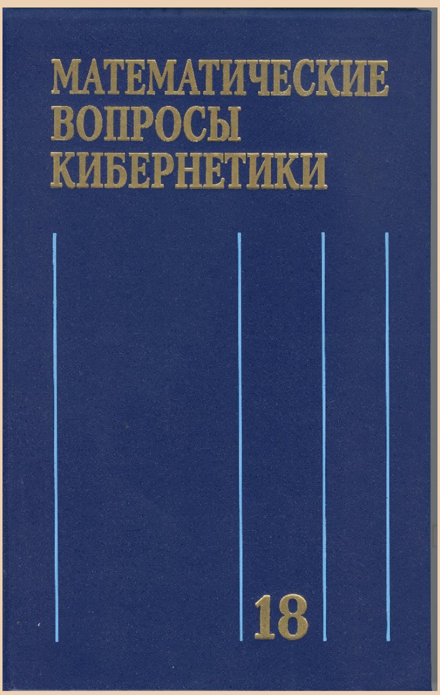
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН • Электронная библиотека
Математические вопросы кибернетики • Выпуск 18



Д. А. Дагаев

О сложности функций многозначной логики, принимающих два значения

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Дагаев Д. А. О сложности функций многозначной логики, принимающих два значения // Математические вопросы кибернетики. Вып. 18. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — С. 35–122.
URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2013-35

О СЛОЖНОСТИ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ, ПРИНИМАЮЩИХ ДВА ЗНАЧЕНИЯ *)

Д. А. ДАГАЕВ

(МОСКВА)

Оглавление

Введение

Данная работа относится к теории синтеза и сложности управляющих систем. В ней рассматривается задача о сложности реализации функций многозначной логики формулами над конечными системами.

Задача синтеза и сложности управляющих систем [33, 37, 72, 106] в общем случае формулируется следующим образом. Дан набор G базисных элементов некоторого типа (например, функциональные элементы или формулы), каждому из которых приписано некоторое положительное число — вес элемента. С помощью этих элементов по заданным правилам строятся более

*) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №11–01–00508, и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения», проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем».

© Д. А. Дагаев, 2013

сложные объекты — схемы. Каждой схеме $\mathscr{S}$ ставится в соответствие некоторая функция f и число $L(\mathscr{S})$, равное сумме весов всех входящих в нее элементов; при этом говорят, что функция f реализуется схемой $\mathscr{S}$ со сложностью $L(\mathscr{S})$. Сложностью функции f называется величина $L_G(f) = \min L(\mathscr{S})$, где минимум берется по всем схемам $\mathscr{S}$ над G, реализующим функцию f. Для каждой функции f требуется найти минимальную схему $\mathscr{S}$ над G, реализующую f (т. е. такую схему $\mathscr{S}$, реализующую f, сложность которой удовлетворяет равенству $L(\mathscr{S}) = L_G(f)$). При изучении функций из заданного конечного множества H рассматривается величина $L_G(H) = \max L_G(f)$, где максимум берется по всем функциям f из H. Функция $L_G(H)$ называется функцией Шеннона. Она характеризует сложность реализации в рассматриваемом классе управляющих систем самых сложных функций из множества H. Эта функция была введена К. Шенноном в работе [107], и там же были получены первые значительные результаты о ее поведении.

Формулы и схемы из функциональных элементов (называемые далее схемами), реализующие дискретные функции, являются одними из основных модельных классов управляющих систем. Множество P_k всех функций k-значной логики, $k \geqslant 2$, является важным примером класса дискретных функций, представляющим большой интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Одной из наиболее изученных классификаций функций k-значной логики являются классы функций, замкнутые относительно операции суперпозиции (см., например, [8, 38, 71, 74]). В связи с этим возникает задача о реализации функций k-значной логики из замкнутых классов формулами (или схемами) над конечными системами. В этой задаче можно выделить два направления исследований: синтез схем и формул в полных базисах и синтез схем и формул в неполных базисах.

Приведем сначала некоторые результаты, полученные в этих направлениях для функций алгебры логики. В задаче о сложности реализации булевых функций основополагающие результаты были получены О. Б. Лупановым, предложившим асимптотически оптимальные методы синтеза для ряда классов управляющих систем [28–37]. В частности, для произвольного полного конечного базиса G булевых функций он показал [29, 30] справедливость следующих соотношений*):

$$L_G^{\text{СФЭ}}(P_2(n)) \sim \rho \frac{2^n}{n},$$

$$L_G^{\Phi}(P_2(n)) \sim \rho \frac{2^n}{\log_2 n},$$

где $L_G^{\text{СФЭ}}(P_2(n))$ и $L_G^{\Phi}(P_2(n))$ — функции Шеннона при реализации функций схемами и формулами соответственно, а ρ — константа (она называется минимальным приведенным весом элементов базиса), однозначно определяемая по базису G. Оценки высокой степени точности для функций Шеннона при реализации булевых функций формулами и схемами в полных базисах получены в работах С. А. Ложкина [22, 23, 25, 26].

Задача о поведении функций Шеннона для множества всех булевых функций тесно связана с задачей о поведении функций Шеннона, соответствующих замкнутым классам булевых функций при реализации функций схемами и формулами в полных конечных базисах. Полное описание множества всех замкнутых классов булевых функций получено Э. Л. Постом [101, 102] (см. также [41, 42, 62, 68, 75, 88, 94, 95, 105]). Он показал, что это множество счетно, причем каждый замкнутый класс имеет конечный базис. В ряде работ [17, 18, 43, 51, 53, 70, 73, 85] изучалась задача

*) Здесь и далее всякий раз, когда речь идет об асимптотических оценках, подразумевается, что эти оценки имеют место при $n \to \infty$.

о сложности реализации монотонных булевых функций (множество всех таких функций обозначается через M). Асимптотически точные формулы для функций Шеннона при реализации функций из класса M схемами в произвольных полных конечных базисах приведены в работах [55] и [100] (эти формулы получены на основе методов кодирования монотонных функций из работ [86] и [87] соответственно). При реализации функций схемами для каждого замкнутого класса булевых функций, не содержащегося в множестве **) $L \cup K \cup D$, и любого полного конечного базиса, А. Б. Угольниковым [58,63] получена асимптотически точная формула для соответствующей функции Шеннона. При реализации функций формулами для всех замкнутых классов булевых функций, не содержащихся в множестве $S \cup L \cup K \cup D$, и для любого конечного полного базиса асимптотически точные формулы для соответствующих функций Шеннона получены А. Е. Андреевым [1,2,4].

Следует отметить, что упомянутые выше методы синтеза схем и формул существенным образом используют полноту базисов. Поэтому задача о синтезе схем и формул в неполных базисах требует разработки других методов синтеза. Отметим некоторые результаты, полученные в задаче о сложности реализации булевых функций из замкнутых классов схемами и формулами в неполных базисах. При реализации функций схемами для замкнутых классов функций, сохраняющих константы, и любых конечных систем, порождающих эти классы, асимптотически точные формулы для соответствующих функций Шеннона были получены Э. И. Нечипоруком [44, 45]. Для ряда замкнутых классов функций алгебры логики аналогичные утверждения доказаны в работах [3,56,57,59]. При реализации функций формулами для некоторых замкнутых классов («близких» к множеству P_2) и любых конечных систем, порождающих эти классы, асимптотически точные формулы для соответствующих функций Шеннона получены в работах [56, 57]. В работах [60, 61, 108] показано, что для любого замкнутого класса B и любой конечной системы, порождающей класс B, сложность реализации формулами каждой функции из B имеет не более чем экспоненциальный порядок роста от числа переменных (см. также [40]). Верхние оценки сложности реализации функций из некоторых замкнутых классов схемами и формулами в неполных базисах приведены в работах [2,46,50,52,59,66].

Таким образом, в задаче о сложности реализации булевых функций схемами и формулами в конечных базисах с положительными весами всех входящих в них элементов получен ряд существенных результатов. Получение аналогичных результатов для функций многозначной логики наталкивается на значительные трудности. Это связано с принципиальными отличиями многозначных логик от двухзначной. Одним из основных отличий является континуальность множества всех замкнутых классов функций k-значной логики при $k \geqslant 3$ (см. [77]). В связи с этим важным направлением исследований является изучение свойств отдельных семейств замкнутых классов. Среди таких семейств одно из центральных мест занимает семейство всех предполных классов *), изучению свойств которого посвящено значительное число публикаций (см., например, [5, 13, 14, 20, 21, 39, 69, 71, 96–99]). Полное описание множества всех предполных классов при всех $k \geqslant 3$ получено И. Розенбергом [103, 104] (см. также [6, 19, 76, 95]). К числу наиболее изученных семейств замкнутых классов функций k-значной логики относится также семейство всех замкнутых классов функций из $P_{k,l}$ — множества всех функций k-значной логики, принимающих значения только из множества $\{0, 1, \ldots, l-1\}$, $k > l \geqslant 2$. Некоторые свойства этих классов изучены

**) Через L, K, D и S обозначаются множества всех линейных функций, конъюнкций, дизъюнкций и самодвойственных функций соответственно.

*) Замкнутый класс $F \subseteq P_k$ называется предполным в P_k, $k \geqslant 2$, если $F \neq P_k$ и для любой функции $f \in P_k \setminus F$ множество $F \cup \{f\}$ порождает P_k.

в работах Г. Буроша [78, 79] и других авторов [80, 81, 89–91, 95]. Свойства замкнутых классов функций из множества $P_{k,2}$, $k \geqslant 3$, изучались в работах [80, 81, 84, 91, 92, 95]. В работах Д. Лау [93, 95] и Н. Грюнвальда [82–84] изучены некоторые свойства замкнутых классов функций из множества $P_{3,2}$. В этих работах рассматривается отображение (называемое проекцией) функций из множества $P_{3,2}$ в множество P_2. На основе этого отображения для каждого множества $F \subseteq P_{3,2}$ определяется множество $prF = \cup prf$, где prf — проекция функции f, а объединение берется по всем функциям $f \in F$. В результате каждому замкнутому классу B булевых функций сопоставляется семейство $\mathfrak{N}(B)$ всех замкнутых классов F функций из $P_{3,2}$, таких, что $prF = B$. Для каждого замкнутого класса B булевых функций найдена мощность множества $\mathfrak{N}(B)$ и приведено описание этого множества для тех случаев, когда мощность $\mathfrak{N}(B)$ конечна или счетна.

Отметим некоторые результаты, полученные в задаче о сложности реализации функций многозначной логики. В. А. Орлов [47, 48] ввел понятие оптимального полного базиса**) функций k-значной логики, $k \geqslant 3$, и для каждого такого базиса предложил асимптотически наилучший метод синтеза схем из функциональных элементов. Он показал также [47–49], что почти любой конечный полный в P_k базис является оптимальным, причем доля базисов, не являющихся оптимальными, убывает трижды экспоненциально с ростом максимального числа входов элементов базиса и более чем дважды экспоненциально с ростом k. При реализации функций схемами для любого полного конечного базиса асимптотически точная оценка соответствующей функции Шеннона анонсирована в работе [27]. При реализации функций формулами для некоторых полных в P_k ($k \geqslant 3$) базисов асимптотически точные формулы для соответствующих функций Шеннона получены в работах Е. Ю. Захаровой [15], С. Б. Гашкова [9] и других авторов (см. [16, 24, 49]). Примеры последовательностей функций из P_4 и P_5, сложность которых в классе формул над некоторой конечной неполной системой имеет сверхэкспоненциальный порядок роста от числа переменных, приведены в работах [60, 64, 67, 108]. Первые экспоненциальные нижние оценки для сложности реализации функций k-значной логики ($k \geqslant 3$) схемами из функциональных элементов в неполных базисах получены Г. А. Ткачевым [54].

В настоящей работе рассматривается задача о сложности реализации функций из $P_{3,2}$ (множества всех функций трехзначной логики, принимающих значения из множества $\{0, 1\}$) формулами над конечными системами. Для ряда конечных систем получены верхние и нижние оценки сложности реализации функций из замкнутых классов, порожденных этими системами.

Дадим необходимые определения (см. также § 1).

Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $k \geqslant 2$. Обозначим через E_k^n множество всех наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, таких, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E_k$, $n \geqslant 1$. Множество всех функций k-значной логики обозначим через P_k, а множество всех функций из P_k, принимающих значения только из множества E_2, — через $P_{k,2}$.

В данной работе будем придерживаться обозначений для замкнутых классов булевых функций из работ [62, 68], а именно: S — множество всех самодвойственных функций; T_i — множество всех функций, сохраняющих константу i, $i = 0, 1$; M — множество всех монотонных функций; L — множество всех линейных функций; O^m — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< 0^m >$, $m = 2, 3, \ldots, \infty$; I^m — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< 1^m >$, $m = 2, 3, \ldots, \infty$; K — множество

**) Конечный полный в P_k базис является оптимальным, если асимптотическое поведение соответствующей функции Шеннона определяется минимальным приведенным весом элементов базиса.

всех конъюнкций; D — множество всех дизъюнкций; U — множество всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной; C — множество всех функций, не имеющих существенных переменных.

Положим

$$L_i = L \cap T_i, M_i = M \cap T_i, K_i = K \cap T_i, D_i = D \cap T_i, U_i = U \cap T_i, C_i = C \cap T_i,$$

где $i = 0, 1$,

$$T_{01} = T_0 \cap T_1, M_{01} = M_0 \cap M_1, L_{01} = L_0 \cap L_1, K_{01} = K_0 \cap K_1, D_{01} = D_0 \cap D_1;$$

$$S_{01} = S \cap T_{01}, U_{01} = U_0 \cap U_1, SM = S \cap M, SL = S \cap L, SU = S \cap U, MU = M \cap U;$$

$$O_0^m = T_0 \cap O^m, I_1^m = T_1 \cap I^m, \quad m = 2, \ldots, \infty;$$

$$MO^m = M \cap O^m, MI^m = M \cap I^m, MO_0^m = M \cap O_0^m, MI_1^m = M \cap I_1^m, m = 2, \ldots, \infty.$$

Определим семейства N_1, N_2, N_3 замкнутых классов булевых функций следующим образом. Положим

$$N_1 = \{P_2, T_0, T_1, T_{01}, M, M_0, M_1, M_{01}, S, S_{01}, SM,$$

$$O^m, O_0^m, MO^m, MO_0^m, I^m, I_1^m, MI^m, MI_1^m, \quad 2 \leqslant m < \infty\},$$

$$N_2 = \{L, L_0, L_1, LS, L_{01}\},$$

$$N_3 = \{O^\infty, I^\infty, MO^\infty, MI^\infty, O_0^\infty, I_1^\infty, MO_0^\infty, MI_1^\infty,$$

$$K, K_0, K_1, K_{01}, D, D_0, D_1, D_{01}, U, U_0, U_1, U_{01}, MU, SU, C, C_0, C_1\}.$$

Из результатов Э. Л. Поста следует, что $N_1 \cup N_2 \cup N_3$ — это множество всех замкнутых классов булевых функций.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$. Проекцией функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется такая булева функция $(prf)(x_1, \ldots, x_n)$, значение которой на произвольном наборе $\widetilde{\alpha} \in E_2^n$ определяется равенством $(prf)(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$. Таким образом, каждой функции $f \in P_{3,2}$ поставлена в соответствие функция $prf \in P_2$. В дальнейшем для упрощения записи функцию $(prf)(x_1, \ldots, x_n)$ будем обозначать через $prf(x_1, \ldots, x_n)$. Проекцией prF множества функций $F \subseteq P_{3,2}$ называется множество $\bigcup\{prf\}$, где объединение берется по всем функциям $f \in F$.

Для каждого замкнутого класса булевых функций B определим множество функций

$$pr^{-1}B = \{f \in P_{3,2} \mid prf \in B\}.$$

Легко видеть, что множество $pr^{-1}B$ является замкнутым классом функций из $P_{3,2}$. Замкнутый класс $pr^{-1}B$ называется максимальным классом (соответствующим классу $B \subseteq P_2$). Таким образом, каждому замкнутому классу B булевых функций соответствует максимальный класс $pr^{-1}B \subseteq P_{3,2}$. Очевидно, что класс $pr^{-1}B$ содержит каждый замкнутый класс H из $P_{3,2}$, такой, что $prH = B$. Для каждого замкнутого класса булевых функций B определим множество замкнутых классов

$$\mathfrak{N}(B) = \{A \subseteq P_{3,2} \mid A = [A], \ prA = B\}.$$

Показано (см. [95]), что максимальный класс $pr^{-1}B$ имеет конечную порождающую систему в тех и только тех случаях, когда $B \notin \{C, C_0, C_1\}$. Показано также, что если $B \in N_1$, то семейство $\mathfrak{N}(B)$ конечно, если $B \in N_2$, то $\mathfrak{N}(B)$ счетно, если $B \in N_3$, то $\mathfrak{N}(B)$ имеет мощность континуума.

Функция f из $P_{3,2}$ называется псевдолинейной, если $prf \in L$. Описание множества всех замкнутых классов псевдолинейных функций см., например, в книге [95]. Будем обозначать замкнутые классы, проекция которых совпадает с множеством L всех линейных булевых функций, через $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_2$, $Z_{2,0} \cap \mathscr{L}$, $Z_{2,1} \cap \mathscr{L}$, $\mathscr{L}_{2,r}$, где $r = 1, 2, \ldots, \infty$. Известно, что все перечисленные классы, за исключением класса $\mathscr{L}_{2,\infty}$, являются конечно-порожденными (см. [95]).

Пусть Ψ — конечная система функций из P_k, $k \geqslant 2$, $[\Psi]$ — замыкание системы Ψ относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in [\Psi]$, Φ — формула над Ψ, реализующая функцию f, а $F \subseteq [\Psi]$. Через $L(\Phi)$ обозначим число символов переменных, входящих в формулу Φ (сложность формулы Φ), через $L_\Psi(f)$ — сложность реализации функции $f \in F$ над системой Ψ, а через $L_\Psi(F(n))$ — функцию Шеннона по сложности для множества F. Через $D(\Phi)$ будем обозначать глубину формулы Φ, через $D_\Psi(f)$ — глубину реализации функции $f \in F$ над системой Ψ, а через $D_\Psi(F(n))$ — функцию Шеннона по глубине для множества F.

Дадим краткое описание содержания работы.

В параграфе 1 приводятся основные определения и обозначения, используемые в работе, а также вспомогательные утверждения. В частности, доказывается ряд свойств функций из $P_{3,2}$, находятся конечные порождающие системы некоторых замкнутых классов функций, приводятся известные простейшие методы синтеза.

В параграфе 2 изучаются конечные системы псевдолинейных функций и замкнутые классы, порожденные этими системами (см. также [10]). Строятся конечные порождающие системы $\mathfrak{D}_r$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{E}$ классов $\mathscr{L}_{2,r}$, $\mathscr{L}_2$, $Z_{2,0} \cap \mathscr{L}$ и $Z_{2,1} \cap \mathscr{L}$ соответственно, $1 \leqslant r < \infty$. Для функций из этих классов доказываются верхние и нижние оценки сложности.

Для каждой псевдолинейной функции f строится каноническое представление. На основе этого представления определяются специальные множества функций H_f, J_f, K_f и Y_f. Кроме того, для каждой функции f из класса $\mathscr{L}_2$ вводятся величины $A(f)$ и $B(f)$. Доказывается следующая теорема о сложности функций из рассматриваемых классов.

Теорема 1 (теоремы 2.2.3, 2.2.1). *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_n)$ и $h(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольные функции из классов $\mathscr{L}_{2,r}$, $Z_{2,0} \cap \mathscr{L}$ и $Z_{2,1} \cap \mathscr{L}$ соответственно, существенно зависящие от n переменных, $n \geqslant 2$, $1 \leqslant r < \infty$. Тогда имеют место равенства*

$$L_{\mathfrak{D}_r}(f) = |J_f| + |H_f| + r|K_f|,$$

$$L_{\mathfrak{A}}(g) = |J_g| + |H_g|, \quad L_{\mathfrak{E}}(h) = |J_h| + |H_h|.$$

В этом параграфе также находятся точные оценки для соответствующих функций Шеннона.

Теорема 2 (теоремы 2.2.4, 2.2.2, 2.3.1). *Пусть $Q = Z_{2,0} \cap \mathscr{L}$, $U = Z_{2,1} \cap \mathscr{L}$, $r \geqslant 1$. Тогда имеют место равенства*

$$L_{\mathfrak{D}_r}(\mathscr{L}_{2,r}(n)) = 1 + n + r(C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^r), \quad n \geqslant r \geqslant 1; \tag{1}$$

$$L_{\mathfrak{A}}(Q(n)) = L_{\mathfrak{E}}(U(n)) = n + 1, \quad n \geqslant 2; \tag{2}$$

$$L_{\mathfrak{C}}(\mathscr{L}_2(n)) = n2^{n-1} + 2^{n+1} - 1, \quad n \geqslant 2. \tag{3}$$

Кроме того, в параграфе 2 для каждой функции $f \in \mathscr{L}_2(n)$, существенно зависящей от $n \geqslant 2$ переменных, доказывается равенство $L_{\mathfrak{C}}(f) = |Y_f| + A(f)$ (см. теорему 2.3.2). Отсюда, принимая во внимание неравенство $A(f) \leqslant B(f)$, в частности, следуют неравенства

$$|Y_f| \leqslant L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant |Y_f| + B(f),$$

из которых для широкого класса последовательностей функций можно получить верхние оценки сложности, близкие к соответствующим нижним оценкам.

Наконец, в этом параграфе для максимального класса $\mathscr{L} = pr^{-1}L$ и некоторой конечной порождающей системы $\mathfrak{B}$ этого класса приведено асимптотически точное равенство для функции $L_{\mathfrak{B}}(\mathscr{L}(n))$ (которое следует из теоремы 3.3.2, доказанной в параграфе 3).

Теорема 3 (теорема 2.2.5). *Имеет место соотношение*

$$L_{\mathfrak{B}}(\mathscr{L}(n)) \sim \frac{3^n}{\log_2 n}.$$

В параграфе 3 рассматривается задача о сложности реализации функций из конечно-порожденных максимальных замкнутых классов (см. также [11]). Сначала с помощью градиентного алгоритма (см. [7]) строится специальное разбиение множества E_3^r, $r \geqslant 3$, на подмножества $U_0, U_1, \ldots, U_{T(r)}$. При этом каждое множество U_i, $i = 1, \ldots, T(r)$, обладает следующими свойствами:

1) U_i является подмножеством некоторого шара радиуса 1;

2) найдется число $l = l(i)$, $1 \leqslant l \leqslant r$, такое, что l-я компонента каждого набора из U_i равна 2.

Затем оценивается мощность данного разбиения. Далее на основе этого разбиения строится представление функций из максимальных классов, аналогичное (третьему) представлению булевых функций из работы О. Б. Лупанова [33]. После этого на основе полученного представления вычисляются верхние оценки сложности реализации функций. Наконец, приводятся доказательства мощностных нижних оценок соответствующих функций Шеннона (см. [33, 37]).

В этом параграфе для каждого замкнутого класса булевых функций B, такого, что $U_{01} \subseteq B$, определяется некоторая конечная система $G = G(B)$, которая порождает класс $pr^{-1}B$. Доказывается следующая теорема.

Теорема 4 (теорема 3.3.2). *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций, такой, что $U_{01} \subseteq B$. Тогда выполняются соотношения*

$$\frac{3^n}{\log_2 n} \lesssim L_G(pr^{-1}B(n)) \lesssim \frac{3^n}{\log_2 n} + L_{prG}(B(n)).$$

Из этой теоремы следует, что задача о поведении функции $L_G(pr^{-1}B(n))$ в некоторых случаях сводится к задаче о сложности реализации булевых функций в неполных базисах (т. е. к задаче о поведении функции $L_{prG}(B(n))$). В частности, из теоремы 4 и известных ранее оценок сложности булевых функций извлекаются асимптотически точные формулы для функций Шеннона, соответствующих некоторым максимальным классам.

Теорема 5 (теоремы 3.4.1–3.4.4). *Пусть B — замкнутый класс булевых функций, такой, что выполняется по крайней мере одно из следующих условий:*

1) $L_{01} \subseteq B$;

2) $M_{01} \subseteq B$;

3) $B \in \{O^\infty, O_0^\infty, I^\infty, I_1^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty\}$;

4) $B \in \{D_{01}, D_0, D_1, D, K_{01}, K_0, K_1, K, U, SU, U_{01}, MU, U_0, U_1\}$.

Тогда выполняется соотношение

$$L_G(pr^{-1}B(n)) \sim \frac{3^n}{\log_2 n}.$$

Отметим, что из теоремы 5 непосредственно следует утверждение теоремы 3.

В параграфе 4 рассматривается семейство замкнутых классов функций из $P_{3,2}$, проекция которых принадлежит определенному выше множеству N_1 замкнутых классов булевых функций (см. также [12]). В работе для каждого класса $B \in N_1$, для каждого класса H из множества $\mathfrak{N}(B)$ и для произвольной конечной системы G, порождающей класс H, получено описание (с точностью до порядка) поведения функции $D_G(H(n))$.

Теорема 6 (теорема 4.3.2). *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций из множества N_1, H — произвольный замкнутый класс функций из $P_{3,2}$, такой, что $prH = B$, а G — произвольная конечная порождающая система класса H. Тогда выполняется соотношение*

$$D_G(H(n)) \asymp n.$$

При доказательстве этой теоремы используются методы синтеза формул над неполными системами, реализующих функции алгебры логики (см. [60, 61, 65, 108]).

§ 1. Определения и вспомогательные утверждения

В этом параграфе приводятся основные определения и вспомогательные утверждения, которые будут использоваться в дальнейшем.

1.1. Определения и обозначения. Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $k \geqslant 2$. Обозначим через E_k^n множество всех наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, таких, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E_k$, $n \geqslant 1$. Функция $f^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ называется n-местной функцией k-значной логики, если ее областью определения является множество E_k^n, а областью значений — множество E_k. Верхний индекс у функционального символа f обозначает местность функции. Там, где это не приводит к путанице, мы будем опускать верхний индекс. Множество всех функций k-значной логики обозначается через P_k, а множество всех функций из P_k, принимающих значения только из множества E_2, — через $P_{k,2}$.

Будем обозначать через X счетное множество переменных $x_1, \ldots, x_n, \ldots$. Положим $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $n \geqslant 1$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$. Переменная $x_i \in X_n$ называется существенной переменной функции f, если существуют такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots$ $\ldots, \alpha_n, \beta, \gamma \in E_k$, $\beta \neq \gamma$, что

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \gamma, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Переменная $x_i \in X_n$ называется несущественной переменной функции f, если x_i не является существенной переменной функции f.

Говорят, что $(n+1)$-местная функция $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in P_k$ получена добавлением несущественной переменной x_{n+1} к n-местной функции $g(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, если для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in E_k^{n+1}$ выполняется равенство $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Определим понятие формулы. Пусть есть некоторое множество

$$A = \{f_1^{(n_1)}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}), f_2^{(n_2)}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_2}}), \ldots\}$$

функций из P_k и множество соответствующих функциональных символов

$$B = \{f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \ldots\}.$$

Выражение x_i, где $x_i \in X$, является формулой над A (такая и только такая формула называется тривиальной). Если $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — формулы над A, а $f^{(n)}$ — функциональный символ из B, $n \geqslant 1$, то выражение $\Phi = f^{(n)}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ является формулой над A, а символ $f^{(n)}$ называется внешним функциональным символом формулы Φ. Других формул над A не существует.

Пусть $\Phi = f^{(n)}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ — формула над A. Дадим определение подформулы формулы Φ. Формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ являются подформулами формулы Φ (они также называются главными подформулами формулы Φ). Подформулами формулы Φ называются также сама формула Φ и все подформулы формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Других подформул у формулы Φ не существует.

Формулу Φ, в которую входят символы переменных $x_1, \ldots, x_n$ и только они, будем обозначать через $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$. Для любого набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_k^n$ определим значение $\Phi(\widetilde{\alpha})$, которое принимает формула Φ на наборе $\widetilde{\alpha}$. Если формула Φ является символом переменной x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, то положим $\Phi(\widetilde{\alpha}) = \alpha_i$. Пусть формула Φ имеет вид

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = f^{(m)}(\Phi_1(\widetilde{x}^1), \ldots, \Phi_m(\widetilde{x}^m)),$$

где $f^{(m)}$ — функциональный символ из B, $m \geqslant 1$, $\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^m$ — поднаборы набора $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ — формулы над A, для которых значения $\Phi_1(\widetilde{\alpha}^1), \ldots, \Phi_m(\widetilde{\alpha}^m)$ уже определены и равны $\beta_1, \ldots, \beta_m$ соответственно. Тогда положим

$$\Phi(\widetilde{\alpha}) = f^{(m)}(\beta_1, \ldots, \beta_m).$$

Таким образом, формуле Φ сопоставлена некоторая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$. Будем говорить, что функция f реализуется формулой Φ. Если функция f реализуется некоторой нетривиальной формулой над A, то будем говорить, что функция f получена операцией суперпозиции из функций системы A.

Для любой формулы Φ и любой переменной x обозначим через $N(\Phi; x)$ число вхождений переменной x в формулу Φ.

Пусть $F \subseteq P_k$. Замыканием множества F называется множество всех функций, которые могут быть получены из функций множества F применением операций суперпозиции и добавления несущественной переменной (обозначение $[F]$). Через $F(n)$ обозначим множество всех функций из F, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$, $n \geqslant 1$.

Функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ называются равными, если для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_k^n$ справедливо равенство $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_m) \in P_k$, $m < n$, и пусть функция $h(x_1, \ldots, x_n)$ получена в результате добавления к функции $g(x_1, \ldots, x_m)$ несущественных переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$. По определению функция f равна функции g, если для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_k^n$ выполняется равенство $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Аналогичным образом можно распространить определение равных функций на случай двух функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(y_1, \ldots, y_m)$, зависящих от произвольных переменных.

Функции, принадлежащие множеству P_2, называются булевыми. Определим с помощью таблицы значений некоторые булевы функции, существенно зависящие не более чем от одной переменной, а также некоторые булевы функции, существенно зависящие от двух переменных (см. табл. 1.1 и 1.2).

Таблица 1.1

x	$0(x)$	$1(x)$	$e(x)$	$\overline{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Таблица 1.2

x_1	x_2	$x_1\&x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \to x_2$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

Функция $\overline{x}$ называется отрицанием x. Функция $x_1\&x_2$ называется конъюнкцией x_1 и x_2. Функция $x_1 \vee x_2$ называется дизъюнкцией x_1 и x_2. Функция $x_1 \oplus x_2$ называется сложением по модулю два x_1 и x_2. Функция $x_1 \to x_2$ называется импликацией x_1 и x_2. В дальнейшем функциональный символ конъюнкции x_1 и x_2 по аналогии с символом умножения мы будем опускать там, где это не ведет к двусмысленностям.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ называется линейной, если существуют такие $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \{0, 1\}$, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n;$$

конъюнкцией, если существуют такие $c_0, c_1, \ldots, c_n \{0, 1\}$, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0(c_1 \vee x_1) \ldots (c_n \vee x_n);$$

дизъюнкцией, если существуют такие $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \{0, 1\}$, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \vee c_1 x_1 \vee \ldots \vee c_n x_n.$$

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ называется монотонной, если для любых двух наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ из E_2^n, таких, что $\alpha_i \leqslant \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$, выполняется неравенство $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqslant f(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Говорят, что функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ сохраняет константу i, $i = 0, 1$, если $f(i, \ldots, i) = i$.

Для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ определим двойственную функцию к функции f (обозначение — $f^*(x_1, \ldots, x_n)$). Положим $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$. Для любого множества $F \subseteq P_2$ обозначаем через F^* множество $\cup f^*$, где объединение берется по всем функциям $f \in F$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ называется самодвойственной, если $f(x_1, \ldots, x_n) = f^*(x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, $k \geqslant 2$. По определению функция f не превосходит функции g (обозначение $f \leqslant g$), если для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_k^n$ выполняется неравенство $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqslant g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_m) \in P_k$, $m < n$. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, полученная в результате добавления к функции $g(x_1,\ldots,x_m)$ несущественных переменных $x_{m+1},\ldots,x_n$. По определению функция f не превосходит функции g, если для любого набора $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in E_k^n$ выполняется неравенство $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\leqslant h(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Аналогичным образом можно распространить это определение на случай двух функций $f(x_1,\ldots,x_n)$, $g(y_1,\ldots,y_m)$, зависящих от произвольных переменных.

Говорят, что булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ удовлетворяет условию 0^m (соответственно 1^m), $m\geqslant 2$, если любые m наборов, на которых функция f равна нулю (соответственно единице), имеют общую нулевую (соответственно единичную) компоненту. Говорят, что булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ удовлетворяет условию 0^∞ (соответственно 1^∞), если существует переменная $x_i\in X_n$, такая, что $f(x_1,\ldots,x_n)\geqslant x_i$ (соответственно $f(x_1,\ldots,x_n)\leqslant x_i$).

Определим следующие множества булевых функций: S — множество всех самодвойственных функций; T_i — множество всех функций, сохраняющих константу i, $i=0,1$; M — множество всех монотонных функций; L — множество всех линейных функций; O^m — множество всех функций, удовлетворяющих условию 0^m, $m=2,3,\ldots,\infty$; I^m — множество всех функций, удовлетворяющих условию 1^m, $m=2,3,\ldots,\infty$; K — множество всех конъюнкций; D — множество всех дизъюнкций; U — множество всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной; C — множество всех функций, не имеющих существенной переменной.

Положим

$$L_i=L\cap T_i, M_i=M\cap T_i, K_i=K\cap T_i, D_i=D\cap T_i, U_i=U\cap T_i, C_i=C\cap T_i;$$

где $i=0,1$,

$$T_{01}=T_0\cap T_1,\ M_{01}=M_0\cap M_1,\ L_{01}=L_0\cap L_1,\ K_{01}=K_0\cap K_1,\ D_{01}=D_0\cap D_1,$$
$$U_{01}=U_0\cap U_1;$$
$$S_{01}=S\cap T_{01}, SM=S\cap M, SL=S\cap L, SU=S\cap U;$$
$$O_0^m=T_0\cap O^m, I_1^m=T_1\cap I^m,\quad m=2,\ldots,\infty;$$
$$MO^m=M\cap O^m, MI^m=M\cap I^m, MO_0^m=M\cap O_0^m, MI_1^m=M\cap I_1^m,\quad m=2,\ldots,\infty;$$
$$MU=M\cap U.$$

Булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$, $n\geqslant 3$, называется мажоритарной, если выполняются следующие равенства:

$$f(x_1,x_1\ldots,x_1,x_2)=f(x_1,x_1\ldots,x_2,x_1)=\ldots=f(x_2,x_1\ldots,x_1,x_1)=x_1.$$

Определим отображение pr («проекция») из $P_{3,2}$ в P_2. Пусть функция $f(x_1,\ldots,x_n)\in P_{3,2}$. Проекцией функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется такая булева функция $(prf)(x_1,\ldots,x_n)$, значение которой на произвольном наборе $\widetilde{\alpha}\in E_2^n$ определяется равенством $(prf)(\widetilde{\alpha})=f(\widetilde{\alpha})$. В дальнейшем для упрощения записи функцию $(prf)(x_1,\ldots,x_n)$ будем обозначать через $prf(x_1,\ldots,x_n)$. Проекцией prF множества функций $F\subseteq P_{3,2}$ называется множество $\bigcup\{prf\}$, где объединение берется по всем функциям $f\in F$. Для любого замкнутого класса булевых функций B определим множество функций

$$pr^{-1}B=\{f\in P_{3,2}|prf\in B\}.$$

Очевидно, что множество $pr^{-1}B$ является замкнутым классом. Замкнутый класс $pr^{-1}B$ называется максимальным. Для любого класса B класс $pr^{-1}B$ содержит любой класс из множества классов $P_{3,2}$, проекция которых совпадает с классом B. Таким образом, каждому замкнутому классу булевых функций соответствует один максимальный класс в $P_{3,2}$. Кроме того, для любого замкнутого класса булевых функций B определим множество

$$\mathfrak{N}(B)=\{A=[A]\subseteq P_{3,2}|prA=B\}.$$

В [95] для любого класса B приведена мощность множества $\mathfrak{N}(B)$. Там же приведено описание множества $\mathfrak{N}(B)$ для тех случаев, когда мощность множества $\mathfrak{N}(B)$ конечна или счетна.

Известно [95], что если B — один из следующих трех замкнутых классов булевых функций: C, C_0, C_1, то максимальный класс $pr^{-1}B$ не имеет конечного базиса. Также известно [95], что если B — замкнутый класс булевых функций, отличный от классов C, C_0, C_1, то максимальный класс $pr^{-1}B$ является конечно-порожденным.

Определим с помощью таблицы значений некоторые функции из $P_{3,2}$, существенно зависящие не более чем от одной переменной, а также некоторые функции из $P_{3,2}$, существенно зависящие от двух переменных (см. табл. 1.3 и 1.4).

Таблица 1.3

x	$0(x)$	$1(x)$	$j_0(x)$	$j_1(x)$	$j_2(x)$	$\bar{j}_0(x)$	$\bar{j}_1(x)$	$\bar{j}_2(x)$
0	0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	1	0	0	1	1	1	0

Функцию $\bar{j}_2(x)$ мы также будем иногда обозначать через $k(x)$.

Таблица 1.4

x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$	$\mu(x_1, x_2)$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
2	0	0	0	0
0	2	0	0	0
2	1	1	0	0
1	2	1	0	1
2	2	0	0	0

Отметим, что $\mu(x_1, x_2) = j_1(x_1) \cdot j_2(x_2)$.

В дальнейшем мы будем обозначать булеву функцию, тождественно равную нулю (единице), и функцию трехзначной логики, тождественно равную нулю (единице), одинаковыми символами $0(x)$ $(1(x))$, если это не приводит к путанице. Кроме того, там, где речь идет о функциях трехзначной логики, символ «$+$» означает функциональный символ, соответствующий функции $x + y$, а символ «$\cdot$» — функциональный символ, соответствующий функции $x \cdot y$. Для избежания двусмысленности иногда мы будем обозначать функцию $x+y$ через $\lambda(x, y)$. Также для сокращения записи при неоднократном последовательном применении функций $x+y$ и $x \cdot y$ будут использоваться обозначения $\sum$ и $\prod$ соответственно. Поскольку порядок слагаемых (множителей) в этом случае не играет роли, эти обозначения корректны. Функциональный символ $\cdot$ в некоторых случаях мы будем опускать.

Определим функции

$$\delta(x_1, x_2) = j_1(x_1) \cdot k(x_2);$$
$$\theta(x_1, x_2) = j_1(x_1) + j_2(x_2);$$
$$\rho_p(x_1, x_2, x_3) = j_1(x_1) + j_p(x_2) \cdot j_2(x_3), \quad p \in E_3;$$
$$\psi_p(x_1, x_2, x_3) = j_1(x_3) + j_1(x_1) \cdot j_p(x_2) \cdot j_2(x_3), \quad p \in E_3;$$
$$\zeta_p(x_1, x_2, x_3, x_4) = j_1(x_4) + j_1(x_1) \cdot j_p(x_2) \cdot j_2(x_3), \quad p \in E_3.$$

Отметим, что проекции функций $\delta, \theta, \rho_p, \psi_p, \zeta_p$, $p \in E_3$, принадлежат множеству U_{01}. Положим

$$\mathfrak{U} = \{j_1, \delta, \theta, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2\}.$$

Тогда $pr\mathfrak{U} \subseteq U_{01}$.

