходит по разному в зависимости от $n+1$. Различаем 3 случая: является ли $n+1$ знаменателем подходящей дроби α, знаменателем промежуточной подходящей дроби или не является ни тем ни другим.

При возрастании n на единицу точка α_{n+1} попадает в какой-то интервал длины $G_{3,n}$, который на данном шаге из счёта исключаются, превращаясь в два новых интервала. Соответственно величина F_1 уменьшается на единицу, а F_2, F_3 – на единицу растут. При достижении знаменателя $Q_k + Q_{k+1}$ промежуточной подходящей дроби величина F_3 достигает максимума, после чего ее место занимает счётчик F_2, а бывший счётчик F_3 начинает уменьшаться – уже в роли F_1.

Определим дисперсию D_{n+1} разбиения $\Delta\bar{\mathcal{B}}^{(n)}$:

$$D_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} (\beta_j^{(n)} - \beta_{j-1}^{(n)} - \frac{1}{n+1})^2 = \sum_{j=1}^{3} F_{j,n+1}(G_{j,n+1} - \frac{1}{n+1})^2.$$

Для удобства контроля вычислений рассмотрим не вероятностную меру на отрезке, а припишем отрезку меру $n+1$, т.е. средняя длина интервалов множества $\Delta\bar{\mathcal{B}}^{(n)}$ будет равна единице, а не $1/(n+1)$. Таким путём мы сразу вычислим коэффициент $\tilde{D}_{n+1}$ пропорциональности между D_{n+1} и (совпадающей с дисперсией $\hat{D}_{n+1}$ с точностью до стремящегося к единице при $n \to \infty$ множителя $(n+2)/n$) величиной $\hat{M}^2_{1,n+1}$ (см. (14)). Этот коэффициент пропорциональности $\tilde{D}_{n+1} = D_{n+1}/\hat{M}^2_{1,n+1}$ и будем оценивать.

Зная точное распределение расстояний между соседними точками множества $\bar{\mathcal{B}}^{(n)}$, можно вычислять любые связанные с ними статистические величины, например, посчитать квадратичные отклонения $\tilde{D}_n$ расстояний между соседними точками от их среднего значения.

Пусть теперь отрезок $[0,1]$ в некоторой пропорции $\chi \in \mathbb{Q}$, $0 < \chi < 1$ поделен на $n = \chi n + (1-\chi)n$ промежутков длин $\xi/n, \eta/n$ $(\xi > \eta > 0)$ соответственно: $\chi\ n\ (\xi/n) + (1-\chi)\ n\ (\eta/n) = \chi\xi + (1-\chi)\eta = 1$. При этом верны неравенства $\xi > 1 > \eta$ и имеется соотношение $\chi = (1-\eta)/(\xi-\eta)$.

Средняя длина промежутков равна $1/n$, а дисперсия D_n равна

$$D_n = \frac{1}{n}\left(\chi\ n\ \frac{\xi^2}{n} + (1-\chi)\ n\ \frac{\eta^2}{n}\right) - \frac{1}{n^2} = \frac{\chi\ \xi^2 + (1-\chi)\ \eta^2 - 1}{n^2}.$$

Интересующее нас отношение дисперсий равно

$$\tilde{D}_{n+1}(b) = (n+1)^2\ D_{n+1} = \chi\ \xi^2 + (1-\chi)\ \eta^2 - 1 = (\xi-1)\ (1-\eta).$$

Элементарными выкладками можно получить, что как при $b \geq 1$, так и при $b = 0$, интересующий нас коэффициент выражается одной и той же формулой

$$\tilde{D}_{n+1}(b) = (n+1)^2\ D_{n+1} = \frac{(1 - r_1 + b\ r - r)\ (b\ r - r_1)^2}{r}.$$

