ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 1 за 2013 г.

Аптекарев А.И., Туляков Д.Н.

Главный член асимптотики решений четырехчленных рекурсий

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Аптекарев А.И., Туляков Д.Н. Главный член асимптотики решений четырехчленных рекурсий // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 1. 20 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-1

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М. В. КЕЛДЫША

А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков

Главный член асимптотики решений четырёхчленных рекурсий

МОСКВА, **2013 г.**

Аптекарев А. И., Туляков Д. Н.

Главный член асимптотики решений четырёхчленных рекурсий [1]

Аннотация. В препринте формулируется и доказывается одна теорема об асимптотике решений разностного уравнения высокого порядка. Речь идёт о четырёхчленных рекурсиях с растущими коэффициентами, т.е. о ситуации, когда классические теоремы Пуанкаре и Перрона неприменимы.

Ключевые слова. асимптотический анализ; разностные уравнения; рекуррентные соотношения; аппроксимации Эрмита–Паде.

Aptekarev A. I., Tulyakov D. N.

Main term of asymptotics of the solutions of the four-terms recurrence relations

Abstract. In the preprint a theorem on asymptotics of solutions of the higher order difference equations is stated and proven. We deal with four-term recurrences which coefficients are growing, i.e. we are in a situation where the classical theorems of Poincare and Perron can not be applied.

Keywords. asymptotical analysis; difference equations; recurrence relations; Hermite-Padé approximants.

[1]Работа первого автора частично поддержана грантом научных школ НШ–8033.2010.1, программой № 1 ОМН РАН, грантами РФФИ-11-01-00245, РФФИ-11-01-12045-офи-м. Работа второго автора также частично поддержана грантами РФФИ 10-01-00682, РФФИ 12-01-00988 и РФФИ 12-01-33050.

1 Введение

К рекуррентным соотношениям

$$f_n + \alpha_{1,n} f_{n-1} + \dots + \alpha_{k,n} f_{n-k} = 0, \quad n = k, k+1, \cdots, \tag{1.1}$$

связывающим между собой элементы последовательности $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, приводят многие задачи анализа и теории чисел. В частности, последовательности числителей $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ и знаменателей $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ числовой непрерывной дроби

$$a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots}}$$

связаны между собой соотношениями

$$p_n = b_n p_{n-1} + a_n p_{n-2}\ , \quad q_n = b_n q_{n-1} + a_n q_{n-2} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

с начальными условиями: $p_{-1} = 1$, $p_0 = a_0$ и $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$.

Теория асимптотик решений рекуррентных соотношений, включающая в себя асимптотическую теорию ортогональных многочленов и их обобщений, тесно связана с вопросами сходимости непрерывных дробей, рациональных аппроксимаций; другая область применения — спектральные задачи разностных операторов, задача рассеяния.

Нетрудно проверить, что всякая последовательность $\{f_n\}$, удовлетворяющая рекуррентному соотношению (1.1) с постоянными (не зависящими от n) коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, может быть записана в следующем явном виде

$$f_n = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^n (C_{j,1} + \dots + C_{j,l_j} n^{l_j - 1}) \quad , \quad n \geqslant n_0 - k \tag{1.2}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — корни характеристического многочлена $h(z) = z^k + \alpha_1 z^{k-1} + \dots + \alpha_k$ кратностей $l_1, \dots, l_m$ соответственно, $l_1 + \dots + l_m = k$.

Из явного вида (1.2) последовательности $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ следует, что если корни характеристического многочлена $h(z)$ различны по модулю, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n$, и этот предел равен одному из корней характеристического многочлена. Это утверждение имеет место не только для рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами, но и для рекуррентных соотношений с предельно постоянными коэффициентами, когда найти явный вид последовательности не представляется возможным. Соответствующее утверждение составляет содержание теоремы Пуанкаре — одной из самых тонких в теории рекуррентных соотношений.

Теорема 1.1 (Пуанкаре [1]) *Пусть последовательность* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* (1.1) *с предельно постоянными коэффициентами, корни характеристического многочлена*

$$h(z) = \lim_{n\to\infty} \left(z^k + \alpha_{1,n} z^{k-1} + \cdots + \alpha_{k,n} \right) \tag{1.3}$$

которого просты и различны по модулю. Тогда либо $f_n = 0$ *при всех* $n \geqslant n_0$, *либо существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n$, *и этот предел равен одному из корней характеристического многочлена.*

Весьма важные уточнения и обобщения теоремы Пуанкаре были сделаны Перроном [2], [3], а также Биркгофом и Трыжинским [4], [5].

Особый интерес представляет случай, когда коэффициенты рекуррентного соотношения зависят от параметра (обозначим его x):

$$Q_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{p-1} a_j(n,x) Q_{n-j}(x)\ , \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Именно такие рекуррентные соотношения приводят к ортогональным многочленам и их обобщениям. Асимптотику решений $Q_n(x)$ для случаев стремления к бесконечности аргумента соотношения (номера n) и параметра x при различных соотношениях между их ростом называют асимптотиками типа Планшереля–Ротаха. Впервые (см. [6]), они появились для асимптотического описания многочленов Эрмита H_n. С точки зрения рекуррентных соотношений асимптотики типа Планшереля–Ротаха изучались в [9], [10].

В случае неограниченного роста коэффициентов рекурсии производят масштабирование переменной x, что приводит к рекуррентным соотношениям с так называемыми "вариабельными" (varying) коэффициентами [7], [8] (то есть, когда коэффициент, кроме номера, зависит от параметра масштабирования). В основном, перечисленные работы, касающиеся асимптотик типа Планшереля–Ротаха решений рекуррентных соотношений с неограничено растущими или "вариабельными" коэффициентами, касались трёхчленных рекурсий. Рекуррентные соотношения более высокого порядка обладают своей спецификой. В. И. Парусников [11], в связи с аппроксимациями Эрмита–Паде, в частности, изучал рекурсии высокого порядка с коэффициентами, зависящими от параметра x и имеющими конечные пределы (т.е. когда для анализа асимптотик можно привлекать теоремы Пуанкаре и Перрона).

В работе [12] изучались асимптотические свойства совместно ортогональных многочленов Мейкснера, которые являются многочленами Эрмита–Паде и удовлетворяют четырёхчленным рекуррентным соотношениям с неограниченно растущими коэффициентами. Дополнительным осложнением рассмотрений в [12] являлось то, что меры ортогональности Мейкснера — дискретные меры, что приводит к более нетривиальному и богатому асимптотическому поведению многочленов. В работе [12] сформулирован общий результат об асимптотике такого сорта многочленов. Доказательству этого результата посвящен настоящий препринт.