Для каждого $r \geqslant 2$ определим функцию $\nu_r(x_1, \ldots, x_r)$. Положим

$$\nu_r(x_1, \ldots, x_r) = j_2(x_1) \cdot \ldots \cdot j_2(x_r).$$

Пусть $n \geqslant 1$. Положим

$$\mathscr{H}_n = \{f(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in P_{3,2} \mid f = j_1(x_{n+1}) + g(x_1, \ldots, x_n), \text{ где } g \in P_{3,2}, \ prg = 0\}. \tag{1.1}$$

Пусть Ψ — конечная система функций из P_k, $f(x_1, \ldots, x_n) \in [\Psi]$, Φ — формула над Ψ, реализующая функцию f, а $F \subseteq [\Psi]$. Сложностью формулы Φ называется число символов переменных, входящих в формулу Φ (обозначение $L(\Phi)$). Сложностью реализации функции $f \in F$ над системой Ψ называется величина $\min L(\Phi)$, где минимум берется по всем формулам над Ψ, реализующим функцию f (обозначение $L_\Psi(f)$). Функцией Шеннона по сложности для множества F называется величина $\max L_\Psi(f)$, где максимум берется по всем функциям f из множества $F(n)$ (обозначение $L_\Psi(F(n))$). Определим по индукции глубину $D(\Phi)$ формулы Φ. Если формула Φ является символом переменной x_i, $x_i \in X$, то $D(\Phi) = 0$. Если $\Phi = f^{(n)}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, где $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — формулы над Ψ, то $D(\Phi) = 1 + \max D(\Phi_i)$, где максимум берется по всем $i = 1, \ldots, n$. Глубиной реализации функции $f \in F$ над системой Ψ называется величина $\min D(\Phi)$, где минимум берется по всем формулам над Ψ, реализующим функцию f (обозначение $D_\Psi(f)$). Функцией Шеннона по глубине для множества F называется величина $\max D_\Psi(f)$, где максимум берется по всем функциям f из множества $F(n)$ (обозначение $D_\Psi(F(n))$).

Иногда рассматривают другое определение сложности формул [37]. Пусть $\Psi = \{g_1, \ldots, g_l\}$ — конечная система функций из P_k, $l \geqslant 1$. Каждой базисной функции g_i ставится в соответствие положительное число $L^1(g_i)$ — вес функции g_i, $i = 1, \ldots, l$. Пусть Φ — формула над Ψ. Тогда сложностью $L^1(\Phi)$ нетривиальной формулы Φ называется сумма весов всех базисных функций, входящих в формулу Φ (с учетом кратности вхождений). Если Φ — тривиальная формула, то положим $L^1(\Phi) = 0$. Пусть $F \subseteq [\Psi]$, а $f \in [F]$. Сложностью реализации функции f (над системой Ψ) называется величина $\min L^1(\Phi)$, где минимум берется по всем формулам Φ над Ψ, реализующим функцию f (обозначение $L^1_\Psi(f)$).

Для каждой функции g_i, $1 \leqslant i \leqslant l$, зависящей от $r(g_i) \geqslant 2$ переменных, рассмотрим величину

$$\rho_i = \frac{L^1(g_i)}{r(g_i)-1},$$

называемую приведенным весом функции g_i. Положим $\rho = \min \rho_i$, где минимум берется по всем i, таким, что функция g_i зависит не менее чем от двух переменных.

Предикатом на множестве E_k будем называть всякую функцию $\xi(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, с областью определения E_k^n и множеством значений, содержащимся в E_2. Говорят, что набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_k^n$ удовлетворяет предикату $\xi(x_1, \ldots, x_n)$, если $\xi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$. Множество всех наборов, удовлетворяющих предикату $\xi(x_1, \ldots, x_n)$, называется множеством истинности предиката $\xi(x_1, \ldots, x_n)$. Предикат называется непустым, если его множество истинности непусто. Матрица, по столбцам которой расположены все наборы из множества истинности предиката $\xi(x_1, \ldots, x_n)$, упорядоченные в лексикографическом порядке, называется матрицей истинности предиката $\xi(x_1, \ldots, x_n)$ и обозначается A_ξ. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_m)$, $m \geqslant 1$, сохраняет непустой предикат $\xi(x_1, \ldots, x_n)$, если для любых m столбцов

$$\begin{pmatrix} a_{1i_1} \\ \ldots \\ a_{ni_1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1i_m} \\ \ldots \\ a_{ni_m} \end{pmatrix}$$

из матрицы A_ξ столбец

$$\begin{pmatrix} f(a_{1i_1}, \ldots, a_{1i_m}) \\ \ldots \\ f(a_{ni_1}, \ldots, a_{ni_m}) \end{pmatrix}$$

также принадлежит матрице A_ξ. Через $Pol_k(A_\xi)$ обозначим множество всех функций из P_k, сохраняющих предикат ξ. Известно [76], что для любого непустого предиката $\xi(x_1, \ldots, x_n)$ множество $Pol_k(A_\xi)$ является замкнутым классом функций k-значной логики. Через $Pol(A_\xi)$ обозначим множество $Pol_3(A_\xi) \cap P_{3,2}$. Легко видеть, что для любого непустого предиката $\xi(x_1, \ldots, x_n)$ множество $Pol(A_\xi)$ также является замкнутым классом. Определим следующие замкнутые классы. Положим

$$Z_{2,0} = Pol \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_{2,1} = Pol \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что в классе $Z_{2,a}$ лежат такие и только такие функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$, которые обладают следующим свойством: если набор $\widetilde{\alpha} \in E_2^n$ получен из набора $\widetilde{\beta} \in E_3^n$ заменой всех двоек на a, то $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta})$, $a = 0, 1$.

Для $i = 0, 1$ определим замкнутый класс

$$T_i^{(2)} = Pol \begin{pmatrix} i & 2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в классе $T_i^{(2)}$ лежат те и только те функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $P_{3,2}$, которые равны i на всех наборах из множества $\{i, 2\}^n$.

Пусть $1 \leqslant i \leqslant 3$ и $(a_1, b_1), \ldots, (a_i, b_i) \in \{(2,0), (0,2), (2,1), (1,2), (2,2)\}$, причем $(a_1, b_1), \ldots, (a_i, b_i)$ попарно различны. Определим замкнутый класс

$$M^{(a_1b_1), \ldots, (a_ib_i)} = Pol \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a_1 & \ldots & a_i \\ 0 & 1 & 1 & b_1 & \ldots & b_i \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что классы $M^{(20)(21)(22)}$, $M^{(02)(21)(22)}$ и $M^{(02)(12)(22)}$ совпадают с множеством функций из $P_{3,2}$, монотонных относительно порядка $1>0>2$, $1>2>0$ и $2>1>0$ соответственно.

Класс $M^{(02)}$ состоит из функций $f(x_1,\ldots,x_n)\in P_{3,2}$, удовлетворяющих следующему условию: если набор $\widetilde{\alpha}\in E_2^n$ получен из набора $\widetilde{\beta}\in E_3^n$ заменой всех двоек на нули, то $f(\widetilde{\alpha})\leqslant f(\widetilde{\beta})$.

Класс $M^{(21)}$ состоит из функций $f(x_1,\ldots,x_n)\in P_{3,2}$, удовлетворяющих следующему условию: если набор $\widetilde{\alpha}\in E_2^n$ получен из набора $\widetilde{\beta}\in E_3^n$ заменой всех двоек на единицы, то $f(\widetilde{\alpha})\geqslant f(\widetilde{\beta})$.

Пусть $s(x)$ — произвольная подстановка на множестве E_k. Функция $f^s(x_1,\ldots,x_n)=s^{-1}(f(s(x_1),\ldots,s(x_n)))$ называется двойственной к функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ относительно подстановки $s(x)$. Для любого множества функций $A\subseteq P_k$ через A^s будем обозначать множество всех функций, двойственных к функциям множества A относительно подстановки s.

Пусть ρ — предикат на множестве E_k, $A_\rho=(a_{ij})$ — его матрица истинности, $i,j\geqslant 1$, а $s(x)$ — произвольная подстановка на множестве E_k. Через $s(\rho)$ будем обозначать предикат, матрица истинности $A_{s(\rho)}$ которого состоит из элементов $s(a_{ij})$.

Пусть $\mathfrak{S}\subseteq P_{3,2}$, а $\widetilde{x}$ — произвольный набор различных переменных из X. Пусть функции $h_i(z,\widetilde{x})\in[\mathfrak{S}]$, $i=1,\ldots,t$, $t\geqslant 1$, таковы, что $h_i(z,\widetilde{x})=j_1(z)+\widehat{h}_i(\widetilde{x})$, где $\widehat{h}_i(\widetilde{x})\in P_{3,2}$, а переменная z принадлежит множеству X, но не входит в набор $\widetilde{x}$. Пусть для всех $i=1,\ldots,t$ формула Φ_i над $\mathfrak{S}$ реализует функцию h_i, причем $N(\Phi_i;z)=1$. Для любой переменной $y\in X$ и любого $t\geqslant 1$ определим формулы $\mathbb{F}[\Phi_1,\ldots,\Phi_t;y]$ над $\mathfrak{S}$. Обозначим через $\mathbb{F}[\Phi_1;y]$ формулу, получающуюся из формулы Φ_1 заменой единственного вхождения переменной z на переменную y. Пусть для некоторого l, $1\leqslant l\leqslant t-1$, построены формулы $\mathbb{F}[\Phi_1;y]$, ..., $\mathbb{F}[\Phi_1,\ldots,\Phi_l;y]$, причем

$$N(\mathbb{F}[\Phi_1;y];y)=\ldots=N(\mathbb{F}[\Phi_1,\ldots,\Phi_l;y];y)=1.$$

Обозначим через $\mathbb{F}[\Phi_1,\ldots,\Phi_{l+1};y]$ формулу, получающуюся из формулы $\mathbb{F}[\Phi_1,\ldots,\Phi_l;y]$ подстановкой вместо единственного вхождения переменной y формулы $\mathbb{F}[\Phi_{l+1};y]$. Очевидно, что $N(\mathbb{F}[\Phi_1,\ldots,\Phi_{l+1};y];y)=1$. Легко видеть, что формула $\mathbb{F}[\Phi_1,\ldots,\Phi_t;y]$ построена над системой $\mathfrak{S}$ и реализует функцию $j_1(y)+\sum\limits_{i=1}^{t}\widehat{h}_i(\widetilde{x})$. Кроме того, легко видеть, что

$$L(\mathbb{F}[\Phi_1,\ldots,\Phi_t;y])\leqslant\sum_{i=1}^{t}L(\Phi_i)+1 \tag{1.2}$$

и

$$N(\mathbb{F}[\Phi_1,\ldots,\Phi_t;y],y)=1. \tag{1.3}$$

Пусть

$$\widehat{A}=\{f_1^{(1)}(x_1),f_2^{(n_2)}(x_{j_1},\ldots,x_{j_{n_2}}),f_3^{(n_3)}(x_{i_3},\ldots,x_{i_{n_3}})\ldots\}\subseteq P_k,$$

где f_1 — функция от одной переменной, тождественно равная единице. Пусть $f\in P_k$ и формула Φ над $\widehat{A}$ реализует функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$. Сопоставим формуле Φ дерево $T_0=(V_0,E_0)$, где V_0 — множество вершин, E_0 — множество ребер. Существует естественное взаимно-однозначное соответствие между вершинами дерева T_0 и подформулами формулы Φ: корневой вершине соответствует формула Φ, смежным с корневой вершинам соответствуют главные подформулы формулы Φ и т.д. Каждой вершине дерева, отличной от висячей, припишем функциональный символ, совпадающий с внешним функциональным символом соответствующей подформулы. Если дерево T_0 содержит некоторую вершину C_0, которой приписан символ f_1, то заменим часть дерева T_0, состоящую из вершины C_0, смежной с ней висячей вершины и ребра, их соединяющего, на одну вершину C. Припишем вершине C символ 1. Применив это правило конечное число раз, мы получим дерево T. Каждой висячей вершине дерева T, которой не приписан символ 1, припишем соответствующий символ переменной. Таким образом, каждой формуле над $\widehat{A}$ можно поставить в соответствие дерево T, висячим вершинам которого приписаны символы из множества $X_n \cup \{1\}$, а остальным вершинам — символы из множества $\{f_2, f_3, \ldots\}$.

Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_k^n$, $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in E_k^n$. Расстоянием по Хеммингу между наборами $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ называется число компонент, в которых различаются наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ (обозначение $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$). Шаром радиуса 1 с центром в наборе $\widetilde{\alpha}$ называется множество наборов $\widetilde{\beta} \in E_k^n$, таких, что $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \leqslant 1$.

1.2. Связь между двумя мерами сложности формул. В этом разделе мы установим связь между двумя введенными ранее мерами сложности формул Φ, а именно между $L(\Phi)$ и $L^1(\Phi)$.

В [37] отмечается, что если конечная система функций Ψ не содержит ни одной функции, зависящей от 1 переменной, а вес каждой функции, зависящей от i переменных, $i \geqslant 2$, равен $i-1$, то для любой формулы Φ над Ψ справедливо равенство $L(\Phi) = L^1(\Phi) + 1$.

Следующий (более слабый) факт справедлив для более широкого множества базисов.

Лемма 1.2.1. *Пусть $\Psi = \{g_1, \ldots, g_l\}$ — конечная система функций из P_k, $l \geqslant 1$, а Φ — произвольная формула над Ψ. Пусть для любой функции $g_i(x_1, \ldots, x_{r_i})$ из множества Ψ, такой, что $r_i \geqslant 2$, выполняется равенство $L^1(g_i) = r_i - 1$, $1 \leqslant i \leqslant l$. Тогда имеет место неравенство*

$$L(\Phi) \leqslant L^1(\Phi) + 1. \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть Φ — произвольная формула над Ψ. Докажем утверждение леммы индукцией по глубине формулы Φ. Если Φ — тривиальная формула, то утверждение леммы очевидно. Если $D(\Phi) = 1$, то формула Φ имеет вид $g_i(y_1, \ldots, y_{r_i})$, где $1 \leqslant i \leqslant l$, $r_i \geqslant 1$. Если $r_i = 1$, то $L(\Phi) = 1 \leqslant L^1(\Phi) + 1$. Если $r_i \geqslant 2$, то $L(\Phi) = r_i$ и $L^1(\Phi) = r_i - 1$. Поэтому $L(\Phi) \leqslant L^1(\Phi) + 1$.

Пусть $k \geqslant 1$ и для всех формул Φ над Ψ, таких, что $D(\Phi) \leqslant k$, утверждение леммы выполняется. Пусть $D(\Phi) = k+1$. Пусть формула Φ имеет вид

$$g_j(\Phi_1, \ldots, \Phi_{s_j}),$$

где $1 \leqslant j \leqslant l$, $s_j \geqslant 1$, $\Phi_1, \ldots, \Phi_{s_j}$ — формулы над Ψ. Из определения следует равенство

$$L(\Phi) = L(\Phi_1) + \ldots + L(\Phi_{s_j}). \tag{1.5}$$

Так как для всех $l = 1, \ldots, s_j$ справедливо неравенство $D(\Phi_l) \leqslant k$, то к формулам $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$ применимо предположение индукции. Поэтому для всех $l = 1, \ldots, s_j$ имеет место неравенство $L(\Phi_l) \leqslant L^1(\Phi_l) + 1$. Если $s_j = 1$, то

$$L(\Phi) = L(\Phi_1) \leqslant L^1(\Phi_1) + 1 \leqslant L^1(\Phi) + 1.$$

Если $s_j \geqslant 2$, то с учетом равенства $L^1(g_j) = s_j - 1$, получаем

$$L(\Phi) = L(\Phi_1) + \ldots + L(\Phi_{s_j}) \leqslant (L^1(\Phi_1) + 1) \ldots + (L^1(\Phi_{s_j}) + 1) =$$
$$= L^1(\Phi_1) + \ldots + L^1(\Phi_{s_j}) + s_j = L^1(g_i) + L^1(\Phi_1) + \ldots + L^1(\Phi_{s_j}) + 1 = L^1(\Phi) + 1.$$

Лемма доказана.

Отметим, что эта лемма позволяет получать следствия в терминах меры сложности $L(\Phi)$ из результатов, сформулированных в терминах меры сложности $L^1(\Phi)$.

1.3. Некоторые оценки сложности булевых функций. В этом разделе приводятся некоторые известные результаты о сложности реализации булевых функций. Сначала рассматривается задача о сложности реализации булевых функций над полными системами, а затем случай неполных порождающих систем.

Один из простейших методов синтеза булевых функций основан на реализации совершенных дизъюнктивных нормальных форм. Имеет место следующий результат (см., например, [37]).

Лемма 1.3.1. *Пусть $A = \{x\&y, x \vee y, \overline{x}\}$. Тогда для любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, выполняется неравенство*

$$L_A(f) \leqslant n2^n. \tag{1.6}$$

Отметим также следующее очевидное утверждение.

Лемма 1.3.2. *Пусть B — произвольный замкнутый класс из множества $\{L_{01}, L_0, L_1, LS, L, D_{01}, D_0, D_1, D, K_{01}, K_0, K_1, K\}$. Тогда для любой конечной порождающей системы F класса B найдется константа c такая, что*

$$L_F(B(n)) \leqslant cn.$$

В [30, 33, 37] предложен асимптотически оптимальный метод синтеза формул, на основе которого получается следующий результат.

Теорема 1.3.1 [37]. *Пусть F — произвольная конечная полная система булевых функций. Тогда выполняется соотношение*

$$L_F(P_2(n)) \sim \frac{2^n}{\log_2 n}.$$

Перейдем теперь к случаю неполных порождающих систем. Известно [61], что для произвольной конечной системы булевых функций F имеет место верхняя линейная оценка соответствующей функции Шеннона по глубине, а также верхняя экспоненциальная оценка соответствующей функции Шеннона по сложности.

Теорема 1.3.2 [61]. *Пусть F — произвольная конечная система булевых функций и $B = [F]$. Тогда существуют константы c, d, зависящие от F, такие, что*

$$D_F(B(n)) \leqslant cn, \quad L_F(B(n)) \leqslant d^n.$$

Для некоторых конечных порождающих систем оценки из теоремы 1.3.2 могут быть усилены. В [56,57] доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1.3.3 [56]. *Пусть $B \in \{S, S_{01}, O^\infty, I^\infty, O_0^\infty, I_1^\infty\}$. Тогда для любой конечной порождающей системы F класса B выполняется соотношение*

$$L_F^1(B(n)) \sim \rho \frac{2^{n-1}}{\log_2 n},$$

где ρ — минимум приведенных весов функций из F.

Теорема 1.3.4 [57]. *Пусть* $B \in \{T_0, T_1, T_{01}\}$. *Тогда для любой конечной порождающей системы* F *класса* B *выполняется соотношение*

$$L_F^1(B(n)) \sim \rho \frac{2^n}{\log_2 n},$$

где ρ — *минимум приведенных весов функций из* F.

Следствием из этих теорем являются следующие две теоремы. Положим вес каждой базисной функции, зависящей от $r \geqslant 2$ переменных, равным $r-1$.

Теорема 1.3.5. *Пусть* $B \in \{S, S_{01}, O^\infty, I^\infty, O_0^\infty, I_1^\infty\}$. *Тогда для любой конечной порождающей системы* F *класса* B *выполняется соотношение*

$$L_F(B(n)) \sim \frac{2^{n-1}}{\log_2 n}.$$

Теорема 1.3.6. *Пусть* $B \in \{T_0, T_1, T_{01}\}$. *Тогда для любой конечной порождающей системы* F *класса* B *выполняется соотношение*

$$L_F(B(n)) \sim \frac{2^n}{\log_2 n}.$$

Доказательство верхних оценок в этих теоремах вытекает непосредственно из теорем 1.3.3, 1.3.4, леммы 1.2.1 и определения величины ρ. Нижние оценки следуют из стандартных мощностных соображений.

Также имеет место следующая теорема.

Теорема 1.3.7 [57]. *Пусть* $B \in \{MO^\infty, MI^\infty, MO_0^\infty, MI_1^\infty\}$. *Пусть* F — *произвольная конечная порождающая система класса* B, *для которой* $\rho = 1$. *Тогда*

$$L_F(B(n)) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^n}{\sqrt{n}\log_2 n}.$$

1.4. Некоторые свойства функций из $P_{3,2}$. В этом разделе мы приведем некоторые свойства функций из $P_{3,2}$, которые будут использоваться в дальнейшем.

Имеют место следующие два утверждения (см., например, [76]).

Лемма 1.4.1. *Пусть* s — *подстановка на множестве* E_k. *Тогда если*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g_0(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_n)),$$

то

$$f^s(x_1, \ldots, x_n) = g_0^s(g_1^s(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_n^s(x_1, \ldots, x_n)).$$

Утверждение леммы 1.4.1 называют принципом двойственности.

Лемма 1.4.2. *Пусть* s — *подстановка на множестве* E_k, $\xi(x_1, \ldots, x_n)$ — *предикат на множестве* E_k, *а* A_ξ — *матрица истинности предиката* ξ. *Тогда*

$$(PolA_\xi)^s = PolA_{s(\xi)}.$$

Следующее утверждение демонстрирует связь между замкнутыми классами функций из $P_{3,2}$ и замкнутыми классами булевых функций.

Лемма 1.4.3. *Пусть* F — *замкнутый класс функций из* $P_{3,2}$. *Тогда множество* prF *является замкнутым классом булевых функций.*

Доказательство. Пусть F — замкнутый класс функций из $P_{3,2}$. Пусть Φ — произвольная нетривиальная формула над системой prF. Обозначим через $h(x_1, \ldots, x_n)$ булеву функцию, реализуемую формулой Φ, $n \geqslant 1$. Положим $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Покажем, что $h \in prF$. Формула Φ без ограничения общности имеет вид $g_0(A_1, \ldots, A_l)$, где $l \geqslant 1$, A_i — формулы над prF, $i = 1, \ldots, l$, $g_0(\widetilde{x}^0) \in prF$, $\widetilde{x}^0$ — некоторый набор переменных, каждая из которых входит в множество $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Будем без ограничения общности считать, что $A_1, \ldots, A_m$, $1 \leqslant m \leqslant l$, — это символы переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m} \in X_n$ соответственно, $1 \leqslant i_1, \ldots, i_m \leqslant n$, а $A_{m+1}, \ldots, A_l$ — это нетривиальные формулы над prF, реализующие некоторые булевы функции $g_{m+1}(\widetilde{x}^{m+1}), \ldots, g_l(\widetilde{x}^l)$ соответственно, где $\widetilde{x}^{m+1}, \ldots, \widetilde{x}^l$ — некоторые наборы переменных, каждая из которых входит в множество X_n. Так как $g_0, g_{m+1}, \ldots, g_l \in prF$, то существуют такие функции $\widehat{g}_0(\widetilde{x}^0), \widehat{g}_{m+1}(\widetilde{x}^{m+1}), \ldots, \widehat{g}_l(\widetilde{x}^l) \in F$, что

$$pr(\widehat{g}_i) = g_i, \quad i = 0, \quad i = m+1, m+2, \ldots, l.$$

Рассмотрим формулу $\widehat{g}_0(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}, \widehat{g}_{m+1}(\widetilde{x}^{m+1}), \ldots, \widehat{g}_l(\widetilde{x}^l))$, которая реализует некоторую функцию $\widehat{h}(x_1, \ldots, x_n) \in F$.

Для любого набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_2^n$ справедливы равенства

$$\widehat{h}(\widetilde{\alpha}) = \widehat{g}_0(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}, \widehat{g}_{m+1}(\widetilde{\alpha}), \ldots, \widehat{g}_l(\widetilde{\alpha})) = \\ = g_0(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}, g_{m+1}(\widetilde{\alpha}), \ldots, g_l(\widetilde{\alpha})) = h(\widetilde{\alpha}).$$

Следовательно, $h = pr\widehat{h}$ и $h \in prF$. Лемма доказана.

В следующей лемме для любого замкнутого класса булевых функций B, такого, что $U_{01} \subseteq B$, описываются минимальные по включению классы функций из $P_{3,2}$, проекция которых совпадает с классом B.

Лемма 1.4.4. *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций, такой, что $U_{01} \subseteq B$. Тогда множества $pr^{-1}B \cap Z_{2,i}$, $i = 0, 1$, являются минимальными по включению замкнутыми классами функций из $P_{3,2}$, проекция которых совпадает с классом B.*

Доказательство. Замкнутость множеств $pr^{-1}B \cap Z_{2,i}$ вытекает из замкнутости множеств $pr^{-1}B$ и $Z_{2,i}$, $i = 0, 1$. Очевидно, что проекция классов $pr^{-1}B \cap Z_{2,i}$, $i = 0, 1$, совпадает с классом B. Докажем, что два этих класса являются минимальными. Пусть H — произвольный замкнутый класс функций из $P_{3,2}$, такой, что $prH = B$. Так как $prH = B$ и $U_{01} \subseteq B$, то в классе H найдется функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, такая, что $prf = e(x_1)$. Тогда, в частности, $f(0, \ldots, 0) = 0$ и $f(1, \ldots, 1) = 1$. Рассмотрим функцию $g(x_1) = f(x_1, \ldots, x_1)$. Очевидно, что $g(x_1) \in H$, $g(0) = 0$ и $g(1) = 1$.

Если $g(2) = 0$, то $g(x_1) = j_1(x_1)$ и $j_1(x_1) \in H$. Пусть $h(x_1, \ldots, x_m)$ — произвольная функция из класса $pr^{-1}B \cap Z_{2,0}$. Покажем, что $h \in H$. Так как $prH = B$, то в классе H найдется функция $t(x_1, \ldots, x_m)$, такая, что $prt = prh$. Рассмотрим функцию $t(j_1(x_1), \ldots, j_1(x_m))$. Так как $t \in H$ и $j_1 \in H$, то $t(j_1(x_1), \ldots, j_1(x_m)) \in H$. Так как $h \in Z_{2,0}$, то функция h удовлетворяет следующему условию: если набор $\widetilde{\alpha} \in E_2^m$ получен из набора $\widetilde{\beta} \in E_3^m$ заменой всех двоек на ноль, то $h(\widetilde{\alpha}) = h(\widetilde{\beta})$. Следовательно, $t(j_1(x_1), \ldots, j_1(x_m)) = h(x_1, \ldots, x_n)$ и $h \in H$.

Если $g(2) = 1$, то аналогичным образом легко показать, что выполняется соотношение $pr^{-1}B \cap Z_{2,1} \subseteq H$. Лемма доказана.

Далее для некоторых булевых классов B приведем описание множества классов из $P_{3,2}$, проекция которых совпадает с классом B (доказательства этих фактов см., например, в [95]).

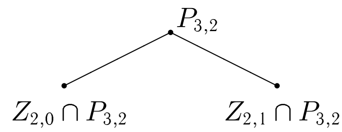


Рис. 1.1. Классы, проекция которых совпадает с P_2

Л е м м а 1.4.5 [95]. *Существует ровно* 3 *класса в* $P_{3,2}$, *проекция которых совпадает с* P_2, *а именно:* $P_{3,2}$, $P_{3,2} \cap Z_{2,0}$, $P_{3,2} \cap Z_{2,1}$ (*см. рис.* 1.1).

Л е м м а 1.4.6 [95]. *Существует ровно* 3 *класса в* $P_{3,2}$, *проекция которых совпадает с классом* S, *а именно:* $pr^{-1}S$, $pr^{-1}S \cap Z_{2,0}$, $pr^{-1}S \cap Z_{2,1}$ (*см. рис.* 1.2).

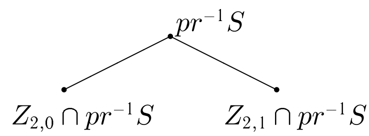


Рис. 1.2. Классы, проекция которых совпадает с классом S

Л е м м а 1.4.7 [95]. *Существует ровно* 5 *классов в* $P_{3,2}$, *проекция которых совпадает с классом* S_{01}, *а именно:* $pr^{-1}S_{01}$, $pr^{-1}S_{01} \cap T_0^{(2)}$, $pr^{-1}S_{01} \cap T_1^{(2)}$, $pr^{-1}S_{01} \cap Z_{2,0}$, $pr^{-1}S_{01} \cap Z_{2,1}$ (*см. рис.* 1.3).

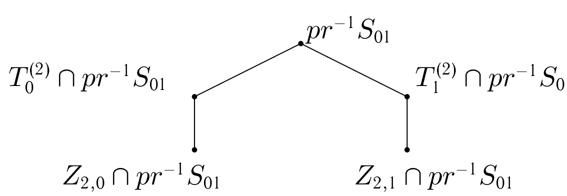


Рис. 1.3. Классы, проекция которых совпадает с классом S_{01}

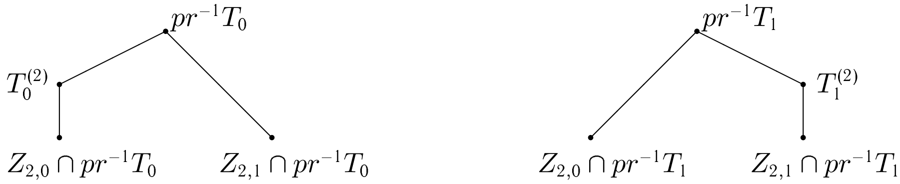


Рис. 1.4. Классы, проекция которых совпадает с классом T_0 (слева) и T_1 (справа)

Л е м м а 1.4.8 [95]. *Для любого* $a \in E_2$ *существует ровно* 4 *класса в* $P_{3,2}$, *проекция которых совпадает с классом* T_a, *а именно:* $pr^{-1}T_a$, $T_a^{(2)}$, $pr^{-1}T_a \cap Z_{2,0}$, $pr^{-1}T_a \cap Z_{2,1}$ (*см. рис.* 1.4).

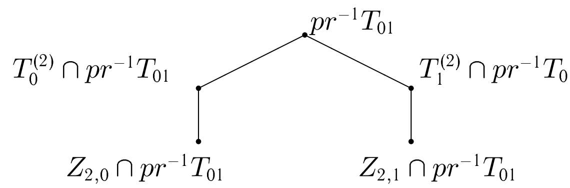


Рис. 1.5. Классы, проекция которых совпадает с классом T_{01}

Лемма 1.4.9 [95]. *Существует ровно* 5 *классов в* $P_{3,2}$, *проекция которых совпадает с классом* T_{01}, *а именно:* $pr^{-1}T_{01}$, $pr^{-1}T_{01} \cap T_0^{(2)}$, $pr^{-1}T_{01} \cap T_1^{(2)}$, $pr^{-1}T_{01} \cap Z_{2,0}$, $pr^{-1}T_{01} \cap Z_{2,1}$ (*см. рис.* 1.5).

1.5. Простейшие методы синтеза. Сначала рассмотрим метод синтеза функций из $P_{3,2}$, аналогичный моделированию совершенной дизъюнктивной нормальной формы. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_3^n$. Функцию вида $K_{\widetilde{\alpha}} = j_{\alpha_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_{\alpha_n}(x_n)$ будем называть конъюнкцией.

Напомним, что в разделе 1.1 были определены функции

$$\delta(x_1, x_2) = j_1(x_1) \cdot k(x_2);$$
$$\theta(x_1, x_2) = j_1(x_1) + j_2(x_2);$$
$$\rho_p(x_1, x_2, x_3) = j_1(x_1) + j_p(x_2) \cdot j_2(x_3), \quad p \in E_3;$$
$$\psi_p(x_1, x_2, x_3) = j_1(x_3) + j_1(x_1) \cdot j_p(x_2) \cdot j_2(x_3), \quad p \in E_3;$$
$$\zeta_p(x_1, x_2, x_3, x_4) = j_1(x_4) + j_1(x_1) \cdot j_p(x_2) \cdot j_2(x_3), \quad p \in E_3.$$

Через $\mathfrak{U}$ мы обозначаем систему функций

$$\{j_1, \delta, \theta, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2\}.$$

Для любой формулы Φ и любой переменной x через $N(\Phi; x)$ мы обозначаем число вхождений переменной x в формулу Φ.

Лемма 1.5.1. *Пусть* $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_3^n \setminus E_2^n$ *и* $t(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = j_1(x_{n+1}) + K_{\widetilde{\alpha}}$, *где* $n \geqslant 1$. *Тогда существует формула* Δ *над системой* $\mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$, *реализующая функцию* t, *такая, что*

$$L(\Delta) \leqslant 2 + 3n \quad \text{и} \quad N(\Phi; x_{n+1}) = 1.$$

Доказательство. Пусть $n = 1$. Тогда

$$t(x_1, x_2) = j_1(x_2) + j_2(x_1).$$

Легко видеть, что формула $\Delta = \theta(x_2, x_1)$ реализует функцию t, причем

$$L(\Delta) = 2, \; N(\Delta; x_2) = 1.$$

Пусть $n = 2$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1 = 2$. Тогда

$$t(x_1, x_2, x_3) = j_1(x_3) + j_2(x_1) j_{\alpha_2}(x_2).$$

Легко видеть, что для любого $\alpha_2 \in E_3$ формула $\Delta = \zeta_{\alpha_2}(\theta(x_1, x_1), x_2, x_1, x_3)$ реализует функцию $t = j_1(x_3) + j_2(x_1) j_{\alpha_2}(x_2)$, причем

$$L(\Delta) = 5, \; N(\Delta; x_2) = 1.$$

Пусть $n \geqslant 3$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1 = 2$. Тогда

$$t(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = j_1(x_{n+1}) + j_2(x_1) j_{\alpha_2}(x_2) \ldots j_{\alpha_n}(x_n).$$

Построим формулу Δ над системой $\mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$, реализующую функцию t. Рассмотрим последовательность функций

$$g_3(x, x_1, x_2, x_3), g_4(x, x_1, \ldots, x_4), \ldots, g_{n+1}(x, x_1, \ldots, x_{n+1}),$$

таких, что

$$g_3(x, x_1, x_2, x_3) = j_1(x) + j_1(x_3) j_2(x_1) j_{\alpha_2}(x_2),$$

$$g_4(x, x_1, \ldots, x_4) = j_1(x) + j_1(x_4) j_2(x_1) j_{\alpha_2}(x_2) j_{\alpha_3}(x_3),$$

$$\ldots$$

$$g_{n+1}(x, x_1, \ldots, x_{n+1}) = j_1(x) + j_1(x_{n+1}) j_2(x_1) j_{\alpha_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot j_{\alpha_n}(x_n).$$

Очевидно, что

$$t(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = g_{n+1}(x_{n+1}, x_1, \ldots, x_n, \theta(x_1, x_1)). \tag{1.7}$$

Построим формулы Σ_j над системой $\mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$, реализующие функции g_j, $j = 3, \ldots, n+1$. Положим

$$\Sigma_3 = \zeta_{\alpha_2}(x_3, x_2, x_1, x).$$

Заметим, что формула Σ_3 реализует функцию $j_1(x) + j_1(x_3) j_2(x_1) j_{\alpha_2}(x_2)$, т. е. функцию g_3, причем $N(\Sigma_3; x) = 1$. Пусть для некоторого $j \in \{3, \ldots, n\}$ формула Σ_j уже построена, причем формула Σ_j реализует функцию g_j и $N(\Sigma_j; x) = 1$. Обозначим через $\widehat{\Sigma}_j$ формулу, получающуюся из формулы Σ_j заменой единственного вхождения переменной x на переменную x_1 и заменой каждого вхождения переменной x_j на переменную x_{j+1}. Положим

$$\Sigma_{j+1} = \zeta_{\alpha_j}(\widehat{\Sigma}_j, x_j, x_1, x).$$

Так как формула Σ_j реализует функцию

$$g_j = j_1(x) + j_1(x_j) j_2(x_1) j_{\alpha_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot j_{\alpha_{j-1}}(x_{j-1}),$$

то формула $\widehat{\Sigma}_j$ реализует функцию

$$j_1(x_1) + j_1(x_{j+1}) j_2(x_1) j_{\alpha_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot j_{\alpha_{j-1}}(x_{j-1}),$$

а формула Σ_{j+1} реализует функцию

$$j_1(x) + j_1(j_1(x_1) + j_1(x_{j+1}) j_2(x_1) j_{\alpha_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot j_{\alpha_{j-1}}(x_{j-1})) \cdot j_2(x_1) j_{\alpha_j}(x_j) =$$
$$= j_1(x) + j_1(x_{j+1}) j_2(x_1) j_{\alpha_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot j_{\alpha_{j-1}}(x_{j-1}) = g_{j+1}.$$

Легко видеть, что

$$N(\Sigma_{j+1}; x) = 1.$$

Следовательно, формула Σ_{n+1} реализует функцию g_{n+1}, причем выполняется равенство $N(\Sigma_{n+1}; x_{n+1}) = 1$. Рассмотрим формулу Θ, получающуюся из формулы Σ_{n+1} подстановкой формулы $\theta(x_1, x_1)$ вместо единственного вхождения переменной x_{n+1}. Нетрудно убедиться, что формула Θ реализует функцию

$$j_1(x) + j_1(j_1(x_1) + j_2(x_1))j_2(x_1)j_{\alpha_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot j_{\alpha_n}(x_n) = \\ = j_1(x) + j_2(x_1)j_{\alpha_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot j_{\alpha_n}(x_n).$$

Обозначим через Δ формулу, получающуюся из формулы Θ подстановкой переменной x_{n+1} вместо переменной x. Очевидно, что формула Δ реализует функцию t и $N(\Delta, x_{n+1}) = 1$.

Так как $L(\Sigma_j) = 3 + L(\Sigma_{j-1})$, $j = 3, \ldots, n+1$, то $L(\Sigma_{n+1}) = 1 + 3n$. Следовательно, $L(\Delta_{\widetilde{\alpha}_i}) = 2 + 3n$. Равенство $N(\Delta; x_{n+1}) = 1$ очевидно. Лемма доказана.

Лемма 1.5.2. *Пусть*

$$t(x_1, \ldots, x_n, y) = j_1(y) + \sum_{i=1}^{m} K_{\widetilde{\alpha}_i},$$

где $m \geqslant 1$, $y \in X$ *и сумма берется по произвольным конъюнкциям* $K_{\widetilde{\alpha}_i}$, *таким, что* $\widetilde{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) \in E_3^n \setminus E_2^n$, $i = 1, \ldots, m$. *Тогда существует формула* Φ *над системой* $\mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$, *реализующая функцию* t, *такая, что*

$$L(\Phi) \leqslant (2 + 3n)m + 1, \ \ N(\Phi; y) = 1.$$

Доказательство. Для всех $i = 1, \ldots, m$ положим

$$t_{\widetilde{\alpha}_i}(x_1, \ldots, x_n, z) = j_1(z) + K_{\widetilde{\alpha}_i}, \tag{1.8}$$

где $z \in X \setminus X_n$. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ в силу леммы 1.5.1 существует формула Δ_i над системой $\mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$, реализующая функцию $t_{\widetilde{\alpha}_i}$, такая, что

$$L(\Delta_i) \leqslant 2 + 3n, \ \ N(\Delta_i; z) = 1.$$

Рассмотрим формулу

$$\Phi = \mathbb{F}[\Delta_1, \ldots, \Delta_m; y].$$

Легко видеть, что

$$L(\Phi) \leqslant \sum_{i=1}^{m} L(\Delta_i) + 1 \leqslant (2 + 3n)m + 1.$$

Очевидно, что $N(\Phi; y) = 1$. Лемма доказана.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ из множества $\mathscr{H}_n$, $n \geqslant 1$. По определению, $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = j_1(x_{n+1}) + g(x_1, \ldots, x_n)$, где $g \in P_{3,2}$, $prg = 0$. Очевидно, что функция f может быть представлена в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = j_1(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{m} K_{\widetilde{\alpha}_i},$$

где сумма берется по всем наборам $\widetilde{\alpha}_i \in E_3^n \setminus E_2^n$, таким, что $g(\widetilde{\alpha}_i) = 1$. Так как $m \leqslant 3^n - 2^n$, то имеет место следствие из доказанной выше леммы.