Производная по b функции $\tilde{D}_{n+1}(b)$ равна

$$\tilde{D}'_{n+1}(b) = 3\ r^2\ (b - \frac{3\ r_1 + 2\ r - 2}{3\ r})\ (b - \frac{r_1}{r}) = 3\ r^2\ (b - b_1)\ (b - b_2).$$

Введя величины

$$s_j = \frac{Q_j}{Q_{j+2}}, \qquad \frac{1}{c_{j+2}c_{j+1} + 2} \leq s_j < \frac{1}{c_{j+2}c_{j+1} + 1} \leq \frac{1}{2}, \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

преобразуем полученные выражения при помощи подстановок

$$r = 1 - \tilde{r}, \qquad r_1 = 1 - \tilde{r}_1, \quad \tilde{r}_1 = s_{k-2}(1-\tilde{r}),$$
$$Q_k = c_k Q_{k-1} + Q_{k-2} = (c_k + \varepsilon_k)Q_{k-1}, \quad 0 < \varepsilon_k = \frac{Q_{k-2}}{Q_{k-1}} < \frac{2}{1+\sqrt{5}} < 1.$$

При этом $\tilde{r}, \tilde{r}_1$ будут сходящимися рядами

$$\tilde{r} = s_{k-1} - s_{k-1}s_k + s_{k-1}s_k s_{k-2} - \ldots, \quad 0 < \tilde{r} < s_{k-1} < \frac{1}{c_{k+1}c_k + 1}.$$

Мы получим

$$b_1 = \frac{c_k - \varepsilon_k \tilde{r}}{1 - \tilde{r}}. \qquad (22)$$

Корень b_1 может быть больше c_k, т.е. может не лежать в диапазоне $[0, c_k - 1]$. Однако при малых ε_k и $\tilde{r}$, что бывает при больших c_{k-1}, корень b_1 с точностью до $o(1/c_{k-1})$ будет равен c_k. Поэтому в близкой к точке экстремума точке $b = c_k - 1$ коэффициент $\tilde{D}_{n+1}(c_k - 1)$ будет пропорционален $1/c_k$ (а при достаточно больших c_{k+1} он будет даже примерно равен $1/c_k$):

$$\tilde{D}_{n+1}(c_k - 1) = \frac{(c_k - 2 + \varepsilon_k)\ (1 + c_k\ \tilde{r} - \tilde{r} + \varepsilon_k\ \tilde{r})^2}{(c_k + \varepsilon_k)^2}.$$

Таким образом, выбором c_k, c_{k+1} коэффициент $\tilde{D}_{n+1}$ может быть сделан сколь угодно малым.

Аналогично, второй корень производной равен

$$b_2 = \frac{c_k + 2 - 2\ \varepsilon_k - 2\ \tilde{r} + 3\ \varepsilon_k\ \tilde{r}}{3\ (1 - \tilde{r})}, \tag{23}$$

а значение в нём исследуемого коэффициента равно

$$\tilde{D}_{n+1}(b_2) = \frac{4\ (c_k - 1 + \varepsilon_k + \tilde{r})^3}{27\ (c_k + \varepsilon_k)^2\ (1 - \tilde{r})}.$$

При больших c_k и малых $\tilde{r}$ этот коэффициент приближённо равен $\frac{4\ c_k}{27}$, то есть $\tilde{D}_{n+1}$ может принимать неограниченно большие значения.

Установлена

Теорема 2. *Существуют вещественные числа α, для которых отношение дисперсии связанной с этим числом псевдо-равномерно распределенной величины $\{j\alpha \pmod 1\}_{j=0}^{n}$ к дисперсии расстояния между соседними точками n-кратного равномерно распределенного случайного бросания точек при некоторых n может быть сколь угодно велико, так же как и сколь угодно мало.*

Список литературы

1. Никишин Е.М., Сорокин В.Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988. 254 с.

2. Хинчин А.Я. Цепные дроби. Издание второе. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 104 с.

3. Касселс Дж. В.С. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: Изд. иностр. литературы, 1961. 213 с.