2 Постановка задачи

Мы стартуем с рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} P_{n+1,n}(x) = (x - a_n^{(1)})\, P_{n,n}(x) + b_n^{(1)} P_{n,n-1} + c_n^{(1)} P_{n-1,n-1} \\ P_{n+1,n+1}(x) = (x - a_n^{(2)})\, P_{n+1,n}(x) + b_n^{(2)} P_{n,n} + c_n^{(2)} P_{n,n-1} \end{cases} . \tag{2.1}$$

В случае растущих коэффициентов $\{a_n^{(i)}, b_n^{(i)}, c_n^{(i)}\}$, при $n \to \infty$, мы рассматриваем ситуации, когда масштабирование (зависящее от n) переменной x приводит к рекурсиям с коэффициентами, имеющими конечные пределы при $n \to \infty$. То есть мы предполагаем существование функции $\varphi(n)$:

$$\varphi(n) \uparrow \infty, \quad \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} \to 1\,, \quad n \to \infty \tag{2.2}$$

такой, что

$$\begin{cases} \dfrac{a_n^{(1)}}{\varphi(n+1)} \to \alpha_1\,, & \dfrac{b_n^{(1)}}{\varphi(n)\varphi(n+1)} \to \beta_1\,, & \dfrac{c_n^{(1)}}{\varphi^2(n)\varphi(n+1)} \to \gamma_1\,, \\ \dfrac{a_n^{(2)}}{\varphi(n+1)} \to \alpha_2\,, & \dfrac{b_n^{(2)}}{\varphi^2(n+1)} \to \beta_2\,, & \dfrac{c_n^{(2)}}{\varphi(n)\varphi^2(n+1)} \to \gamma_2\,, \end{cases} \tag{2.3}$$

и при этом $\gamma_1\gamma_2 \neq 0$.
В этом случае свойства линейных преобразований, трансформирующих значения ортогональных многочленов с ростом индекса (соотношения (2.1)), удобно описывать при помощи величины $\frac{\varphi(n)}{x}$, используемой как параметр. А именно, если рассматривать пары (n, x), где $n, |x| \to \infty$, для которых $\exists\ t := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{x}$, имеем, что векторы

$$\begin{gathered} \overrightarrow{V}_1 := \begin{pmatrix} P_{n,n}(x) \\ \varphi(n) P_{n,n-1}(x) \\ \varphi^2(n) P_{n-1,n-1}(x) \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{V}_2 := \begin{pmatrix} P_{n+1,n}(x) \\ \varphi(n+1) P_{n,n}(x) \\ \varphi(n)\varphi(n+1) P_{n,n-1}(x) \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{V}_3 := \begin{pmatrix} P_{n+1,n+1}(x) \\ \varphi(n+1) P_{n+1,n} \\ \varphi^2(n+1) P_{n,n} \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{2.4}$$

связаны матрицами перехода

$$\varphi(n)A_n^{(1)}\overrightarrow{V}_1 = \overrightarrow{V}_2\,,\ \varphi(n{+}1)A_n^{(2)}\overrightarrow{V}_2 = \overrightarrow{V}_3\,,\ A_n = A_n^{(1)}\cdot A_n^{(2)}, \tag{2.5}$$

имеющими пределы при $n\to\infty$

$$A_n^{(1)} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{t}-\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: A^{(1)}\ ;\ A_n^{(2)} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{t}-\alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: A^{(2)}\ . \tag{2.6}$$

3 Формулировка результата

Обозначим $\{\lambda_j(t)\}_{j=1}^3$ собственные значения матрицы $A := A^{(1)}A^{(2)}$, и пусть $\lambda_1(t)$ имеет максимальный модуль

$$A := A^{(1)}A^{(2)}\,, \quad |\lambda_1(t)| \geqslant |\lambda_2(t)|,\ |\lambda_3(t)|\ . \tag{3.1}$$

Пусть Ω — максимальная область, содержащая точку 0 и такая, что

$$t\in\Omega\ \Rightarrow\ |\lambda_1(t)| > |\lambda_j(t)|\,,\ j=2,3\ . \tag{3.2}$$

Тогда $\lambda_1(t)$ в Ω не имеет ветвлений. Выбор между $\lambda_2(t), \lambda_3(t)$ пока не фиксирован. Сделаем его так, чтобы каждая из функций $\lambda_2(t), \lambda_3(t)$ в Ω обладала следующими свойствами: её ограничение на любой луч вида $\arg t = \mathrm{const}$ аналитично на каждом подотрезке, не содержащем точек ветвления; для любых двух точек a, b на луче $\arg t = \mathrm{const}$, разделяемых точкой ветвления, существует путь, соединяющий их и имеющий длину не более $2|a-b|$, продолжение вдоль которого связывает значения функции в a и b; чтобы набор $\big(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)\big)$ совпадал с набором корней характеристического многочлена матрицы A с учётом кратностей.

Обозначим также

$$F := \bigcup_{\theta\in[1,\infty)} \theta\,\Omega^c\,, \quad \Omega^c := \overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega\ . \tag{3.3}$$

Справедлива

Теорема 3.1 *Для многочленов $P_{n,n}$, определяемых рекуррентными соотношениями* (2.1) *с коэффициентами, удовлетворяющими предельным соотношениям* (2.3) *с масштабирующей функцией $\varphi(n)$ —* (2.2), *справедливо*

$$\frac{1}{n}\ln\left|\frac{P_{n,n}(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\varphi^2(k)}\right| = \int\limits_0^1 \ln\left|\lambda_1\left(\frac{\varphi(n\xi)}{x}\right)\right|\,d\xi + \overline{\overline{o}}(1) \tag{3.4}$$

при

$$n \to \infty \,, \quad \frac{\varphi(n)}{x} \in K \Subset \overline{\mathbb{C}} \backslash F \,. \tag{3.5}$$

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Лемма 3.1 *Для матрицы* $A(t)$ *—* (3.1) *существует представление*

$$A = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & \omega(t) \\ 0 & 0 & \lambda_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vec{u}_3^T \end{pmatrix} \,, \tag{3.6}$$

где векторы-столбцы $\{\vec{v}_j\}_{j=1}^3$ *и* $\{\vec{u}_j\}_{j=1}^3$ *удовлетворяют*

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vec{u}_3^T \end{pmatrix} = E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,, \tag{3.7}$$

при этом

$$\|\vec{v}_j(t)\|, \|\vec{u}_j(t)\|, \omega(t) < \infty \,, \quad t \in \Omega \,, j = 1, 2, 3 \,, \tag{3.8}$$

$\vec{v}_j(t), \vec{u}_j(t), \omega(t)$ *непрерывны по* t *на каждом участке произвольного луча* $\arg t = \mathrm{const}$, *лежащего в области* Ω, *и непрерывность равномерна для* $t \notin O_\varepsilon(\Omega^c)$.

Мы сначала докажем Теорему в предположении справедливости Леммы, а затем приведём доказательство Леммы.