Следствие. *Для любой функции* $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathscr{H}_n$, $n \geqslant 1$, *существует формула* Φ *над системой* $\mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$, *реализующая функцию* f, *такая, что*

$$L(\Phi) \leqslant (2 + 3n)(3^n - 2^n) + 1 \quad \text{и} \quad N(\Phi; x_{n+1}) = 1.$$

Приведем еще один метод синтеза функций из $P_{3,2}$ над базисами, содержащими функцию определенного вида. Этот метод синтеза опирается на лемму, являющуюся аналогом леммы 3 из [65]. Дадим необходимые определения.

Пусть $p \geqslant 2$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Положим $x^i = (x_1^i, \ldots, x_{i-1}^i, x_{i+1}^i, \ldots, x_p^i)$. Обозначим через X^p набор $(x^1, \ldots, x^p)$, состоящий из $p(p-1)$ переменных.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из $P_{3,2}$, $n \geqslant p$. Будем обозначать через $f_j^i(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ функцию

$$f_j^i(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

Через Y_f^p будем обозначать набор функций, получающийся из набора X^p заменой переменных x_j^i на функции f_j^i соответственно, где $i, j = 1, \ldots, p$ и $i \neq j$.

Для каждого $p > 3$ определим булеву функцию $\delta_p(X^p)$. Положим

$$\delta_p(X^p) = \bigvee (\& x_{i_l}^{i_j}),$$

где дизъюнкция берется по всем $i_1, \ldots, i_4 = 1, \ldots, p$, $i_v \neq i_s$ при $v \neq s$, а конъюнкция берется по всем j, l, таким, что $1 \leqslant j < l \leqslant 4$.

Приведем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1.5.3 [65]. *Для любого $m \geqslant 2$ существует натуральное число $r(m)$, такое, что функция $\delta_{r(m)}$ принадлежит классу O^m.*

Обозначим через $\mathscr{D}_p$ множество функций $\Delta_p(X^p)$ из $P_{3,2}$, таких, что $pr\Delta_p(X^p) = \delta_p(X^p)$.

Следующая лемма аналогична лемме 3 из [65].

Лемма 1.5.4. *Для любых натуральных $n \geqslant p > 9$, для любой функции $\Delta_p(X^p)$ из $\mathscr{D}_p$ и любой функции $f(y_1, \ldots, y_n)$ из $P_{3,2}$ выполняется равенство*

$$f(y_1, \ldots, y_n) = \Delta_p(Y_f^p).$$

Доказательство. Докажем сначала, что в условиях леммы для любого набора $\widetilde{\alpha} \in E_3^n$ выполняется неравенство $f(\widetilde{\alpha}) \leqslant \Delta_p(Y_f^p(\widetilde{\alpha}))$. Рассмотрим первые p разрядов набора $\widetilde{\alpha}$. Так как $p > 9$, то среди первых p разрядов найдется 4 одинаковых. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$. Тогда значения $f_j^i(\widetilde{\alpha})$ равны $f(\widetilde{\alpha})$ для любых $i, j = 1, 2, 3, 4$, $i \neq j$. Следовательно,

$$\Delta_p(Y_f^p(\widetilde{\alpha})) = f(\widetilde{\alpha}) \vee \widehat{f}(\widetilde{\alpha}) \geqslant f(\widetilde{\alpha}),$$

где $\widehat{f}$ — некоторая функция из $P_{3,2}$. Таким образом, неравенство $f(\widetilde{\alpha}) \leqslant \Delta_p(Y_f^p(\widetilde{\alpha}))$ доказано.

Покажем, что для любого набора $\widetilde{\alpha} \in E_3^n$ выполняется неравенство $f(\widetilde{\alpha}) \geqslant \Delta_p(Y_f^p(\widetilde{\alpha}))$. Заметим, что если $1 \leqslant i_1 = i_2 \leqslant n$, то $f_{i_2}^{i_1}(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$. Среди любой четверки разрядов набора $\widetilde{\alpha}$ обязательно найдутся, по крайней мере, два одинаковых. Следовательно, множитель $f(\widetilde{\alpha})$ есть в каждом слагаемом функции $\Delta_p(Y_f^p(\widetilde{\alpha}))$. Значит, $f(\widetilde{\alpha}) \geqslant \Delta_p(Y_f^p(\widetilde{\alpha}))$. Таким образом, $f(\widetilde{\alpha}) = \Delta_p(Y_f^p(\widetilde{\alpha}))$. Лемма доказана.

Замечание. Отметим, что справедлив двойственный к лемме 1.5.4 результат относительно перестановки $s = (01)(2)$. Для любых натуральных $n \geqslant p > 9$, для любой функции $\Delta_p^s(X^p)$ из $\mathscr{D}_p^s$ и любой функции $f(y_1, \ldots, y_n)$ из $P_{3,2}$ выполняется равенство

$$f(y_1, \ldots, y_n) = \Delta_p^s(Y_f^p).$$

1.6. Порождающие системы максимальных классов. В этом разделе приводятся некоторые порождающие системы для всех максимальных классов, кроме классов $pr^{-1}C_0$, $pr^{-1}C_1$, $pr^{-1}C_{01}$.

Напомним, что

$$\mathfrak{U} = \{j_1, \delta, \theta, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2\}.$$

В следующей лемме доказывается, что система $\mathfrak{U}$ является порождающей системой класса $pr^{-1}U_{01}$ (см. также [95]).

Лемма 1.6.1. *Выполняется соотношение*

$$[\mathfrak{U}] = pr^{-1}U_{01}.$$

Доказательство. Включение $[\mathfrak{U}] \subseteq pr^{-1}U_{01}$ выполняется в силу того, что каждая функция множества $\mathfrak{U}$ принадлежит множеству $pr^{-1}U_{01}$, а также замкнутости множества $pr^{-1}U_{01}$. Докажем, что имеет место включение $pr^{-1}U_{01} \subseteq [\mathfrak{U}]$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из класса $pr^{-1}U_{01}$. Построим формулу над $\mathfrak{U}$, реализующую функцию f.

Без ограничения общности будем считать, что $prf(x_1, \ldots, x_n) = x_n$. Пусть $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_m$ — все наборы, на которых функция f принимает значение 1, $m \geqslant 0$. Легко видеть, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ может быть представлена в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = j_1(x_n) \cdot k(x_1) \cdot \ldots \cdot k(x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{m} K_{\widetilde{\alpha}_i}. \tag{1.9}$$

Очевидно, что существует некоторая формула Σ над $\{\delta\}$, реализующая функцию $j_1(x_n) \cdot k(x_1) \cdot \ldots \cdot k(x_{n-1})$.

Если $m = 0$, то утверждение леммы выполняется, так как Σ реализует функцию f и построена над системой $\mathfrak{U}$. Пусть теперь $s \geqslant 1$. Из леммы 1.5.2 следует, что существует формула Φ над $\mathfrak{U}$, реализующая функцию

$$j_1(y) + \sum_{i=1}^{m} K_{\widetilde{\alpha}_i}, \tag{1.10}$$

где $y \in X \setminus X_n$. Подставив в формулу Φ вместо переменной y формулу Σ, мы получим формулу над $\mathfrak{U}$, реализующую функцию f (см. (1.9)). Лемма доказана.

В следующем утверждении приводятся порождающие системы для любого класса вида $pr^{-1}B$, где B — замкнутый класс булевых функций, отличный от классов C, C_0, C_1.

Лемма 1.6.2. *Пусть B — замкнутый класс булевых функций, отличный от классов C, C_0, C_1. Тогда для любого множества $A \subseteq P_{3,2}$, такого, что $[prA] = B$, множество $A \cup \mathfrak{U}$ является порождающей системой класса $pr^{-1}B$.*

Доказательство см. в [95].

§ 2. Сложность псевдолинейных функций

В данном параграфе исследуется сложность псевдолинейных функций, то есть функций трехзначной логики, принимающих значения из множества $\{0, 1\}$, и ограничения которых на множестве наборов из нулей и единиц являются линейными булевыми функциями. Множество всех таких функций обозначается через $\mathscr{L}$. В разделе 2.1 отмечаются основные свойства псевдолинейных функций. В разделе 2.2 находится сложность реализации псевдолинейных функций из классов $Z_{2,i} \cap \mathscr{L}$, $i=0,1$, и $L_{2,r}$, $1 \leqslant r < \infty$, а также приводится асимптотическая оценка функции Шеннона для класса $\mathscr{L}$. В разделе 2.3 находится сложность реализации псевдолинейных функций из класса $\mathscr{L}_2$.

2.1. Псевдолинейные функции и их свойства. Положим $\mathscr{L} = \{f \in P_{3,2} \mid prf \in L\}$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$ называется псевдолинейной, если $f \in \mathscr{L}$.

Напомним некоторые обозначения, введенные в § 1. Через $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$ и $\nu_r(x_1, \ldots, x_r)$ мы обозначаем функции

$$\lambda(x, y) = x + y, \quad \mu(x, y) = j_1(x) \cdot j_2(y), \quad \nu_r(x_1, \ldots, x_r) = j_2(x_1) \cdot \ldots \cdot j_2(x_r).$$

Приведем описание замкнутых классов $H \subseteq P_{3,2}$, таких, что $prH = L$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная псевдолинейная функция. Нетрудно видеть, что выполняется равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum j_{\sigma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_{\sigma_n}(x_n),$$

где суммирование производится по всем наборам $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in E_3^n$, таким, что $f(\widetilde{\sigma}) = 1$. Заменим каждое вхождение функции $j_0(y)$ в правой части этого равенства на равную ей функцию $1 + j_1(y) + j_2(y)$ и раскроем скобки. Получим представление функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в следующем виде:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \eta_f(x_1, \ldots, x_n) + \delta_f(x_1, \ldots, x_n),$$

где

$$\eta_f(x_1, \ldots, x_n) = a + \sum_F a_F \theta_F(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\delta_f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{I,J} a_{I,J} \varkappa_{I,J}(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\theta_F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i \in F} j_1(x_i), \quad \varkappa_{I,J}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\prod_{i \in I} j_1(x_i)\right) \cdot \left(\prod_{j \in J} j_2(x_j)\right),$$

$a, a_F, a_{I,J} \in E_2$, суммирование в определении функции θ_f производится по всем непустым подмножествам множества $\{1, \ldots, n\}$, а суммирование в определении функции δ_f производится по всем множествам I, J, таким, что $I \cup J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $I \cap J = \varnothing$, $J \neq \varnothing$. Поскольку $prf = a + pr\theta_F$ и prf — линейная функция, то

$$\theta_F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i j_1(x_i),$$

где $a_i \in E_2$. Следовательно, мы получили представление псевдолинейной функции f в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \eta_f(x_1, \ldots, x_n) + \delta_f(x_1, \ldots, x_n), \tag{2.1}$$

где

$$\eta_f(x_1, \ldots, x_n) = a + \sum_{i=1}^{n} a_i j_1(x_i), \quad \delta_f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{I,J} a_{I,J} \varkappa_{I,J}(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\varkappa_{I,J}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\prod_{i \in I} j_1(x_i)\right) \cdot \left(\prod_{j \in J} j_2(x_j)\right),$$

$a, a_i, a_{I,J} \in E_2$, а суммирование в определении функции δ_f производится по всем множествам I, J, таким, что $I \cup J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $I \cap J = \varnothing$, $J \neq \varnothing$. Если $a_{I,J} = 1$, то функция $\varkappa_{I,J}(x_1, \ldots, x_n)$ называется компонентой функции f. Множество всех компонент функции f будем обозначать через K_f. Положим $K = \bigcup K_f$, где объединение берется по всем псевдолинейным функциям f. Представление функции $f \in \mathscr{L}$ в виде (2.1) будем называть каноническим.

Лемма 2.1.1. *Каноническое представление любой псевдолинейной функции единственно с точностью до перестановки слагаемых и порядка множителей в слагаемых.*

Доказательство. Покажем сначала, что единственно каноническое представление псевдолиненой функции, тождественно равной нулю и зависящей от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Очевидно, что если все коэффициенты $a, a_i, a_{I,J}$ равны 0, то соответствующее каноническое представление реализует тождественный ноль. Предположим, что существует другой набор коэффициентов $a, a_i, a_{I,J}$, такой, что соответствующее каноническое представление реализует тождественный ноль. Если $a = 1$, то на наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0)$ функция, реализуемая таким каноническим представлением, равна 1 — противоречие. Значит, $a = 0$. Пусть существует i такое, что $a_i = 1$. Тогда на наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ функция, реализуемая таким каноническим представлением, равна 1 — противоречие. Следовательно, все коэффициенты a_i равны 0. Так как не все коэффициенты $a, a_i, a_{I,J}$ равны нулю, то среди коэффициентов $a_{I,J}$ найдется по крайней мере один коэффициент, равный единице. Выберем среди коэффициентов $a_{I,J}$, равных единице, тот, для которого сумма $|I| + |J|$ минимальна (другими словами, выберем самую короткую компоненту). Эта компонента имеет вид $j_1(x_{l_1}) \ldots j_1(x_{l_s}) j_2(x_{i_1}) \ldots j_2(x_{i_t})$, $1 \leqslant t \leqslant n$, $0 \leqslant s \leqslant n$, $1 \leqslant l_1, \ldots, l_s, i_1, \ldots, i_t \leqslant n$, $l_r \neq i_j$ при $r = 1, \ldots, s$ и $j = 1, \ldots, t$. Тогда каноническое представление реализует функцию, равную единице, на наборе, в котором на $l_1, \ldots, l_s$-х позициях стоит единицы, на $i_1, \ldots, i_t$-х позициях стоят двойки, а на остальных позициях — нули. Это противоречит тому, что каноническое представление реализует функцию, тождественно равную нулю. Таким образом, каноническое представление функции, тождественно равной нулю, единственно.

Предположим, что у произвольной псевдолинейной функции f существует по крайней мере два различных канонических представления:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \eta_f^1(x_1, \ldots, x_n) + \delta_f^1(x_1, \ldots, x_n),$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \eta_f^2(x_1, \ldots, x_n) + \delta_f^2(x_1, \ldots, x_n).$$

Сложив эти два равенства по модулю 2, получим, что

$$0 = (\eta_f^1(x_1, \ldots, x_n) + \eta_f^2(x_1, \ldots, x_n)) + (\delta_f^1(x_1, \ldots, x_n) + \delta_f^2(x_1, \ldots, x_n)).$$

По крайней мере, одна из двух функций $\eta_f^1 + \eta_f^2$ и $\delta_f^1 + \delta_f^2$ не равна тождественному нулю, так как были взяты два различных канонических представления функции f. Следовательно, функция 0 допускает каноническое представление, в котором не все коэффициенты $a, a_i, a_{I,J}$ равны нулю. Это противоречит доказанному выше. Лемма доказана.

Обозначим через J_f множество всех таких функций $j_1(x_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $a_i = 1$ в каноническом представлении функции f. Определим множество H_f следующим образом: если $a = 1$ в каноническом представлении функции f, то $H_f = \{1\}$; в противном случае $H_f = \varnothing$. Положим $Y_f = K_f \cup J_f \cup H_f$.

Определим следующие подмножества множества $\mathscr{L}$. Положим

$$\mathscr{L}_2 = \{f \in \mathscr{L} | K_f \subseteq \{\varkappa_{I,J} \in K| \ |I| \leqslant 1\}\},$$

$$\mathscr{L}_{2,r} = \{f \in \mathscr{L} | K_f \subseteq \{\varkappa_{I,J} \in K| \ I = \varnothing, |J| \leqslant r\}\}, \quad 1 \leqslant r < \infty,$$

$$\mathscr{L}_{2,\infty} = \{f \in \mathscr{L} | K_f \subseteq \{\varkappa_{I,J} \in K| \ I = \varnothing\}\}.$$

В [95] показано, что множество всех замкнутых классов $F \subseteq \mathscr{L}$, таких, что $prF = L$, состоит из следующих классов: $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_2$, $Z_{2,0} \cap \mathscr{L}$, $Z_{2,1} \cap \mathscr{L}$, $\mathscr{L}_{2,r}$, где $1 \leqslant r \leqslant \infty$ (см. рис. 2.1). При этом каждый из перечисленных замкнутых классов, кроме класса $\mathscr{L}_{2,\infty}$, имеет конечный базис.

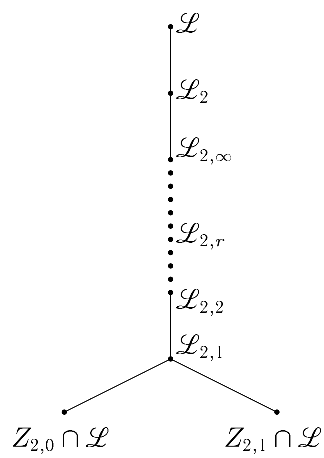


Рис. 2.1. Классы, проекция которых совпадает с классом L

Определим следующие системы функций из $\mathscr{L}$. Положим

$$\mathfrak{A} = \{1, \lambda(x, y)\}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cup \{j_1(x) j_1(y) j_2(z), j_0(x), j_1(x), j_2(x)\}, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cup \{\mu(x, y)\},$$

$$\mathfrak{D}_r = \mathfrak{A} \cup \{\nu_r(x_1, \ldots, x_r)\}, \qquad \mathfrak{E} = \{1, j_0(x) + j_0(y)\}.$$

Известно [95], что $[\mathfrak{A}] = Z_{2,0} \cap \mathscr{L}$, $[\mathfrak{B}] = \mathscr{L}$, $[\mathfrak{C}] = \mathscr{L}_2$, $[\mathfrak{D}_r] = \mathscr{L}_{2,r}$, $[\mathfrak{E}] = Z_{2,1} \cap \mathscr{L}$.

2.2. Классы $Z_{2,i} \cap \mathscr{L}$, $\mathscr{L}_{2,r}$ и $\mathscr{L}$. В этом разделе рассматриваются следующие классы псевдолинейных функций: $Z_{2,i} \cap \mathscr{L}$, $i = 0, 1$; $\mathscr{L}_{2,r}$, $1 \leqslant r < \infty$; $\mathscr{L}$.

Теорема 2.2.1. *Пусть $Q = Z_{2,0} \cap \mathscr{L}$, $U = Z_{2,1} \cap \mathscr{L}$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in Q$, $g(x_1, \ldots, x_n) \in U$, причем функции f, g существенно зависят от переменных $x_1, \ldots, x_n$, $n \geqslant 2$. Тогда выполняются соотношения*

$$L_{\mathfrak{A}}(f) = |J_f| + |H_f|, \quad L_{\mathfrak{E}}(g) = |J_g| + |H_g|. \tag{2.2}$$

Доказательство. Напомним, что в классе $Z_{2,a}$, $a = 0, 1$, лежат те и только те функции $h(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$, которые обладают следующим свойством: если набор $\widetilde{\alpha} \in E_2^n$ получен из набора $\widetilde{\beta} \in E_3^n$ заменой всех двоек на a, то $h(\widetilde{\alpha}) = h(\widetilde{\beta})$. Значит, каждая функция из классов Q и U полностью задается своими значениями на наборах из нулей и единиц. Тогда для функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ выполняются соотношения

$$L_{\mathfrak{A}}(f) = L_{\{1, x+y\}}(prf) = |J_f| + |H_f|, \quad L_{\mathfrak{E}}(g) = L_{\{1, x+y\}}(prg) = |J_g| + |H_g|.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2.2. *Пусть* $Q = Z_{2,0} \cap \mathscr{L}$, $U = Z_{2,1} \cap \mathscr{L}$. *Тогда при всех* $n \geqslant 2$ *имеют место соотношения*

$$L_{\mathfrak{A}}(Q(n)) = L_{\mathfrak{C}}(U(n)) = n + 1. \tag{2.3}$$

Доказательство. Непосредственно из теоремы 2.2.1 следует, что $L_{\mathfrak{A}}(Q(n)) = n+1$, $L_{\mathfrak{C}}(U(n)) = n+1$. Теорема доказана.

Перейдем к изучению классов $\mathscr{L}_{2,r}$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Опишем некоторые свойства минимальных формул над системой $\mathfrak{D}_r$, $r \geqslant 2$.

Пусть $f(x_1, .., x_n) \in \mathscr{L}_{2,r}$, Φ — минимальная формула, реализующая функцию f над системой $\mathfrak{D}_r$, T — дерево, соответствующее формуле Φ. В силу минимальности формулы Φ ни одна подформула формулы Φ не может иметь вид $\nu_r(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r)$, где хотя бы одна из подформул $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$ отлична от символа переменной (в противном случае подформула $\nu_r(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r)$ реализует функцию тождественный ноль и Φ не является минимальной). Поэтому можно считать, что любая подформула формулы Φ имеет один из двух видов: либо $\lambda(\Sigma, \Omega)$, где Σ, Ω — формулы над $\mathfrak{D}_r$, либо $\nu_r(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$, где $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_r \leqslant n$. Пусть v — вершина дерева T, не являющаяся висячей. Обозначим через f_v функцию, реализуемую подформулой, соответствующей вершине v. Пусть w — висячая вершина дерева T. Обозначим через y_w символ из множества $X_n \cup \{1\}$, приписанный вершине w.

Лемма 2.2.1. *Пусть* Φ — *минимальная формула над системой* $\mathfrak{D}_r$. *Тогда формула* Φ *реализует функцию*

$$\sum_{w \in A} j_1(y_w) + \sum_{v \in B} f_v.$$

Доказательство. Докажем утверждение леммы индукцией по глубине формулы Φ. Перечислим минимальные формулы глубины 1, реализующие функции из класса $\mathscr{L}_2$: $1(x)$, $\lambda(x_1, x_2)$, $\nu_r(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$, где $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_r \leqslant n$, $x_1, x_2 \in X$. Легко видеть, что для каждой из них утверждение леммы выполняется. Пусть теперь утверждение леммы справедливо для всех минимальных формул глубины не более l, $l \geqslant 1$. Пусть Φ — минимальная формула, $D(\Phi) = l + 1$. Так как формула Φ минимальна, то она не может иметь вид $\nu_r(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r)$, где хотя бы одна из подформул $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$ отлична от символа переменной. Так как $D(\Phi) \geqslant 2$, то формула Φ не может иметь вид $\nu_r(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$, где $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_r \leqslant n$. Следовательно, формула Φ имеет вид $\lambda(\Sigma, \ldots, \Omega)$, где Σ, Ω — минимальные формулы над $\mathfrak{D}_r$. Так как Σ и Ω являются минимальными формулами, то к ним применимо предположение индукции, из которого утверждение леммы следует тривиальным образом. Лемма доказана.

Обозначим через A_T множество висячих вершин дерева T, таких, что единственной смежной с ней вершине соответствует подформула вида $\lambda(\Sigma, \Omega)$. Обозначим через B_T множество вершин дерева T, которым соответствует подформула вида $\nu_r(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r)$.

Лемма 2.2.2. *Пусть* Φ — *минимальная формула над системой* $\mathfrak{D}_r$, *реализующая функцию* f, *а* T — *соответствующее ей дерево. Тогда выполняются неравенства*

$$|A_T| \geqslant |J_f| + |H_f|, \qquad |B_T| \geqslant |K_f|.$$

Доказательство. Докажем неравенство $|A_T| \geqslant |J_f| + |H_f|$. Пусть, от противного, $|A_T| < |J_f| + |H_f|$. Тогда найдется символ $y \in X_n \cup \{1\}$, который не приписан ни одной из висячих вершин множества A, и такой, что $j_1(y) \in J_f \cup H_f$. Так как символ y не приписан ни одной из висячих вершин множества A, то в силу лемм 2.2.1 и 2.1.1 формула Φ реализует функцию, у которой в каноническом представлении коэффициент при $j_1(y)$ равен нулю. Это противоречит тому, что $j_1(b) \in J_f \cup H_f$. Следовательно, $|A_T| \geqslant |J_f| + |H_f|$. Неравенство $|B_T| \geqslant C_n^1 + \ldots + C_n^r$ доказывается аналогичным образом. Лемма доказана.

Теорема 2.2.3. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n)$ — *произвольная функция из класса* $\mathscr{L}_{2,r}$, *существенно зависящая от* n *переменных*, $n \geqslant 2$, $1 \leqslant r < \infty$. *Тогда*

$$L_{\mathfrak{D}_r}(f) = |J_f| + |H_f| + r|K_f|.$$

Доказательство. Верхняя оценка. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из класса $\mathscr{L}_{2,r}$, а η_f и δ_f — соответствующие функции из представления f в каноническом виде. Если $K_f = \varnothing$, то функция f имеет вид $f = a_0 + a_1 j_1(x_1) + \ldots + a_n j_1(x_n)$, и верхняя оценка очевидна. Пусть $K_f = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_t\}$, $t \geqslant 1$. Из определения класса $\mathscr{L}_{2,r}$ следует, что каждая компонента $\kappa \in K_f$ имеет вид $\kappa = j_2(x_{i_1}) \ldots j_2(x_{i_p})$, $p \leqslant r$, $1 \leqslant i_1, \ldots, i_p \leqslant n$. Любая компонента $\kappa \in K_f$ может быть получена из функции $j_2(x_1) j_2(x_2) \ldots j_2(x_r)$ отождествлением переменных. Поэтому существует формула Θ над $\mathfrak{D}_r$, реализующая функцию $\delta_f(x_1, \ldots, x_n)$, такая, что $L(\Theta) \leqslant r|K_f|$.

Далее рассмотрим три возможных случая. Если $|J_f| + |H_f| > 1$, то обозначим через Δ формулу, реализующую функцию $\eta_f(x_1, \ldots, x_n)$ со сложностью $|J_f| + |H_f|$, и построим формулу $\Phi = \lambda(\Theta, \Delta)$. Очевидно, что формула Φ реализует функцию f и $L(\Phi) = |J_f| + |H_f| + r|K_f|$.

Если $|J_f| + |H_f| = 1$, то обозначим через a единственный элемент множества $J_f \cup H_f$ и рассмотрим формулу $\Phi = \lambda(a, \Theta)$. Легко видеть, что формула Φ реализует функцию f и $L(\Phi) = |J_f| + |H_f| + r|K_f|$.

Если $|J_f| + |H_f| = 0$, то формула Θ реализует функцию f и $L(\Theta) = r|K_f| = |J_f| + |H_f| + r|K_f|$. Верхняя оценка доказана.

Нижняя оценка непосредственно следует из леммы 2.2.2. Теорема доказана.

Теорема 2.2.4. *Пусть* $V_r = L_{2,r}$, *где* $1 \leqslant r < \infty$. *Тогда при всех* $n \geqslant r \geqslant 1$ *имеет место соотношение*

$$L_{\mathfrak{D}_r}(V_r(n)) = 1 + n + r(C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^r). \tag{2.4}$$

Доказательство. Если $n = r = 1$, то утверждение очевидно. Пусть теперь $n \geqslant 2$, $n \geqslant r \geqslant 1$. Легко видеть, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in V_r(n)$ выполняются неравенства $|J_f| + |H_f| \leqslant 1 + n$, $|K_f| \leqslant C_n^1 + \ldots + C_n^r$. Поэтому в силу леммы 2.2.2 $L_{\mathfrak{D}_r}(V_r(n)) \leqslant 1 + n + r(C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^r)$, что и доказывает верхнюю оценку.

Обозначим через θ_n функцию из множества $V_r(n)$, у которой в каноническом представлении все коэффициенты равны 1. Очевидно, что $|J_{\theta_n}| + |H_{\theta_n}| = 1 + n$ и $|K_{\theta_n}| = C_n^1 + \ldots + C_n^r$. Из теоремы 2.2.3 следует, что $L_{\mathfrak{D}_r}(\theta_n) = |J_{\theta_n}| + |H_{\theta_n}| + r|K_{\theta_n}| = 1 + n + r(C_n^1 + \ldots + C_n^r)$. Поэтому $L_{\mathfrak{D}_r}(V_r(n)) \geqslant L_{\mathfrak{D}_r}(\theta_n) = 1 + n + r(C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^r)$. Следствие доказано.

Перейдем к случаю класса $\mathscr{L}$ — максимального класса псевдолинейных функций. Имеет место следующая

Теорема 2.2.5. *Имеет место соотношение*

$$L_{\mathfrak{B}}(\mathscr{L}(n)) \sim \frac{3^n}{\log_2 n}. \tag{2.5}$$

Утверждение этой теоремы является следствием одного из результатов § 3.

2.3. Класс $\mathscr{L}_2$. Данный раздел устроен следующим образом. В п. 2.3.1 изучаются некоторые свойства минимальных формул над системой $\mathfrak{C}$ — порождающей системой класса $\mathscr{L}_2$. В п. 2.3.2 доказывается нижняя оценка для функции Шеннона для класса $\mathscr{L}_2$. Далее в п. 2.3.3 получена верхняя оценка для функции Шеннона для класса $\mathscr{L}_2$. Наконец, в пп. 2.3.4 и 2.3.5 устанавливается точное значение сложности реализации произвольной функции из класса $\mathscr{L}_2$.

2.3.1. Свойства минимальных формул. Сначала дадим несколько определений.

В данном параграфе будем называть формулу тривиальной, если она является символом из множества $X \cup \{1\}$. В противном случае формула называется нетривиальной.

Обозначим через $\tau_n(x_1, \ldots, x_n)$ функцию из множества $\mathscr{L}_2(n)$, у которой в каноническом представлении все коэффициенты $a, a_i, a_{I,J}$ равны 1.

Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса $\mathscr{L}_2$ является мономом, если выполняется, по крайней мере, одно из условий:

1) $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$;

2) $f(x_1, \ldots, x_n) = j_1(a)$, где $a \in X_n \cup \{1\}$;

3) $f(x_1, \ldots, x_n) = j_1(a) j_2(b_1) \ldots j_2(b_k)$, где $a, b_1, \ldots, b_k \in X_n \cup \{1\}$, $k \geqslant 1$.

Определим понятие нормальной формулы над системой $\mathfrak{C}$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из $\mathscr{L}_2$, существенно зависящая от n переменных, $n \geqslant 2$. Пусть Φ — формула над системой $\mathfrak{C}$, реализующая функцию f, а T — соответствующее ей дерево. Назовем формулу Φ нормальной, если любая ее нетривиальная подформула имеет один из следующих видов: $\lambda(\Sigma, \Omega)$, $\mu(\Xi, x_i)$, где Σ, Ω, Ξ — формулы над $\mathfrak{C}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Отметим некоторые свойства минимальных формул над системой $\mathfrak{C}$.

Лемма 2.3.1. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из класса $\mathscr{L}_2$, существенно зависящая от n переменных, $n \geqslant 2$. Пусть Φ — минимальная формула над $\mathfrak{C}$, реализующая функцию f. Тогда в формуле Φ не существует подформул, реализующих тождественный ноль.*

Доказательство. Пусть, от противного, существует подформула Ω формулы Φ, реализующая тождественный ноль. Так как формула Φ — минимальная, то Ω — минимальная формула, реализующая тождественный ноль. Легко видеть, что над системой $\mathfrak{C}$ не существует формул сложности 1, реализующих тождественный ноль. Кроме того, существует формула сложности 2, реализующая тождественный ноль: $\lambda(x, x) = 0$. Следовательно, $L(\Omega) = 2$. Возможны несколько случаев.

Случай I: $\Omega = \Phi$. Тогда формула Φ реализует тождественный ноль — противоречие с условием.

Случай II: в формуле Φ подформула Ω подставляется на место первого аргумента функции μ. Так как $\mu(\Omega, \cdot) = \mu(0, \cdot) = 0$ и $L(\mu(\Omega, \cdot)) \geqslant L(\Omega) + 1 = 3$, то в формуле Φ подформула $\mu(\Omega, \cdot)$ не является минимальной формулой, реализующей тождественный ноль. Это противоречит минимальности формулы Φ.

Случай III: в формуле Φ подформула Ω подставляется на место второго аргумента функции μ. Невозможность этого случая доказывается аналогично случаю II.

Случай IV: в формуле Φ подформула Ω подставляется в функцию $1(x)$. Так как формула $1(\Omega)$ реализует тождественную единицу со сложностью 2, то такая формула не является минимальной формулой, реализующей тождественную единицу. Это противоречит минимальности формулы Φ.

Случай V: в формуле Φ подформула Ω подставляется на место одного из аргументов функции λ. Пусть Θ — формула, которая подставляется на место другого аргумента функции λ (другими словами, в формуле Φ с точностью до перестановки аргументов существует подформула $\lambda(\Omega, \Theta)$). Случай Va:

формула Θ не является тривиальной. Тогда формулы Θ и $\lambda(\Omega,\Theta)$ реализуют равные функции. Это противоречит минимальности формулы Φ. Случай Vb: формула Θ является тривиальной. Случай Vb1: $\Theta = 1(x)$, то формула $\lambda(\Omega,\Theta)$ реализует тождественную единицу со сложностью 3. Это противоречит минимальности формулы Φ. Случай Vb2: Θ — символ переменной x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда формула $\lambda(\Omega,\Theta)$ реализует функцию $j_1(x_i)$ со сложностью 3. По условию функция $f(x_1,\dots,x_n)$ существенно зависит не менее чем от двух переменных, поэтому $\Phi \neq \lambda(\Omega,\Theta)$. Следовательно, формула $\lambda(\Omega,\Theta)$ подставляется в некоторую функцию. Формула $\lambda(\Omega,\Theta)$ не может подставляться в функцию $1(x)$, так как тогда формула $1(\lambda(\Omega,\Theta))$ реализует тождественную единицу со сложностью 2 и не является минимальной — противоречие минимальности формулы Φ. Формула $\lambda(\Omega,\Theta)$ также не может подставляться в функцию $\mu(x,y)$, так как это приведет к противоречию с минимальностью формулы Φ (см. также случай II и случай III). Следовательно, в формуле Φ с точностью до порядка слагаемых существует подформула $\lambda(\lambda(\Omega,\Theta),\Delta)$, где Δ — некоторая формула над $\mathfrak{C}$. Очевидно, что формулы $\lambda(\lambda(\Omega,\Theta),\Delta)$ и $\lambda(\Theta,\Delta)$ реализуют равные функции, причем сложность первой формулы больше сложности второй. Это противоречит минимальности формулы Φ. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ — функция из класса $\mathscr{L}_2$, существенно зависящая от n переменных, $n \geqslant 2$. Тогда существует минимальная формула над $\mathfrak{C}$, реализующая функцию f, которая является нормальной.*

Доказательство. Пусть Φ — минимальная формула над $\mathfrak{C}$, реализующая функцию f. По лемме 2.3.1 в ней отсутствуют подформулы вида $\mu(\cdot,\Omega)$, где Ω — формула, отличная от символа переменной. Если в формуле Φ встречаются подформулы вида $1(\Omega)$, где Ω — формула, отличная от символа переменной, то построим формулу $\widehat{\Phi}$, заменив в формуле Φ все подформулы вида $1(\Omega)$ на формулу $1(x_1)$. Очевидно, что формула $\widehat{\Phi}$ реализует функцию f, является минимальной и нормальной. Следствие доказано.

2.3.2. Нижняя оценка для функции Шеннона. Пусть f — произвольная функция из класса $\mathscr{L}_2$, Φ — формула над системой $\mathfrak{C}$, реализующая функцию f, а T — соответствующее ей дерево. Сопоставим формуле Φ дерево $\widehat{T}$ по следующему правилу. Пусть v_* — корневая вершина дерева T. Добавим к дереву T вершину v_0, которую соединим ребром с вершиной v_*. Будем считать, что из вершины v_* выходит одно ребро, в вершину v_0 входит одно ребро. Обозначим полученное дерево через $\widehat{T}$.

Пусть f — произвольная функция из класса $\mathscr{L}_2$, Φ — формула над системой $\mathfrak{C}$, реализующая функцию f, а T — соответствующее ей дерево. Раскрасим висячие вершины дерева $\widehat{T}$ в два цвета. Пусть $\widetilde{v}$ — произвольная вершина дерева $\widehat{T}$, которой соответствует подформула вида $\mu(\Sigma,\Omega)$, где Σ — формула над $\mathfrak{C}$, а Ω — символ переменной. Покрасим висячую вершину v дерева $\widehat{T}$, соответствующую подформуле Ω, в белый цвет. Проведем эту операцию для всех вершин дерева $\widehat{T}$, которым соответствует подформула вида $\mu(\Sigma,\Omega)$, где Σ — формула над $\mathfrak{C}$, а Ω — символ переменной. Затем все висячие вершины дерева $\widehat{T}$, не покрашенные в белый цвет, покрасим в черный цвет.

Пусть Φ — произвольная нормальная формула над $\mathfrak{C}$, а $\widehat{T}$ — соответствующее ей дерево. Легко видеть, что в дереве $\widehat{T}$ существует хотя бы одна черная вершина. Обозначим черные вершины дерева $\widehat{T}$ через $v_1,\dots,v_p$, $p \geqslant 1$. Пусть v_0 — корневая вершина дерева $\widehat{T}$. Рассмотрим следующую процедуру $\mathscr{P}$, состоящую из p шагов. Опишем i-й шаг этой процедуры, $i = 1,\dots,p$.

Рассмотрим цепь, соединяющую вершину v_i с вершиной v_0, и последовательность вершин $\{q_j\}_{j=1}^{s}$, через которые последовательно проходит эта цепь, $q_1 = v_i$, $q_s = v_0$, $s \geqslant 2$. Пусть $e_j = (q_j, q_{j+1})$ — ребро, соединяющее вершины q_j и q_{j+1}, $j = 1, \ldots, s-1$. Припишем ребру e_j, $2 \leqslant j \leqslant s-1$, функции из $\mathscr{L}_2$ по следующим правилам:

1) если вершине q_2 приписан символ λ, а вершине q_1 — символ $a \in X_n \cup \{1\}$, то припишем ребру e_2 функцию $j_1(a)$;

2) если вершине q_2 приписан символ μ, вершине q_1 — символ $a \in X_n \cup \{1\}$, а второй висячей вершине, смежной с q_2, — символ $b \in X_n$, то припишем ребру e_2 функцию $\mu(a, b)$;

3) если вершине q_l, $l \geqslant 3$, приписан символ λ, а ребру e_{l-1} на i-м шаге процедуры $\mathscr{P}$ была приписана функция g, то припишем ребру e_l функцию g;

4) если вершине q_l, $l \geqslant 3$, приписан символ μ, ребру e_{l-1} на i-м шаге процедуры $\mathscr{P}$ была приписана функция g, а висячей вершине, смежной с q_l, — символ $b \in X_n$, то припишем ребру e_l функцию $\mu(g, b)$.

На этом i-й шаг процедуры $\mathscr{P}$ закончен. Отметим, что после нескольких шагов процедуры $\mathscr{P}$ может оказаться, что некоторому ребру приписано несколько функций. Некоторые из этих функций могут быть равными. В дальнейшем, говоря «ребру приписано t функций», мы подразумеваем, что некоторые из этих функций могут быть равными.

Приведем несколько свойств процедуры $\mathscr{P}$.

Свойство 1. В результате применения процедуры $\mathscr{P}$ ребрам, выходящим из висячих вершин, не может быть приписано никаких функций.

Свойство 2. Пусть Φ — нормальная формула над $\mathfrak{C}$, $\widehat{T}$ — соответствующее ей дерево. Пусть e — произвольное ребро дерева $\widehat{T}$, не соединяющее висячую вершину со смежной с ней вершиной. Тогда если через ребро e проходит t цепей, соединяющих различные черные вершины с корневой вершиной дерева $\widehat{T}$, $t \geqslant 1$, то в результате применения процедуры $\mathscr{P}$ ребру e будет приписано t функций.

Свойство 3. Пусть Φ — нормальная формула над $\mathfrak{C}$, $\widehat{T}$ — соответствующее ей дерево, v — произвольная вершина дерева $\widehat{T}$, отличная от корневой, e — ребро, выходящее из вершины v. Пусть g — одна из функций, приписанных ребру e в результате применения процедуры $\mathscr{P}$ к дереву $\widehat{T}$. Тогда функция g является мономом.

Доказательство. Докажем свойство 3. Обозначим через v_1 черную вершину дерева $\widehat{T}$, соответствующую тому шагу номер t процедуры $\mathscr{P}$, на котором ребру e была приписана функция g. Рассмотрим цепь, соединяющую вершины v_1 и v. Пусть эта цепь последовательно проходит через вершины $\{q_1, \ldots, q_s\}$, $q_1 = v_1$, $q_s = v$, $s \geqslant 1$. Пусть $e_j = (q_j, q_{j+1})$ — ребро, соединяющее вершины q_j и q_{j+1}, $j = 1, \ldots, s-1$. Если $s = 1$, то по свойству 1 процедуры $\mathscr{P}$ ребру e не может быть приписана ни одна функция. Значит, $s \geqslant 2$. Ребру цепи, выходящему из вершины q_2, в соответствии с правилами 1 и 2 процедуры $\mathscr{P}$ может быть приписана либо функция вида $j_1(a)$, где $a \in X_n \cup \{1\}$, либо функция вида $\mu(a, b)$, где $a \in X_n \cup \{1\}$, $b \in X_n$. Все такие функции являются мономами. Пусть теперь функция h, приписанная ребру e_j на t-м шаге процедуры $\mathscr{P}$, является мономом, $j \geqslant 2$. Покажем, что функция g, приписанная ребру e_{j+1} на t-м шаге процедуры $\mathscr{P}$, является мономом. Если вершине q_{j+1} приписан символ λ, то ребру e_{j+1} будет приписана функция h, являющаяся мономом. Если вершине q_{j+1} приписан символ μ, то ребру e_{j+1} будет приписана функция $\mu(h, a)$, где $a \in X_n$. Очевидно, что функция является мономом. Отсюда вытекает справедливость утверждения свойства 3.

Лемма 2.3.2. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathscr{L}_2$, $n\geqslant 1$, Φ — *нормальная формула над* $\mathfrak{C}$, *реализующая функцию* f, $\widehat{T}$ — *соответствующее ей дерево,* v — *вершина дерева* $\widehat{T}$, e — *выходящее из нее ребро. Пусть в результате применения процедуры* $\mathscr{P}$ *ребру* e *приписаны функции* $\xi_1,\ldots,\xi_t$, $1\leqslant t\leqslant p$, *где* p — *число черных вершин в дереве* $\widehat{T}$. *Пусть подформула* Φ_v *формулы* Φ, *соответствующая вершине* v, *реализует функцию* $g(x_1,\ldots,x_n)$. *Тогда*

$$g=\xi_1+\ldots+\xi_t.$$

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по параметру m — максимуму из длин цепей, соединяющих v с висячими вершинами, $m\geqslant 0$. Если $m=0$, то v — висячая вершина. Тогда из определения процедуры $\mathscr{P}$ следует, что ребру e не приписана ни одна функция — противоречие с условием леммы. Пусть $m=1$. Тогда у вершины v есть две смежные висячие вершины. Пусть этим вершинам приписаны символы $a,b\in X_n\cup\{1\}$ соответственно. Рассмотрим несколько случаев. Если вершине v приписан символ λ, то ребру e в результате применения процедуры $\mathscr{P}$ приписаны две функции — $j_1(a)$ и $j_1(b)$. Очевидно, что $g=\lambda(a,b)$, и утверждение леммы выполняется. Если вершине v приписан символ μ и Φ_v имеет вид $\mu(a,b)$, то $a\in X_n\cup\{1\}$, $b\in X_n$. Тогда ребру e в результате применения процедуры $\mathscr{P}$ приписана функция $\mu(a,b)$. При этом $g=\mu(a,b)$. Этим проверена база индукции.

Пусть для вершин v, таких, что $1\leqslant m\leqslant l$, утверждение леммы выполняется, $l\geqslant 1$. Докажем, что оно выполняется для вершины v, такой, что $m=l+1$. Рассмотрим несколько возможных случаев.

Случай 1. Вершине v приписан символ μ. Тогда подформула Φ_v, соответствующая вершине v, имеет вид $\mu(A,b)$, где A — формула над $\mathfrak{C}$, $b\in X_n$. Обозначим через u вершину, соответствующую подформуле A, через d — ребро, соединяющее v с u, через e — ребро, выходящее из вершины v. Так как ребру e в результате применения процедуры $\mathscr{P}$ оказалось приписано t функций, то на некоторых шагах $i_1,\ldots,i_t$ процедуры $\mathscr{P}$ ребру e было приписано по одной функции, а на остальных шагах — ни одной. В соответствии с правилом 4 процедуры $\mathscr{P}$ это означает, что ребру d также приписано t некоторых функций $\zeta_1,\ldots,\zeta_t$, таких, что $\xi_i=\mu(\zeta_i,b)$, $i=1,\ldots,t$. По предположению индукции, формула A реализует функцию $\zeta_1+\ldots+\zeta_t$. Следовательно, $g=\mu(\zeta_1+\ldots+\zeta_t,b)$. Легко видеть, что $\mu(\zeta_1+\ldots+\zeta_t,b)=\mu(\zeta_1,b)+\ldots+\mu(\zeta_t,b)$. Поэтому $g=\mu(\zeta_1,b)+\ldots+\mu(\zeta_t,b)=\xi_1+\ldots+\xi_t$, что и требовалось доказать.

Случай 2. Подформула Φ_v, соответствующая вершине v, имеет вид $\lambda(A,B)$, где A,B — нетривиальные формулы над $\mathfrak{C}$. Обозначим через u_1 и u_2 вершины, соответствующие подформулам A и B, через d_1 и d_2 — ребра, соединяющие вершину v с u_1 и u_2 соответственно, через e — ребро, выходящее из вершины v. Так как по условию ребру e в результате применения процедуры $\mathscr{P}$ оказалось приписано $t\geqslant 1$ функций, то на некоторых шагах $i_1,\ldots,i_t$ процедуры $\mathscr{P}$ ребру e было приписано по одной функции, а на остальных шагах — ни одной. Пусть ребрам d_1 и d_2 в результате применения процедуры $\mathscr{P}$ было приписано t_1 и t_2 функций соответственно, $0\leqslant t_1,t_2\leqslant t$. Из свойства 2 процедуры $\mathscr{P}$ следует, что $t_1,t_2\geqslant 1$. В соответствии со свойствами процедуры $\mathscr{P}$ справедливо равенство $t_1+t_2=t$. Обозначим функции, приписанные ребру d_1, через $\zeta_1,\ldots,\zeta_{t_1}$, а ребру d_2 — через $\psi_1,\ldots,\psi_{t_2}$. В соответствии с правилом 3 процедуры $\mathscr{P}$ $\zeta_1,\ldots,\zeta_{t_1},\psi_1,\ldots,\psi_{t_2}\in\{\xi_1,\ldots,\xi_t\}$. По предположению индукции подформулы A и B реализуют функции $\zeta_1+\ldots+\zeta_{t_1}$ и $\psi_1+\ldots+\psi_{t_2}$ соответственно. Следовательно, $g=\zeta_1+\ldots+\zeta_{t_1}+\psi_1+\ldots+\psi_{t_2}=\xi_1+\ldots+\xi_t$, что и требовалось доказать.

Случай 3. Подформула Φ_v, соответствующая вершине v, имеет вид $\lambda(A, b)$, где A — нетривиальная формула над $\mathfrak{C}$, а $b \in X_n \cup \{1\}$. Обозначим через u вершину, соответствующую подформуле A, через d — ребро, соединяющее вершины v и u соответственно, через e — ребро, выходящее из вершины v. Так как ребру e в результате применения процедуры $\mathscr{P}$ оказалось приписано t функций, то на некоторых шагах $i_1, \ldots, i_t$ процедуры $\mathscr{P}$ ребру e было приписано по одной функции, а на остальных шагах — ни одной. Из правил 1 и 3 следует, что ребру d в результате применения процедуры $\mathscr{P}$ была приписана $t-1$ функция. Обозначим функции, приписанные ребру d, через $\zeta_1, \ldots, \zeta_{t-1}$. В соответствии с правилами 1 и 3 процедуры $\mathscr{P}$ можно считать, что $\xi_1 = \zeta_1, \ \ldots, \ \xi_{t-1} = \zeta_{t-1}, \ \xi_t = j_1(b)$. По предположению индукции подформула A реализует функцию $\zeta_1 + \ldots + \zeta_{t-1}$. Следовательно, подформула Φ_v реализует функцию $\zeta_1 + \ldots + \zeta_{t-1} + j_1(b) = \xi_1 + \ldots + \xi_t$, что и требовалось доказать. Это завершает доказательство индуктивного перехода. Лемма доказана.

Лемма 2.3.3. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{L}_2$, $z \in Y_f$, Φ — нормальная формула, реализующая функцию f, $\widehat{T}$ — соответствующее формуле Φ дерево. Пусть v_* — вершина дерева $\widehat{T}$, смежная с корневой, e — ребро, выходящее из вершины v_*. Пусть $\mathscr{H} = \{h_1, \ldots, h_q\}$, $q \geqslant 1$ — множество функций, приписанных ребру e в результате применения процедуры $\mathscr{P}$. Тогда $z \in \mathscr{H}$.*

Доказательство. Пусть, от противного, $z \notin \mathscr{H}$. Пусть m_i — число шагов процедуры $\mathscr{P}$, на которых ребру e были приписаны функции, равные h_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $m_i \geqslant 1$. По лемме 2.3.2 формула Φ реализует функцию $g = \sum h_j$, где сумма берется по всем j, $1 \leqslant j \leqslant q$, таким, что m_j — нечетное число. Так как каждая из функций $h_1, \ldots, h_q$ является мономом, то множество Y_g не содержит функцию z. Это противоречит тому, что формула Φ реализует функцию f и $z \in Y_f$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{L}_2(n)$, Φ — минимальная формула, реализующая функцию f, а $\widehat{T}$ — соответствующее формуле Φ дерево. Тогда дерево $\widehat{T}$ содержит не менее $|Y_f|$ черных вершин.*

Следствие 2. *Пусть Φ_n — минимальная формула над $\mathfrak{C}$, реализующая функцию $\tau_n(x_1, \ldots, x_n)$, а $\widehat{T}_n$ — соответствующее ей дерево. Тогда дерево $\widehat{T}_n$ содержит не менее $n2^{n-1} + 2^n$ черных вершин.*

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{L}_2$, Φ — минимальная формула, реализующая функцию f, $\widehat{T}$ — соответствующее ей дерево, v_* — вершина дерева $\widehat{T}$, смежная с корневой. Пусть v — произвольная вершина дерева $\widehat{T}$, которой приписан символ μ. Будем говорить, что вершина v принадлежит множеству $V_k = V_k(\Phi)$, $k \geqslant 1$, если цепь, соединяющая вершину v с вершиной v_*, содержит ровно k вершин, которым приписан символ μ.

Лемма 2.3.4. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{L}_2$, Φ — минимальная нормальная формула, реализующая функцию f, $\widehat{T}$ — соответствующее ей дерево, v_* — вершина дерева $\widehat{T}$, смежная с корневой. Пусть $v_1 \in V_{k_1}(\Phi)$, $v_2 \in V_{k_2}(\Phi)$, $k_1 > k_2 \geqslant 1$, причем вершина v_2 принадлежит цепи, соединяющей вершины v_1 и v_*. Пусть $\mu(\Delta_1, x_r)$ — подформула, соответствующая вершине v_1, $\mu(\Delta_2, x_s)$ — подформула, соответствующая вершине v_2, где $x_r, x_s \in X_n$, Δ_1, Δ_2 — формулы над $\mathfrak{C}$. Тогда $r \neq s$.*

Доказательство. Пусть, от противного, $r = s$. Обозначим через e выходящее из вершины v_* ребро дерева $\widehat{T}$. Рассмотрим формулу $\widetilde{\Phi}$, получающуюся из формулы Φ заменой подформулы $\mu(\Delta_1, x_r)$ на формулу Δ_1. Обозначим через $\widetilde{T}$ соответствующее ей дерево; через $\widetilde{v}_*$ — вершину дерева $\widetilde{T}$, смежную с корневой; через $\widetilde{e}_*$ — ребро, выходящее из вершины $\widetilde{T}$; через $\widetilde{v}_2$ — вершину дерева $\widetilde{T}$, соответствующую вершине v_2 дерева T. Покажем с помощью леммы 2.3.2, что формула $\widetilde{\Phi}$ реализует функцию f. Докажем, что ребрам e и $\widetilde{e}$ приписаны одни и те же функции. Разделим все черные вершины дерева T на два типа. Будем говорить, что черная вершина дерева T принадлежит типу 1, если цепь, соединяющая ее с вершиной v_*, проходит через вершину v_1. Все остальные черные вершины дерева T отнесем к типу 2.

Пусть w — вершина типа 1, а $\widetilde{w}$ — соответствующая ей вершина дерева $\widetilde{T}$. Пусть вершинам w и $\widetilde{w}$ соответствуют шаги i_w и $i_{\widetilde{w}}$ процедуры $\mathscr{P}$ для деревьев T и $\widetilde{T}$. Так как цепь C, соединяющая w с вершиной v_*, проходит через вершину v_1, то она проходит и через вершину v_2. Следовательно, цепь $\widetilde{C}$, соединяющая $\widetilde{w}$ с вершиной $\widetilde{v}_*$, проходит через вершину $\widetilde{v}_2$. Так как каждая приписываемая в ходе применения процедуры $\mathscr{P}$ функция является мономом, то с учетом отмеченного выше свойства цепей C и $\widetilde{C}$, на шагах i_w и $i_{\widetilde{w}}$ процедуры $\mathscr{P}$ для деревьев T и $\widetilde{T}$ соответственно, ребрам e и $\widetilde{e}$ приписываются равные функции.

Пусть z — вершина типа 2, а $\widetilde{z}$ — соответствующая ей вершина дерева $\widetilde{T}$. Пусть вершинам z и $\widetilde{z}$ соответствуют шаги i_z и $i_{\widetilde{z}}$ процедуры $\mathscr{P}$ для деревьев T и $\widetilde{T}$. По построению цепь C, соединяющая z с вершиной v_*, совпадает с цепью $\widetilde{C}$, соединяющей $\widetilde{w}$ с вершиной $\widetilde{v}_*$. Следовательно, на шагах i_z и $i_{\widetilde{z}}$ процедуры $\mathscr{P}$ для деревьев T и $\widetilde{T}$ соответственно, ребрам e и $\widetilde{e}$ приписываются равные функции.

Следовательно, в силу леммы 2.3.2 формулы Φ и $\widetilde{\Phi}$ реализуют равные функции. Но это противоречит минимальности формулы Φ, поэтому предположение $r=s$ неверно. Лемма доказана.

Лемма 2.3.5. *Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — функция из $\mathscr{L}_2$, такая, что $f\neq 0$, $f\neq j_1(x_i)$, $i=1,\ldots,n$. Пусть Φ — минимальная нормальная формула, реализующая функцию f, $\widehat{T}$ — соответствующее ей дерево, v_* — вершина дерева $\widehat{T}$, смежная с корневой, а e_* — ребро, выходящее из вершины v_*. Пусть v_1, v_2 — произвольные черные вершины дерева $\widehat{T}$, а g_1, g_2 — мономы, приписанные ребру e_* на соответствующих вершинам v_1, v_2 шагах процедуры $\mathscr{P}$. Тогда $g_1\neq g_2$.*

Доказательство. Пусть f — функция из $\mathscr{L}_2$, такая, что $f\neq 0$, $f\neq j_1(x_i)$, $x_i\in X_n$. Предположим, от противного, что в дереве $\widehat{T}$ нашлись черные вершины v_1, v_2, такие, что $g_1=g_2=g$. Докажем, что это противоречит минимальности формулы Φ.

Пусть $w_1,\ldots,w_l$ — последовательность вершин, через которые проходит цепь, соединяющая вершины v_1 и v_*, $w_1=v_1$, $w_l=v_*$, $l\geqslant 2$. Так как формула Φ имеет, по крайней мере, две черные вершины, то формула Φ имеет вид $\Phi=\lambda(\Xi_1,\Xi_2)$, где Ξ_1,Ξ_2 — формулы над $\mathfrak{C}$. Построим по формуле Φ формулу Δ по следующим правилам:

1) если вершине w_2 соответствует подформула $\lambda(a,\Sigma)$, где $a\in X_n$ — символ, приписанный вершине v_1, Σ — формула над $\mathfrak{C}$, то заменим подформулу $\lambda(a,\Sigma)$ на формулу Σ;

2) если $l\geqslant 3$ и вершинам $w_2,w_3,\ldots,w_t$ приписаны символы μ, а вершине w_{t+1} соответствует подформула $\lambda(\Omega,\Sigma)$, где $2\leqslant t\leqslant l-1$, Ω — формула, соответствующая вершине w_t, Σ — формула над $\mathfrak{C}$, то заменим подформулу $\lambda(\Omega,\Sigma)$ на формулу Ω.

Легко видеть, что к формуле Φ применимо ровно одно из правил 1 и 2. Построенная формула Δ содержит на одну черную вершину меньше, чем формула Φ, а число белых вершин в формуле Δ не больше, чем число белых вершин в формуле Φ. Поэтому $L(\Delta) < L(\Phi)$. Пусть $\widehat{T}_1$ — дерево, соответствующее формуле Δ, v_{**} — вершина дерева $\widehat{T}_1$, смежная с корневой, а e_{**} — ребро, выходящее из вершины v_{**}. Все цепи дерева $\widehat{T}_1$, соединяющие вершину v_{**} с черными вершинами, совпадают с соответствующими цепями дерева $\widehat{T}$. Поэтому в результате применения процедуры $\mathscr{P}$ ребру e_{**} приписываются те же самые функции, что и ребру e_* дерева $\widehat{T}$, за исключением одного экземпляра функции g. Следовательно, функция h, реализуемая формулой Δ, отличается от функции f одним слагаемым g в каноническом представлении. Будем говорить, что формула Δ получилась из формулы Φ удалением черной вершины v_1.

Обозначим через v_2^{**} черную вершину дерева $\widehat{T}_1$, соответствующую вершине v_2 дерева $\widehat{T}$. Пусть Θ — формула, получающаяся из формулы Δ удалением вершины v_2^{**}. Аналогичным образом можно убедиться, что $L(\Theta) < L(\Delta) < L(\Phi)$, а формула Θ реализует функцию, отличающуюся от функции h одним слагаемым g в каноническом представлении. Следовательно, формула Θ реализует функцию f. Это противоречит минимальности формулы Φ. Лемма доказана.

Л е м м а 2.3.6. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{L}_2$, Φ — минимальная нормальная формула над $\mathfrak{C}$, реализующая функцию f, $\widehat{T}$ — соответствующее формуле Φ дерево. Тогда существует формула Ω над $\mathfrak{C}$, реализующая функцию f, такая, что $L(\Omega) = L(\Phi)$ и имеющая вид*

$$\Omega = \lambda(\Sigma_0, \lambda(\mu(\Sigma_1, y_1), \lambda(\mu(\Sigma_2, y_2), \ldots, \lambda(\mu(\Sigma_{q-1}, y_{q-1}), \mu(\Sigma_q, y_q))))),$$

где формула Σ_0 реализует функцию η_f, $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_q$ — формулы над $\mathfrak{C}$, $y_1, \ldots, y_q \in X_n$, $q \geqslant 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f = 0$ или $f = j_1(x_i)$, $x_i \in X_n$, то утверждение леммы очевидно.

Пусть $f \neq 0$, $f \neq j_1(x_i)$, $x_i \in X_n$. Пусть v_* — вершина дерева $\widehat{T}$, смежная с корневой, а e_* — ребро, выходящее из вершины v_*. Пусть $V_0 = \{v_1, \ldots, v_l\}$ — множество черных вершин дерева $\widehat{T}$, таких, что на соответствующих им шагам процедуры $\mathscr{P}$ ребру e_* приписываются функции $g_1, \ldots, g_l$ из множества $\mathscr{E} = \{1, j_1(x_1), \ldots, j_1(x_n)\}$, $l \geqslant 0$. Из леммы 2.3.5 следует, что для каждой функции из множества $\mathscr{E}$ существует не более одной соответствующей черной вершины из множества V_0.

Пусть $V_1(\Phi) = \{w_1, \ldots, w_q\}$ (см. определение множества V_1 перед леммой 2.3.4). Пусть вершинам $\{w_1, \ldots, w_q\}$ соответствуют некоторые формулы $\mu(\Sigma_1, y_1), \ldots, \mu(\Sigma_q, y_q)$, где $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_q$ — формулы над $\mathfrak{C}$, $y_1, \ldots, y_q \in X_n$.

Рассмотрим формулу

$$\Theta = \lambda(\Sigma_0, \lambda(\mu(\Sigma_1, y_1), \lambda(\mu(\Sigma_2, y_2), \ldots, \lambda(\mu(\Sigma_{q-1}, y_{q-1}), \mu(\Sigma_q, y_q))))),$$

где $\Sigma_0 = \lambda(g_1, \lambda(g_2, \ldots \lambda(g_{l-1}, g_l))$. Пусть $\widehat{T}_1$ — соответствующее ей дерево. Формула Θ имеет требуемый в лемме вид.

Покажем, что $L(\Theta) = L(\Phi)$. Заметим, что в дереве $\widehat{T}$ цепи, соединяющие вершины из множества V_0 с вершиной v_*, не проходят ни через одну из вершин множества V_1. Обозначим через Q такие висячие вершины дерева $\widehat{T}$, что цепи, соединяющие их с вершиной v_*, проходят через одну из вершин множества V_1. Тогда все висячие вершины дерева $\widehat{T}$ можно разбить на два непересекающихся множества: V_0 и Q. По построению $L(\Sigma_0) = |V_0|$ и $L(\mu(\Sigma_1, y_1)) + \ldots + L(\mu(\Sigma_q, y_q)) = |Q|$. Поэтому $L(\Theta) = L(\Phi)$.

По построению формула Σ_0 реализует функцию η_f, а формула $\mu(\Sigma_1, y_1)+\ldots+\mu(\Sigma_q, y_q)$ — функцию δ_f. Поэтому формула Θ реализует функцию f. Лемма доказана.

Для любого натурального k и любой нормальной формулы Φ определим множество функций $\Lambda_k = \Lambda_k(\Phi)$. Пусть v — вершина дерева $\widehat{T}$, принадлежащая множеству $V_k(\Phi)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Рассмотрим цепь, соединяющую вершину v с вершиной v_*, и последовательность вершин $q_1, \ldots, q_l$, через которые последовательно проходит эта цепь, $q_1 = v$, $q_l = v_*$, $l \geqslant 1$. Выделим из последовательности $q_1, \ldots, q_l$ подпоследовательность $q_{j_1}, \ldots, q_{j_k}$ вершин, которым приписан символ μ, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_t \leqslant l$. Пусть вершине q_{j_s}, $s = 1, \ldots, k$, соответствует подформула $\mu(\Sigma_i, y_{j_s})$, где Σ_s — формула над $\mathfrak{C}$, $y_{j_s} \in X_n$. Положим $\Lambda_k = \bigcup\{j_2(y_{j_1})\ldots j_2(y_{j_k})\}$, где объединение берется по всем вершинам $v \in V_k$, $k \geqslant 1$. Легко видеть, что каждая функция из множества Λ_k равна некоторому моному. Очевидно, что $|\Lambda_k| \leqslant |V_k(\Phi)|$. Из леммы 2.3.4 следует, что если Φ — минимальная формула, то каждый моном из множества $\Lambda_k(\Phi)$ состоит из k различных множителей.

Лемма 2.3.7. *Пусть Φ_n — минимальная нормальная формула, реализующая функцию τ_n, $n \geqslant 2$. Тогда для любого $k = 1, \ldots, n$ справедливо соотношение*

$$|V_k(\Phi_n)| \geqslant C_n^k.$$

Доказательство. Пусть $\widehat{T}_n$ — дерево, соответствующее формуле Φ_n, e — ребро, выходящее из вершины, смежной с корневой. Пусть, от противного, для некоторого $k \geqslant 1$ выполняется неравенство $|V_k(\Phi_n)| < C_n^k$. Так как $|\Lambda_k| \leqslant |V_k|$, то $|\Lambda_k| < C_n^k$. Следовательно, найдутся переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \in X$, такие, что $j_2(x_{i_1})\ldots j_2(x_{i_k}) \notin \Lambda_k$. Покажем, что тогда в результате применения процедуры $\mathscr{P}$ ребру e не может быть приписана функция $j_2(x_{i_1})\ldots j_2(x_{i_k})$. Пусть v — произвольная черная вершина дерева $\widehat{T}_n$. Рассмотрим цепь, соединяющую вершину v с корневой вершиной дерева $\widehat{T}_n$. Пусть k_{max} — максимальное целое число, такое, что данная цепь проходит через вершину из множества $V_{k_{max}}$. Рассмотрим несколько возможных случаев. Если $k_{max} < k$, то моном, приписанный ребру e в результате применения процедуры $\mathscr{P}$ на шаге, соответствующем черной вершине v, содержит менее k множителей вида $j_2(\cdot)$, и поэтому этот моном отличен от $j_2(x_{i_1})\ldots j_2(x_{i_k})$. Если $k_{max} = k$, то моном, приписанный ребру e в результате применения процедуры $\mathscr{P}$ на шаге, соответствующем черной вершине v, отличен от $j_2(x_{i_1})\ldots j_2(x_{i_k})$, поскольку $j_2(x_{i_1})\ldots j_2(x_{i_k}) \notin \Lambda_k$. Если $k_{max} > k$, то с учетом леммы 2.3.4 моном, приписанный ребру e в результате применения процедуры $\mathscr{P}$ на шаге, соответствующем черной вершине v, содержит более k множителей вида $j_2(\cdot)$, и поэтому этот моном отличен от $j_2(x_{i_1})\ldots j_2(x_{i_k})$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть Φ_n — минимальная формула, реализующая функцию τ_n, $n \geqslant 2$. Тогда формула Φ_n содержит не менее $2^n - 1$ белых вершин.*

Доказательство. По лемме 2.3.7 формула Φ_n содержит не менее $C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n - 1$ белых вершин. Следствие доказано.

2.3.3. Верхняя оценка для функции Шеннона. Определим множество наборов $\mathbb{V}^n$, $n \geqslant 1$, с натуральными компонентами следующим образом. Для любых $l \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$ положим

$$\mathbb{V}_l^n = \{(i_1, \ldots, i_l) | 1 \leqslant i_1, \ldots, i_l \leqslant n, \text{ причем среди } i_1, \ldots, i_l \text{ нет равных чисел}\}.$$

Положим $\mathbb{V}^n = \bigcup \mathbb{V}_l^n$, где объединение берется по $l = 1, \ldots, n$.

Пусть $\mathscr{F} \subseteq \mathbb{V}^n$. Для любого $k = 1, \ldots, n$ определим множество $D(\mathscr{F}, k)$, являющееся множеством всех наборов из $\mathscr{F}$, которые имеют компоненту, равную k. Положим

$$D(\mathscr{F}, k) = \{(i_1, \ldots, i_l) \in \mathscr{F} |\ \text{существует целое j, такое, что}\ 1 \leqslant j \leqslant l,\ i_j = k\}.$$

Положим $d_{\max}(\mathscr{F}) = \max |D(\mathscr{F}, k)|$, где максимум берется по $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $d(\mathscr{F})$ наименьшее из натуральных k, удовлетворяющих равенству $|D(\mathscr{F}, k)| = d_{\max}(\mathscr{F})$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{L}_2$, $n \geqslant 1$. Рассмотрим каноническое представление функции f. Определим множество $\mathscr{I} = \mathscr{I}(f)$ наборов с натуральными компонентами следующим образом. Набор $I = (i_1, \ldots, i_l)$, где $1 \leqslant l \leqslant n$, $l = l(I)$, принадлежит множеству $\mathscr{I}$ тогда и только тогда, когда $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant n$ и выполняется, по крайней мере, одно из двух условий:

1) $j_2(x_{i_1}) \ldots j_2(x_{i_l}) \in K_f$,

2) $j_1(x_t) j_2(x_{i_1}) \ldots j_2(x_{i_l}) \in K_f$ хотя бы для одного $t \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_l\}$ (напомним, что K_f — это множество всех компонент функции f).

Обозначим через R_f множество натуральных чисел i, таких, что $1 \leqslant i \leqslant n$ и в множестве $\mathscr{I}(f)$ существует хотя бы один набор, имеющий компоненту, равную i. Положим $r_f = |R_f|$.

Определим индукцией по величине r_f величину $B(f)$, которая однозначно вычисляется по функции $f \in \mathscr{L}_2$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{L}_2$, $n \geqslant 1$. Если $r_f = 0$, то положим $B(f) = 0$. Пусть $r_f \neq 0$. Сгруппировав вместе все компоненты функции f, содержащие множитель $j_2(x_{d(\mathscr{I})})$, получим представление функции f в виде $f = j_2(x_{d(\mathscr{I})}) f_1 + f_2$, где f_1, f_2 — функции из $\mathscr{L}_2$, ни одна компонента которых не содержит множителя $j_2(x_{d(\mathscr{I})})$. Тогда $r_{f_1} < r_f$, $r_{f_2} < r_f$. Положим $B(f) = 1 + B(f_1) + B(f_2)$.

Из определения $B(f)$ следует, что для любой функции f, такой, что $K_f = \varnothing$, справедливо равенство $B(f) = 0$. В частности, справедливы равенства

$$B(0) = 0,\ \ B(1) = 0,\ \ B(j_1(x_1)) = 0,\ \ B(1 + j_1(x_1)) = 0,\ \ B(1 + j_1(x_1) + j_1(x_2)) = 0.$$

Вычислим значение $B(f)$ для некоторых функций $f(x_1)$, существенно зависящих не более чем от одной переменной. Рассмотрим каноническое представление функции f. Если $f(x_1) = 1 + j_1(x_1) + j_2(x_1)$, то $\mathscr{I}(f) = \{(1)\}$ (т. е. множество $\mathscr{I}(f)$ состоит из одного набора длины 1, единственная компонента которого равна 1). Тогда $d_{max}(\mathscr{I}(f)) = 1$, и, вынося за скобку множитель $j_2(x_1)$, мы получаем представление функции f в виде $f(x_1) = j_2(x_1) \cdot 1 + (1 + j_1(x_1))$. Так как выполняются равенства $B(1) = B(1 + j_1(x_1)) = 0$, то $B(1 + j_1(x_1) + j_2(x_1)) = 1 + B(1) + B(1 + j_1(x_1)) = 1$. Аналогичным образом можно убедиться, что

$$B(j_2(x_1)) = 1, \quad B(1 + j_2(x_1)) = 1, \quad B(j_1(x_1) + j_2(x_1)) = 1.$$

Лемма 2.3.8. *Пусть $f \in \mathscr{L}_2$. Тогда*

$$B(f) \leqslant 2^{r_f} - 1.$$

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по r_f. Если $r_f = 0$, то $K_f = \varnothing$ и $B(f) = 0$, то есть утверждение леммы выполняется. Пусть утверждение леммы выполняется для всех функций f, таких, что $r_f \leqslant s$, $s \in \mathbb{N}$. Пусть f такова, что $r_f = s + 1$. Рассмотрим равенство $f = j_2(x_{d(\mathscr{I})}) f_1 + f_2$. Так как $r_{f_1} \leqslant s$, $r_{f_2} \leqslant s$, то к функциям f_1, f_2 применимо предположение индукции. Тогда

$$B(f) \leqslant 1 + B(f_1) + B(f_2) \leqslant 1 + 2^s - 1 + 2^s - 1 = 2^{s+1} - 1.$$

Лемма доказана.

Напомним, что через Y_f мы обозначаем множество $K_f \cup J_f \cup H_f$ (см. каноническое представление функции f). Пусть f — произвольная функция из $\mathscr{L}_2$. Рассмотрим каноническое представление функции f. Вынесем за скобки множитель $j_2(x_{d(\mathscr{I})})$:

$$f = j_2(x_{d(\mathscr{I})})f_1 + f_2.$$

Отметим одно свойство функций f_1 и f_2, а именно: $|Y_{f_1}| + |Y_{f_2}| = |Y_f|$. Для сокращения записи обозначим функцию $j_2(x_{d(\mathscr{I})})f_1$ через f_3. Очевидно, что $|Y_{f_1}| = |Y_{f_3}|$. Покажем, что выполняется равенство $|Y_{f_3}| + |Y_{f_2}| = |Y_f|$. Заметим, что множества Y_{f_3} и Y_{f_2} не пересекаются, так как каждый элемент множества Y_{f_1} содержит множитель $j_2(x_{d(\mathscr{I})})$, а ни один из элементов множества Y_{f_2} его не содержит. Тогда из $a \in Y_{f_2}$ следует $a \in Y_f$; и из $a \in Y_{f_3}$ следует $a \in Y_f$. Следовательно, $|Y_{f_3}| + |Y_{f_2}| \leqslant |Y_f|$. Наоборот, если $a \in Y_f$, то из равенства $f = f_2 + f_3$ следует, что или $a \in Y_{f_2}$, или $a \in Y_{f_3}$. Следовательно, $|Y_{f_3}| + |Y_{f_2}| \geqslant |Y_f|$. Таким образом, $|Y_{f_3}| + |Y_{f_2}| = |Y_f|$. С учетом равенства $|Y_{f_1}| = |Y_{f_3}|$ получаем соотношение $|Y_{f_1}| + |Y_{f_2}| = |Y_f|$.

Лемма 2.3.9. *Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $\mathscr{L}_2(1)$, такая, что $f \neq 0$ и $f \neq j_1(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда*

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant |Y_f| + B(f).$$

Доказательство. Убедимся непосредственной проверкой, что справедливо неравенство $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant B(f) + |Y_f|$.

Если $f = j_2(x_i)$, то $B(f) = 1$, $|Y_f| = 1$ и формула $\mu(1(x_1), x_i)$ реализует функцию f со сложностью 2. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant B(f) + |Y_f|$. Если $f = j_1(x_i) + j_2(x_i)$, то $B(f) = 1$, $|Y_f| = 2$ и формула $\lambda(x_i, \mu(1(x_1), x_i))$ реализует функцию f со сложностью 3. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant B(f) + |Y_f|$.

Если $f = 1$, то $B(f) = 0$, $|Y_f| = 1$ и формула $1(x_1)$ реализует функцию f со сложностью 1. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant B(f) + |Y_f|$. Если $f = 1 + j_1(x_i)$, то $B(f) = 0$, $|Y_f| = 2$ и формула $\lambda(1(x_i), x_i)$ реализует функцию f со сложностью 2. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant B(f) + |Y_f|$. Если $f = 1 + j_2(x_i)$, то $B(f) = 1$, $|Y_f| = 2$ и формула $\lambda(1(x_1), \mu(1(x_1), x_i))$ реализует функцию f со сложностью 3. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant B(f) + |Y_f|$. Если $f = 1 + j_1(x_i) + j_2(x_i)$, то $B(f) = 1$, $|Y_f| = 3$ и формула $\lambda(\lambda(1, x_i), \mu(1(x_1), x_i))$ реализует функцию f со сложностью 4. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant B(f) + |Y_f|$. Лемма доказана.

Лемма 2.3.10. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из класса $\mathscr{L}_2$, существенно зависящая не менее чем от двух переменных. Тогда*

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant |Y_f| + B(f).$$

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по величине r_f. Если $r_f = 0$, то $B(f) = 0$ и $K_f = \varnothing$. Очевидно, что для любого $n \geqslant 2$

$$L_{\mathfrak{C}}(j_1(x_1) + \ldots + j_1(x_n)) = n = |Y_f|, \quad L_{\mathfrak{C}}(1 + j_1(x_1) + \ldots + j_1(x_n)) = 1 + n = |Y_f|.$$

Следовательно, в случае $r_f = 0$ утверждение леммы выполняется.

Пусть для любой функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathscr{L}_2$, такой, что $r_f \leqslant m$, и существенно зависящей не менее чем от двух переменных, выполняется неравенство $L_{\mathfrak{C}}(g) \leqslant |Y_g| + B(g)$; $m \geqslant 0$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из $\mathscr{L}_2$, существенно зависящая не менее чем от двух переменных, и такая, что $r_f = m+1$. Рассмотрим каноническое представление функции f. Сгруппировав вместе все компоненты функции f, содержащие множитель $j_2(x_{d(\mathscr{I})})$, получим представление функции f в виде $f = j_2(x_{d(\mathscr{I})})f_1 + f_2$, где f_1, f_2 — функции из $\mathscr{L}_2$, причем $r_{f_1} \leqslant r_f$ и $r_{f_2} \leqslant r_f$. Рассмотрим несколько возможных случаев.

Случай 1. Функции f_1, f_2 существенно зависят не менее чем от двух переменных. Тогда к ним применимо предположение индукции. Поэтому $L_{\mathfrak{C}}(f_i) \leqslant B(f_i) + |Y_{f_i}|$, $i = 1, 2$. Следовательно,

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 1 + L_{\mathfrak{C}}(f_1) + L_{\mathfrak{C}}(f_2) \leqslant 1 + (B(f_1) + |Y_{f_1}|) + (B(f_2) + |Y_{f_2}|).$$

По определению $1 + B(f_1) + B(f_2) = B(f)$. Кроме того, по свойству функций f_1 и f_2 выполняется равенство $|Y_{f_1}| + |Y_{f_2}| = |Y_f|$. Следовательно,

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant (1 + B(f_1) + B(f_2)) + (|Y_{f_1}| + |Y_{f_2}|) = B(f) + |Y_f|,$$

что завершает доказательство перехода индукции.

Случай 2. Функция f_1 существенно зависит не менее чем от двух переменных, функция f_2 существенно зависит не более чем от одной переменной. Тогда к функции f_1 применимо предположение индукции. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(f_1) \leqslant B(f_1) + |Y_{f_1}|$.

Если $f_2 = 0$, то $B(f_2) = 0$ и $f = j_2(x_{d(\mathscr{I})})f_1$. Из равенства $B(f_2) = 0$ и определения величины $B(f)$ следует, что $B(f) = 1 + B(f_1)$. Из равенства $f = j_2(x_{d(\mathscr{I})})f_1$ следует, что $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 1 + L_{\mathfrak{C}}(f_1)$. Из свойства функций f_1 и f_2, а также равенства $f_2 = 0$ следует, что $|Y_f| = |Y_{f_1}|$. Таким образом,

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 1 + L_{\mathfrak{C}}(f_1) \leqslant 1 + (B(f_1) + |Y_{f_1}|) = B(f) + |Y_f|.$$

Если $f_2 = j_1(x_i)$, $x_i \in X_n$, то $B(f_2) = 0$ и $f = \lambda(x_i, j_2(x_{d(\mathscr{I})})f_1)$. Из равенства $B(f_2) = 0$ и определения величины $B(f)$ следует, что $B(f) = 1 + B(f_1)$. Так как $f = \lambda(x_i, j_2(x_{d(\mathscr{I})})f_1)$, то $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 2 + L_{\mathfrak{C}}(f_1)$. Из свойства функций f_1 и f_2 следует, что $|Y_f| = |Y_{f_1}| + |Y_{f_2}| = |Y_{f_1}| + 1$. Таким образом,

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 1 + 1 + L_{\mathfrak{C}}(f_1) \leqslant 1 + 1 + (B(f_1) + |Y_{f_1}|) = B(f) + |Y_f|.$$

Если $f_2 \neq 0$ и $f_2 \neq j_1(x_i)$, то в силу леммы 2.3.10 справедливо неравенство $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant |Y_f| + B(f)$.