4 Доказательство теоремы

Утверждение теоремы (3.4)–(3.5) мы будем выводить из формулы асимптотики отношения

$$\frac{P_{n,n}(x)}{\varphi^2(n) P_{n-1,n-1}(x)} = \lambda_1\Big(\frac{\varphi(n)}{x}\Big) + \bar{\bar{o}}(1) \,, \tag{4.1}$$

где режим $n \to \infty$ определён в (3.5). Заметим, что при этом из (2.2) автоматически вытекает $|x| \to \infty$. Таким образом, если (4.1) справедливо, то, записывая левую часть (3.4) в виде

$$\frac{1}{n} \ln \left| \frac{P_{n,n}(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n} \varphi^2(k)} \right| = 2 \ln|x| + \frac{1}{n} \sum_{k=k_0+1}^{n} \ln \left| \frac{P_{k,k}(x)}{x^2 \varphi^2(k) P_{k-1,k-1}(x)} \right| +$$

$$+ \frac{1}{n} \ln \left| \frac{P_{k_0,k_0}(x)}{x^{2k_0}} \prod_{k=1}^{k_0} \varphi^2(k) \right|$$

и считая k_0 фиксированным (в отличие от n и x), проводим простую оценку.

$$\frac{1}{n}\ln\left|\frac{P_{k_0,k_0}(x)}{x^{2k_0}}\prod_{k=1}^{k_0}\varphi^2(k)\right| = O\Big(\frac{1}{n}\Big)\to 0\ .$$

Имеем

$$\frac{1}{n}\ln\left|\frac{P_{n,n}(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\varphi^2(k)}\right| = 2\ln|x| + \int\limits_0^1 \ln\left|\frac{P_{[n\xi],[n\xi]}(x)}{x^2\varphi^2(n\xi)P_{[n\xi]-1,[n\xi]-1}(x)}\right| d\xi + \overline{\overline{o}}(1) =$$
$$= \int\limits_0^1 \ln\left|\frac{P_{[n\xi],[n\xi]}(x)}{\varphi^2(n\xi)P_{[n\xi]-1,[n\xi]-1}(x)}\right| d\xi + \overline{\overline{o}}(1)\ ,$$

что из (4.1) (с учётом того, что $\lambda_1(t)\neq 0$, так как $\det A$ не зависит от t — см. (2.6)) приводит к (3.4).

Для того, чтобы доказать асимптотику отношения (4.1), запишем $\overrightarrow{P}_n$ в виде

$$\begin{pmatrix} \dfrac{P_{n,n}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\varphi^2(k)} \\[2ex] \dfrac{P_{n,n-1}}{\varphi(n)\prod\limits_{k=1}^{n-1}\varphi^2(k)} \\[2ex] \dfrac{P_{n-1,n-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\varphi^2(k)} \end{pmatrix} = \left(\prod_{k=1}^{n} A_k^{(2)}A_k^{(1)}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \simeq \left(\prod_{k=1}^{n}\mathsf{V}(t_k)\,\Lambda(t_k)\,\mathsf{U}^T(t_k)\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

где мы воспользовались представлением (3.6) Леммы, обозначив матрицы

$$\mathsf{V}(t) := (\vec{v}_1(t),\vec{v}_2(t),\vec{v}_3(t)),\qquad \mathsf{U}(t) := (\vec{u}_1(t),\vec{u}_2(t),\vec{u}_3(t)),$$
$$\Lambda(t) := \begin{pmatrix}\lambda_1(t) & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2(t) & \omega(t)\\ 0 & 0 & \lambda_3(t)\end{pmatrix},\quad t_k := \frac{\varphi(k)}{x}\ . \tag{4.3}$$

Обращаем внимание, что для каждой пары (n,x) значения t_k будут свои, но все t_k, построенные по заданным (n,x), лежат на одном луче.

Заметим, что справедливость (4.1) будет следовать из факта, что первая координата вектора

$$\begin{pmatrix}\Gamma_1(n)\\ \Gamma_2(n)\\ \Gamma_3(n)\end{pmatrix} := \Lambda(t_n)\,\mathsf{U}^T(t_n)[A^{-1}(t_n)A_n]\left(\prod_{k=1}^{n-1}A_k\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ , \tag{4.4}$$

превалирует над остальными при $n \to \infty$ в режиме (3.5), т.е. что

$$\frac{\max(\,|\Gamma_2(n)|, |\Gamma_3(n)|\,)}{|\Gamma_1(n)|} = \overset{=}{o}(1)\ . \tag{4.5}$$

Действительно, если (4.5) выполнено, тогда вектор $\overrightarrow{P}_n$, стоящий в левой части (4.2), при больших n приблизительно пропорционален первому столбцу матрицы $\mathsf{V}(t_n)$, т.е. собственному вектору $\vec{v}_1(t_n)$, причём коэффициент пропорциональности равен $\Gamma_1(n)$

$$\overrightarrow{P}_n \simeq \Gamma_1(n)\vec{v}_1(t_n)\ . \tag{4.6}$$

Собственный вектор определён с точностью до умножения на константу, поэтому возьмём в (4.6) отношение первой и третьей координат:

$$\frac{P_{n,n}(x)}{\varphi^2(n)P_{n-1,n-1}(x)} = \frac{v_{11}(t_n)}{v_{13}(t_n)} + \overset{=}{o}(1)\ ,$$

и, обращая внимание на структуру матрицы A:

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1\ , \quad A = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{11} = \lambda_1 v_{13}\ ,$$

получаем импликацию (4.5) $\Rightarrow$ (4.1).

Итак, для завершения доказательства теоремы осталось доказать (4.5). Сделаем это в несколько шагов.

а) Сначала отметим (см. (2.3)), что в режиме (3.5) для

$$A_k^{(j)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_k} - \alpha_j + \overset{=}{o}(1) & \beta_j + \overset{=}{o}(1) & \gamma_j + \overset{=}{o}(1) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad j = 1, 2\ , \quad k \geqslant k_0$$

справедливо (константа в $\overset{=}{o}$ зависит от k_0)

$$A_k = A_k^{(2)}A_k^{(1)} = A(t_k)\left(E + \overset{=}{o}(1)\right)\ .$$

б) Также заметим, что $\forall\,\delta > 0\ \exists\, k_0 :\ \forall\, k \geqslant k_0$

$$\|\mathcal{E}^{(k,n)}\| < \delta\ ; \qquad \mathcal{E}^{(k,n)} := \mathsf{U}^T(t_{k+1})A(t_{k+1})^{-1}A_{k+1}\mathsf{V}(t_k) - E \tag{4.7}$$

при

$$\frac{\varphi(n)}{x} \in K \Subset \mathbb{C}\backslash O_\varepsilon(F)\ , \quad n \geqslant n_0(\varepsilon, \delta)\ .$$

Действительно, так как

$$t_k := \frac{\varphi(k)}{x} = \underset{=}{O}\Big(\frac{\varphi(k)}{\varphi(n)}\Big)$$

и

$$t_{k+1} - t_k = \frac{\varphi(k+1) - \varphi(k)}{x} = \frac{\varphi(k)}{x}\left(\frac{\varphi(k+1)}{\varphi(k)} - 1\right) ,$$

то условие (2.2) позволяет выбрать k_0 так, чтобы последний сомножитель был достаточно мал. Элементы $\mathsf{U}(t)$ непрерывны на лучах в $\mathbb{C}\backslash F$, и непрерывность равномерная в $\mathbb{C}\backslash O_\varepsilon(F)$, т. е. существует модуль непрерывности ψ, оценивающий изменение $\mathsf{U}(t)$ на лучах для всех лучей сразу. t_k и t_{k+1} всегда лежат на одном луче, поэтому если $|t_{k+1} - t_k| < \psi^{-1}(\frac{\delta}{M})$, то (4.7) выполненна. Здесь M — равномерная оценка сверху $\|\mathsf{V}(t)\|$.