Так как $f = j_2(x_{d(\mathscr{I})})f_1 + f_2$, то $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 1 + L_{\mathfrak{C}}(f_1) + L_{\mathfrak{C}}(f_2)$. Из определения величины $B(f)$ следует, что $B(f) = 1 + B(f_1) + B(f_2)$. Из определения функций f_1 и f_2 следует, что $|Y_f| = |Y_{f_1}| + |Y_{f_2}|$. Тогда

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 1 + L_{\mathfrak{C}}(f_1) + L_{\mathfrak{C}}(f_2) \leqslant 1 + (B(f_1) + |Y_{f_1}|) + (B(f_2) + |Y_{f_2}|) = \\ = (1 + B(f_1) + B(f_2)) + (|Y_{f_1}| + |Y_{f_2}|) = B(f) + |Y_f|.$$

Случай 3. Функция f_1 существенно зависит не более чем от одной переменной, а функция f_2 существенно зависит не менее чем от двух переменных. Тогда к функции f_2 применимо предположение индукции. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(f_2) \leqslant B(f_2) + |Y_{f_2}|$.

Из определения величины $B(f)$ следует, что $f_1 \neq 0$.

Если $f_1 = j_1(x_i)$, $x_i \in X_n$, то $B(f_1) = 0$. Тогда из определения величины $B(f)$ следует, что $B(f) = 1 + B(f_2)$. Так как $f = j_2(x_{d(\mathscr{I})})j_1(x_i) + f_2$, то $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 2 + L_{\mathfrak{C}}(f_2)$. Из свойства функций f_1 и f_2 следует, что $|Y_f| = |Y_{f_1}| + |Y_{f_2}| = |Y_{f_2}| + 1$. Следовательно,

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 2 + L_{\mathfrak{C}}(f_2) \leqslant 2 + (B(f_2) + |Y_{f_2}|) = B(f) + |Y_f|.$$

Если $f_1 \neq 0$ и $f_1 \neq j_1(x_i)$, то в силу леммы 2.3.10 справедливо неравенство $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant |Y_f| + B(f)$. Так как $f = j_2(x_{d(\mathscr{I})})f_1 + f_2$, то $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 1 + L_{\mathfrak{C}}(f_1) + L_{\mathfrak{C}}(f_2)$. Из определения величины $B(f)$ следует, что $B(f) = 1 + B(f_1) + B(f_2)$. Из свойства функций f_1 и f_2 следует, что $|Y_f| = |Y_{f_1}| + |Y_{f_2}|$. Тогда

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 1 + L_{\mathfrak{C}}(f_1) + L_{\mathfrak{C}}(f_2) \leqslant 1 + (B(f_1) + |Y_{f_1}|) + (B(f_2) + |Y_{f_2}|) = \\ = (1 + B(f_1) + B(f_2)) + (|Y_{f_1}| + |Y_{f_2}|) = B(f) + |Y_f|.$$

Случай 4. Функции f_1, f_2 существенно зависит не более чем от одной переменной. Отметим, что $f_1 \neq 0$ по определению величины $B(f)$. Пусть $d(\mathscr{I}) = i$.

Случай 4а. Пусть $f_1 = j_1(x_j)$, $x_j \in X_n \setminus \{x_i\}$. Тогда возможно несколько случаев.

Случай 4аI. Если $f_2 = 0$, то $f = j_1(x_j)j_2(x_i)$, $x_i \in X_n$. Тогда $B(f) = 1$, $|Y_f| = 1$ и формула $\mu(x_j, x_i)$ реализует функцию f со сложностью 2. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant B(f) + |Y_f|$.

Случай 4аII. Если $f_2 = j_1(x_k)$, $x_k \in X_n$, то $f = j_1(x_j)j_2(x_i) + j_1(x_k)$. Тогда $B(f) = 1$, $|Y_f| = 2$ и формула $\lambda(x_k, \mu(x_j, x_i))$ реализует функцию f со сложностью 3. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant B(f) + |Y_f|$.

Случай 4аIII. Если $f_2 \neq 0$ и $f_2 \neq j_1(x_k)$, $x_k \in X_n$, то по лемме 2.3.9 $L_{\mathfrak{C}}(f_2) \leqslant |Y_{f_2}| + B(f_2)$. Так как $f = \lambda(\mu(x_j, x_i), f_2)$, то $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 2 + L_{\mathfrak{C}}(f_2)$. Так как $f_1 = j_1(x_j)$, то $B(f_1) = 0$. Следовательно, $B(f) = 1 + B(f_2)$. Так как $|Y_{f_1}| = 1$, то $1 + |Y_{f_2}| = |Y_f|$. Тогда

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 2 + L_{\mathfrak{C}}(f_2) \leqslant 2 + B(f_2) + |Y_{f_2}| = (1 + B(f_2)) + (1 + |Y_{f_2}|) = B(f) + |Y_f|.$$

Случай 4б. Пусть $f_1 \neq 0$ и $f_1 \neq j_1(x_j)$, $x_j \in X_n$. Тогда по лемме 2.3.9 $L_{\mathfrak{C}}(f_1) \leqslant |Y_{f_1}| + B(f_1)$.

Случай 4бI. Если $f_2 = 0$, то $f = f_1 j_2(x_i)$, $x_i \in X_n$. Следовательно, $B(f) = 1 + B(f_1)$. Очевидно, что $|Y_f| = |Y_{f_1}|$. Так как $f = \mu(f_1, x_i)$, то $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 1 + L_{\mathfrak{C}}(f_1)$. Тогда

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 1 + L_{\mathfrak{C}}(f_1) \leqslant 1 + B(f_1) + |Y_{f_1}| = B(f) + |Y_f|.$$

Случай 4бII. Если $f_2 = j_1(x_j)$, то $f = f_1 j_2(x_i) + j_1(x_j)$, $x_i, x_j \in X_n$. Так как $B(j_1(x_j)) = 0$, то $B(f) = 1 + B(f_1)$. Кроме того, из свойства функций f_1 и f_2 следует, что $|Y_f| = |Y_{f_1}| + |Y_{f_2}| = |Y_{f_1}| + 1$. Из равенства $f = f_1 j_2(x_i) + j_1(x_j)$ следует, что $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 2 + L_{\mathfrak{C}}(f_1)$. Тогда выполняются соотношения

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 2 + L_{\mathfrak{C}}(f_1) \leqslant 2 + B(f_1) + |Y_{f_1}| = (1 + B(f)) + (1 + |Y_{f_1}|) = B(f) + |Y_f|.$$

Случай 4бIII. Если $f_2 \neq 0$ и $f_2 \neq j_1(x_j)$, $x_j \in X_n$, то по лемме 2.3.9 $L_{\mathfrak{C}}(f_2) \leqslant |Y_{f_2}| + B(f_2)$. Так как $f = \lambda(\mu(f_1, x_i), f_2)$, то $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 1 + L_{\mathfrak{C}}(f_1) + L_{\mathfrak{C}}(f_2)$. Из свойства функций f_1 и f_2 следует, что $|Y_f| = |Y_{f_1}| + |Y_{f_2}|$. Тогда

$$\begin{aligned} L_{\mathfrak{C}}(f) &\leqslant 1 + L_{\mathfrak{C}}(f_1) + L_{\mathfrak{C}}(f_2) \leqslant 1 + B(f_1) + B(f_2) + |Y_{f_1}| + |Y_{f_2}| = \\ &= (1 + B(f_1) + B(f_2)) + (|Y_{f_1}| + |Y_{f_2}|) = B(f) + |Y_f|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствием из доказанных результатов является следующая теорема.

Теорема 2.3.1. *При всех $n \geqslant 2$ имеет место соотношение*

$$L_{\mathfrak{C}}(\mathscr{L}_2(n)) = n2^{n-1} + 2^{n+1} - 1.$$

Доказательство. Верхняя оценка. Из леммы 2.3.9 следует, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, отличной от функций 0 и $j_1(x)$, справедлива оценка $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant |Y_f| + B(f)$. С учетом того, что в силу леммы 2.3.8 $B(f) \leqslant 2^n - 1$, а также $|Y_f| \leqslant |Y_{\tau_n}| = n2^{n-1} + 2^n$, мы имеем:

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant |Y_f| + B(f) \leqslant n2^{n-1} + 2^n + 2^n - 1 = n2^{n-1} + 2^{n+1} - 1.$$

Нижняя оценка. Пусть Φ_n — минимальная формула, реализующая функцию τ_n, $\widehat{T}_n$ — соответствующее ей дерево. По следствию 2 из леммы 2.3.3 дерево $\widehat{T}_n$ содержит не менее $n2^{n-1} + 2^n$ черных вершин. По следствию из леммы 2.3.7 дерево $\widehat{T}_n$ содержит не менее $2^n - 1$ белых вершин. Следовательно, $L_{\tau_n}(f) \geqslant n2^{n-1} + 2^n + 2^n - 1 = n2^{n-1} + 2^{n+1} - 1$. Теорема доказана.

2.3.4. Верхняя оценка сложности произвольной функции. Определим индукцией по величине r_f величину $A(f)$, которая однозначно вычисляется по функции $f \in \mathscr{L}_2$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{L}_2$, $n \geqslant 1$. Если $r_f = 0$, то положим $A(f) = 0$. Пусть $r_f \neq 0$. Пусть $f_1, \ldots, f_s$ — такие функции из $\mathscr{L}_2(n)$, что одновременно выполняются следующие условия:

1) $s \geqslant 1$;

2) для каждого $i = 1, \ldots, s$ выполняется неравенство $|Y_{f_i}| \geqslant 1$;

3) для каждого $i = 1, \ldots, s$ найдется переменная $x_l \in X_n$, $l = l(i)$, такая, что множитель $j_2(x_l)$ содержится в каждом элементе множества Y_{f_i};

4) для любых $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ выполняется соотношение $|Y_{f_i}| \cap |Y_{f_j}| = \varnothing$;

5) $f(x_1, \ldots, x_n) = \eta_f(x_1, \ldots, x_n) + f_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + f_s(x_1, \ldots, x_n)$.

Обозначим через $\widetilde{f}_i$ функцию, которая получается из канонического представления функции f_i вынесением за скобки множителя $j_2(x_l)$, $l = l(i)$. Тогда выполняются соотношения $f_i = \widetilde{f}_i j_2(x_l)$ и $l \notin R_{\widetilde{f}_i}$. Напомним, что через R_f мы обозначаем множество натуральных чисел i, таких, что хотя бы одна компонента функции f содержит множитель $j_2(x_i)$. Так как $l \notin R_{\widetilde{f}_i}$, то $r_{\widetilde{f}_i} < r_f$, $i = 1, \ldots, s$.

Замечание 1. Очевидно, что $\widetilde{f}_i \neq 0$.

Замечание 2. Из условий 4 и 5 следует, что $|Y_f| = |Y_{\eta_f}| + |Y_{f_1}| + \ldots$ $\ldots + |Y_{f_s}|$. С учетом очевидных равенств $|Y_{f_i}| = |Y_{\widetilde{f}_i}|$, $i = 1, \ldots, s$, выполняется также равенство $|Y_f| = |Y_{\eta_f}| + |Y_{\widetilde{f}_1}| + \ldots + |Y_{\widetilde{f}_s}|$.

Положим $D = \{f_1, \ldots, f_s\}$. Обозначим через $\mathscr{X}_f$ множество всех множеств D, удовлетворяющих условиям 1–5. В силу конечности числа функций из $P_{3,2}$, существенно, зависящих не более чем от n переменных, множество $\mathscr{X}_f$ конечно. Очевидно, что оно непусто. Пусть $\mathscr{X}_f = \{D_1, \ldots, D_t\}$, $t \geqslant 1$. Для каждого $i = 1, \ldots, t$ рассмотрим множество $D_i = \{f_{1i}, \ldots, f_{si}\}$, $s = s(i)$. Положим $A^i(f) = (1 + A(\widetilde{f}_{1i})) + \ldots + (1 + A(\widetilde{f}_{si})) = s + A(\widetilde{f}_1) + \ldots + A(\widetilde{f}_s)$, где $s = s(i)$. Положим $A(f) = \min A^i(f)$, где минимум берется по всем $i = 1, \ldots, t$.

Отметим связь между величинами $A(f)$ и $B(f)$. Пусть $f \in \mathscr{L}_2$. Если $r_f = 0$, то из определений величин $A(f)$ и $B(f)$ вытекает равенство $A(f) = B(f) = 0$. Пусть $r_f \neq 0$. По определению величины $B(f)$ выполняется соотношение

$$B(f) = 1 + B(f_1) + B(g),$$

где f_1, g — функции из $\mathscr{L}_2$, такие, что

$$f = j_2(x_{d(\mathscr{I}(f))}) f_1 + g,$$

причем $d(\mathscr{I}) \notin R_{f_1}$, $d(\mathscr{I}) \notin R_g$. Аналогично выполняется соотношение

$$B(g) = 1 + B(f_2) + B(h),$$

где f_2, h — функции из $\mathscr{L}_2$, такие, что

$$g = j_2(x_{d(\mathscr{I}(g))}) f_2 + h,$$

причем $d(\mathscr{I}) \notin R_{f_2}$, $d(\mathscr{I}) \notin R_h$. Следовательно,

$$B(f) = 2 + B(f_1) + B(f_2) + B(h)$$

и т.д. Продолжая таким образом выносить за скобку наиболее часто встречающийся множитель, пока это возможно, мы получим представление функции f в виде

$$f = j_2(x_{i_1}) f_1 + \ldots + j_2(x_{i_l}) f_l + \eta_f,$$

где $l\geqslant 1$, $i_1,\ldots,i_l\in X_n$. При этом выполняется равенство

$$B(f)=l+B(f_1)+B(f_2)+\ldots+B(f_l).$$

Очевидно, что множество функций $\{j_2(x_{i_1})f_1,\ldots,j_2(x_{i_l})f_l\}$ удовлетворяет условиям 1–5 из определения множества $\mathscr{X}_f$. Следовательно,

$$\{j_2(x_{i_1})f_1,\ldots,j_2(x_{i_l})f_l\}\in\mathscr{X}_f.$$

Тогда минимум в определении величины $A(f)$ не может быть больше $B(f)$. Итак, для любой функции $f\in\mathscr{L}_2$ выполняется неравенство $A(f)\leqslant B(f)$.

Так как представлению функции $f\in\mathscr{L}_2$ в виде $f=j_2(x_{d(\mathscr{I})})f_1+f_2$ из определения величины $B(f)$ соответствует один из элементов множества $\mathscr{X}_f$ в определении величины $A(f)$, то для любой функции $f\in\mathscr{L}_2$, такой, что $r_f\neq 0$, справедливо неравенство $A(f)\leqslant B(f)$.

Из определения $A(f)$ следует, что для любой функции f, такой, что $K_f=\varnothing$, справедливо равенство $A(f)=0$, так как для таких функций $r_f=0$. В частности, справедливы равенства

$$A(0)=0,\quad A(1)=0,\quad A(j_1(x_1))=0,\quad A(1+j_1(x_1))=0,\quad A(1+j_1(x_1)+j_1(x_2))=0.$$

Вычислим значение $A(f)$ для некоторых функций $f(x_1)$, существенно зависящих не более чем от одной переменной. Рассмотрим каноническое представление функции f. Если $f(x_1)=1+j_1(x_1)+j_2(x_1)$, то $\mathscr{I}(f)=\{(1)\}$ (т. е. множество $\mathscr{I}(f)$ состоит из одного набора длины 1, единственная компонента которого равна 1). Тогда множество $\mathscr{X}_f$ состоит из единственного элемента $D_1=\{j_2(x_1)\}$, так как D_1 — единственное множество, удовлетворяющее условиям 1–5. Вынося за скобку множитель $j_2(x_1)$, мы получаем представление функции f в виде $f(x_1)=j_2(x_1)\cdot 1+(1+j_1(x_1))$. Так как выполняются равенства $A(1)=$ $=A(1+j_1(x_1))=0$, то $A(1+j_1(x_1)+j_2(x_1))=1+A(1)+A(1+j_1(x_1))=1$. Аналогичным образом можно убедиться, что

$$A(j_2(x_1))=1,\quad A(1+j_2(x_1))=1,\quad A(j_1(x_1)+j_2(x_1))=1.$$

Лемма 2.3.11. *Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная функция из $\mathscr{L}_2(1)$, причем $f\neq 0$ и $f\neq j_1(x_i)$. Тогда*

$$L_{\mathfrak{C}}(f)\leqslant|Y_f|+A(f).$$

Доказательство. Проверим, что $L_{\mathfrak{C}}(f)\leqslant|Y_f|+A(f)$.

Если $\widetilde{f}_j=j_2(x_i)$, то $A(\widetilde{f}_j)=1$, $|Y_{\widetilde{f}_j}|=1$ и формула $\mu(1(x_1),x_i)$ реализует функцию $\widetilde{f}_j$ со сложностью 2. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(\widetilde{f}_j)\leqslant A(\widetilde{f}_j)+|Y_{\widetilde{f}_j}|$. Если $\widetilde{f}_j=j_1(x_i)+j_2(x_i)$, то $A(\widetilde{f}_j)=1$, $|Y_{\widetilde{f}_j}|=2$ и формула $\lambda(x_i,\mu(1(x_1),x_i))$ реализует функцию $\widetilde{f}_j$ со сложностью 3. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(\widetilde{f}_j)\leqslant A(\widetilde{f}_j)+|Y_{\widetilde{f}_j}|$.

Если $\widetilde{f}_j=1$, то $A(\widetilde{f}_j)=0$, $|Y_{\widetilde{f}_j}|=1$ и формула $1(x_1)$ реализует функцию $\widetilde{f}_j$ со сложностью 1. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(\widetilde{f}_j)\leqslant A(\widetilde{f}_j)+|Y_{\widetilde{f}_j}|$. Если $\widetilde{f}_j=1+j_1(x_i)$, то $A(\widetilde{f}_j)=0$, $|Y_{\widetilde{f}_j}|=2$ и формула $\lambda(1(x_i),x_i)$ реализует функцию $\widetilde{f}_j$ со сложностью 2. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(\widetilde{f}_j)\leqslant A(\widetilde{f}_j)+|Y_{\widetilde{f}_j}|$. Если $\widetilde{f}_j=1+j_2(x_i)$, то $A(\widetilde{f}_j)=1$, $|Y_{\widetilde{f}_j}|=2$ и формула $\lambda(1(x_1),\mu(1(x_1),x_i))$ реализует функцию $\widetilde{f}_j$ со сложностью 3. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(\widetilde{f}_j)\leqslant A(\widetilde{f}_j)+|Y_{\widetilde{f}_j}|$. Если $\widetilde{f}_j=1+j_1(x_i)+j_2(x_i)$, то $A(\widetilde{f}_j)=1$, $|Y_{\widetilde{f}_j}|=3$ и формула $\lambda(\lambda(1,x_i),\mu(1(x_1),x_i))$ реализует функцию $\widetilde{f}_j$ со сложностью 4. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(\widetilde{f}_j)\leqslant A(\widetilde{f}_j)+|Y_{\widetilde{f}_j}|$. Лемма доказана.

Лемма 2.3.12. *Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — функция из класса $\mathscr{L}_2$, существенно зависящая не менее чем от двух переменных. Тогда*

$$L_{\mathfrak{C}}(f)\leqslant|Y_f|+A(f).$$

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по величине r_f. Пусть $r_f=0$. Тогда $K_f=\varnothing$. По определению $A(f)=0$. Очевидно, что $L_{\mathfrak{C}}(f)=|Y_f|$ и утверждение леммы выполняется.

Пусть для любой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ из $\mathscr{L}_2$, такой, что $r_f\leqslant m$, и существенно зависящей не менее чем от двух переменных, выполняется неравенство $L_{\mathfrak{C}}(f)\leqslant|Y_f|+A(f)$, $m\geqslant 0$. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — функция из $\mathscr{L}_2$, существенно зависящая не менее чем от двух переменных, такая, что $r_f=m+1$. Пусть $\mathscr{X}_f=\{D_1,\ldots,D_t\}$, $t\geqslant 1$. Рассмотрим множество $D_i=\{f_1,\ldots,f_s\}$ из множества $\mathscr{X}_f$, на котором достигается величина $A(f)$ (если таких множеств несколько, то выберем любое из них). Тогда

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\eta_f(x_1,\ldots,x_n)+f_1(x_1,\ldots,x_n)+\ldots+f_s(x_1,\ldots,x_n),$$

где $s\geqslant 1$, $f_i(x_1,\ldots,x_n)=j_2(x_{j_i})\widetilde{f}_i(x_1,\ldots,x_n)$, $\widetilde{f}_i\in\mathscr{L}_2(n)$, $j_i\notin r_{\widetilde{f}_i}$. Следовательно,

$$L_{\mathfrak{C}}(f)\leqslant L_{\mathfrak{C}}(\eta_f)+L_{\mathfrak{C}}(f_1)+\ldots+L_{\mathfrak{C}}(f_s).$$

Среди функций $\widetilde{f}_1,\ldots,\widetilde{f}_s$, могут оказаться функции, существенно зависящие не более чем от одной переменной. Без ограничения общности будем считать, что это функции $\widetilde{f}_1,\ldots,\widetilde{f}_p$, $0\leqslant p\leqslant s$. Так как $r_{\widetilde{f}_i}<r_f$, $i=1,\ldots,s$, то при $i>p$ к функциям $\widetilde{f}_i$ можно применить предположение индукции. Поэтому

$$L_{\mathfrak{C}}(\widetilde{f}_i)\leqslant|Y_{\widetilde{f}_i}|+A(\widetilde{f}_i),\quad i=p+1,\ldots,s. \tag{2.6}$$

Из определения величины $A(f)$ следует, что $\widetilde{f}_1\neq 0,\ldots,\widetilde{f}_p\neq 0$. Среди функций $\widetilde{f}_1,\ldots,\widetilde{f}_p$ могут оказаться функции вида $j_1(y)$, $y\in X_n$. Без ограничения общности будем считать, что это функции $\widetilde{f}_1,\ldots,\widetilde{f}_q$, $0\leqslant q\leqslant p$. Тогда при всех $i=1,\ldots,p$ выполняется равенство $f_i=j_1(y_i)j_2(x_{l_i})$, где $x_{l_i}\in X_n\setminus\{y_i\}$. Функция $f_i=j_1(y_i)j_2(x_{l_i})$ может быть реализована формулой $\mu(y_i,x_{l_i})$ со сложностью 2. Очевидно, что функция, существенно зависящая от двух переменных, не может быть реализована формулой со сложностью 0 или 1. Поэтому выполняются равенства

$$L_{\mathfrak{C}}(f_i)=2,\quad i=1,\ldots,q. \tag{2.7}$$

Из леммы 2.3.11 следует, что имеют место неравенства

$$L_{\mathfrak{C}}(\widetilde{f}_i)\leqslant A(\widetilde{f}_i)+|Y_{\widetilde{f}_i}|,\quad i=q+1,\ldots,p. \tag{2.8}$$

Рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть $\eta_f=0$. Тогда $f=f_1+\ldots+f_s$. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(f)\leqslant L_{\mathfrak{C}}(f_1)+\ldots+L_{\mathfrak{C}}(f_s)$. Тогда

$$L_{\mathfrak{C}}(f)\leqslant L_{\mathfrak{C}}(f_1)+\ldots+L_{\mathfrak{C}}(f_s)=$$
$$=(L_{\mathfrak{C}}(f_1)+\ldots+L_{\mathfrak{C}}(f_q))+(L_{\mathfrak{C}}(f_{q+1})+\ldots+L_{\mathfrak{C}}(f_p))+(L_{\mathfrak{C}}(f_{p+1})+\ldots+L_{\mathfrak{C}}(f_s)).$$

Тогда, с учетом (2.6)–(2.8), справедливы соотношения

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant \underbrace{2+\ldots+2}_{q\ \text{раз}} + ((1+|Y_{\widetilde{f}_{q+1}}| + A(\widetilde{f}_{q+1})) + \ldots + (1+|Y_{\widetilde{f}_p}| + A(\widetilde{f}_p))) +$$
$$+((1+|Y_{\widetilde{f}_{p+1}}| + A(\widetilde{f}_{p+1})) + \ldots + (1+|Y_{\widetilde{f}_s}| + A(\widetilde{f}_s))) =$$
$$= 2q + (s-q) + (|Y_{\widetilde{f}_{q+1}}| + A(\widetilde{f}_{q+1})) + \ldots + (|Y_{\widetilde{f}_s}| + A(\widetilde{f}_s)) =$$
$$= (q + |Y_{\widetilde{f}_{q+1}}| + \ldots + |Y_{\widetilde{f}_s}|) + (s + A(\widetilde{f}_{q+1}) + \ldots + A(\widetilde{f}_s)).$$

Так как $|Y_{\widetilde{f}_1}| = \ldots = |Y_{\widetilde{f}_q}| = 1$, то $q + |Y_{\widetilde{f}_{q+1}}| + \ldots + |Y_{\widetilde{f}_s}| = |Y_{\widetilde{f}_1}| + \ldots + |Y_{\widetilde{f}_s}|$. Из замечания 2 к определению величины $A(f)$ следует, что $|Y_f| = |Y_{\widetilde{f}_1}| + \ldots + |Y_{\widetilde{f}_s}|$. Поэтому $q + |Y_{\widetilde{f}_{q+1}}| + \ldots + |Y_{\widetilde{f}_s}| = |Y_f|$. Поскольку $A(\widetilde{f}_1) = \ldots = A(\widetilde{f}_q) = 0$, то $s + A(\widetilde{f}_{q+1}) + \ldots + A(\widetilde{f}_s) = s + A(\widetilde{f}_1) + \ldots + A(\widetilde{f}_s)$. По определению величины $A(f)$ выполняется равенство $s + A(\widetilde{f}_1) + \ldots + A(\widetilde{f}_s) = A(f)$. Следовательно, $s + A(\widetilde{f}_{q+1}) + \ldots + A(\widetilde{f}_s) = A(f)$. Значит,

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant |Y_f| + A(f),$$

что завершает доказательство леммы в случае 1.

Случай 2. Пусть $\eta_f = j_1(x_i)$. Тогда $f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda(x_i, f_1 + \ldots + f_s)$. Следовательно, $L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 1 + L_{\mathfrak{C}}(f_1) + \ldots + L_{\mathfrak{C}}(f_s)$. Тогда

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 1 + L_{\mathfrak{C}}(f_1) + \ldots + L_{\mathfrak{C}}(f_s) =$$
$$= 1 + (L_{\mathfrak{C}}(f_1) + \ldots + L_{\mathfrak{C}}(f_q)) + (L_{\mathfrak{C}}(f_{q+1}) + \ldots + L_{\mathfrak{C}}(f_p)) + (L_{\mathfrak{C}}(f_{p+1}) + \ldots + L_{\mathfrak{C}}(f_s)).$$

Тогда, с учетом (2.6)–(2.8), мы имеем:

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant 1 + \underbrace{2+\ldots+2}_{q\ \text{раз}} + ((1+|Y_{\widetilde{f}_{q+1}}| + A(\widetilde{f}_{q+1})) + \ldots + (1+|Y_{\widetilde{f}_p}| + A(\widetilde{f}_p))) +$$
$$+((1+|Y_{\widetilde{f}_{p+1}}| + A(\widetilde{f}_{p+1})) + \ldots + (1+|Y_{\widetilde{f}_s}| + A(\widetilde{f}_s))) =$$
$$= 1 + 2q + (s-q) + (|Y_{\widetilde{f}_{q+1}}| + A(\widetilde{f}_{q+1})) + \ldots + (|Y_{\widetilde{f}_s}| + A(\widetilde{f}_s)) =$$
$$= (1 + q + |Y_{\widetilde{f}_{q+1}}| + \ldots + |Y_{\widetilde{f}_s}|) + (s + A(\widetilde{f}_{q+1}) + \ldots + A(\widetilde{f}_s)).$$

Так как $|Y_{\widetilde{f}_1}| = \ldots = |Y_{\widetilde{f}_q}| = 1$, то $q + |Y_{\widetilde{f}_{q+1}}| + \ldots + |Y_{\widetilde{f}_s}| = |Y_{\widetilde{f}_1}| + \ldots + |Y_{\widetilde{f}_s}|$. Из замечания 2 к определению величины $A(f)$ следует, что $|Y_f| = |Y_{\eta_f}| + |Y_{\widetilde{f}_1}| + \ldots + |Y_{\widetilde{f}_s}|$. Поэтому $1 + q + |Y_{\widetilde{f}_{q+1}}| + \ldots + |Y_{\widetilde{f}_s}| = |Y_f|$. Поскольку $A(\widetilde{f}_1) = \ldots = A(\widetilde{f}_q) = 0$, то $s + A(\widetilde{f}_{q+1}) + \ldots + A(\widetilde{f}_s) = s + A(\widetilde{f}_1) + \ldots + A(\widetilde{f}_s)$. По определению величины $A(f)$ выполняется равенство $s + A(\widetilde{f}_1) + \ldots + A(\widetilde{f}_s) = A(f)$. Следовательно, $s + A(\widetilde{f}_{q+1}) + \ldots + A(\widetilde{f}_s) = A(f)$. Значит,

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant |Y_f| + A(f),$$

что завершает доказательство леммы в случае 2.

Случай 3. Пусть $\eta_f \neq 0$, $\eta_f \neq j_1(x_i)$. Тогда $L_{\mathfrak{C}}(\eta_f) = |Y_{\eta_f}|$. Из равенства $f(x_1, \ldots, x_n) = \eta_f + f_1 + \ldots + f_s$ следует, что

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant L_{\mathfrak{C}}(\eta_f) + L_{\mathfrak{C}}(f_1) + \ldots + L_{\mathfrak{C}}(f_s).$$

Тогда

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant L_{\mathfrak{C}}(\eta_f) + L_{\mathfrak{C}}(f_1) + \ldots + L_{\mathfrak{C}}(f_s) = L_{\mathfrak{C}}(\eta_f) + (L_{\mathfrak{C}}(f_1) + \ldots + L_{\mathfrak{C}}(f_q)) + \\ + (L_{\mathfrak{C}}(f_{q+1}) + \ldots + L_{\mathfrak{C}}(f_p)) + (L_{\mathfrak{C}}(f_{p+1}) + \ldots + L_{\mathfrak{C}}(f_s)).$$

Тогда, с учетом (2.6)–(2.8), мы получаем:

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant L_{\mathfrak{C}}(\eta_f) + \underbrace{2 + \ldots + 2}_{q \text{ раз}} + ((1 + |Y_{\widetilde{f}_{q+1}}| + A(\widetilde{f}_{q+1})) + \ldots + (1 + |Y_{\widetilde{f}_p}| + A(\widetilde{f}_p))) +$$

$$+((1 + |Y_{\widetilde{f}_{p+1}}| + A(\widetilde{f}_{p+1})) + \ldots + (1 + |Y_{\widetilde{f}_s}| + A(\widetilde{f}_s))) =$$
$$= |Y_{\eta_f}| + 2q + (s - q) + (|Y_{\widetilde{f}_{q+1}}| + A(\widetilde{f}_{q+1})) + \ldots + (|Y_{\widetilde{f}_s}| + A(\widetilde{f}_s)) =$$
$$= (|Y_{\eta_f}| + q + |Y_{\widetilde{f}_{q+1}}| + \ldots + |Y_{\widetilde{f}_s}|) + (s + A(\widetilde{f}_{q+1}) + \ldots + A(\widetilde{f}_s)).$$

Так как $|Y_{\widetilde{f}_1}| = \ldots = |Y_{\widetilde{f}_q}| = 1$, то $q + |Y_{\widetilde{f}_{q+1}}| + \ldots + |Y_{\widetilde{f}_s}| = |Y_{\widetilde{f}_1}| + \ldots + |Y_{\widetilde{f}_s}|$. Из замечания 2 к определению величины $A(f)$ следует, что $|Y_f| = |Y_{\eta_f}| + +|Y_{\widetilde{f}_1}| + \ldots + |Y_{\widetilde{f}_s}|$. Поэтому $|Y_{\eta_f}| + q + |Y_{\widetilde{f}_{q+1}}| + \ldots + |Y_{\widetilde{f}_s}| = |Y_f|$. Поскольку $A(\widetilde{f}_1) = = \ldots = A(\widetilde{f}_q) = 0$, то $s + A(\widetilde{f}_{q+1}) + \ldots + A(\widetilde{f}_s) = s + A(\widetilde{f}_1) + \ldots + A(\widetilde{f}_s)$. По определению величины $A(f)$ выполняется равенство $s + A(\widetilde{f}_1) + \ldots + A(\widetilde{f}_s) = A(f)$. Следовательно, $s + A(\widetilde{f}_{q+1}) + \ldots + A(\widetilde{f}_s) = A(f)$. Значит,

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant |Y_f| + A(f),$$

что завершает доказательство леммы в случае 3. Лемма доказана.

2.3.5. Нижняя оценка сложности произвольной функции. Для произвольной функции $f \in \mathscr{L}_2$ докажем нижнюю оценку сложности ее реализации над базисом $\mathfrak{C}$.

Лемма 2.3.13. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из класса $\mathscr{L}_2$. Тогда*

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \geqslant |Y_f| + A(f).$$

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{L}_2$. Доказательство будем вести индукцией по величине r_f. Пусть $r_f = 0$. Тогда $K_f = \varnothing$. По определению $A(f) = 0$. Очевидно, что $L_{\mathfrak{C}}(f) \geqslant |Y_f|$. Следовательно, утверждение леммы выполняется.

Пусть для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathscr{L}_2$, такой, что $r_f \leqslant m$, выполняется неравенство $L_{\mathfrak{C}}(f) \geqslant |Y_f| + A(f)$, $m \geqslant 0$. Пусть теперь $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из $\mathscr{L}_2$, такая, что $r_f = m + 1$. Пусть Φ — минимальная нормальная формула, реализующая функцию f, $\widehat{T}$ — соответствующее ей дерево, v_* — вершина дерева $\widehat{T}$, смежная с корневой, а e — ребро, выходящее из вершины v_*.

Напомним определение множества $V_1(\Phi)$. Пусть v — произвольная вершина дерева $\widehat{T}$, которой приписан символ μ. Вершина v принадлежит множеству $V_1 = V_1(\Phi)$, если цепь дерева $\widehat{T}$, соединяющая вершину v с вершиной v_*, содержит ровно одну вершину, которой приписан символ μ (а именно вершину v).

Пусть $V_1(\widehat{T}) = \{v_1, \ldots, v_q\}$, $q \geqslant 0$. Если $q = 0$, то формула Φ реализует функцию f, не имеющую ни одной компоненты, то есть $K_f = 0$. Тогда $r_f = 0$.

Из определения величины $A(f)$ следует, что $A(f)=0$. Тогда утверждение леммы очевидно.

Пусть $q\geqslant 1$. Вершине v_l соответствует подформула вида $\mu(\Sigma_l, y_l)$, где Σ_l — формула над $\mathfrak{C}$, $y_l\in X_n$, $l=1,\ldots,q$. Из леммы 2.3.6 следует, что существует формула

$$\Omega=\lambda(\Sigma_0,\lambda(\mu(\Sigma_1,y_1),\lambda(\mu(\Sigma_2,y_2),\ldots,\lambda(\mu(\Sigma_{q-1},y_{q-1}),\mu(\Sigma_q,y_q))))),$$

реализующая функцию f, где формула Σ_0 реализует функцию η_f и $L(\Omega)=$ $=L(\Phi)$. Будем без ограничения общности считать, что $\Phi=\Omega$. Справедливо очевидное неравенство $L(\Sigma_0)\geqslant|J_f|+|H_f|$.

Пусть формула Σ_l реализует функцию g_l, $l=1,\ldots,q$. По лемме 2.3.4 формула Σ_l не может содержать подформул вида $\mu(\Omega,y_l)$, где Ω — формула над $\mathfrak{C}$. Следовательно, $y_l\notin R_{g_l}$ (напомним, что через R_f мы обозначаем множество натуральных чисел i, таких, что хотя бы одна копмонента функции f содержит множитель $j_2(x_i)$.) Но тогда $r_{g_l}<r_f$ для всех $l=1,\ldots,q$. Следовательно, к функциям g_l можно применить предположение индукции. Поэтому $L(\Sigma_l)\geqslant|Y_{g_l}|+A(g_l)$, $l=1,\ldots,q$.

Пусть κ — произвольная компонента функции f. Тогда среди функций $\mu(\Sigma_l,y_l)$, $l=1,\ldots,q$ найдется хотя бы одна функция, имеющая компоненту κ. Тогда выполняется неравенство $|J_f|+|H_f|+|Y_{\mu(g_1,y_1)}|+\ldots+|Y_{\mu(g_q,y_q)}|\geqslant|Y_f|$. Так как $|Y_{\mu(g_l,y_l)}|=|Y_{g_l}|$, $l=1,\ldots,q$, то $|J_f|+|H_f|+|Y_{g_1}|+\ldots+|Y_{g_q}|\geqslant|Y_f|$.

Покажем, что для любых $i,j\in\{1,\ldots,q\}$, $i\neq j$ выполняется соотношение $Y_{\mu(g_i,y_i)}\cap Y_{\mu(g_j,y_j)}=\varnothing$. Пусть, от противного, существуют $i,j\in\{1,\ldots,q\}$, $i\neq j$, такие, что множество $Y_{\mu(g_i,y_i)}\cap Y_{\mu(g_j,y_j)}$ содержит, по крайней мере, один моном (обозначим его κ). Обозначим через e_1 и e_2 ребра дерева $\widehat{T}$, выходящие из вершин, которым соответствуют подформулы $\mu(g_i,y_i)$ и $\mu(g_j,y_j)$ соответственно. Так как $\kappa\in Y_{\mu(g_i,y_i)}$, то по лемме 2.3.3 в подформуле, соответствующей функции $\mu(g_i,y_i)$, найдется, по крайней мере, одна висячая черная вершина w_1, такая, что ребру e_1 на соответствующем шаге процедуры $\mathscr{P}$ для формулы $\mu(g_i,y_i)$ приписывается функция κ. Аналогично, в подформуле, соответствующей функции $\mu(g_j,y_j)$, найдется по крайней мере одна висячая черная вершина w_2, такая, что ребру e_2 на соответствующем шаге процедуры $\mathscr{P}$ для формулы $\mu(g_j,y_j)$ приписывается функция κ. Так как формула Φ имеет вид $\Sigma_0+\mu(\Sigma_1,y_1)+\ldots+\mu(\Sigma_q,y_q)$, то на шагах процедуры $\mathscr{P}$ для формулы Φ, соответствующих вершинам w_1 и w_2, ребру e будет приписана функция κ. Это противоречит утверждению леммы 2.3.5. Следовательно, для любых $i,j\in\{1,\ldots,q\}$, $i\neq j$ выполняется соотношение $Y_{\mu(g_i,y_i)}\cap Y_{\mu(g_j,y_j)}=\varnothing$.

Значит, множество функций $\{\mu(g_1,y_1),\ldots,\mu(g_q,y_q)\}$ удовлетворяет условиям 1–5 из определения величины $A(f)$. Следовательно, $\{\mu(g_1,y_1),\ldots,\mu(g_q,y_q)\}\in\mathscr{X}_f$. Тогда $q+A(g_1)+\ldots+A(g_q)\geqslant A(f)$.

Таким образом, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$L(\Phi)=L(\Sigma_0)+(1+L(\Sigma_1))+\ldots+(1+L(\Sigma_q))\geqslant|J_f|+|H_f|+(1+|Y_{g_1}|+A(g_1))+\ldots$$
$$\ldots+(1+|Y_{g_q}|+A(g_q))=(|J_f|+|H_f|+|Y_{g_1}|+\ldots+|Y_{g_q}|)+(q+A(g_1)+\ldots+A(g_q))\geqslant$$
$$\geqslant|Y_f|+(q+A(g_1)+\ldots+A(g_q))\geqslant|Y_f|+A(f).$$

Лемма доказана.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.3.2. *Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная функция из класса $\mathscr{L}_2$, существенно зависящая от n переменных, $n\geqslant 2$. Тогда*

$$L_{\mathfrak{C}}(f)=|Y_f|+A(f).$$

Верхняя оценка вытекает из леммы 2.3.12. Справедливость нижней оценки следует из леммы 2.3.13.

§ 3. Сложность функций из максимальных классов

В этом параграфе изучается задача о сложности реализации формулами функций из максимальных замкнутых классов. Напомним, что ранее для каждого замкнутого класса булевых функций B было определено множество функций

$$pr^{-1}B = \{f \in P_{3,2} | prf \in B\}.$$

Легко видеть, что множество $pr^{-1}B$ является замкнутым классом. Кроме того, для любого замкнутого класса $F \subseteq P_{3,2}$, такого, что $prF = B$, выполняется соотношение $F \subseteq pr^{-1}B$. Класс $pr^{-1}B$ называется максимальным замкнутым классом. Таким образом, каждому замкнутому классу булевых функций соответствует один максимальный класс в $P_{3,2}$.

Известно [95], что максимальный класс $pr^{-1}B$ является конечно-порожденным тогда и только тогда, когда $B \notin \{C, C_0, C_1\}$.

Кратко опишем схему доказательства основного результата данного параграфа, сформулированного в разделе 3.3. Пусть B — замкнутый класс булевых функций, такой, что $B \notin \{C, C_0, C_1\}$, а $pr^{-1}B$ — соответствующий ему максимальный класс функций из $P_{3,2}$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in pr^{-1}B$, $n \geqslant 3$. Строится представление функции f в виде суперпозиции двух функций h_f и $q(x_1, \ldots, x_n)k(x_1) \ldots k(x_n)$, первая из которых принадлежит множеству $\mathscr{H}_n \subseteq pr^{-1}U_{01}$, а вторая совпадает с f на множестве наборов из E_2^n и равна нулю на наборах из множества $E_3^n \setminus E_2^n$. Раздел 3.1 содержит вспомогательные построения, а именно, в нем строится специальное представление функций из множества $\mathscr{H}_n$. В разделе 3.2 вычисляются верхние оценки сложности реализации функций из множества $\mathscr{H}_n$ над некоторым базисом класса $pr^{-1}U_{01}$ на основе данного представления. Отсюда, в частности, следует, верхняя оценка для сложности реализации функции h_f. Затем вводится базис $G = G(B)$ класса $pr^{-1}B$, доказывается верхняя оценка для $L_G(f)$ и доказывается верхняя асимптотическая оценка для $L_G(pr^{-1}B(n))$. Доказательства нижних мощностных оценок функций Шеннона приводятся в разделе 3.3. Также в этом разделе формулируется основная теорема, являющаяся следствием из результатов разделов 3.2 и 3.3. В разделе 3.4 в качестве следствия из основного результата и известных ранее оценок для сложности реализации булевых функций устанавливаются некоторые асимптотически точные оценки.

3.1. Представление функций из максимальных классов. Настоящий раздел устроен следующим образом. Сначала строится специальное разбиение множества E_3^r, $r \geqslant 3$. Затем оценивается мощность этого разбиения. Далее строится специальное представление функций из множества $\mathscr{H}_n$, опирающееся на построенное разбиение множества E_3^r. После этого оценивается сложность реализации функций из множества $\mathscr{H}_n$ на основе данного представления. Используя полученные результаты, доказывается верхняя оценка для функции Шеннона для всех конечно-порожденных максимальных классов.

3.1.1. Специальное разбиение множества E_3^r. Сначала для любого $r \geqslant 3$ построим разбиение множества E_3^r на подмножества определенного вида. Положим

$$W_i = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in E_3^r | \text{ среди } \alpha_1, \ldots, \alpha_r \text{ ровно } i \text{ двоек}\}, \quad i = 0, \ldots, r. \quad (3.1)$$

Очевидно, что выполняются соотношения

$$|W_i| = C_r^i \cdot 2^{r-i}, \quad i = 0, \ldots, r; \tag{3.2}$$

$$W_i \cap W_j = \varnothing \text{ при всех } i, j = 0, \ldots, r,\ i \neq j; \tag{3.3}$$

$$E_3^r = \bigcup_{i=0}^{r} W_i. \tag{3.4}$$

Для всех $i = 3, \ldots, r$ рассмотрим множества W_i и W_{i-1}. Пусть

$$W_i = \{\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^{N_i}\}, \quad W_{i-1} = \{\widetilde{\beta}^1, \ldots, \widetilde{\beta}^{M_i}\},$$

где

$$N_i = |W_i| = C_r^i \cdot 2^{r-i}, \qquad M_i = |W_{i-1}| = C_r^{i-1} \cdot 2^{r-i+1}.$$

Обозначим через Z_l шар радиуса 1 с центром в наборе $\widetilde{\beta}^l$, $l = 1, \ldots, M_i$. Любой шар Z_l, $l = 1, \ldots, M_i$, содержит $r-i+1$ наборов из множества W_i.

Построим разбиение множества W_i на непересекающиеся подмножества, каждое из которых является подмножеством одного из шаров Z_l, $l = 1, \ldots, M_i$. Для построения будем использовать метод из работы [7]. Рассмотрим прямоугольную таблицу размера $N_i \times M_i$, в которой по строкам расположены наборы $\{\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^{N_i}\}$, а по столбцам — шары $Z_1, \ldots, Z_{M_i}$. В данной таблице на пересечении k-й строки и l-го столбца поставим цифру 1 в том и только том случае, если набор $\widetilde{\alpha}^k$ принадлежит шару Z_l, $1 \leqslant k \leqslant N_i$, $1 \leqslant l \leqslant M_i$. Легко видеть, что в каждой строке этой таблицы стоит ровно $2i$ единиц, а в каждом столбце — ровно $r-i+1$ единица.

Выберем некоторое количество столбцов таблицы так, чтобы каждая строка в этой подтаблице содержала по крайней мере одну единицу, т. е. чтобы выбранные шары (столбцы) покрывали все наборы (строки). На каждом шаге будем выбирать один очередной столбец так, чтобы выбираемый столбец покрывал наибольшее число еще не покрытых строк. Обозначим через V_{im} множество наборов из W_i, которые лежат в выбираемом на m-м шаге шаре, $m \geqslant 1$. Обозначим через a_m число непокрытых строк после m шагов, $m \geqslant 1$, $a_0 = N_i$. Так как каждая непокрытая строка содержит $2i$ единиц, то после m-го шага в таблице останется $2ia_m$ единиц. Тогда столбец, выбираемый на $(m+1)$-м шаге, будет содержать не менее $\dfrac{2ia_m}{M_i}$ единиц. Следовательно,

$$a_{m+1} \leqslant a_m - \frac{2ia_m}{M_i}, \tag{3.5}$$

или

$$a_{m+1} \leqslant a_m \left(1 - \frac{2i}{M_i}\right). \tag{3.6}$$

Отсюда следует, что

$$a_m \leqslant N_i \left(1 - \frac{2i}{M_i}\right)^m. \tag{3.7}$$

Пусть m — такое, что $a_m > 0$. Тогда в таблице есть непокрытые строки. Очевидно, что для каждой непокрытой строки найдется хотя бы один покрывающий ее столбец, не выбранный на первых m шагах. Тогда существует покрытие всех строк, состоящее не более чем из $m + a_m$ столбцов. При этом

$$m + a_m \leqslant m + N_i \left(1 - \frac{2i}{M_i}\right)^m \leqslant m + N_i e^{-\frac{2im}{M_i}}. \tag{3.8}$$

Положим

$$m = \left[\frac{M_i}{2i} \ln \frac{iN_i}{M_i}\right] + 1.$$

Очевидно, что

$$\frac{M_i}{2i} \ln \frac{iN_i}{M_i} \leqslant m \leqslant \frac{M_i}{2i} \ln \frac{iN_i}{M_i} + 1.$$

Тогда, с учетом (3.8), получаем, что существует покрытие всех строк, число столбцов в котором не превосходит

$$m + N_i e^{-\frac{2im}{M_i}} \leqslant \frac{M_i}{2i} \ln \frac{iN_i}{M_i} + 1 + N_i e^{-\frac{2i}{M_i}\left(\frac{M_i}{2i} \ln \frac{iN_i}{M_i}\right)} \leqslant \frac{M_i}{2i} \ln \frac{iN_i}{M_i} + 1 + N_i e^{-\ln \frac{iN_i}{M_i}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_i}{2i} \ln \frac{iN_i}{M_i} + 1 + \frac{M_i}{i} \leqslant \frac{M_i}{2i}\left(\ln \frac{iN_i}{M_i} + 2\right) + 1. \qquad (3.9)$$

Так как

$$\frac{N_i}{M_i} = \frac{r - i + 1}{2i}, \qquad (3.10)$$

то, подставляя в выражение (3.9) значения M_i и N_i, получим:

$$\frac{M_i}{2i}\left(\ln \frac{iN_i}{M_i} + 2\right) + 1 = \frac{C_r^{i-1} \cdot 2^{r-i+1}}{2i}\left(\ln \frac{(r-i+1)}{2} + 2\right) + 1 \leqslant \frac{C_r^{i-1} \cdot 2^{r-i+1}}{i} \cdot 2 \ln r. \qquad (3.11)$$

Обозначим через $q = q(i)$ минимальное натуральное число, такое, что $a_q = 0$. Таким образом,

$$W_i = \bigcup_{m=1}^{q(i)} V_{im}, \qquad (3.12)$$

где

$$q(i) \leqslant 2\frac{C_r^{i-1} \cdot 2^{r-i+1}}{i} \ln r. \qquad (3.13)$$

Положим

$$U_{i1} = V_{i1}, \quad U_{im} = V_{im} \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} V_{ik}, \quad 2 \leqslant m \leqslant q(i). \qquad (3.14)$$

Тогда

$$W_i = \bigcup_{m=1}^{q(i)} U_{im}, \quad q(i) \leqslant 2\frac{C_r^{i-1} \cdot 2^{r-i+1}}{i} \ln r, \qquad (3.15)$$

причем множества U_{ik} и U_{il} не пересекаются при $k \neq l$.

Положим

$$U_0 = W_0 \cup W_1 \cup W_2. \qquad (3.16)$$

Тогда

$$E_3^r = U_0 \cup \bigcup_{i=3}^{r} \bigcup_{m=1}^{q(i)} U_{im}. \qquad (3.17)$$

Таким образом, построено некоторое разбиение множества E_3^r на непересекающиеся подмножества.

Для удобства перейдем от нумерации множеств U_{im} двойными индексами к нумерации одинарными. Занумеруем в произвольном порядке все множества U_{im}, $i=3,\ldots,r$, $m=1,\ldots,q(i)$, числами $1,\ldots,T$, где $T = T(r) \leqslant r\cdot\max\{q(3),\ldots,q(r)\}$, и будем обозначать эти множества через $U_1,\ldots,U_T$.

3.1.2. Верхняя оценка мощности разбиения. Оценим число подмножеств разбиения, построенного в предыдущем разделе.

Лемма 3.1.1. *Для любого $r\geqslant 3$ выполняется соотношение*

$$T(r)\leqslant 2\cdot\frac{3^{r+1}}{r}\cdot\ln r.$$

Доказательство. В соответствии с (3.13) получаем, что число множеств в разбиении в правой части (3.17) не превосходит величины

$$1+\sum_{i=3}^{r}2\frac{C_r^{i-1}\cdot 2^{r-i+1}}{i}\ln r\leqslant 2\ln r\cdot\sum_{i=1}^{r+1}\frac{C_r^{i-1}\cdot 2^{r-i+1}}{i}. \tag{3.18}$$

Вычислим сумму

$$\sum_{i=1}^{r+1}\frac{C_r^{i-1}\cdot 2^{r-i+1}}{i}. \tag{3.19}$$

Легко видеть, что

$$\sum_{i=1}^{r+1}\frac{C_r^{i-1}\cdot 2^{r-i+1}}{i}=\sum_{i=1}^{r+1}\frac{r!}{(i-1)!\cdot(r-i+1)!}\cdot\frac{2^{r-i+1}}{i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{r+1}\frac{r!\cdot 2^{r-i+1}}{i!\cdot(r-i+1)!}=\frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{r+1}\frac{(r+1)!\cdot 2^{r-i+1}}{i!\cdot(r-i+1)!}=$$

$$=\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r+1}C_{r+1}^{i}\cdot 2^{r-i+1}-\frac{2^{r+1}}{r+1}=\frac{3^{r+1}-2^{r+1}}{r+1}.$$

Следовательно, с учетом (3.18), число множеств в построенном разбиении (3.17) не превосходит

$$2\cdot\frac{3^{r+1}}{r}\cdot\ln r. \tag{3.20}$$

Лемма доказана.

3.1.3. Представление функций из множества $\mathscr{H}_n$. В этом разделе для функций из множества $\mathscr{H}_n$ (см. (1.1) в § 1), $n\geqslant 1$, будет получено специальное представление, аналогичное третьему представлению булевых функций из [33]. Это представление имеет в качестве параметров натуральные числа r, k, s, такие, что $r+k+1\leqslant n$.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_{n+1})$ — произвольная функция из множества $\mathscr{H}_n$. Тогда имеет место равенство

$$f(x_1,\ldots,x_{n+1})=j_1(x_{n+1})+g(x_1,\ldots,x_n), \tag{3.21}$$

где

$$prg(x_1,\ldots,x_n)=0. \tag{3.22}$$

Аргументы функции f разобьем на четыре группы. В первую группу входят переменные $x_1, \ldots, x_r$, во вторую — переменные $x_{r+1}, \ldots, x_{r+k}$, в третью — $x_{r+k+1}, \ldots, x_n$, в четвертую — переменная x_{n+1}.

Определим функции $f^i(x_1, \ldots, x_{n+1})$, $i = 0, 1$, следующим образом. Положим

$$f^0(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = j_1(x_{n+1}) + \sum_{\widetilde{\gamma} \in C^0} K_{\widetilde{\gamma}}, \tag{3.23}$$

где

$$C^0 = \{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in E_3^n \setminus E_2^n | (\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \in U_0,\ g(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = 1\}.$$

Положим

$$f^1(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = j_1(x_{n+1}) + \sum_{\widetilde{\gamma} \in C^1} K_{\widetilde{\gamma}}, \tag{3.24}$$

где

$$C^1 = \{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in E_3^n \setminus E_2^n | (\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \notin U_0,\ g(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = 1\}.$$

Из определения следует, что

$$f^1(x_1, \ldots, x_n, f^0(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})) = f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}). \tag{3.25}$$

Далее мы построим представление для функции f^1.

Отметим, что по построению для любого множества U_l, $l = 1, \ldots, T$, найдется номер i_l, $1 \leqslant i_l \leqslant r$, такой, что для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in U_l$ выполняется равенство $\alpha_{i_l} = 2$.

Для всех $l = 1, \ldots, T$ определим функцию $\varphi_l(x_1, \ldots, x_r)$ следующим образом. Положим

$$\varphi_l(x_1, \ldots, x_r) = j_1(x_{i_l}) + \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in U_l} j_{\alpha_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_{\alpha_r}(x_r). \tag{3.26}$$

Так как по построению для любого набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in U_l$ справедливо равенство $\alpha_{i_l} = 2$, то функция φ_l равна 1 на наборах, которые входят в множество U_l. Очевидно, что если $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \notin U_l$, то $\varphi_l(\widetilde{\alpha}) = j_1(\alpha_{i_l})$.

Отметим свойство, которым обладает функция φ_l. Пусть $|U_l| = q$. Обозначим наборы из множества U_l через $(\alpha_{t1}, \ldots, \alpha_{tr})$, $1 \leqslant t \leqslant q$. По построению каждый из наборов $(\alpha_{t1}, \ldots, \alpha_{tr})$ отличается от центра шара, которому принадлежат наборы из U_l, в одной компоненте — обозначим ее номер через χ_t, — причем компонента с номером χ_t в наборе $(\alpha_{t1}, \ldots, \alpha_{tr})$ равна двойке. Представим функцию φ_l в виде

$$\varphi_l = j_1(x_{i_l}) + K_1 + \ldots + K_d,$$

где $K_t = j_{\alpha_{t1}}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_{\alpha_{tr}}(x_r)$. По построению для любых $j \in \{\chi_1, \ldots, \chi_d\}$ множитель $j_2(x_j)$ содержится ровно в одной из функций $K_1, .., K_q$. Пусть, например, множитель $j_2(x_j)$ содержит функция K_1. Так как для всех $i = 2, \ldots, q$ очевидным образом выполняется равенство $K_i \cdot j_2(x_j) = 0$, то умножение функции φ_l на $j_2(x_j)$ «выщипляет» из суммы в определении функции φ_l одно слагаемое, в котором присутствует множитель $j_2(x_j)$, а именно:

$$\varphi_l \cdot j_2(x_j) = j_1(x_{i_l}) \cdot j_2(x_j) + K_1. \tag{3.27}$$

Так как функция $j_1(x_{i_l})$ принимает значение 0 на всех наборах из множества U_l, то на наборах из множества U_l значения функции $\varphi_l j_2(x_j)$ совпадают со значениями функции K_1.

Для каждого набора $\widetilde{\sigma}=(\sigma_{r+k+1},\ldots,\sigma_n)\in E_3^{n-r-k}$ определим функции

$$f_{l,\widetilde{\sigma}}(x_1,\ldots,x_{r+k})= \\ =j_1(x_{i_l})+\varphi_l(x_1,\ldots,x_r)f^1(x_1,\ldots,x_{r+k},\sigma_{r+k+1},\ldots,\sigma_n,2)j_2(x_{i_l}).$$

Положим

$$R_l=\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r+k})\in E_3^{r+k}|(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in U_l\}.$$

Значения функции $f_{l,\widetilde{\sigma}}$ на наборах из множества R_l могут быть однозначно заданы таблицей M, в которой по строкам расположены все наборы $(\sigma_{r+1},\ldots,\sigma_{r+k})$ из E_3^k, а по столбцам — все наборы из U_l. Припишем наборам, расположенным по столбцам таблицы, номера $1,2,\ldots,q$, $q\leqslant r$. Для любого $j=1,\ldots,q$ обозначим через ξ_j номер переменной, значение которой в наборе номер j отличается от значения соответствующей компоненты центра шара, в котором лежит j-й набор. Отметим, что по построению (см. определение множеств U_l) в j-м наборе компонента ξ_j равна 2. Отметим также, что в каждом из наборов, стоящих по столбцам таблицы, i_l-я компонента равна 2. Таблица M имеет 3^k строк и не более r столбцов. Если $\widetilde{\alpha}=(\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{r+k})\in E_3^k$ и $\widetilde{\gamma}\in U_l$ — столбец, которому приписан номер t, $1\leqslant t\leqslant q$, то на пересечении строки, соответствующей набору $\widetilde{\alpha}$, и столбца, соответствующего набору $\widetilde{\gamma}$, стоит значение $f_{l,\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma})$.

Таблица 3.1

Задание функции $f_{l,\widetilde{\sigma}}$ таблицей M

x_{r+1}	…	x_{r+k-1}	x_{r+k}	1	…	t	…	q	
0	…	0	0			·			A_1
0	…	0	1			·			
…	…	…	…			·			
…	…	…	…			·			
α_{r+1}	…	α_{r+k-1}	α_{r+k}	·	·	$f_{l,\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma})$			…
…	…	…	…						
…	…	…	…						A_p
2	…	2	2						

Разобьем строки таблицы M на p полос $A_1,\ldots,A_p$ так, что в полосах $A_1,\ldots,A_{p-1}$ будет по s строк в каждой, а в полосе A_p будет не более s строк, $1\leqslant s\leqslant 3^k$ (см. табл. 3.1). Очевидно, что

$$\frac{3^k}{s}\leqslant p\leqslant\frac{3^k}{s}+1. \tag{3.28}$$

Определим функции $\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i}(x_1,\ldots,x_{r+k})$ и $f_{l,\widetilde{\sigma},i}(x_1,\ldots,x_{r+k})$, $i=1,\ldots,p$, следующим образом. Пусть $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r+k})\in E_3^{r+k}$. Если $\widetilde{\alpha}\notin R_l$ или

$(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+k}) \notin A_i$, то положим $\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+k}) = 0$. Если $\widetilde{\alpha} \in R_l$ и $(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+k}) \in A_i$, то положим $\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+k}) = f_{l,\widetilde{\sigma}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+k})$.

Положим

$$f_{l,\widetilde{\sigma},i}(x_1, \ldots, x_{r+k}) = j_1(x_{i_l}) + \widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i}(x_1, \ldots, x_{r+k}). \tag{3.29}$$

Так как функция $\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i}(x_1, \ldots, x_{r+k})$ может принимать значение 1 только на наборах, в которых i_l-я компонента равна 2, то $pr\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i} = 0$. Следовательно, $prf_{l,\widetilde{\sigma},i} = e(x_{i_l})$. Поскольку в любом наборе из множества R_l i_l-я компонента равна 2, то функция $f_{l,\widetilde{\sigma},i}$ совпадает с функцией $f_{l,\widetilde{\sigma}}$ на полосе A_i таблицы M и равна 0 на всех остальных полосах таблицы M. Отметим, что выполняется равенство

$$f_{l,\widetilde{\sigma}}(x_1, \ldots, x_{r+k}) = j_1(x_{i_l}) + \left(\sum_i f_{l,\widetilde{\sigma},i}(x_1, \ldots, x_{r+k})\right) j_2(x_{i_l}). \tag{3.30}$$

Действительно, пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+k}) \in E_3^{r+k}$. Если $\widetilde{\alpha} \notin R_l$, то обе части равенства равны $j_1(\alpha_{i_l})$. Если $\widetilde{\alpha} \in R_l$, то в сумме в правой части ровно одна функция $f_{l,\widetilde{\sigma},i}$ принимает на наборе $\widetilde{\alpha}$ ненулевое значение, а именно значение $f_{l,\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\alpha})$. Таким образом, равенство (3.30) верно.

Пусть $\widetilde{\tau}$ — произвольный набор из E_3^s. Через $B_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}$ обозначим группу столбцов из матрицы для $f_{l,\widetilde{\sigma}}$, равных $\widetilde{\tau}$ в i-й полосе. Положим $b = b(l, \widetilde{\sigma}, i, \widetilde{\tau}) = |B_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}|$. Для упрощения записи в дальнейшем мы будем при записи опускать зависимость b от $l, \widetilde{\sigma}, i, \widetilde{\tau}$. Обозначим через $x_{l\xi_1}, \ldots, x_{l\xi_b}$ переменные, соответствующие столбцам из группы $B_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}$ (то есть такие переменные, в значениях которых наборы из группы $B_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}$ отличаются от центра соответствующего шара).

Определим функции $\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}(x_1, \ldots, x_{r+k})$ и $f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}(x_1, \ldots, x_{r+k})$ следующим образом. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+k}) \in E_3^{r+k}$. Если $(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+k}) \notin A_i$ или $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \notin B_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}$, то положим $\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+k}) = 0$. Если же выполнено $(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+k}) \in A_i$ и $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in B_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}$, то положим $\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+k}) = f_{l,\widetilde{\sigma}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+k})$.

Положим

$$f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}(x_1, \ldots, x_{r+k}) = j_1(x_{i_l}) + \widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}(x_1, \ldots, x_{r+k}). \tag{3.31}$$

Поскольку функция $\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}$ может принимать значение 1 только на наборах, в которых i_l-я компонента равна 2, то $pr\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}} = 0$. Следовательно, $prf_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}} = e(x_{i_l})$. Так как в любом наборе из множества R_l i_l-я компонента равна 2, то функция $f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}$ совпадает с функцией $f_{l,\widetilde{\sigma}}$ на группе столбцов $B_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}$ таблицы M и равна 0 в остальных ячейках таблицы M.

Определим функции $\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},1}(x_1, \ldots, x_r)$ и $f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},1}(x_1, \ldots, x_r)$. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in E_3^r$. Если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \notin B_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}$, то положим $\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = 0$. Если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in B_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}$, то положим $\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = 1$. Положим

$$f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},1}(x_1, \ldots, x_r) = j_1(x_{i_l}) + \widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},1}(x_1, \ldots, x_r). \tag{3.32}$$

С учетом того, что функция $\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},1}$ может принимать значение 1 только на наборах, в которых i_l-я компонента равна 2, получаем, что $pr\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},1} = 0$.

Тогда $prf_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},1}=e(x_{i_l})$. Так как в любом наборе из множества U_l i_l-я компонента равна 2, то функция $f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},1}$ равна 1 на столбцах из $B_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}$ и равна 0 в остальных ячейках таблицы M.

Определим функции $\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}(x_{r+1},\ldots,x_{r+k})$ и $f_{i,\widetilde{\tau},2}(x_{i_l},x_{r+1},\ldots,x_{r+k})$ следующим образом. Пусть $\widetilde{\alpha}=(\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{r+k})\in E_3^k$. Если $\widetilde{\alpha}\notin A_i$, то положим значение $\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}(\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{r+k})$ равным 0. Если $\widetilde{\alpha}\in A_i$, причем набор $\widetilde{\alpha}$ является j-м по счету набором полосы A_i, $1\leqslant j\leqslant s$, то положим значение $\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}(\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{r+k})$ равным j-му по счету элементу столбца $\widetilde{\tau}$. Положим

$$f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}(x_{i_l},x_{r+1},\ldots,x_{r+k})=j_1(x_{i_l})+\widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}(x_{r+1},\ldots,x_{r+k})j_2(x_{i_l}). \quad (3.33)$$

Легко видеть, что $prf_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}=e(x_{i_l})$. Так как в любом наборе из множества R_l i_l-я компонента равна 2, то каждый столбец значений функции $f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}$ в i-й полосе матрицы M совпадает со столбцом $\widetilde{\tau}$, а в остальных ячейках таблицы M функция $f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}$ равна нулю.

Заметим, что

$$f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}(x_1,\ldots,x_{r+k})=f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},1}(x_1,\ldots,x_r)f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}(x_{i_l},x_{r+1},\ldots,x_{r+k}). \quad (3.34)$$

Пусть

$$f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}(x_1,\ldots,x_r)=j_1(x_{i_l})+(j_2(x_{l\xi_1})+\ldots+j_2(x_{l\xi_b}))j_2(x_{i_l}), \quad (3.35)$$

где суммирование производится по множеству столбцов $1,\ldots,b$ из $B_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}$. В силу (3.27) верно равенство

$$\varphi_l(x_1,\ldots,x_r)f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}(x_1,\ldots,x_r)=f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},1}(x_1,\ldots,x_r).$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\begin{aligned}f_{l,\widetilde{\sigma},i}(x_1,\ldots,x_{r+k})=j_1(x_{i_l})+\\ +\varphi_l(x_1,\ldots,x_r)\sum_{\widetilde{\tau}}f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}(x_{i_l},x_{r+1},\ldots,x_{r+k})f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}(x_1,\ldots,x_r). \quad (3.36)\end{aligned}$$

Положим

$$f_l(x_1,\ldots,x_n)=j_1(x_{i_l})+\left(\sum_{\widetilde{\sigma}}j_{\sigma_{r+k+1}}(x_{r+k+1})\cdot\ldots\cdot j_{\sigma_n}(x_n)f_{l,\widetilde{\sigma}}\right)\cdot j_2(x_{i_l}). \quad (3.37)$$

Из (3.37), (3.30) и (3.36) следует, что имеет место равенство

$$\begin{aligned}f_l(x_1,\ldots,x_n)=j_1(x_{i_l})+\varphi_l(x_1,\ldots,x_r)\cdot j_2(x_{i_l})\cdot\Bigg(\sum_{\widetilde{\sigma}}j_{\sigma_{r+k+1}}(x_{r+k+1})\cdot\ldots\\ \ldots\cdot j_{\sigma_n}(x_n)\sum_i\sum_{\widetilde{\tau}}f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}(x_{i_l},x_{r+1},\ldots,x_{r+k})f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}(x_1,\ldots,x_r)\Bigg). \quad (3.38)\end{aligned}$$

Покажем, что имеет место равенство

$$f^1(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=j_1(x_{n+1})+\sum_{l=1}^{T}f_l(x_1,\ldots,x_n)j_2(x_{i_l}). \quad (3.39)$$

Пусть $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})\in E_3^{n+1}$. По построению набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ лежит ровно в одном из множеств $U_0,U_1,\ldots,U_T$. Рассмотрим сначала случай $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in U_0$. Тогда для всех $l=1,\ldots,T$ выполняется соотношение $\varphi_l(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=0$. Тогда из (3.38) следует, что правая часть (3.39) равна $j_1(\alpha_{n+1})$. По определению (см. (3.24)) левая часть (3.39) также равна $j_1(\alpha_{n+1})$.

Пусть $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in U_l$, $1\leqslant l\leqslant T$. Тогда для всех $k=1,\ldots,T$, $k\neq l$, выполняется равенство $\varphi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=0$. Кроме того, $\varphi_l(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=j_1(\alpha_{i_l})+1=1$, так как из $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in U_l$ следует $\alpha_{i_l}=2$. Тогда правая часть (3.39) равна $j_1(\alpha_{n+1})+f_l(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Из равенства (3.38) с учетом $\alpha_{i_l}=2$ следует, что $f_l(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. По определению (см. (3.24)) левая часть (3.39) равна $j_1(\alpha_{n+1})+g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Так как $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in U_l$, то $f_l(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Следовательно, равенство (3.39) выполняется.

Таким образом, каждой функции $f\in\mathscr{H}_n$ поставлены в соответствие функции

$$f^0,\ f^1,\ f_l,\ f_{l,\widetilde{\sigma}},\ f_{l,\widetilde{\sigma},i},\ f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3},\ f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}.$$

Будем говорить, что эти функции соответствуют функции f.

Сформулируем полученные свойства в виде леммы.

Лемма 3.1.2. *Для любой функции $f(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ из множества $\mathscr{H}_n$ имеют место равенства*

$$f(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=f^1(x_1,\ldots,x_n,f^0(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})), \tag{3.40}$$

$$f_l(x_1,\ldots,x_n)=j_1(x_{i_l})+\varphi_l(x_1,\ldots,x_r)\cdot j_2(x_{i_l})\cdot\Bigg(\sum_{\widetilde{\sigma}} j_{\sigma_{r+k+1}}(x_{r+k+1})\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot j_{\sigma_n}(x_n)\sum_i\sum_{\widetilde{\tau}} f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}(x_{i_l},x_{r+1},\ldots,x_{r+k})f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}(x_1,\ldots,x_r)\Bigg), \tag{3.41}$$

$$f^1(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=j_1(x_{n+1})+\sum_{l=1}^{T} f_l(x_1,\ldots,x_n)j_2(x_{i_l}). \tag{3.42}$$

Таким образом, для любой функции из множества $\mathscr{H}_n$ построено представление; при этом натуральные числа k,s,r являются параметрами этого представления, причем $1\leqslant k,r\leqslant n$, $1\leqslant s\leqslant 3^k$, $p=\left\lceil\dfrac{3^k}{s}\right\rceil$.

3.2. Верхние оценки для функций Шеннона. В этом разделе для каждого максимального класса и некоторого конечного базиса этого класса доказывается верхняя оценка для функции Шеннона. Сначала мы докажем верхнюю оценку для функции Шеннона для множества $\mathscr{H}_n$. Затем на основе этой оценки будет получена верхняя оценка для функции Шеннона для произвольного максимального класса.

Имеет место следующая

Теорема 3.2.1. *Пусть $G=\mathfrak{U}\cup\{\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2\}$. Тогда справедливо соотношение*

$$L_G(\mathscr{H}_n)\lesssim\frac{3^n}{\log_2 n}. \tag{3.43}$$

Доказательство. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ — произвольная функция из множества $\mathscr{H}_n$. Тогда f имеет вид

$$f(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=j_1(x_{n+1})+g(x_1,\ldots,x_n),$$

где $g\in P_{3,2}$, $prg=0$. Рассмотрим представление для функции f, приведенное в лемме 3.1.2 (см. соотношения (3.40), (3.39)). Натуральные числа k,s,r являются параметрами этого представления и $1\leqslant k,r\leqslant n$, $1\leqslant s\leqslant 3^k$, $p=\left\lceil\dfrac{3^k}{s}\right\rceil$.

Получим верхние оценки сложности для функций

$$f^0, f^1, f_l, f_{l,\widetilde{\sigma}}, f_{l,\widetilde{\sigma},i}, f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}, f_{l,\widetilde{\sigma}i,\widetilde{\tau},2}.$$

1. Сначала оценим сложность реализации функции $f^0(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ из представления (3.40) на основе метода синтеза, аналогичного построению совершенной дизъюнктивной нормальной формы (см. раздел 1.3). Покажем, что существует формула Φ^0 над $\mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$, реализующая функцию f^0, такая, что

$$L(\Phi^0) \leqslant 9n^3 \cdot 3^{n-r} \cdot 2^r, \tag{3.44}$$

$$N(\Phi^0; x_{n+1}) = 1. \tag{3.45}$$

По определению функции f^0 имеем

$$f^0(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = j_1(x_{n+1}) + \sum_{\widetilde{\gamma} \in C^0} K_{\widetilde{\gamma}}, \tag{3.46}$$

где

$$C^0 = \{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in E_3^n \setminus E_2^n | (\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \in U_0,\ g(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = 1\}.$$

Напомним, что U_0 — это множество наборов $\widetilde{\gamma}$ из E_3^r, имеющих не более двух компонент, равных двойке. Легко видеть, что существует ровно $2^r \cdot 3^{n-r}$ наборов из E_3^n, первые r компонент которых равны 0 или 1. Очевидно также, что существует ровно $r \cdot 2^{r-1} \cdot 3^{n-r}$ наборов из E_3^n, в которых среди первых r компонент есть ровно одна двойка. Кроме того, существует ровно $\frac{r(r-1)}{2} \cdot 2^{r-2} \cdot 3^{n-r}$ наборов из E_3^n, в которых среди первых r компонент есть ровно две двойки.

Значит, в сумму в правой части равенства (3.46) входит не более

$$2^r \cdot 3^{n-r} + r \cdot 2^{r-1} \cdot 3^{n-r} + \frac{r(r-1)}{2} \cdot 2^{r-2} \cdot 3^{n-r} = 2^{r-2} \cdot 3^{n-r} \cdot \left(4 + 2r + \frac{r(r-1)}{2}\right)$$

конъюнкций. Так как $r \leqslant n$, то

$$2^{r-2} \cdot 3^{n-r} \cdot \left(4 + 2r + \frac{r(r-1)}{2}\right) \leqslant 3^{n-r} \cdot 2^{r-2} \cdot 7n^2.$$

Следовательно, в силу леммы 1.5.2 существует формула Φ^0 над системой $\mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$, реализующая функцию $f^0(x_1, \ldots, x_{n+1})$, такая, что

$$L(\Phi^0) \leqslant (2 + 3n)3^{n-r} \cdot 2^{r-2} \cdot 7n^2 + 1 \leqslant 9n^3 \cdot 3^{n-r} \cdot 2^r,$$

$$N(\Phi^0; x_{n+1}) = 1.$$

Таким образом, соотношения (3.44) и (3.45) доказаны.

2. Оценим сложность реализации функций $f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}$. Покажем, что существует формула $\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}$ над $\mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$, реализующая функцию $f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}$, такая, что

$$L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}) \leqslant 6k \cdot 3^k.$$

По определению

$$f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}(x_{i_l}, x_{r+1}, \ldots, x_{r+k}) = j_1(x_{i_l}) + \widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}(x_{r+1}, \ldots, x_{r+k})j_2(x_{i_l}). \quad (3.47)$$

В силу леммы 1.5.2 существует формула $\widehat{\Phi}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}$ над $\mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$, реализующая функцию

$$j_1(x_{i_l}) + \widehat{f}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}(x_{r+1}, \ldots, x_{r+k}),$$

такая, что

$$L(\widehat{\Phi}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}) \leqslant (2+3k)3^k + 1. \quad (3.48)$$

Рассмотрим формулу $\rho_1(x_{i_l}, \widehat{\Phi}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}, x_{i_l})$. Очевидно, что она реализует функцию $f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}$. При этом

$$L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}) \leqslant L(\widehat{\Phi}_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}) + 2 \leqslant 6k \cdot 3^k. \quad (3.49)$$

3. Докажем, что существуют формулы $\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}$ над $\mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$, реализующие функции $f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}(x_1, \ldots, x_r)$ соответственно такие, что

$$\sum_{\widetilde{\tau}} L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}) \leqslant 2^s + |U_l|.$$

Напомним, что через b мы обозначаем число столбцов в множестве $B_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}$, т. е.

$$b = b(l, \widetilde{\sigma}, i, \widetilde{\tau}) = |B_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau}}|.$$

Очевидно, что любая функция вида

$$j_1(x_{i_l}) + j_2(y_1) + \ldots + j_2(y_b)$$

может быть реализована формулой Δ_1 над $\{\theta(x_1, x_2) = j_1(x_1) + j_2(x_2)\}$, такой, что $L(\Delta_1) \leqslant 1 + b$. Тогда формула Δ_2 вида $\rho_1(x_{i_l}, \Delta_1, x_{i_l})$ реализует функцию

$$j_1(x_{i_l}) + (j_2(y_1) + \ldots + j_2(y_b))j_2(x_{i_l}),$$

причем $L(\Delta_1) \leqslant 3 + b$. Следовательно, существует формула $\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}$ над $\mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$, реализующая функцию $f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}(x_1, \ldots, x_r)$, такая, что $L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}) \leqslant 3 + b$. Следовательно,

$$\sum_{\widetilde{\tau}} L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}) \leqslant 3 \cdot 2^s + |U_l|. \quad (3.50)$$

4. Положим

$$F_{l,\widetilde{\sigma},i}(x_1, \ldots, x_{r+k}, y) = j_1(y) + \\ + \left(\sum_{\widetilde{\tau}} f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}(x_{i_l}, x_{r+1}, \ldots, x_{r+k}) f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}(x_1, \ldots, x_r)\right) j_2(x_{i_l}). \quad (3.51)$$

Покажем, что существует формула $\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i}$ над $\mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$, реализующая функцию $F_{l,\widetilde{\sigma},i}(x_1, \ldots, x_{r+k}, y)$, такая, что

$$L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i}) \leqslant 9k \cdot 3^k \cdot 2^s + |U_l|. \quad (3.52)$$

Рассмотрим формулы

$$\Psi_j = \zeta_1(\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}, \Phi_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}, x_{i_l}, z), \tag{3.53}$$

$j=j(\widetilde{\tau})=1,\ldots,2^s$, и формулу $\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i}$ вида $\mathbb{F}[\Psi_1,\ldots,\Psi_{2^s}; y]$. Очевидно, что формула $\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i}$ построена над системой $\mathfrak{U}\cup\{\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2\}$. Из (3.51) следует, что она реализует функцию $F_{l,\widetilde{\sigma},i}$.