в) Докажем теперь, что

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \theta > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall\, n \geqslant n_0 \quad \text{и} \quad \forall\, x\ :\ \frac{\varphi(n)}{x} \notin O_\varepsilon(F)$$

выполняется

$$\widetilde{\mathsf{M}}(t_k) := \frac{\max(|\lambda_2(t_k)|, |\lambda_3(t_k)|)}{|\lambda_1(t_k)|} < 1 - \theta\ , \quad \forall\, k \leqslant n\ . \tag{4.8}$$

Сначала докажем (4.8) для маленьких t. Отметим, что при $t \to 0$ из структуры матрицы A следует, что

$$\lambda_1(t) \sim \frac{1}{t^2} \quad \text{и} \quad \lambda_2, \lambda_3(t) \sim t\ .$$

Поэтому $\exists\, \varepsilon_1 > 0$ такое, что для $|t_k| < \varepsilon_1$ (4.8) выполнено.

Перейдём теперь к $|t_k| \geqslant \varepsilon_1$. В этом случае

$$\varphi(k) \geqslant \text{const}\ \varepsilon_1 \varphi(n)\ ,$$

так как по (2.2) $\varphi \uparrow \infty$, то

$$\forall\, k_0\ \exists\, n_0\ :\ n \geqslant n_0 \quad \text{и} \quad \varphi(k) \geqslant \text{const} \cdot \varepsilon_1 \varphi(n) \Rightarrow k \geqslant k_0\ ,$$

т.е. нам надо проверить (4.8) для больших k.

Пусть

$$t_k \in \left[\frac{\varepsilon_1}{|t_n|}, 1\right] \cdot t_n\ , \quad \text{где} \quad t_n := \frac{\varphi(n)}{x} \notin O_\varepsilon(F)\ ,$$

тогда t_k принадлежит компакту, отграниченному от F и от 0. На нём собственные значения $\lambda_{1,2,3}(t)$ непрерывны и левая часть (4.8) также непрерывна и, следовательно, достигает своего максимума. Пусть $t_{\max}$ будет точка, в которой этот максимум достигается. Тогда

$$t \notin O_\varepsilon(F) \Rightarrow \exists\, \theta > 0 : M(t_{\max}) < 1 - \theta\ .$$

Выберем произвольно малые $\delta_1,\ \delta_2\in(0,1)$ с условием

$$\frac{\delta_2}{\delta_1}<\min\Big(1,\min_{t\notin O_\varepsilon(F)}\frac{|\lambda_1|-|\lambda_3|}{2|\omega|}\Big)\ .$$

Теперь выберем $\delta>0$, для которого

$$\delta\Big[(|\lambda_2|+|\omega|)\frac{1-\delta_1}{\delta_1}+|\lambda_3|\frac{1-\delta_2}{\delta_2}+|\lambda_1|\Big]\leqslant\begin{cases}(|\lambda_1|-|\lambda_3|)(1-\delta_2)-|\omega|\dfrac{\delta_2(1-\delta_1)}{\delta_1}\\ (|\lambda_1|-|\lambda_2|)(1-\delta_1)\end{cases} \tag{4.9}$$

для всех $t\notin O_\varepsilon(F)$, и используем (4.7) для выбранного δ.

г) Теперь перейдём непосредственно к оценке (4.5). Из определения (4.4) вектора $\overrightarrow{\Gamma}$ имеем для $\overrightarrow{\Gamma}(k_0)$ с учётом (3.7)

$$\begin{pmatrix}\Gamma_1(k_0)\\ \Gamma_2(k_0)\\ \Gamma_3(k_0)\end{pmatrix}=\mathsf{V}^{-1}(t_{k_0})\Big(\prod_{k=1}^{k_0}A_k\Big)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\mathrm{const}\,\mathsf{U}^T(t_{k_0})\begin{pmatrix}P_{k_0,k_0}(x)\\ \varphi(k_0)P_{k_0,k_0-1}(x)\\ \varphi^2(k_0)P_{k_0-1,k_0-1}(x)\end{pmatrix}.$$

Если $\frac{\varphi(n)}{x}\in K\subset\mathbb{C}$, то $|x|>\frac{\varphi(n)}{C}$, поэтому для достаточно больших n координата $P_{k_0,k_0}(x)$ в последнем равенстве превалирует. В то же время $|t_{k_0}|=\frac{\varphi(k_0)}{|x|}<\frac{C\varphi(k_0)}{\varphi(n)}<C\,\mathrm{const}\,\varepsilon_1$, поэтому U^T не слишком отличается от предельного на соответствующем луче (напомним, что непрерывность на лучах равномерная).

Установим свойства U вблизи 0. При $t\to0$ (см. (5.1))

$$M_1\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ .$$

Поэтому на лучах $\vec v_1(t)\to(e^{i\theta},0,0)^T$ и $\vec u_1(t)\to(e^{-i\theta},0,0)^T$, где θ может быть своё на каждом луче. Так как $\mathsf{U}^T\mathsf{V}=E$, то

$$\mathsf{U}^T\to\begin{pmatrix}e^{-i\theta}&0&0\\0&\bullet&\bullet\\0&\bullet&\bullet\end{pmatrix}\ ,$$

и $\Gamma_1(k_0)$ превалирует.

Покажем по индукции, что $\forall\ k\ :\ k_0\leqslant k\leqslant n$ выполняется оценка

$$\frac{\delta_2|\Gamma_2(k)|+\delta_1|\Gamma_3(k)|}{|\Gamma_1(k)|+|\Gamma_2(k)|+|\Gamma_3(k)|}<\delta_1\delta_2\ . \tag{4.10}$$

Из свойств превалирования следует, что для достаточно больших n база $(k=k_0)$ верна. Рекуррентные соотношения для $\overrightarrow{\Gamma}(k)$ удобно представить, вводя векторные величины $\overrightarrow{\gamma}(k)$. Соотношения имеют вид

$$\overrightarrow{\Gamma}(k+1) = \Lambda(t_k)\overrightarrow{\gamma}(k) \ ; \quad \overrightarrow{\gamma}(k) = (E+\mathcal{E}^{(k,n)})\overrightarrow{\Gamma}(k) \ .$$

Для неотрицательных чисел a, b, c, не равных одновременно 0,

$$\frac{\delta_2 b + \delta_1 c}{a+b+c} < \delta_1\delta_2 \Longleftrightarrow \delta_1\delta_2 a - (1-\delta_1)\delta_2 b - \delta_1(1-\delta_2)c > 0$$

Поэтому если $a \geqslant A > 0$, $0 \leqslant b \leqslant B$, $0 \leqslant c \leqslant C$, то

$$\frac{\delta_2 b + \delta_1 c}{a+b+c} < \delta_1\delta_2 \Longleftarrow \frac{\delta_2 B + \delta_1 C}{A+B+C} < \delta_1\delta_2.$$