С учетом соотношений (3.49), (3.50) и определения (3.53) сложность формулы $\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i}$ оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned}L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i}) = \sum_{\widetilde{\tau}}(L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}) + L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}) + 1) + 1 \leqslant \\ \leqslant \sum_{\widetilde{\tau}} L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}) + \sum_{\widetilde{\tau}} L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}) + 2^s + 1 \leqslant \\ \leqslant 6k\cdot 3^k\cdot 2^s + |U_l| + 3\cdot 2^s + 2^s + 1 \leqslant 9k\cdot 3^k\cdot 2^s + |U_l|.\end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (3.52) доказано.

5. Положим

$$\begin{aligned}F_{l,\widetilde{\sigma}}(x_1,\ldots,x_{r+k},y) = j_1(x_{i_l}) + \\ + \left(\sum_i\sum_{\widetilde{\tau}} f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}(x_{i_l}, x_{r+1},\ldots,x_{r+k}) f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}(x_1,\ldots,x_r)\right) j_2(x_{i_l}).\end{aligned} \tag{3.54}$$

Оценим сложность реализации функций $F_{l,\widetilde{\sigma}}$. Докажем, что существует формула $\Phi_{l,\widetilde{\sigma}}$ над $\mathfrak{U}\cup\{\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2\}$, реализующая функцию $F_{l,\widetilde{\sigma}}(x_1,\ldots,x_k)$, такая, что

$$L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma}}) \leqslant p(11k\cdot 3^k\cdot 2^s + |U_l|). \tag{3.55}$$

Для каждого $i=1,\ldots,p$ определим формулу

$$\Theta_i(z,x_1,\ldots,x_k) = \rho_1(z, \Phi_{l,\widetilde{\sigma},i}, x_{i_l}).$$

Рассмотрим формулу $\Phi_{l,\widetilde{\sigma}}$ вида $\mathbb{F}[\Theta_1,\ldots,\Theta_p; x_{i_l}]$. Из построения легко видеть, что эта формула реализует функцию $F_{l,\widetilde{\sigma}}$. Из предыдущего пункта доказательства следует, что

$$L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma}}) \leqslant 1 + \sum_{i=1}^{p}(L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma},i}) + 1) \leqslant 1 + p(9k\cdot 3^k\cdot 2^s + |U_l| + 1) \leqslant p(11k\cdot 3^k\cdot 2^s + |U_l|).$$

Таким образом, соотношение (3.55) доказано.

6. Положим

$$\begin{aligned}F_l(x_1,\ldots,x_n) = j_1(x_{i_l}) + j_2(x_{i_l})\cdot\Bigg(\sum_{\widetilde{\sigma}} j_{\sigma_{r+k+1}}(x_{r+k+1})\cdot\ldots \\ \ldots\cdot j_{\sigma_n}(x_n)\sum_i\sum_{\widetilde{\tau}} f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},2}(x_{i_l}, x_{r+1},\ldots,x_{r+k}) f_{l,\widetilde{\sigma},i,\widetilde{\tau},3}(x_1,\ldots,x_r)\Bigg).\end{aligned} \tag{3.56}$$

Докажем, что существует формула Φ_l над $\mathfrak{U}\cup\{\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2\}$, реализующая функцию $F_l(x_1,\ldots,x_k)$, такая, что

$$L(\Phi_l) \leqslant 3^{n-r-k} p(32k\cdot 3^k\cdot 2^s + |U_l|). \tag{3.57}$$

Переход от функций $F_{l,\widetilde{\sigma}}$ к функции F_l происходит за $n-r-k$ шагов следующим образом. Для упрощения записи введем обозначения

$$\widetilde{\sigma}_d = (\sigma_{r+k+1}, \ldots, \sigma_d),$$

$$\widetilde{\sigma}_{d,a} = (\widetilde{\sigma}_d, a), \quad a \in \{0, 1, 2\}.$$

Сначала на первом шаге из 3^{n-r-k} формул $\Phi_{l,\widetilde{\sigma}_n}$ строятся $3^{n-r-k-1}$ формул $\Phi_{l,\widetilde{\sigma}_{n-1}}$. Положим

$$\Sigma_n^a = \zeta_a(\Phi_{l,\widetilde{\sigma}_{n-1,a}}, x_n, x_{i_l}, z), \quad a = 0, 1, 2$$

и

$$\Phi_{l,\widetilde{\sigma}_{n-1}} = \mathbb{F}[\Sigma_n^0, \Sigma_n^1, \Sigma_n^2; x_{i_l}].$$

Легко видеть, что формула $\Phi_{l,\widetilde{\sigma}_{n-1}}$ реализует функцию

$$F_{l,\widetilde{\sigma}_{n-1}} = j_1(x_{i_l}) + \sum_{\alpha_n=0}^{2} F_{l,\widetilde{\sigma}_{n-1,\alpha_n}} j_{\alpha_n}(x_n) j_2(x_{i_l}).$$

Из построения следует, что

$$\sum_{\widetilde{\sigma}_{n-1}} L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma}_{n-1}}) = \sum_{\widetilde{\sigma}_n} L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma}_n}) + 7 \cdot 3^{n-r-k-1}.$$

Затем на q-м шаге, $1 < q \leqslant n-r-k$, аналогичным образом из $3^{n-r-k-q+1}$ формул $\Phi_{l,\widetilde{\sigma}_{n-q+1}}$ строятся $3^{n-r-k-q}$ формулы $\Phi_{l,\widetilde{\sigma}_{n-q}}$. Положим

$$\Sigma_{n-q+1}^a = \zeta_a(\Phi_{l,\widetilde{\sigma}_{n-q},a}, x_n, x_{i_l}, z), \quad a = 0, 1, 2$$

и

$$\Phi_{l,\widetilde{\sigma}_{n-q}} = \mathbb{F}[\Sigma_{n-q+1}^0, \Sigma_{n-q+1}^1, \Sigma_{n-q+1}^2; x_{i_l}].$$

Легко видеть, что формула $\Phi_{l,\widetilde{\sigma}_{n-q}}$ реализует функцию

$$F_{l,\widetilde{\sigma}_{n-q}} = j_1(x_{i_l}) + \sum F_{l,\widetilde{\sigma}_{n-q},\alpha_{n-q+1},\ldots,\alpha_n} j_{\alpha_{n-q+1}}(x_{n-q+1}) j_{\alpha_n}(x_n) j_2(x_{i_l}),$$

где сумма берется по всем $\alpha_{n-q+1}, \ldots, \alpha_n = 0, 1, 2$. Из построения следует, что

$$\sum_{\widetilde{\sigma}_{n-q}} L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma}_{n-q}}) = \sum_{\widetilde{\sigma}_{n-q+1}} L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma}_{n-q+1}}) + 7 \cdot 3^{n-r-k-q}.$$

В итоге на $(n-r-k)$-м шаге будет построена формула Φ_l, реализующая функцию F_l. При этом

$$L(\Phi_l) \leqslant 7(3^1 + \ldots + 3^{n-r-k}) + \sum_{\widetilde{\sigma}} L(\Phi_{l,\widetilde{\sigma}}) \leqslant 7 \cdot 3^{n-r-k+1} + 3^{n-r-k} p(11k \cdot 3^k \cdot 2^s + |U_l|) \leqslant$$

$$\leqslant 3^{n-r-k} p(32k \cdot 3^k \cdot 2^s + |U_l|).$$

Таким образом, соотношение (3.57) доказано.

7. Оценим сложность реализации функции $f^1(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$. Докажем, что существует формула Φ^1 над $\mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$, реализующая функцию $f^1(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, такая, что*)

$$L(\Phi) \leqslant \sum_{l=1}^{T} L(\Phi_l) + 22r^2 \cdot T, \tag{3.58}$$

$$N(\Phi; x_{n+1}) = 1. \tag{3.59}$$

*) Напомним, что $T = T(r)$ — мощность построенного выше разбиения множества E_3^r.

Из определения функции φ_l и леммы 1.5.2 следует, что для любого $l=1,\ldots,T$ существует формула Θ_l, реализующая функцию $\varphi_l(x_1,\ldots,x_r)$, такая, что

$$L(\Theta_l)\leqslant(2+3r)|U_l|+1\leqslant 6r|U_l|\leqslant 6r\cdot 3r=18r^2.$$

Для каждого $l=1,\ldots,T$ рассмотрим формулу

$$\Lambda_l=\zeta_1(\Theta_l,\Phi_l,x_{i_l},x_{i_l}).$$

Из (3.41) следует, что формула Λ_l реализует функцию f_l. Положим

$$\Omega_l=\rho_1(z,\Lambda_l,x_{i_l}),\quad l=1,\ldots,T.$$

Рассмотрим формулу Φ^1 вида $\mathbb{F}[\Omega_1,\ldots,\Omega_T;x_{n+1}]$. Из (3.42) вытекает, что формула Φ^1 реализует функцию f^1. Из построения следует, что

$$L(\Phi^1)\leqslant\sum_{l=1}^{T}L(\Omega_l)+1\leqslant\sum_{l=1}^{T}L(\Lambda_l)+T+2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{l=1}^{T}L(\Phi_l)+\sum_{l=1}^{T}L(\Theta_l)+3T+2\leqslant\sum_{l=1}^{T}L(\Phi_l)+T\cdot 18r^2+3T+2\leqslant\sum_{l=1}^{T}L(\Phi_l)+22r^2\cdot T.$$

Равенство $N(\Phi^1;x_{n+1})=1$ очевидно.

Таким образом, соотношения (3.58), (3.59) доказаны.

8. На основе оценок сложности функций, полученных в пунктах 1–7, получим оценку сложности реализации функции f.

Пусть

$$S_1=9n^3\cdot 3^{n-r}2^r,\quad S_2=T\cdot 3^{n-r-k}p\cdot 32k\cdot 3^k\cdot 2^s,\quad S_3=3^{n-k}p,\quad S_4=22r^2\cdot T. \tag{3.60}$$

Докажем, что существует формула Φ над G, реализующая функцию f, такая, что

$$L(\Phi)\leqslant S_1+S_2+S_3+S_4, \tag{3.61}$$

$$N(\Phi;x_{n+1})=1. \tag{3.62}$$

Из соотношений (3.44) и (3.45) следует, что существует формула Φ^0 над $\mathfrak{U}\cup\{\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2\}$, реализующая функцию f^0, такая, что

$$L(\Phi^0)\leqslant 9n^3\cdot 3^{n-r}2^r=S_1, \tag{3.63}$$

$$N(\Phi^0;x_{n+1})=1. \tag{3.64}$$

Из соотношений (3.58), (3.59) следует, что существует формула Φ^1 над $\mathfrak{U}\cup\{\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2\}$, реализующая функцию f^1, такая, что

$$L(\Phi^1)\leqslant\sum_{l=1}^{T}L(\Phi_l)+22r^2\cdot T, \tag{3.65}$$

$$N(\Phi^1;x_{n+1})=1. \tag{3.66}$$

Рассмотрим формулу Φ вида $\mathbb{F}[\Phi^0, \Phi^1; x_{n+1}]$. В силу (3.40) формула Φ реализует функцию f. Легко видеть, что

$$N(\Phi; x_{n+1}) = 1. \tag{3.67}$$

Оценим сложность формулы Φ. Из определения формулы Φ, соотношений (3.63), (3.65) и (3.57) следует, что

$$L(\Phi) \leqslant L(\Phi^0) + L(\Phi^1) \leqslant S_1 + \sum_{l=1}^{T} L(\Phi_l) + S_4 \leqslant S_1 + S_4 + \sum_{l=1}^{T} 3^{n-r-k} p(32k \cdot 3^k \cdot 2^s + |U_l|) \leqslant$$

$$\leqslant S_1 + S_4 + T \cdot 3^{n-r-k} p \cdot 32k \cdot 3^k \cdot 2^s + 3^{n-r-k} p \cdot 3^r \leqslant S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$$

Очевидно, что формула Φ построена над системой G.

Таким образом, соотношение (3.61) доказано.

Выберем для параметров r, s, k следующие значения:

$$r = 2^{[\log_2 n - 1]}, \ \ s = \left[\log_2 n - 4\log_2 \log_2 n\right], \ \ k = \left[2\log_3 \log_3 n\right]. \tag{3.68}$$

Покажем, что «асимптотически главным» слагаемым в выражении из правой части соотношения (3.61) является слагаемое S_3. С учетом (3.68) легко видеть, что выполняются соотношения

$$\frac{n}{4} < r \leqslant \frac{n}{2}.$$

Принимая во внимание неравенства (3.28), а также лемму 3.1.1, получаем, что

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{9n^3 \cdot 3^{n-r} 2^r}{p \cdot 3^{n-k}} \leqslant 9n^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^r \cdot s \leqslant 9n^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{4}},$$

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{T \cdot 3^{n-r-k} \cdot p \cdot 32k \cdot 3^k \cdot 2^s}{p \cdot 3^{n-k}} \leqslant \frac{2 \cdot 3^{r+2} \ln r \cdot 32k \cdot 3^k \cdot 2^s}{3^r \cdot r} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \frac{\log_2 n \cdot \log_3 \log_3 n \cdot (\log_3 n)^2 \cdot n}{n \cdot (\log_2 n)^4} \leqslant c_1 \frac{\log_3 \log_3 n \cdot (\log_3 n)^2}{(\log_2 n)^3} \leqslant c_1 \frac{\log_3 \log_3 n}{\log_2 n},$$

$$\frac{S_4}{S_3} = \frac{22r^2 \cdot T}{p \cdot 3^{n-k}} \leqslant c_2 \frac{r^2 \cdot s \cdot 3^r \ln r}{r \cdot 3^k \cdot 3^{n-k}} \leqslant c_2 \frac{r \cdot s \cdot \ln r}{3^{n-r}} \leqslant c_3 n^3 \cdot 3^{-\frac{n}{2}},$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые константы. Поэтому при $n \to \infty$ выражения

$$\frac{S_1}{S_3}, \quad \frac{S_2}{S_3}, \quad \frac{S_4}{S_3}$$

стремятся к 0. Следовательно, «асимптотически главным» слагаемым в правой части соотношения (3.61) является слагаемое S_3. Легко видеть, что

$$p \cdot 3^{n-k} \leqslant \left(\frac{3^k}{s} + 1\right) 3^{n-k} \lesssim \frac{3^n}{\log_2 n}.$$

Тогда из соотношения (3.61) следует, что

$$L_G(\mathscr{H}_n) \lesssim \frac{3^n}{\log_2 n}.$$

Теорема 3.2.1 доказана.

Теперь получим верхнюю оценку функции Шеннона для произвольного максимального класса. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 3.2.2. *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций, такой, что $U_{01} \subseteq B$. Пусть $\mathfrak{A}(B)$ — произвольное конечное множество функций из $P_{3,2}$, удовлетворяющее условию $[pr\mathfrak{A}(B)] = B$, а $G = \mathfrak{A}(B) \cup \mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$. Тогда справедливо соотношение*

$$L_G(pr^{-1}B(n)) \lesssim \frac{3^n}{\log_2 n} + L_{prG}(B(n)). \tag{3.69}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций, отличный от классов C_0, C_1, C_{01}, $pr^{-1}B$ — соответствующий ему максимальный класс, а $\mathfrak{A}(B)$ — произвольное конечное множество функций из $P_{3,2}$, удовлетворяющее условию $[pr\mathfrak{A}(B)] = B$. В силу леммы 1.6.2 справедливо равенство

$$[\mathfrak{A}(B) \cup \mathfrak{U}] = pr^{-1}B.$$

Положим

$$G = \mathfrak{A}(B) \cup \mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}.$$

Очевидно, что функции $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ принадлежат классу $pr^{-1}B$. Поэтому $[G] = pr^{-1}B$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из класса $pr^{-1}B$. Определим функцию $h_f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$. Положим

$$h_f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = j_1(x_{n+1}) + \sum j_{\alpha_1}(x_1) \ldots j_{\alpha_n}(x_n),$$

где суммирование ведется по всем наборам $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_3^n \setminus E_2^n$, таким, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$. Заметим, что $prh_f = x_{n+1}$. Поэтому $prh_f \in U_{01}$.

Так как $[pr\mathfrak{A}(B)] = B$, то найдется функция $q(x_1, \ldots, x_n) \in [\mathfrak{A}(B)]$, удовлетворяющая условию $prq = prf$.

Определим функцию $\widehat{f}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ следующим образом. Положим

$$\widehat{f}(x_1, \ldots, x_n) = h_f(x_1, \ldots, x_n, q(x_1, \ldots, x_n)k(x_1) \ldots k(x_n)).$$

Из определения функции h_f следует, что

$$\widehat{f}(x_1, \ldots, x_n) = a(x_1, \ldots, x_n) + b(x_1, \ldots, x_n),$$

где

$$a(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n)k(x_1) \ldots k(x_n),$$
$$b(x_1, \ldots, x_n) = \sum j_{\alpha_1}(x_1) \ldots j_{\alpha_n}(x_n),$$

где суммирование ведется по всем наборам $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_3^n \setminus E_2^n$, таким, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$.

Покажем, что $\widehat{f}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $\widetilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — произвольный набор из E_3^n. Если $\widetilde{\gamma} \in E_2^n$, то $a(\widetilde{\gamma}) = q(\widetilde{\gamma})$, $b(\widetilde{\gamma}) = 0$ и, следовательно, $\widehat{f}(\widetilde{\gamma}) = q(\widetilde{\gamma})$. Так как $prq = prf$, то $q(\widetilde{\gamma}) = f(\widetilde{\gamma})$. Следовательно, $\widehat{f}(\widetilde{\gamma}) = f(\widetilde{\gamma})$.

Пусть $\widetilde{\gamma} \in E_3^n \setminus E_2^n$. Легко видеть, что $a(\widetilde{\gamma}) = 0$. Если $f(\widetilde{\gamma}) = 0$, то $b(\widetilde{\gamma}) = 0$. Следовательно, $\widehat{f}(\widetilde{\gamma}) = 0$. Поэтому $\widehat{f}(\widetilde{\gamma}) = f(\widetilde{\gamma})$. Если $f(\widetilde{\gamma}) = 1$, то $b(\widetilde{\gamma}) = 1$. Значит, $\widehat{f}(\widetilde{\gamma}) = 1$. Таким образом, $\widehat{f}(\widetilde{\gamma}) = f(\widetilde{\gamma})$. Итак, выполнено $\widehat{f}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Следовательно, имеет место равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h_f(x_1, \ldots, x_n, q(x_1, \ldots, x_n)k(x_1) \ldots k(x_n)). \tag{3.70}$$

Таким образом, для произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса $pr^{-1}B$ получено представление f в виде суперпозиции двух функций h_f и $q(x_1, \ldots, x_n)k(x_1)\ldots k(x_n)$, первая из которых принадлежит множеству $\mathscr{H}_n$, а вторая совпадает с f на множестве наборов из E_2^n.

Очевидно, что существует формула Φ_{qk} над G, реализующая функцию

$$q(x_1, \ldots, x_n)k(x_1) \ldots k(x_n),$$

такая, что

$$L(\Phi_{qk}) \leqslant L_{prG}(B(n)) + n. \tag{3.71}$$

Из пункта 8 доказательства теоремы 3.2.1 следует, что существует формула Φ_h над G, реализующая функцию f, такая, что

$$L(\Phi_h) \lesssim \frac{3^n}{\log_2 n}, \tag{3.72}$$

$$N(\Phi_h; x_{n+1}) = 1.$$

Рассмотрим формулу Φ, которая получается из формулы Φ_h подстановкой формулы Φ_{qk} вместо единственного вхождения переменной x_{n+1}. Легко видеть, что формула Φ реализует функцию f, причем выполняется неравенство

$$L(\Phi) \leqslant L(\Phi_h) + L(\Phi_{qk}). \tag{3.73}$$

Тогда из теоремы 3.2.1 и соотношения (3.71) следует, что

$$L_G(pr^{-1}B(n)) \lesssim \frac{3^n}{\log_2 n} + L_{prG}(B(n)).$$

Теорема 3.2.2 доказана.

3.3. Нижние оценки для функций Шеннона. В этом разделе доказывается нижняя мощностная оценка для функций Шеннона для максимальных классов.

Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций, такой, что $U_{01} \subseteq B$. Пусть $\mathfrak{A}(B)$ — произвольное конечное подмножество $P_{3,2}$, такое, что $[pr\mathfrak{A}(B)] = B$. Через $N(n, k, \mathfrak{A}(B))$ обозначим число различных формул над системой

$$G = \mathfrak{A}(B) \cup \mathfrak{U} \cup \{\zeta_0 \cup \zeta_1 \cup \zeta_2\}$$

сложности не более k, реализующих функции от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Следующая лемма является аналогом леммы 16 из [33].

Лемма 3.3.1. *Для каждой системы $\mathfrak{A}(B)$ существует константа $c = c(\mathfrak{A}(B))$, такая, что*

$$N(n, k, \mathfrak{A}(B)) < (cn)^k. \tag{3.74}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 16 из [33]. Следующая лемма является аналогом леммы 9 из [33].

Лемма 3.3.2. *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций, такой, что $U_{01} \subseteq B$. Тогда если для некоторой функции $k(n)$ выполняется соотношение*

$$\frac{N(n, k(n), \mathfrak{A}(B))}{|pr^{-1}B(n)|} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

то начиная с некоторого n выполняется неравенство

$$L_G(pr^{-1}B(n)) > k(n).$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 9 из [33].

Лемма 3.3.3. *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций, такой, что $U_{01} \subseteq B$. Для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n выполняется неравенство*

$$L_G(pr^{-1}B(n)) > \frac{3^n}{\log_2 n}(1-\varepsilon).$$

Доказательство. В силу леммы 3.3.1 достаточно показать, что при

$$k(n) = \frac{3^n}{\log_2 n}(1-\varepsilon)$$

и $n \to \infty$ выполняется условие

$$\frac{N(n, k(n), \mathfrak{A}(B))}{|pr^{-1}B(n)|} \to 0.$$

Так как $U_{01} \subseteq B$ и $|U_{01}(n)| = n$, то $|pr^{-1}B(n)| \geqslant n2^{3^n-2^n}$. По лемме 3.3.2 существует константа c, такая, что $N(n, k(n)) < (cn)^k$. Тогда получаем:

$$\log_2 \frac{N(n, k(n), \mathfrak{A}(B))}{|pr^{-1}B(n)|} = \log_2 N(n, k(n), \mathfrak{A}(B)) - \log_2 |pr^{-1}B(n)| \leqslant$$

$$\leqslant k \log_2 cn - \log_2 n - (3^n - 2^n) \leqslant \frac{3^n}{\log_2 n}(1-\varepsilon)(\log_2 n + \log_2 c) - \log_2 n - 3^n + 2^n.$$

Последнее выражение стремится к $-\infty$ при $n \to \infty$, откуда вытекает, что

$$\frac{N(n, k(n), \mathfrak{A}(B))}{|pr^{-1}B(n)|} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Лемма доказана.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3.1. *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций, такой, что $U_{01} \subseteq B$, $\mathfrak{A}(B)$ — произвольное конечное подмножество $P_{3,2}$, удовлетворяющее условию $[pr\mathfrak{A}(B)] = B$, а $G = \mathfrak{A}(B) \cup \mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$. Тогда имеет место соотношение*

$$L_G(pr^{-1}B(n)) \gtrsim \frac{3^n}{\log_2 n}.$$

С учетом теорем 3.2.2 и 3.3.1 получаем следующий результат.

Теорема 3.3.2. *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций, такой, что $U_{01} \subseteq B$, $\mathfrak{A}(B)$ — произвольное конечное подмножество $P_{3,2}$, удовлетворяющее условию $[pr\mathfrak{A}(B)] = B$, а $G = \mathfrak{A}(B) \cup \mathfrak{U} \cup \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$. Тогда имеет место соотношение*

$$\frac{3^n}{\log_2 n} \lesssim L_G(pr^{-1}B(n)) \lesssim \frac{3^n}{\log_2 n} + L_{prG}(B(n)).$$

3.4. Асимптотически точные формулы для функций Шеннона. В этом разделе для некоторых конечных семейств функций, порождающих максимальные классы, находятся асимптотически точные оценки соответствующих функций Шеннона.

Имеет место следующий результат.

Теорема 3.4.1. *Пусть B — замкнутый класс булевых функций, такой, что $L_{01} \subseteq B$. Тогда существует конечный базис G класса $pr^{-1}B$, такой, что*

$$L_G(pr^{-1}B(n)) \sim \frac{3^n}{\log_2 n}.$$

Доказательство. Пусть B — замкнутый класс булевых функций, такой, что $L_{01} \subseteq B$. Рассмотрим базис G, удовлетворяющий условиям теоремы 3.3.2. Тогда по теореме 3.3.2 выполняются оценки

$$\frac{3^n}{\log_2 n} \lesssim L_G(pr^{-1}B(n)) \lesssim \frac{3^n}{\log_2 n} + L_{prG}(B(n)). \tag{3.75}$$

В соотношении (3.75) оценим величину $L_{prG}(B(n))$. Множество всех замкнутых классов булевых функций, содержащих класс L_{01}, состоит из классов

$$L_{01}, L_0, L_1, LS, L, S_{01}, S, T_{01}, T_0, T_1, P_2.$$

Рассмотрим каждый из этих случаев и для каждого случая покажем, что $L_{prG}(B(n)) = o\left(\frac{3^n}{\log_2 n}\right)$.

Если $B = P_2$, то в силу теоремы 1.3.1

$$L_{prG}(B(n)) \sim \frac{2^n}{\log_2 n} = o\left(\frac{3^n}{\log_2 n}\right).$$

Пусть $B \in \{L_{01}, L_0, L_1, LS, L\}$. Тогда по лемме 1.3.2 найдется такая константа c, что

$$L_{prG}(B(n)) \leqslant cn = o\left(\frac{3^n}{\log_2 n}\right).$$

Если $B \in \{S, S_{01}\}$, то по теореме 1.3.5

$$L_{prG}(B(n)) \sim \frac{2^{n-1}}{\log_2 n} = o\left(\frac{3^n}{\log_2 n}\right).$$

Пусть, наконец, $B \in \{T_0, T_1, T_{01}\}$. Из теоремы 1.3.6 следует, что

$$L_{prG}(B(n)) \sim \frac{2^n}{\log_2 n} = o\left(\frac{3^n}{\log_2 n}\right).$$

Таким образом, для любого замкнутого класса булевых функций B, такого, что $L_{01} \subseteq B$, выполняется соотношение

$$L_{prG}(B(n)) = o\left(\frac{3^n}{\log_2 n}\right).$$

Тогда из соотношения (3.75) следует, что

$$L_G(pr^{-1}B(n)) \sim \frac{3^n}{\log_2 n}.$$

Теорема доказана.

Также имеет место следующая теорема.

Теорема 3.4.2. *Пусть B — замкнутый класс булевых функций, принадлежащий множеству* $\{O^\infty, O_0^\infty, I^\infty, I_1^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty\}$. *Тогда существует конечный базис G класса $pr^{-1}B$, такой, что*

$$L_G(pr^{-1}B(n)) \sim \frac{3^n}{\log_2 n}.$$

Доказательство. Пусть $B \in \{O^\infty, O_0^\infty\}$. Рассмотрим базис G, удовлетворяющий условиям теоремы 3.3.2. Тогда по теореме 3.3.2

$$\frac{3^n}{\log_2 n} \lesssim L_G(pr^{-1}B(n)) \lesssim \frac{3^n}{\log_2 n} + L_{prG}(B(n)). \tag{3.76}$$

В силу теоремы 1.3.5 справедливо соотношение

$$L_{prG}(B(n)) \sim \frac{2^{n-1}}{\log_2 n} = o\left(\frac{3^n}{\log_2 n}\right).$$

Следовательно, с учетом соотношений (3.76), имеет место соотношение

$$L_G(pr^{-1}B(n)) \sim \frac{3^n}{\log_2 n}.$$

Если $B \in \{I^\infty, I_1^\infty\}$, то утверждение теоремы выполняется в силу соображений двойственности.

В случае $B \in \{MO^\infty, MO_0^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty\}$ утверждение теоремы аналогичным образом извлекается из теоремы 1.3.7.

Теорема доказана.

Теорема 3.4.3. *Пусть $B \in \{M_{01}, M_0, M_1, M\}$. Тогда существует конечный базис G класса $pr^{-1}B$, такой, что*

$$L_G(pr^{-1}B(n)) \sim \frac{3^n}{\log_2 n}.$$

Доказательство. Пусть $B \in \{M_{01}, M_0, M_1, M\}$. Рассмотрим базис G, удовлетворяющий условиям теоремы 3.3.2, и такой, что $xy, x \vee y \in prG$. Тогда по теореме 3.3.2

$$\frac{3^n}{\log_2 n} \lesssim L_G(pr^{-1}B(n)) \lesssim \frac{3^n}{\log_2 n} + L_{prG}(B(n)). \tag{3.77}$$

Легко видеть, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in B(n)$ найдутся такие функции $g(x_2, \ldots, x_n) \in B(n-1)$ и $h(x_2, \ldots, x_n) \in B(n-1)$, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 g(x_2, \ldots, x_n) \vee h(x_2, \ldots, x_n).$$

Следовательно, выполняется соотношение

$$L_{prG}(B(n)) = o\left(\frac{3^n}{\log_2 n}\right).$$

Тогда, с учетом соотношений (3.77), получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема 3.4.4. *Пусть*

$$B \in \{D_{01}, D_0, D_1, D, K_{01}, K_0, K_1, K, U, SU, U_{01}, MU, U_0, U_1\}.$$

Тогда существует конечный базис G класса $pr^{-1}B$, такой, что

$$L_G(pr^{-1}B(n)) \sim \frac{3^n}{\log_2 n}.$$

Доказательство. Пусть

$$B \in \{D_{01}, D_0, D_1, D, K_{01}, K_0, K_1, K, U, SU, U_{01}, MU, U_0, U_1\}.$$

Рассмотрим базис G, удовлетворяющий условиям теоремы 3.3.2. Тогда по теореме 3.3.2

$$\frac{3^n}{\log_2 n} \lesssim L_G(pr^{-1}B(n)) \lesssim \frac{3^n}{\log_2 n} + L_{prG}(B(n)). \tag{3.78}$$

Очевидным образом выполняется соотношение

$$L_{prG}(B(n)) = o\left(\frac{3^n}{\log_2 n}\right),$$

откуда, с учетом соотношений (3.78), следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

§ 4. Глубина формул, реализующих функции из $P_{3,2}$

В этом параграфе изучается вопрос о глубине формул, реализующих функции из $P_{3,2}$. Известно [61], что для произвольной конечной системы булевых функций всякая функция из замкнутого класса, порожденного этой системой, может быть реализована формулой, глубина которой имеет не более чем линейный порядок роста от числа переменных. Ниже аналогичный факт устанавливается для некоторых конечных систем функций из $P_{3,2}$.

4.1. Классы, проекция которых содержит функцию δ_p или δ_p^*. Напомним некоторые определения, приведенные ранее в параграфе 1. Для любого $p \geqslant 2$ и любого $i = 1, \ldots, p$ будем обозначать через x^i набор $(x_1^i, \ldots, x_{i-1}^i, x_{i+1}^i, \ldots, x_p^i)$, а через X^p — набор $(x^1, \ldots, x^p)$, состоящий из $p(p-1)$ переменных.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из $P_{3,2}$, $n \geqslant p \geqslant 2$. Для любых i, j, таких, что $1 \leqslant i, j \leqslant p$ и $i \neq j$, будем обозначать через $f_j^i(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ функцию $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. Через Y^p обозначим набор функций, получающийся из набора X^p заменой переменных x_j^i на функции f_j^i соответственно, где $i, j = 1, \ldots, p$ и $i \neq j$.

Для любых $p > 3$ в главе 1 была определена булева функция $\delta_p(X^p)$:

$$\delta_p(X^p) = \vee \& x_{i_l}^{i_j},$$

где дизъюнкция берется по всем $i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \ldots, p$, $i_v \neq i_s$ при $v \neq s$, а конъюнкция берется по всем j, l, таким, что $1 \leqslant j < l \leqslant 4$.

Через $\mathcal{D}_p$ мы обозначаем множество функций $\Delta_p(X^p)$ из $P_{3,2}$, таких, что $pr\Delta_p(X^p) = \delta_p(X^p)$.

Определим множества $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{R}$ замкнутых классов из P_2. Обозначим через $\mathfrak{Q}$ множество

$$\{P_2, T_0, T_1, T_{01}, M, M_0, M_1, M_{01}, O^m, O_0^m, MO^m, MO_0^m, I^m, I_1^m, MI^m, MI_1^m,\ 2 \leqslant m < \infty\},$$

а через $\mathfrak{R}$ — множество

$$\{P_2, T_1, T_{01}, M, M_1, M_{01}, O^m, O_0^m, MO^m, MO_0^m,\ 2 \leqslant m < \infty\}.$$

Легко видеть, что

$$\mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}^* = \mathfrak{Q}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1.1. *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций из множества $\mathfrak{Q}$, H — произвольный замкнутый класс функций из $P_{3,2}$, такой, что $prH = B$, а G — произвольная конечная порождающая система класса H. Тогда существует константа c, такая, что при всех $n \geqslant 1$ выполняется неравенство*

$$D_G(H(n)) \leqslant cn.$$

Доказательство. Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций из множества $\mathfrak{Q}$, H — произвольный замкнутый класс функций из $P_{3,2}$, такой, что $prH = B$, а G — произвольная конечная порождающая система класса H. Рассмотрим сначала случай, когда $B \in \mathfrak{R}$. Из леммы 1.5.3 следует, что для любого фиксированного $m \geqslant 2$ существует натуральное число $r = r(m)$, такое, что функция δ_r принадлежит замкнутому классу булевых функций O^m. Следовательно, для любого класса $B \in \mathfrak{R}$ и для любого замкнутого класса H из $P_{3,2}$, такого, что $prH = B$, найдутся натуральное $r = r(m)$ и функция $\Delta_r(X^r)$ из множества $\mathscr{D}_r$, такие, что функция $\Delta_r(X^r)$ принадлежит классу H. Из леммы 1.5.4 следует, что тогда для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in H$, $n \geqslant 10$, выполняется равенство $f = \Delta_r(Y_f^r)$. Функции Y_f^r зависят не более чем от $n-1$ переменной. Следовательно, для любого конечного базиса G_0 класса H, содержащего функцию $\Delta_r(X^r)$ и все функции из множества $H(9)$, выполняется соотношение $D_{G_0}(H(n)) \leqslant c_0 n$, где c_0 — некоторая константа. Отсюда следует, что для порождающей системы G класса H выполняется соотношение $D_G(H(n)) \leqslant cn$, где c — некоторая константа, так как переход от одного базиса к другому влечет увеличение глубины функций не более чем в константу раз.

Если класс B принадлежит множеству $\mathfrak{Q} \setminus \mathfrak{R}$, то утверждение теоремы следует из соображений двойственности.

Теорема доказана.

4.2. Классы, проекция которых совпадает с S или S_{01}. В этом разделе устанавливается верхняя линейная оценка для функции Шеннона по глубине для всех замкнутых классов F из $P_{3,2}$, таких, что $prF \in \{S, S_{01}\}$, и всех конечных базисов класса F.

Установим сначала один факт о глубине формул, реализующих функции из классов вида $pr^{-1}B \cap Z_{2,i}$, где B — произвольный замкнутый класс булевых функций, такой, что $U_{01} \subseteq B$, $i = 0, 1$.

Лемма 4.2.1. *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций, такой, что $U_{01} \subseteq B$. Пусть $H_i = pr^{-1}B \cap Z_{2,i}$, а G_i — произвольная конечная порождающая система класса H_i, $i = 0, 1$. Тогда найдется константа c_i, $i = 0, 1$, такая, что*

$$D_{G_i}(H_i(n)) \leqslant c_i n.$$

Доказательство. Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций, такой, что $U_{01} \subseteq B$. Пусть $H_i = pr^{-1}B \cap Z_{2,i}$, а G_i — произвольная конечная порождающая система класса H_i, $i = 0, 1$. Рассмотрим сначала случай класса H_0.

Каждая функция f из класса $Z_{2,0}$ удовлетворяют следующему условию: если набор $\widetilde{\alpha} \in E_2^n$ получен из набора $\widetilde{\beta} \in E_3^n$ заменой всех двоек на нули, то $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta})$. Значит, значения функции f полностью определяются значениями булевой функции prf. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in H_0$. Тогда выполняется неравенство

$$D_{G_0}(f) \leqslant D_{prG_0}(prf). \tag{4.1}$$

Тогда справедливо соотношение

$$D_{G_0}(H_0(n)) \leqslant D_{prG_0}(B(n)). \tag{4.2}$$

По теореме 1.3.2 существует константа c, такая, что $D_{prG_0}(B(n)) \leqslant cn$. Следовательно, с учетом соотношения (4.2), получаем

$$D_{G_0}(H_0(n)) \leqslant cn.$$

Для класса H_1 доказательство проводится аналогичным образом. Лемма доказана.

Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$ является нулевым доопределением булевой функции $g(x_1, \ldots, x_n)$, если $prf(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$ и для каждого набора $\widetilde{\alpha} \in E_3^n \setminus E_2^n$ выполняется соотношение $f(\widetilde{\alpha}) = 0$. Через $\varepsilon_1^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ обозначим нулевое доопределение булевой функции $e_1^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = x_1$, $n \geqslant 1$. Нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$\varepsilon_1^{(1)}(x_1) = \varepsilon_1^{(2)}(x_1, x_1), \tag{4.3}$$

$$\varepsilon_1^{(i+1)}(x_1, \ldots, x_{i+1}) = \varepsilon_1^{(2)}(\varepsilon_1^{(i)}(x_1, \ldots, x_i), x_{i+1}), \quad i \geqslant 2. \tag{4.4}$$

Следовательно, для любого $n \geqslant 1$ справедливо соотношение $\varepsilon_1^{(n)} \in [\{\varepsilon_1^{(2)}\}]$, причем для $n \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$D_{\{\varepsilon_1^{(2)}\}}(\varepsilon_1^{(n)}) \leqslant n.$$

Обозначим через Ψ_n формулу над системой $\varepsilon_1^{(2)}$, реализующую функцию $\varepsilon_1^{(n+1)}(y, x_1, \ldots, x_{i+1})$, полученную в соответствии с соотношениями (4.3) и (4.4) и с последующим переименованием переменных, $n \geqslant 1$. Очевидно, что при $n \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$D(\Psi_n) \leqslant n. \tag{4.5}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 4.2.2. *Пусть H — произвольный замкнутый класс функций из $P_{3,2}$, такой, что $prH \in \{S, S_{01}\}$. Пусть G — произвольная конечная порождающая система класса H, такая, что $\varepsilon_1^{(2)}(x_1, x_2) \in G$. Тогда существует константа $c = c(G)$, такая, что при всех $n \geqslant 1$ выполняется неравенство*

$$D_G(H(n)) \leqslant cn.$$

Доказательство. Пусть H — произвольный замкнутый класс функций из $P_{3,2}$, такой, что $prH \in \{S, S_{01}\}$. Пусть G — произвольная конечная порождающая система класса H, такая, что $\varepsilon_1^{(2)}(x_1, x_2) \in G$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из класса H. Рассмотрим конечную систему $G \cup \{0\}$. Пусть $F = [G \cup \{0\}]$. Так как $prH \in \{S, S_{01}\}$, то $prF \in \{P_2, T_0\}$. Тогда из теоремы 4.1.1 следует, что существует формула Φ над $G \cup \{0\}$, реализующая функцию f, и константа $\widetilde{c} = \widetilde{c}(G \cup \{0\})$, такие, что $D(\Phi) \leqslant \widetilde{c}n$. Заменим каждое вхождение константы 0 в формулу Φ на формулу Ψ_n (см. ее построение перед леммой). Получится формула $\widehat{\Phi}$ над G, реализующая некоторую функцию $g(y, x_1, \ldots, x_n)$.