Поэтому при проверке неравенства достаточно оценивать $|\Gamma_1(k+1)|$ снизу, а $|\Gamma_2(k+1)|$, $|\Gamma_3(k+1)|$ сверху. Соответствующие оценки имеют вид

$$|\Gamma_1(k+1)| = |\lambda_1||\gamma_1(k)| \geqslant |\lambda_1|\big(|\Gamma_1(k)| - \delta(|\Gamma_1(k)|+|\Gamma_2(k)|+|\Gamma_3(k)|)\big) \ ;$$

$$|\Gamma_2(k+1)| \leqslant |\lambda_2||\gamma_2(k)| + |\omega||\gamma_3(k)| \leqslant |\lambda_2||\Gamma_2(k)| + |\omega||\Gamma_3(k)| +$$

$$+ \ \delta(|\lambda_2|+|\omega|)(|\Gamma_1(k)|+|\Gamma_2(k)|+|\Gamma_3(k)|) \ ;$$

$$|\Gamma_3(k+1)| = |\lambda_3||\gamma_3(k)| \leqslant |\lambda_3|\big(|\Gamma_3(k)| + \delta(|\Gamma_1(k)|+|\Gamma_2(k)|+|\Gamma_3(k)|)\big) \ .$$

По предположению индукции компоненты $\overrightarrow{\Gamma}(k)$ удовлетворяют (4.10), поэтому вектор из модулей представляется в виде линейной комбинации с положительными коэффициентами:

$$\begin{pmatrix}|\Gamma_1(k)|\\|\Gamma_2(k)|\\|\Gamma_3(k)|\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1-\delta_1\\\delta_1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1-\delta_2\\0\\\delta_2\end{pmatrix} \ , \quad c_j > 0, \ j=1,2,3.$$

Проверяемые неравенства линейны, поэтому их достаточно проверить на указанных трёх векторах. Получаем:

$$\delta_2[\delta(|\lambda_2|+|\omega|)] + \delta_1[\delta|\lambda_3|] \leqslant \delta_1\delta_2[|\lambda_1|(1-\delta) + \delta(|\lambda_2|+|\omega|) + \delta|\lambda_3|];$$

$$\delta_2[\delta_1|\lambda_2| + \delta(|\lambda_2|+|\omega|)] + \delta_1[\delta|\lambda_3|] \leqslant$$

$$\leqslant \delta_1\delta_2[|\lambda_1|(1-\delta_1-\delta) + \delta_1|\lambda_2| + \delta(|\lambda_2|+|\omega|) + \delta|\lambda_3|];$$

$$\delta_2[\delta_2|\omega| + \delta(|\lambda_2|+|\omega|)] + \delta_1[|\lambda_3|(\delta_2+\delta)] \leqslant$$

$$\leqslant \delta_1\delta_2[|\lambda_1|(1-\delta_2-\delta) + \delta_2|\omega| + \delta(|\lambda_2|+|\omega|) + |\lambda_3|(\delta_2+\delta)].$$

Первое неравенство слабее второго и является его следствием. Если во втором и третьем неравенстве перенести влево все множители, содержащие δ, а вправо все не содержащие, получится пара неравенств с одинаковой левой частью, совпадающая с условием (4.9) выбора δ. Следовательно, компоненты $\overrightarrow{\Gamma}(k+1)$ также удовлетворяют (4.10).

Индуктивный переход сделан, Теорема доказана.

5 Доказательство Леммы

Мы будем по очереди строить векторы $\vec{v}_j(t)$, $\vec{u}_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, и функцию $\omega(t)$, проверяя их непрерывность и ограниченность на каждом луче и равномерность оценок модулей непрерывности и верхних оценок при изменении лучей. В завершение доказательства мы проверим, что построенные элементы действительно реализуют разложение (3.6), (3.7) матрицы $A(t)$.

Сделаем предварительный, качественный анализ матрицы A, её собственных значений и собственных векторов. Имеем: элементы A рационально зависят от t, поэтому собственные значения A являются алгебраическими функциями от t (возможно, ветвями одной и той же функции). Так как дискриминант характеристического многочлена A не является тождественным нулём (это проверяется), то имеется лишь конечное число значений t на комплексной плоскости, в которых какие-то из собственных значений совпадают. Если эти значения исключить, то для оставшихся t матрица A обладает набором собственных векторов. Наша цель — сделать выбор базиса с нужными нам свойствами, включая непрерывность по лучам и равномерные оценки, причём распространить этот выбор также и на исключительные значения t.

1) Строим векторы $\vec{v}_1$и $\vec{u}_1$. Для этого рассмотрим оператор

$$M_1 = \frac{(A - \lambda_2 E)(A - \lambda_3 E)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \,. \tag{5.1}$$

Вначале рассмотрим M_1 вне множества исключительных значений t. Ясно, что собственный вектор $\vec{v}_1$ матрицы A:

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 \,, \tag{5.2}$$

является собственным вектором матрицы M_1, соответствующим собственному значению 1 (для любого неисключительного t). Два других собственных вектора матрицы A принадлежат ядру M_1. Следовательно,

$$\begin{cases} \operatorname{rank} M_1 = 1 \\ \operatorname{trace} M_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow M_1 = \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_1^T \,, \tag{5.3}$$

и

$$\|\vec{v}_1\| \, \|\vec{u}_1\| = \|M_1\|_{L_2} \,.$$

Здесь вектор $\vec{v}_1(t)$ (как собственный вектор A) определён поточечно (по t) с точностью до мультипликативной константы (то же касается и вектора $\vec{u}_1(t)$). Модуль этой константы можно зафиксировать условием

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{\|M_1\|_{L_2}} \,, \quad \|\vec{u}_1\| = \sqrt{\|M_1\|_{L_2}} \,. \tag{5.4}$$

Ясно, что при t, отграниченных от нуля, элементы матрицы A и её собственные значения непрерывны по t. Если $t \notin \Omega^c$, то $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, $|\lambda_1| > |\lambda_3|$. Соответственно, если $t \notin O_\varepsilon(\Omega^c)$, то $\exists\ \widetilde{\varepsilon} > 0\ :\ |\lambda_1 - \lambda_2| > \widetilde{\varepsilon}$, $|\lambda_1 - \lambda_3| > \widetilde{\varepsilon}$. Следовательно, M_1 непрерывна по t в рассматриваемой области $\overline{\mathbb{C}} \backslash O_\varepsilon(\Omega^c)$.

В этой области мы показали, что для неисключительных значений t $\operatorname{rank} M_1 {=} 1$ и $\operatorname{trace} M_1 {=} 1$. Тогда для исключительных значений t в силу непрерывности M_1 получаем $\operatorname{rank} M_1 {\leqslant} 1$ (ранг может уменьшиться, но не может увеличиться) и $\operatorname{trace} M_1 {=} 1$. Последнее исключает случай $\operatorname{rank} M_1 {=} 0$, поэтому $\operatorname{rank} M_1 {=} 1$ также и в исключительных точках рассматриваемой области (где возможно равенство $\lambda_2 {=} \lambda_3$).

При $|t| \to 0$ коэффициенты характеристического многочлена имеют порядки $\sim \frac{1}{t^2}$, $\sim \frac{1}{t}$ и ~ 1, поэтому $\lambda_1(t) \sim \frac{1}{t^2}$ и $\lambda_2, \lambda_3(t) \sim t$. Поэтому $t^2 \lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$ непрерывны по t, включая 0. Отсюда (умножением каждой скобки в (5.1) на t^2) следует непрерывность и ограниченность M_1 на $\overline{\mathbb{C}} \backslash O_\varepsilon(\Omega^c)$.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant \|M_1\|_{L_2} < \infty\ .$$

Далее мы будем рассматривать $t \in [0, t_n]$ с равномерными по t_n оценками. Чтобы $[0, t_n] \subset \mathbb{C} \backslash O_\varepsilon(\Omega^c)$, требуется $t \in \mathbb{C} \backslash O_\varepsilon(F)$, что и записано в условии Леммы.

Выбор векторов $\vec{u}_1$ и $\vec{v}_1$ удовлетворяющими (5.2), (5.3) и (5.4) фиксирует их длины (непрерывные по t), но оставляет произвол в выборе их аргументов. Зафиксируем эти аргументы, обеспечивая их непрерывность по t. Делаем это следующим образом. Так как

$$\sum_{i=1}^{3} (M_1)_{ii} = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, i\ :\ \operatorname{Re}(M_1)_{ii} \geqslant \frac{1}{3} \quad \text{в точке} \quad t\ ,$$

и, следовательно, в некоторой окрестности $O(\{t\})$ этой точки t, ввиду непрерывности M_1,

$$\exists\, i\ :\quad \operatorname{Re}(M_1)_{ii} \geqslant \frac{1}{4} \quad \text{в} \quad O(\{t\})\ . \tag{5.5}$$

Этими окрестностями покроем наш компакт $[0, t_n]$, выберем конечное подпокрытие и уменьшим это подпокрытие до объединения отрезков с непересекающимися внутренностями, покрывающих $[0, t_n]$. Каждый из этих отрезков имеет в качестве атрибута свой номер координаты i, определённый в (5.5):

$$[0, t_n] = \bigsqcup_{\widetilde{t}} \triangle_{\widetilde{t}}^{(i)}\ .$$

Следовательно, ввиду (5.3)

$$u_{1,i}(t) \neq 0\ ,\ v_{1,i}(t) \neq 0\ , \qquad t \in \triangle_{\widetilde{t}}^{(i)}\ .$$

Выберем вектор $\vec{u}_1$ пропорциональным i-ой строке матрицы M_1

$$\vec{u}_1(t) := C\big((M_1(t)_{i1}), (M_1(t)_{i2}), (M_1(t)_{i3})\big)^T, \ t \in \triangle^{(i)} \tag{5.6}$$

и фиксируем коэффициент пропорциональности так, чтобы длина $\vec{u}_1$ удовлетворяла (5.4), а

$$\arg u_{1,i} = \text{const} \quad \text{на} \quad \triangle^{(i)}_{\widetilde{t}} , \tag{5.7}$$

причём на крайнем левом отрезке подпокрытия $\left(\overline{\triangle^{(i)}_{\widetilde{t}_0}} \ni 0\right)$ эта константа фиксируется.

Таким образом, непрерывная ветвь угла вектора $\vec{u}_1$ (а, следовательно, и $\vec{v}_1$) на $[0, t_n]$ определена. Действительно, стартуя из точки 0, вдоль отрезка $\triangle^{(i)}_{\widetilde{t}_0}$ аргумент i-ой компоненты $\vec{u}_1(t)$ есть фиксированная константа, а две другие компоненты будут однозначно определёнными (вследствие (5.6)), равномерно непрерывными (вследствие непрерывности M_1 и отграниченности от 0 $|(M_1)_{ii}|$) функциями. Переходя к следующему отрезку $\triangle^{(i)}_{\widetilde{t}_1}$, другая компонента $\vec{u}_1(t)$ становится выделенной i-ой компонентой, и значение её аргумента фиксируется постоянным, равным предельному значению этой компоненты в правом конце предыдущего отрезка $\triangle_{\widetilde{t}_0}$, и т.д.

2) Теперь строим вектор $\vec{v}_2$, так же как собственный вектор матрицы A. Рассмотрим

$$M_2 = \frac{(A - \lambda_1 E)(A - \lambda_3 E)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} . \tag{5.8}$$

Ясно,что

$$A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2 \quad \Rightarrow \quad M_2 \vec{v}_2 = (\lambda_2 - \lambda_3)\vec{v}_2 .$$

Два других собственных вектора A лежат в ядре M_2. Оператор $M_2(t)$ не является тождественным нуль-оператором. Точки множества

$$\widetilde{T} := \{t : \quad \lambda_2(t) = \lambda_3(t)\} , \tag{5.9}$$

(их конечное число) являются точками равенства алгебраических функций, причём обычно это точки ветвления и поэтому точки равенства ветвей алгебраической функции. Имеем

$$\operatorname{rank} M_2 = 1$$

в проколотой окрестности точек множества $\widetilde{T}$ — (5.9). Так как

$$\operatorname{trace} M_2 = (\lambda_2 - \lambda_3)$$

и правая часть может зануляться, мы не можем напрямую, как в предыдущем пункте, обнаружить ненулевой элемент в $M_2(t)$ (точнее, элемент, отграниченный равномерно по n от нуля) и с его помощью зафиксировать непрерывную ветвь $\vec{v}_2(t)$ глобально в $[0, t_n]$. Тем не менее, пользуясь мультипликативным произволом $\vec{v}_2$, можно убедиться в существовании ненулевого элемента после умножения (деления) $M_2(t)$ на специально подобранный множитель, зависящий от t.

Для выбора этого множителя рассмотрим разветвлённое накрытие области Ω, на котором собственные значения $\lambda_2(t), \lambda_3(t)$ определены как голоморфные функции, окружим каждую точку $\widetilde{t}$ множества $T := \widetilde{T} \cup \{0\}$ (см. (5.9)) парой окрестностей радиусов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \quad 0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$ и определим на разветвлённом накрытии области Ω непрерывную функцию $\varrho(t)$, равную 1 вне объединения поднятий всех окрестностей радиуса ε_2 и равную $(t-\widetilde{t})^{\alpha(\widetilde{t})}$ внутри поднятия окрестности $O_{\varepsilon_1}(\widetilde{t})$, где $\alpha(\widetilde{t})$ — дробный показатель нуля (полюса) в $\widetilde{t}$ минимального порядка среди элементов $M_2(t)$ как аналитической матрицы, построенной по формуле (5.8) на разветвлённом накрытии Ω. Элементы матрицы M_2 в окрестности $\widetilde{t}$ мероморфно выражаются через локальный параметр, равный $t-\widetilde{t}$ или $\sqrt{t-\widetilde{t}}$, и, значит, каждый элемент имеет конечный порядок нуля либо полюса (если элемент не зануляется, то порядок нулевой, у полюса порядок отрицательный).

Значения функций $\lambda_2(t), \lambda_3(t)$ на $[0, t_n]$, определённые в §3, получаются как значения аналитических функций λ_2, λ_3 (на разветвлённом накрытии области Ω) при помощи подходящего выбора прообраза $[0, t_n]$ при его поднятии. Соответственно, матрица $M_2(t)$ есть ограничение на этот прообраз аналитической матрицы, определённой на разветвлённом накрытии Ω. Ограничим функцию $\varrho(t)$ на этот прообраз $[0, t_n]$ и разделим $M_2(t)$ поточечно на $\varrho(t)$. Полученная в результате матрица $\widetilde{M_2}$ будет равномерно (по n) непрерывна, ограниченна и у неё будет ненулевой элемент

$$\exists (i,j)(t) \quad : \qquad (\widetilde{M_2}(t))_{ij} \neq 0,$$

равномерно отграниченный от нуля на $[0, t_n]$. Опять же, $\operatorname{rank} \widetilde{M_2} = 1$ и в исключительных точках $t \in \widetilde{T}$.

Далее действуем, как и в предыдущем пункте, устраивая конечное покрытие отрезка $[0, t_n]$ непересекающимися интервалами $\triangle_{\widetilde{t}}^{(ij)}$, на которых элемент $(\widetilde{M_2})_{ij}$ отграничен равномерно по n от нуля, выбирая $\vec{v}_2$ пропорциональным j-ому столбцу $\widetilde{M_2}$, содержащему этот ненулевой элемент (так как $\operatorname{rank} \widetilde{M_2} = 1$, все столбцы пропорциональны собственному вектору):

$$\vec{v}_2(t) := C\big((\widetilde{M_2}(t)_{1j}), (\widetilde{M_2}(t)_{2j}), (\widetilde{M_2}(t))_{3j}\big)^T , \quad t \in \triangle_{\widetilde{t}}^{(i,j)} ,$$

фиксируя длину

$$\|\vec{v}_2(t)\| = 1 , \quad t \in [0, t_n] ,$$

и аргумент i-ой компоненты

$$\arg v_{2,i} = \text{const} \quad \text{на} \quad \triangle_{\widetilde{t}}^{(i,j)} \ .$$

Непрерывный (равномерно) вектор $\vec{v}_2(t)$ построен.

3) Вектор $\vec{v}_3$ выбираем из

$$\vec{v}_3 \in \text{span}\{\vec{u}_1^*, \vec{v}_2\}^\perp \ . \tag{5.10}$$

Это одномерное пространство, непрерывно зависящее от t, так как $\vec{u}_1^* \perp \vec{v}_2$. Фиксируем

$$\|\vec{v}_3\| = 1 \ , \quad \forall\, t \in [0, t_n] \ .$$

В окрестности $O(\{t\})$ точки t у него есть координата

$$|(\vec{v}_3)_i| > \sqrt{\frac{1}{4}} \ , \quad t \in O(\{t\}) \ .$$

Далее, непрерывная ветвь угла вектора $\vec{v}_3$ фиксируется, как и прежде (см. пункт 1)).

4) Вектор $\vec{u}_2$ выбирается из условий:

$$\begin{aligned} &a) \vec{u}_2 \in \text{span}\{\vec{v}_1^*, \vec{v}_3^*\}^\perp \ , \\ &b) \ \langle \vec{u}_2, \vec{v}_2^* \rangle = 1 \ . \end{aligned} \tag{5.11}$$

Если векторы $\vec{v}_1(t)$ и $\vec{v}_3(t)$ не коллинеарны, то $\text{span}\{\vec{v}_1^*, \vec{v}_3^*\}^\perp$ — непрерывно зависящее от t одномерное пространство. Так как по построению (см. (5.3), (5.10))

$$\begin{aligned} &a) \ \langle \vec{u}_1, \vec{v}_1^* \rangle = 1 \\ &b) \ \langle \vec{u}_1, \vec{v}_3^* \rangle = 0 \end{aligned} \ , \tag{5.12}$$

и нормы $\|\vec{u}_1(t)\|, \|\vec{v}_1(t)\|, \|\vec{v}_3(t)\| < \infty$, то $\vec{v}_1(t) \nparallel \vec{v}_3(t)$ и угол между ними равномерно отграничен от нуля. Наконец, обратимся к пункту b) в определении $\vec{u}_2$, который фиксирует не только длину $\vec{u}_2$, но и его угол. Непрерывный вектор $\vec{u}_2(t), \ t \in [0, t_n]$, построен.

5) Наконец, выбираем $\vec{u}_3$:

$$\begin{aligned} &a) \vec{u}_3 \in \text{span}\{\vec{v}_1^*, \vec{v}_2^*\}^\perp \ , \\ &b) \ \langle \vec{u}_3, \vec{v}_3^* \rangle = 1 \ . \end{aligned} \tag{5.13}$$

Векторы $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ неколлинеарны, как собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям. Однако просто неколлинеарности $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$

нам мало. Нам нужно показать равномерную по n отграниченность от 0 угла между $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Сделаем это. Начнём с неравенства Шварца.

$$\|A(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2)\|^2 \leqslant \|A^*A\| \, \|(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2)\|^2 , \quad \forall\, a, b \in \mathbb{C}$$

которое, с учётом того, что $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ есть собственные векторы A, переписывается

$$\begin{gathered} |a|^2|\lambda_1|^2|\vec{v}_1|^2 + |b|^2|\lambda_2|^2|\vec{v}_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(a\bar{b}\,\lambda_1\overline{\lambda_2}\langle\vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle) \leqslant \\ \leqslant \|A^*A\| \left(|a|^2|\vec{v}_1|^2 + |b|^2|\vec{v}_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(a\bar{b}\langle\vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle)\right) . \end{gathered}$$

Группируя члены, получим

$$\begin{gathered} 2\,\mathrm{Re}\left(a\bar{b}(\lambda_1\overline{\lambda_2} - \|A^*A\|)\langle\vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle\right) \leqslant \\ \leqslant (\|A^*A\| - |\lambda_1|^2)\, |a|^2|\vec{v}_1|^2 + (\|A^*A\| - |\lambda_2|^2)\, |b|^2|\vec{v}_2|^2 . \end{gathered} \tag{5.14}$$

Учитывая, что a и b, произвольные комплексные числа, подкруткой их аргументов (умножая на $e^{i\varphi}$) можно добиться того, что левая часть (5.14) будет равна

$$2|a|\,|b|\left|\lambda_1\overline{\lambda_2} - \|A^*A\|\right| |\langle\vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle| ,$$

а выбором модулей a и b можно добиться того, что правая часть (5.14) будет равна

$$2|a|\,|b|\sqrt{\|A^*A\| - |\lambda_1|^2}\sqrt{\|A^*A\| - |\lambda_2|^2}\,|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|$$

(речь идёт о достижении равенства в неравенстве между средними геометрическим и арифметическим или об отрицательном дискриминанте у положительного квадратного трёхчлена). Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \frac{|\langle\vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle|}{|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|} &\leqslant \frac{\sqrt{(\|A^*A\| - |\lambda_1|^2)\,(\|A^*A\| - |\lambda_2|^2)}}{\left|\|A^*A\| - \lambda_1\overline{\lambda_2}\ \right|} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|^2\|A^*A\|}{\left|\|A^*A\| - \lambda_1\overline{\lambda_2}\ \right|^2}} \end{aligned}$$

Так как $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ и $|\lambda_1|^2 \leqslant \|A^*A\| < \infty$ равномерно, то

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \quad 0 < \varepsilon \leqslant \frac{|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|^2\|A^*(t)A(t)\|}{\left|\|A^*(t)A(t)\| - \lambda_1(t)\overline{\lambda_2}(t)\right|^2} < 1 , \quad t \in [0, t_n]$$

равномерно по n. Таким образом, равномерная по n отграниченность от нуля угла между собственными векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ доказана.

Теперь так же, как и в предыдущих пунктах, пункт b) в определении $\vec{u}_3(t)$ — (5.13) выбирает длину и аргумент при $t \in [0, t_n]$.

6) Итак, непрерывно зависящие от $t\in[0,t_n]$ векторы $\vec{v}_j(t)$, $\vec{u}_j(t)$, $j=1,2,3$ построены и непрерывность равномерная по $t_n\in\mathbb{C}\backslash O_\varepsilon(F)$. Осталось проверить, что они удовлетворяют (3.7) и реализуют (при соответствующем выборе непрерывной $\omega(t)$) декомпозицию (3.6) матрицы A.

Докажем последнее соотношение со скалярным произведением, которого нам не хватает для соотношения (3.7). M_1 — полином от A, поэтому $AM_1=M_1A$. Далее, $M_1=\vec{v}_1\vec{u}_1^T$; $\vec{u}_1^T\vec{v}_1=1$. Поэтому

$\vec{u}_1^TA=1\cdot\vec{u}_1^TA=\vec{u}_1^T\vec{v}_1\vec{u}_1^TA=\vec{u}_1^TM_1A=\vec{u}_1^TAM_1=\vec{u}_1^TA\vec{v}_1\vec{u}_1^T=\vec{u}_1^T(\lambda_1\vec{v}_1)\vec{u}_1^T=\lambda_1\cdot1\cdot\vec{u}_1^T.$

Теперь имеем: $\lambda_2\cdot\vec{u}_1^T\vec{v}_2=\vec{u}_1^T\cdot(\lambda_2\vec{v}_2)=\vec{u}_1^TA\vec{v}_2=(\lambda_1\vec{u}_1^T)\vec{v}_2=\lambda_1\cdot\vec{u}_1^T\vec{v}_2.$

Поскольку $\lambda_2\neq\lambda_1$, то

$$\vec{u}_1^T\vec{v}_2=0. \tag{5.15}$$

Итак, соотношение (3.7) удовлетворено по построению (см. (5.12) a), (5.11) b), (5.13) b) в связи с равенством единице диагональных элементов в (3.7), и условия (5.15), (5.12) b), (5.11) a), (5.13) a), которые обеспечивают равенство нулю остальных элементов):

$$\begin{aligned}&\vec{u}_1^T\vec{v}_1=1;\ \ \vec{u}_1^T\vec{v}_2=0;\ \ \vec{u}_1^T\vec{v}_3=0\\&\vec{u}_2^T\vec{v}_1=0;\ \ \vec{u}_2^T\vec{v}_2=1;\ \ \vec{u}_2^T\vec{v}_3=0\\&\vec{u}_3^T\vec{v}_1=0;\ \ \vec{u}_3^T\vec{v}_2=0;\ \ \vec{u}_3^T\vec{v}_3=1.\end{aligned} \tag{5.16}$$

Теперь проверяем (3.6). Тот факт, что $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ суть собственные векторы A, даёт для центральной матрицы декомпозиции (3.6) (см. обозначение (4.3))

$$\Lambda(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&*\\0&\lambda_2&*\\0&0&*\end{pmatrix}.$$

Отметим, что справедливость (3.6) теперь эквивалентна

$$A\,\vec{v}_3=\lambda_3\vec{v}_3+\omega\,\vec{v}_2\,, \tag{5.17}$$

т.е. $A\vec{v}_3\in\operatorname{span}\{\vec{v}_3,\vec{v}_2\}$ и $\langle A\vec{v}_3,\vec{v}_3^*\rangle=\lambda_3$. Докажем (5.17).

$$\vec{u}_1^TA\,\vec{v}_3=\lambda_1(\vec{u}_1^T\vec{v}_3)=0\ \Rightarrow\ A\,\vec{v}_3\in\operatorname{span}\{\vec{u}_1^*\}^\perp=\operatorname{span}\{\vec{v}_3,\vec{v}_2\}\,.$$

Теперь проверим, что величина проекции $A\,\vec{v}_3$ на $\vec{v}_3$ равна λ_3. Имеем из определений M_1 и M_2 (см. (5.1) и (5.8)):

$$(\lambda_1-\lambda_3)\,M_1+M_2=(A-\lambda_3E)\,,$$

поэтому (с учётом (5.3) и (5.16))

$$(A-\lambda_3E)\vec{v}_3=[(\lambda_1-\lambda_3)M_1+M_2]\vec{v}_3=M_2\vec{v}_3+(\lambda_1-\lambda_3)\vec{v}_1\vec{u}_1^T\vec{v}_3=M_2\vec{v}_3\in\operatorname{span}\{\vec{v}_2\}\,.$$

Наконец, выбирая $\omega(t)\ :=\ \langle(A-\lambda_3E)\,\vec{v}_3,\vec{u}_2^*\rangle$, завершаем доказательство Леммы.

Список литературы

[1] H. Poincare, *Sur les equations lineaires aux differentielles et aux differences finies*, Amer. J. Math., 1885, v. 7, P. 203–258.

[2] O. Perron, *Über einen Satz des Herrn Poincare*, J. Reine Angew. Math., 1909, v. 136, P. 17–37.

[3] O. Perron, *Über die Poincaresche lineare Differenrengleichung*, J. Reine Angew. Math., 1910, v. 137, P. 6–64.

[4] D. G. Birkhoff, W. J. Trjitzinsky, *Analytic Theory of Singular Difference Equations*, Acta mathematica, 1932, vol. 60, P. 1–89.

[5] D. G. Birkhoff, W. J. Trjitzinsky, *Formal Theory of Irregular Linear Difference Equations*, Acta mathematica, 1930, vol. 54, P. 205–246.

[6] M. Plancherel, W. Rotach, *Sur les valeures asymptotiques des polynomes d'Hermite*, Commentarii Math. Helvetici, 1929, vol.1, P. 227–257.

[7] A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche, *The Asymptotic Zero Distribution of Orthogonal Polynomials with Varying Recurrence Coefficients*, Journal of Approximation Theory, 1999, 99, P. 167–197.

[8] A. I. Aptekarev, J. S. Geronimo, W. Van Assche, *Varying weights for orthogonal polynomials with monotonically varying recurrence coefficients*, Journal of Approximation Theory, 2008, 150, P. 214–238.

[9] Д. Н. Туляков, *Асимптотика типа Планшереля–Ротаха для линейных рекуррентных соотношений с рациональными коэффициентами*, Матем. сб., 2010, 201:9, 111–158.

[10] Д. Н. Туляков, *Разностные уравнения с базисами степенного роста, возмущённые спектральным параметром*, Матем. сб., 2009, 200:5, P. 129–158.

[11] В. И. Парусников, *Алгоритм Якоби–Перрона и совместное приближение функций*, Матем. сборник, 1981, 114(156), № 2, с. P. 322–333.

[12] A. Aptekarev, J. Arvesu', *Asymptotics for Multiple Meixner Polynomials*, http://arxiv.org/abs/1207.0463