Покажем, что $g(y, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_3^n$, $\beta \in E_3$. Если $\widetilde{\alpha} \in E_3^n \setminus E_2^n$, то $\varepsilon_1^{(n+1)}(\beta, \widetilde{\alpha}) = 0$. Поэтому $g(\beta, \widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$. Пусть $\widetilde{\alpha} \in E_2^n$. Если $\beta = 0$ или $\beta = 2$, то $\varepsilon_1^{(n+1)}(\beta, \widetilde{\alpha}) = 0$ и $g(\beta, \widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$. Если $\beta = 1$, то $\varepsilon_1^{(n+1)}(\beta, \widetilde{\alpha}) = 1$. Принимая во внимание самодвойственность функций prf и prg, получим следующую цепочку равенств:

$$g(1, \widetilde{\alpha}) = \overline{g(0, \overline{\widetilde{\alpha}})} = \overline{f(\overline{\widetilde{\alpha}})} = f(\widetilde{\alpha}).$$

Таким образом, формула $\widehat{\Phi}$ реализует функцию f. При этом в силу построения и с учетом соотношения (4.5) выполняется неравенство

$$D(\widehat{\Phi}) \leqslant D(\Phi) + D(\Psi_n) \leqslant \widetilde{c}n + n + 1 \leqslant cn,$$

где c — некоторая константа. Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2.1. *Пусть B — один из двух классов булевых функций: S или S_{01}. Пусть H — произвольный замкнутый класс функций из $P_{3,2}$, такой, что $prH = B$. Пусть G — произвольная конечная порождающая система класса H. Тогда существует константа c такая, что при всех $n \geqslant 1$ выполняется неравенство*

$$D_G(H(n)) \leqslant cn.$$

Доказательство. Пусть B — один из двух классов булевых функций: S или S_{01}. Пусть H — произвольный замкнутый класс функций из $P_{3,2}$, такой, что $prH = B$. Пусть G — произвольная конечная порождающая система класса H. Рассмотрим сначала случай $B = S$. В лемме 1.4.6 приведено описание множества замкнутых классов из $P_{3,2}$, проекция которых совпадает с классом S: в класс S проектируются классы

$$pr^{-1}S,\ Z_{2,0} \cap pr^{-1}S,\ Z_{2,1} \cap pr^{-1}S$$

и только они.

Для классов $Z_{2,0} \cap pr^{-1}S$ и $Z_{2,1} \cap pr^{-1}S$ утверждение теоремы вытекает из леммы 4.2.1.

Легко видеть, что класс $pr^{-1}S$ содержит функцию $\varepsilon_1^{(2)}(x_1, x_2)$. Очевидно, что если G — конечная порождающая система класса $pr^{-1}S$, то и система $G_0 = G \cup \{\varepsilon_1^{(2)}\}$ является конечной порождающей системой класса $pr^{-1}S$. Следовательно, по лемме 4.2.2 найдется константа c_0, такая, что $D_{G_0}(H(n)) \leqslant c_0 n$. Так как переход от одного базиса к другому влечет увеличение сложности функций не более чем в константу раз, то найдется константа c, такая, что $D_G(H(n)) \leqslant cn$.

Перейдем к рассмотрению случая $B = S_{01}$. В лемме 1.4.7 содержится описание множества замкнутых классов из $P_{3,2}$, проекция которых совпадает с классом S_{01}: в класс S_{01} проектируются классы

$$pr^{-1}S_{01},\ T_0^{(2)} \cap pr^{-1}S_{01},\ T_1^{(2)} \cap pr^{-1}S_{01},\ Z_{2,0} \cap pr^{-1}S_{01},\ Z_{2,1} \cap pr^{-1}S_{01}$$

и только они.

Для классов $Z_{2,0} \cap pr^{-1}S_{01}$ и $Z_{2,1} \cap pr^{-1}S_{01}$ утверждение теоремы вытекает из леммы 4.2.1.

Классы $pr^{-1}S_{01}$ и $T_0^{(2)} \cap pr^{-1}S_{01}$ содержат функцию $\varepsilon_1^{(2)}(x_1, x_2)$. Доказательство утверждения теоремы для этих классов следует из леммы 4.2.2 и проводится аналогично случаю класса $pr^{-1}S$.

Класс $T_1^{(2)} \cap pr^{-1}S_{01}$ является двойственным к классу $T_0^{(2)} \cap pr^{-1}S_{01}$ относительно перестановки (01)(2). Поэтому для него утверждение теоремы выполняется в силу принципа двойственности. Теорема доказана.

4.3. Классы, проекция которых совпадает с классом SM. Перейдем к рассмотрению классов, проекция которых совпадает с классом SM. Известно [95], что множество всех классов, проекция которых совпадает с классом SM, является конечным. В [95] приведен метод описания этого множества. Полное описание этого множества можно найти в [84]. Ниже мы не будем опираться на это описание.

План дальнейших рассуждений выглядит следующим образом. Сначала мы введем некоторые обозначения и докажем ряд вспомогательных утверждений. Затем мы определим рекуррентным образом булеву функцию ω_6. Затем для каждой функции $f \in P_{3,2}$ будет доказано одно специальное разложение, получаемое с использованием функции, проекция которой совпадает с функцией ω_6. Наконец, на основе этого разложения будет доказана верхняя оценка для функции Шеннона по глубине для каждого класса, проекция которого является классом SM.

Далее мы будем использовать булеву функцию $\delta_{10}(X^{10})$. Напомним, что

$$\delta_{10}(X^{10}) = \vee \& x_{i_l}^{i_j},$$

где дизъюнкция берется по всем $i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \ldots, 10$, $i_v \neq i_s$ при $v \neq s$, а конъюнкция берется по всем j, l, таким, что $1 \leqslant j < l \leqslant 4$.

Напомним также, что через $d_3(x, y, z)$ мы обозначаем булеву функцию $xy \vee xz \vee yz$.

Определим функцию $\pi(z_1, z_2, X^{10}) \in P_2$. Положим

$$\pi(z_1, z_2, X^{10}) = z_1(z_2 \vee \delta_{10}(X^{10})) \vee z_2\delta_{10}^*(X^{10}), \tag{4.6}$$

где $\delta_{10}^*(X^{10})$ — булева функция, двойственная к функции $\delta_{10}(X^{10})$.

Очевидно, что выполняется следующее утверждение.

Лемма 4.3.1. *Функция $\pi(z_1, z_2, X^{10})$ принадлежит классу SM.*

Определим функции $\omega_i \in P_2$, $i = 2, 3, 4, 5, 6$, следующим образом. Положим

$$\omega_2(z_1, z_2, X^{10}) = \pi(z_1, z_2, X^{10}), \tag{4.7}$$

$$\omega_3(z_1, z_2, z_3, X^{10}) = d_3(\omega_2(z_1, z_2, X^{10}), \omega_2(z_1, z_3, X^{10}), \omega_2(z_2, z_3, X^{10})), \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}\omega_4(z_1, z_2, z_3, z_4, X^{10}) &= \\ &= d_3(\omega_3(z_1, z_2, z_3, X^{10}), \omega_3(z_1, z_2, z_4, X^{10}), \omega_3(z_1, z_3, z_4, X^{10})),\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}&\omega_5(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, X^{10}) = \\ &= d_3(\omega_4(z_1, z_2, z_3, z_4, X^{10}), \omega_4(z_1, z_2, z_3, z_5, X^{10}), \omega_4(z_1, z_2, z_4, z_5, X^{10})),\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\omega_6(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, X^{10}) = \\ = d_3(\omega_5(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, X^{10}), \omega_5(z_1, z_2, z_3, z_4, z_6, X^{10}), \omega_5(z_1, z_2, z_3, z_5, z_6, X^{10})). \tag{4.11}$$

Отметим, что из определений и леммы 4.3.1 следует, что функции ω_i, $i = 2, 3, 4, 5, 6$, принадлежат классу SM.

Обозначим через $\mathbb{Q}_i$ множество функций $\Omega_i \in P_{3,2}$, таких, что $pr\Omega_i = \omega_i$, $i = 2, 3, 4, 5, 6$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$, $n \geqslant 5$. Определим следующим образом функции $g_i^f(y_1, \ldots, y_i, x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$, $i = 2, 3, 4, 5, 6$. Положим

$$g_i^f(y_1, \ldots, y_i, x_1, \ldots, x_n) = \\ = f(x_1, \ldots, x_n)(j_1(y_1) \vee \ldots \vee j_1(y_i)) \vee j_1(y_1) \cdot \ldots \cdot j_1(y_i). \tag{4.12}$$

Докажем несколько свойств функций Ω_i, $i = 2, 3, 4, 5, 6$. Напомним, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$, и любого p, $n \geqslant p \geqslant 2$, мы обозначаем через $Y^p = Y^p(f)$ набор функций, получающийся из набора переменных X^p подстановкой функции f_j^i вместо переменной x_j^i для всех i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$.

Лемма 4.3.2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$, $n \geqslant 10$, и $\Omega_2 \in \mathbb{Q}_2$. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in E_3^2$, $\gamma_i = j_1(\alpha_i)$, $i = 1, 2$, $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in E_3^n$. Тогда выполняется равенство*

$$\Omega_2(\gamma_1, \gamma_2, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = g_2^f(\alpha_1, \alpha_2, \widetilde{\beta}).$$

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$, $n \geqslant 10$, и $\Omega_2 \in \mathbb{Q}_2$. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in E_3^2$, $\gamma_i = j_1(\alpha_i)$, $i = 1, 2$, $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in E_3^n$. Так как $\gamma_1, \gamma_2 \in E_2$, а также в силу того, что функции из набора Y^{10} не принимают значение 2, выполняется равенство

$$\Omega_2(\gamma_1, \gamma_2, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = \omega_2(\gamma_1, \gamma_2, Y^{10}(\widetilde{\beta})). \tag{4.13}$$

По определению функции ω_2

$$\omega_2(\gamma_1, \gamma_2, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = \gamma_1(\gamma_2 \vee \delta_{10}(Y^{10}(\widetilde{\beta}))) \vee \gamma_2 \delta_{10}^*(Y^{10}(\widetilde{\beta})). \tag{4.14}$$

Пусть Δ_{10} — произвольная функция из $P_{3,2}$, такая, что $pr\Delta_{10} = \delta_{10}$. Тогда справедливо равенство $\delta_{10}(Y^{10}(\widetilde{\beta})) = \Delta_{10}(Y^{10}(\widetilde{\beta}))$. В силу леммы 1.5.4 выполняется соотношение $\Delta_{10}(Y^{10}(\widetilde{\beta})) = f(\widetilde{\beta})$. Следовательно, $\delta_{10}(Y^{10}(\widetilde{\beta})) = f(\widetilde{\beta})$. Аналогично, с учетом замечания к лемме 1.5.4, можно доказать, что $\delta_{10}^*(Y^{10}(\widetilde{\beta})) = f(\widetilde{\beta})$. Тогда

$$\omega_2(\gamma_1, \gamma_2, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = \gamma_1(\gamma_2 \vee f(\widetilde{\beta})) \vee \gamma_2 f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\beta}) \cdot (\gamma_1 \vee \gamma_2) \vee \gamma_1\gamma_2.$$

Из определения вытекает, что

$$g_2^f(\alpha_1, \alpha_2, \widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\beta}) \cdot (\gamma_1 \vee \gamma_2) \vee \gamma_1\gamma_2.$$

Следовательно,

$$\Omega_2(\gamma_1, \gamma_2, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = g_2^f(\alpha_1, \alpha_2, \widetilde{\beta}).$$

Лемма доказана.

Лемма 4.3.3. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$, $n \geqslant 10$, *и* $\Omega_3 \in \mathbb{Q}_3$. *Пусть* $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in E_3^3$, $\gamma_i = j_1(\alpha_i)$, $i = 1, 2, 3$, $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in E_3^n$. *Тогда выполняется равенство*

$$\Omega_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \widetilde{\beta}).$$

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$, $n \geqslant 10$, и $\Omega_3 \in \mathbb{Q}_3$. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in E_3^3$, $\gamma_i = j_1(\alpha_i)$, $i = 1, 2, 3$, $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in E_3^n$. Так как $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in E_2$, а также в силу того, что функции из набора Y^{10} не принимают значение 2, выполняется равенство

$$\Omega_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = \omega_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, Y^{10}(\widetilde{\beta})), \tag{4.15}$$

По определению функции ω_3

$$\omega_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, Y^{10}(\widetilde{\beta})) =$$

$$= d_3(\omega_2(\gamma_1, \gamma_2, Y^{10}(\widetilde{\beta})), \omega_2(\gamma_1, \gamma_3, Y^{10}(\widetilde{\beta})), \omega_2(\gamma_2, \gamma_3, Y^{10}(\widetilde{\beta}))). \tag{4.16}$$

Пусть Ω_2 — произвольная функция из множества $\mathbb{Q}_2$. Так как $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in E_2$, а также в силу того, что функции из набора Y^{10} не принимают значение 2, выполняются равенства

$$\omega_2(\gamma_1, \gamma_2, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = \Omega_2(\gamma_1, \gamma_2, Y^{10}(\widetilde{\beta})), \tag{4.17}$$

$$\omega_2(\gamma_1, \gamma_3, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = \Omega_2(\gamma_1, \gamma_3, Y^{10}(\widetilde{\beta})), \tag{4.18}$$

$$\omega_2(\gamma_2, \gamma_3, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = \Omega_2(\gamma_2, \gamma_3, Y^{10}(\widetilde{\beta})). \tag{4.19}$$

По лемме 4.3.2

$$\Omega_2(\gamma_1, \gamma_2, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = g_2^f(\alpha_1, \alpha_2, \widetilde{\beta}), \tag{4.20}$$

$$\Omega_2(\gamma_1, \gamma_3, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = g_2^f(\alpha_1, \alpha_3, \widetilde{\beta}), \tag{4.21}$$

$$\Omega_2(\gamma_2, \gamma_3, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = g_2^f(\alpha_2, \alpha_3, \widetilde{\beta}). \tag{4.22}$$

Из равенств (4.15)–(4.22) получаем, что

$$\Omega_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = d_3(g_2^f(\alpha_1, \alpha_2, \widetilde{\beta}), g_2^f(\alpha_1, \alpha_3, \widetilde{\beta}), g_2^f(\alpha_2, \alpha_3, \widetilde{\beta})). \tag{4.23}$$

Покажем, что

$$d_3(g_2^f(\alpha_1, \alpha_2, \widetilde{\beta}), g_2^f(\alpha_1, \alpha_3, \widetilde{\beta}), g_2^f(\alpha_2, \alpha_3, \widetilde{\beta})) = g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \widetilde{\beta}). \tag{4.24}$$

Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$. Тогда из определения функции g_2^f следует, что

$$g_2^f(\alpha_1,\alpha_2,\widetilde{\beta})=g_2^f(\alpha_1,\alpha_3,\widetilde{\beta})=g_2^f(\alpha_2,\alpha_3,\widetilde{\beta})=1,$$

$$g_3^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\widetilde{\beta})=1.$$

Поэтому равенство (4.24) выполняется.

2. Пусть существуют i,j, такие, что $\alpha_i=1$, $\alpha_j\neq 1$, $1\leqslant i,j\leqslant 3$, $i\neq j$. Без ограничения общности будем считать, что $\alpha_1=1, \alpha_2\neq 1$. Тогда из определения функции g_2^f следует, что

$$g_2^f(\alpha_1,\alpha_2,\widetilde{\beta})=f(\widetilde{\beta}),$$

$$g_2^f(\alpha_1,\alpha_3,\widetilde{\beta})\geqslant f(\widetilde{\beta}),$$

$$g_2^f(\alpha_2,\alpha_3,\widetilde{\beta})\leqslant f(\widetilde{\beta}),$$

$$g_3^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\widetilde{\beta})=f(\widetilde{\beta}).$$

Следовательно,

$$d_3(g_2^f(\alpha_1,\alpha_2,\widetilde{\beta}),g_2^f(\alpha_1,\alpha_3,\widetilde{\beta}),g_2^f(\alpha_2,\alpha_3,\widetilde{\beta}))=g_3^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\widetilde{\beta})$$

и равенство (4.24) выполняется.

3. Пусть $\alpha_1\neq 1$, $\alpha_2\neq 1$, $\alpha_3\neq 1$. Тогда из определения функции g_2^f следует, что

$$g_2^f(\alpha_1,\alpha_2,\widetilde{\beta})=g_2^f(\alpha_1,\alpha_3,\widetilde{\beta})=g_2^f(\alpha_2,\alpha_3,\widetilde{\beta})=0,$$

$$g_3^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\widetilde{\beta})=0.$$

Отсюда вытекает, что равенство (4.24) выполняется.

Таким образом, мы доказали равенство (4.24). Из равенств (4.23) и (4.24) следует, что

$$\Omega_3(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,Y^{10}(\widetilde{\beta}))=g_3^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\widetilde{\beta}).$$

Лемма доказана.

Лемма 4.3.4. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n)\in P_{3,2}$, $n\geqslant 10$, *и* $\Omega_4\in\mathbb{Q}_4$. *Пусть* $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\in E_3^4$, $\gamma_i=j_1(\alpha_i)$, $i=1,2,3,4$, $\widetilde{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in E_3^n$. *Тогда выполняется равенство*

$$\Omega_4(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,Y^{10}(\widetilde{\beta}))=g_4^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\widetilde{\beta}).$$

Доказательство. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in P_{3,2}$, $n\geqslant 10$, и $\Omega_4\in\mathbb{Q}_4$. Пусть $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\in E_3^4$, $\gamma_i=j_1(\alpha_i)$, $i=1,2,3,4$, $\widetilde{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in E_3^n$. Так как $\gamma_i\in E_2$, $i=1,2,3,4$, а также в силу того, что функции из набора Y^{10} не принимают значение 2, выполняется равенство

$$\Omega_4(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,Y^{10}(\widetilde{\beta}))=\omega_4(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,Y^{10}(\widetilde{\beta})). \tag{4.25}$$

По определению функции ω_4

$$\omega_4(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, Y^{10}(\widetilde{\beta})) =$$

$$= d_3(\omega_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, Y^{10}(\widetilde{\beta})), \omega_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, Y^{10}(\widetilde{\beta})), \omega_3(\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4, Y^{10}(\widetilde{\beta}))). \quad (4.26)$$

Пусть Ω_3 — произвольная функция из множества $\mathbb{Q}_3$. В силу принадлежности $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ множеству E_2, а также поскольку функции из набора Y^{10} не принимают значение 2, выполняются равенства

$$\omega_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = \Omega_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, Y^{10}(\widetilde{\beta})), \quad (4.27)$$

$$\omega_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = \Omega_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, Y^{10}(\widetilde{\beta})), \quad (4.28)$$

$$\omega_3(\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = \Omega_3(\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4, Y^{10}(\widetilde{\beta})). \quad (4.29)$$

По лемме 4.3.3

$$\Omega_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \widetilde{\beta}), \quad (4.30)$$

$$\Omega_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \widetilde{\beta}), \quad (4.31)$$

$$\Omega_3(\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = g_3^f(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta}). \quad (4.32)$$

Из равенств (4.25)–(4.32) получаем, что

$$\Omega_4(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, Y^{10}(\widetilde{\beta})) =$$
$$= d_3(g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \widetilde{\beta}), g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \widetilde{\beta}), g_3^f(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta})). \quad (4.33)$$

Покажем, что

$$d_3(g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \widetilde{\beta}), g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \widetilde{\beta}), g_3^f(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta})) = g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta}). \quad (4.34)$$

Положим

$$A = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \gamma_4, \quad B = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_4.$$

Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $B = 1$. Очевидно, что в этом случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$. Тогда из определения функций g_3^f и g_4^f следует, что

$$g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \widetilde{\beta}) = g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \widetilde{\beta}) = g_3^f(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta}) = 1,$$

$$g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta}) = 1.$$

Поэтому равенство (4.34) выполняется.

2. Пусть $A=1$, $B=0$. Тогда из определения функции g_4^f следует, что

$$g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\beta}).$$

Из равенства $A = 1$ следует, что среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ есть, по крайней мере, одна единица. Следовательно, среди трех троек $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$ и $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)$, по крайней мере, две содержат хотя бы одну единицу. Тогда среди трех чисел

$$g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \widetilde{\beta}),\ \ g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \widetilde{\beta}),\ \ g_3^f(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta}),$$

по крайней мере, два не меньше $f(\widetilde{\beta})$. Следовательно,

$$d_3(g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \widetilde{\beta}), g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \widetilde{\beta}), g_3^f(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta})) \geqslant f(\widetilde{\beta}).$$

Из равенства $B = 0$ следует, что среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ есть, по крайней мере, одно число, отличное от единицы. Следовательно, среди трех троек $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$ и $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)$, по крайней мере, две содержат хотя бы одно число, отличное от единицы. Тогда среди трех чисел

$$g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \widetilde{\beta}),\ \ g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \widetilde{\beta}),\ \ g_3^f(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta}),$$

по крайней мере, два не больше $f(\widetilde{\beta})$. Следовательно,

$$d_3(g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \widetilde{\beta}), g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \widetilde{\beta}), g_3^f(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta})) \leqslant f(\widetilde{\beta}).$$

Таким образом,

$$d_3(g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \widetilde{\beta}), g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \widetilde{\beta}), g_3^f(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta})) = f(\widetilde{\beta}) =$$

$$= g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta})$$

и равенство (4.34) выполняется.

3. Пусть $A = 0$. Очевидно, что в этом случае среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ нет единиц. Тогда из определения функций g_3^f и g_4^f следует, что

$$g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \widetilde{\beta}) = g_3^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \widetilde{\beta}) = g_3^f(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta}) = 0,$$

$$g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta}) = 0.$$

Отсюда вытекает, что равенство (4.34) выполняется.

Таким образом, мы доказали равенство (4.34). Из равенств (4.33) и (4.34) следует, что

$$\Omega_4(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta}).$$

Лемма доказана.

Лемма 4.3.5. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$, $n \geqslant 10$, $\Omega_5 \in \mathbb{Q}_5$, $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in E_3^n$ *и* $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in E_3^5$. *Пусть* $\gamma_i = j_1(\alpha_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. *Тогда выполняется равенство*

$$\Omega_5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = g_5^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \widetilde{\beta}).$$

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$, $n \geqslant 10$, и $\Omega_5 \in \mathbb{Q}_5$. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in E_3^5$, $\gamma_i = j_1(\alpha_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, и пусть $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in E_3^n$. Так как $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5 \in E_2$, а также в силу того, что функции из набора Y^{10} не принимают значение 2, выполняется равенство

$$\Omega_5(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5,Y^{10}(\widetilde{\beta}))=\omega_5(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5,Y^{10}(\widetilde{\beta})). \tag{4.35}$$

По определению функции ω_5

$$\omega_5(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5,Y^{10}(\widetilde{\beta}))=$$

$$=d_3(\omega_4(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,Y^{10}(\widetilde{\beta})),\omega_4(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_5,Y^{10}(\widetilde{\beta})),\omega_4(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_4,\gamma_5,Y^{10}(\widetilde{\beta}))). \tag{4.36}$$

Пусть Ω_4 — произвольная функция из множества $\mathbb{Q}_4$. В силу того, что $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5\in E_2$, а также поскольку функции из набора Y^{10} не принимают значение 2, выполняются равенства

$$\omega_4(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,Y^{10}(\widetilde{\beta}))=\Omega_4(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,Y^{10}(\widetilde{\beta})), \tag{4.37}$$

$$\omega_4(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_5,Y^{10}(\widetilde{\beta}))=\Omega_4(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_5,Y^{10}(\widetilde{\beta})), \tag{4.38}$$

$$\omega_4(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_4,\gamma_5,Y^{10}(\widetilde{\beta}))=\Omega_4(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_4,\gamma_5,Y^{10}(\widetilde{\beta})). \tag{4.39}$$

По лемме 4.3.4

$$\Omega_4(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,Y^{10}(\widetilde{\beta}))=g_4^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\widetilde{\beta}), \tag{4.40}$$

$$\Omega_4(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_5,Y^{10}(\widetilde{\beta}))=g_4^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5,\widetilde{\beta}), \tag{4.41}$$

$$\Omega_4(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_4,\gamma_5,Y^{10}(\widetilde{\beta}))=g_4^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5,\widetilde{\beta}). \tag{4.42}$$

Из равенств (4.35)–(4.42) получаем, что

$$\begin{aligned}&\Omega_5(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5,Y^{10}(\widetilde{\beta}))=\\&\quad=d_3(g_4^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\widetilde{\beta}),g_4^f(\alpha_1,\alpha 2,\alpha_3,\alpha_5,\widetilde{\beta}),g_4^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5,\widetilde{\beta})).\end{aligned} \tag{4.43}$$

Покажем, что

$$\begin{aligned}d_3(g_4^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\widetilde{\beta}),g_4^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5,\widetilde{\beta}),g_4^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5,\widetilde{\beta}))=\\=g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\widetilde{\beta}).\end{aligned} \tag{4.44}$$

Положим

$$A=\gamma_1\vee\gamma_2\vee\gamma_3\vee\gamma_4\vee\gamma_5,\quad B=\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\gamma_4\cdot\gamma_5.$$

Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $B=1$. Очевидно, что в этом случае $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=1$. Тогда из определения функций g_4^f и g_5^f следует, что

$$g_4^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\widetilde{\beta})=g_4^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5,\widetilde{\beta})=g_4^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5,\widetilde{\beta})=1,$$

$$g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\widetilde{\beta})=1.$$

Поэтому равенство (4.44) выполняется.

2. Пусть $A=1$, $B=0$. Тогда из определения функции g_5^f следует, что

$$g_5^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\beta}).$$

Из равенства $A=1$ следует, что среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ есть, по крайней мере, одна единица. Следовательно, среди трех четверок $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5)$, $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ и $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5)$, по крайней мере, две содержат хотя бы одну единицу. Тогда среди трех чисел

$$g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta}),\ g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \widetilde{\beta}),\ g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \widetilde{\beta}),$$

по крайней мере, два не меньше $f(\widetilde{\beta})$. Следовательно,

$$d_3(g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta}), g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \widetilde{\beta}), g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \widetilde{\beta})) \geqslant f(\widetilde{\beta}).$$

Из равенства $B=0$ следует, что среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ есть, по крайней мере, одно число, отличное от единицы. Следовательно, среди трех четверок $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5)$ и $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5)$, по крайней мере, две содержат хотя бы одно число, отличное от единицы. Тогда среди трех чисел

$$g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta}),\ g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \widetilde{\beta}),\ g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \widetilde{\beta}),$$

по крайней мере, два не больше $f(\widetilde{\beta})$. Следовательно,

$$d_3(g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta}), g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \widetilde{\beta}), g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \widetilde{\beta})) \leqslant f(\widetilde{\beta}).$$

Таким образом,

$$d_3(g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\widetilde{\beta}), g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \widetilde{\beta}), g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \widetilde{\beta})) = f(\widetilde{\beta}) =$$

$$= g_5^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \widetilde{\beta})$$

и равенство (4.34) выполняется.

3. Пусть $A=0$. Очевидно, что в этом случае среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ нет единиц. Тогда из определения функций g_4^f и g_5^f следует, что

$$g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \widetilde{\beta}) = g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \widetilde{\beta}) = g_4^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \widetilde{\beta}) = 0,$$

$$g_5^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \widetilde{\beta}) = 0.$$

Отсюда вытекает, что равенство (4.44) выполняется.

Таким образом, мы доказали равенство (4.44). Из равенств (4.43) и (4.44) следует, что

$$\Omega_5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = g_5^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \widetilde{\beta}).$$

Лемма доказана.

Лемма 4.3.6. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$, $n \geqslant 10$, $\Omega_6 \in \mathbb{Q}_6$, $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in E_3^n$ *и* $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \in E_3^6$. *Пусть* $\gamma_i = j_1(\alpha_i)$, $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$. *Тогда выполняется равенство*

$$\Omega_6(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = g_6^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \widetilde{\beta}).$$

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$, $n \geqslant 10$, и $\Omega_6 \in \mathbb{Q}_6$. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \in E_3^6$, $\gamma_i = j_1(\alpha_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in E_3^n$. Так как $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6 \in E_2$, а также в силу того, что функции из набора Y^{10} не принимают значение 2, выполняется равенство

$$\Omega_6(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = \omega_6(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, Y^{10}(\widetilde{\beta})). \tag{4.45}$$

По определению функции ω_6

$$\begin{aligned}\omega_6(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = \\ = d_3(\omega_5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, Y^{10}(\widetilde{\beta})), \omega_5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_5, \gamma_6, Y^{10}(\widetilde{\beta})), \\ \omega_5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, Y^{10}(\widetilde{\beta}))).\end{aligned} \tag{4.46}$$

Пусть Ω_5 — произвольная функция из множества $\mathbb{Q}_5$. В силу принадлежности $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ множеству E_2, а также поскольку функции из набора Y^{10} не принимают значение 2, выполняются равенства

$$\omega_5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = \Omega_5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, Y^{10}(\widetilde{\beta})), \tag{4.47}$$

$$\omega_5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_6, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = \Omega_5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_6, Y^{10}(\widetilde{\beta})), \tag{4.48}$$

$$\omega_5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_5, \gamma_6, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = \Omega_5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_5, \gamma_6, Y^{10}(\widetilde{\beta})). \tag{4.49}$$

По лемме 4.3.5

$$\Omega_5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = g_5^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_4, \gamma_5 \widetilde{\beta}), \tag{4.50}$$

$$\Omega_5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_6, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = g_5^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \widetilde{\beta}), \tag{4.51}$$

$$\Omega_5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_5, \gamma_6, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = g_5^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \widetilde{\beta}). \tag{4.52}$$

Из равенств (4.45)–(4.52) получаем, что

$$\begin{aligned}\Omega_6(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = \\ = d_3(g_5^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \widetilde{\beta}), g_5^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \widetilde{\beta}), \\ g_5^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \widetilde{\beta})).\end{aligned} \tag{4.53}$$

Покажем, что

$$\begin{aligned}d_3(g_5^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \widetilde{\beta}), g_5^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \widetilde{\beta}), g_5^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \widetilde{\beta})) = \\ = g_6^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \widetilde{\beta}).\end{aligned} \tag{4.54}$$

Положим

$$A = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \gamma_4 \vee \gamma_5 \vee \gamma_6, \quad B = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_4 \cdot \gamma_5 \cdot \gamma_6.$$

Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $B=1$. Очевидно, что в этом случае $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_6=1$. Тогда из определения функций g_5^f и g_6^f следует, что

$$g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\widetilde{\beta}) = g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\widetilde{\beta}) = g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_5,\widetilde{\beta}) = 1,$$

$$g_6^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\widetilde{\beta}) = 1.$$

Поэтому равенство (4.54) выполняется.

2. Пусть $A=1$, $B=0$. Тогда из определения функции g_6^f следует, что

$$g_6^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\beta}).$$

Из равенства $A=1$ следует, что среди чисел $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ есть, по крайней мере, одна единица. Следовательно, среди трех пятерок $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6)$ и $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_6)$, по крайней мере, две содержат хотя бы одну единицу. Тогда среди трех чисел

$$g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\widetilde{\beta}),\ g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\widetilde{\beta}),\ g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_6,\widetilde{\beta}),$$

по крайней мере, два не меньше $f(\widetilde{\beta})$. Следовательно,

$$d_3(g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\widetilde{\beta}),\\ g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\widetilde{\beta}), g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_6,\widetilde{\beta})) \geqslant f(\widetilde{\beta}).$$

Из равенства $B=0$ следует, что среди чисел $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ есть, по крайней мере, одно число, отличное от единицы. Следовательно, среди пятерок $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6)$ и $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_6)$, по крайней мере, две содержат хотя бы одно число, отличное от единицы. Тогда среди трех чисел

$$g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\widetilde{\beta}),\ g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\widetilde{\beta}),\ g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_6,\widetilde{\beta}),$$

по крайней мере, два не больше $f(\widetilde{\beta})$. Следовательно,

$$d_3(g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\widetilde{\beta}),\\ g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\widetilde{\beta}), g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_6,\widetilde{\beta})) \leqslant f(\widetilde{\beta}).$$

Таким образом,

$$d_3(g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\widetilde{\beta}), g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\widetilde{\beta}), g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_6,\widetilde{\beta})) =\\ = f(\widetilde{\beta}) = g_6^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\widetilde{\beta}) \quad (4.55)$$

и равенство (4.34) выполняется.

3. Пусть $A=0$. Очевидно, что в этом случае среди чисел $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ нет единиц. Тогда из определения функций g_3^f и g_4^f следует, что

$$g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\widetilde{\beta}) = g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\widetilde{\beta}) = g_5^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_6,\widetilde{\beta}) = 0,$$

$$g_6^f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\widetilde{\beta}) = 0.$$

Отсюда вытекает, что равенство (4.54) выполняется.

Таким образом, мы доказали равенство (4.54). Из равенств (4.53) и (4.54) следует, что

$$\Omega_6(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, Y^{10}(\widetilde{\beta})) = g_6^f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \widetilde{\beta}).$$

Лемма доказана.

Отметим одно следствие, вытекающее из последней леммы.

Следствие. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$, $n \geqslant 10$, $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. *Пусть* $\Omega_6 \in \mathbb{Q}_6$. *Тогда выполняется равенство*

$$\Omega_6(j_1(z_1), j_1(z_2), j_1(z_3), j_1(z_4), j_1(z_5), j_1(z_6), Y^{10}(\widetilde{x})) = g_6^f(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, \widetilde{x}). \tag{4.56}$$

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$, $n \geqslant 4$. Обозначим через Z^4 набор из шести функций $(f_2^1, f_3^1, f_4^1, f_3^2, f_4^2, f_4^3)$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 4.3.7. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$, $n \geqslant 10$. *Пусть* $\Omega_6 \in \mathbb{Q}_6$. *Тогда выполняется равенство*

$$\Omega_6(Z^4, Y^{10}) = f. \tag{4.57}$$

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{3,2}$, $n \geqslant 10$, $\Omega_6 \in \mathbb{Q}_6$, $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Пусть формула $\Omega_6(Z^4, Y^{10})$ реализует некоторую функцию $F(x_1, \ldots, x_n)$ из $P_{3,2}$. Пусть $\widetilde{\alpha}$ — произвольный набор из E_3^n. Покажем, что $F(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$. В силу равенства (4.56) выполняется равенство

$$\Omega_6(j_1(z_1), j_1(z_2), j_1(z_3), j_1(z_4), j_1(z_5), j_1(z_6), Y^{10}(\widetilde{x})) = g_6^f(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, \widetilde{x}).$$

Поскольку для любой функции $g \in P_{3,2}$ справедливо равенство $j_1(g) = g$, то

$$\Omega_6(Z^4, Y^{10}(\widetilde{x})) = g_6^f(Z^4, \widetilde{x}).$$

По определению

$$g_6^f(Z^4, x_1, \ldots, x_n) = f \cdot (f_2^1 \vee f_3^1 \vee f_4^1 \vee f_3^2 \vee f_4^2 \vee f_4^3) \vee f_2^1 \cdot f_3^1 \cdot f_4^1 \cdot f_3^2 \cdot f_4^2 \cdot f_4^3. \tag{4.58}$$

Докажем сначала неравенство $F(\widetilde{\alpha}) \geqslant f(\widetilde{\alpha})$. Так среди любых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in E_3$ найдутся хотя бы два одинаковых, то среди шести функций $f_2^1, f_3^1, f_4^1, f_3^2, f_4^2, f_4^3$ найдется хотя бы одна функция t, такая, что $t(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$. Поэтому $F(\widetilde{\alpha}) \geqslant f(\widetilde{\alpha})$.

Докажем теперь неравенство $F(\widetilde{\alpha}) \leqslant f(\widetilde{\alpha})$. В силу упомянутого выше свойства функция $f_2^1 \cdot f_3^1 \cdot f_4^1 \cdot f_3^2 \cdot f_4^2 \cdot f_4^3$ принимает на наборе $\widetilde{\alpha}$ значение, не большее $f(\widetilde{\alpha})$. Кроме того, функция $f \cdot (f_2^1 \vee f_3^1 \vee f_4^1 \vee f_3^2 \vee f_4^2 \vee f_4^3)$ принимает на наборе $\widetilde{\alpha}$ значение, не большее $f(\widetilde{\alpha})$. Следовательно, $F(\widetilde{\alpha}) \leqslant f(\widetilde{\alpha})$. Лемма доказана.

Теорема 4.3.1. *Пусть H — произвольный замкнутый класс функций из $P_{3,2}$, такой, что $prH = SM$, а G — произвольная конечная порождающая система класса H. Тогда существует константа $c = c(G)$ такая, что при всех $n \geqslant 1$ выполняется неравенство*

$$D_G(H(n)) \leqslant cn.$$

Доказательство. Пусть H — замкнутый класс функций из $P_{3,2}$, $prH = SM$. Так как $\omega_6 \in SM$ и $prH = SM$, то найдется функция Ω_6 из H, такая, что $pr\Omega_6 = \omega_6$. Пусть $f^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \in H$, $n \geqslant 10$. Пусть $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Из леммы 4.3.7 следует, что выполняется равенство

$$f^{(n)} = \Omega_6(Z^4, Y^{10}(\widetilde{x})).$$

Каждая из функций в наборах Z^4 и Y^{10} зависит не более чем от $n-1$ переменных. Следовательно, множество $G_0 = \{\Omega_6\} \cup H(9)$ является порождающей системой класса H. Кроме того, выполняется неравенство

$$D_{G_0}(f^{(n)}) \leqslant 1 + D_{G_0}(H(n-1)).$$

Поэтому найдется константа c_0, такая, что $D_{G_0}(H(n)) \leqslant c_0 n$. Так как переход от одной порождающей системы к другой влечет увеличение глубины функций не более чем в константу раз, то для любого конечного базиса G класса H существует константа $c = c(G)$ такая, что $D_G(H(n)) \leqslant cn$. Теорема доказана.

Положим

$$N_1 = \{P_2, T_0, T_1, T_{01}, M, M_0, M_1, M_{01}, S, S_{01}, SM,$$
$$O^m, O_0^m, MO^m, MO_0^m, I^m, I_1^m, MI^m, MI_1^m, \quad 2 \leqslant m < \infty\}.$$

С учетом теорем 4.1.1, 4.2.1, 4.3.1, а также с учетом стандартных мощностных оценок получаем следующую теорему.

Теорема 4.3.2. *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций из множества N_1, H — произвольный замкнутый класс функций из $P_{3,2}$, такой, что $prH = B$, а G — произвольная конечная порождающая система класса H. Тогда выполняется соотношение*

$$D_G(H(n)) \asymp n.$$

Таким образом, для любого замкнутого класса булевых функций B, такого, что $|\mathfrak{N}(B)| < \infty$, для любого замкнутого класса H, такого, что $prH = B$, и для любой конечной порождающей системы класса H получен порядок функции Шеннона по глубине.

Автор выражает глубокую признательность профессору А. Б. Угольникову за большое внимание, уделенное данной работе. Также автор благодарит профессора Р. М. Колпакова и доцента О. С. Дудакову за ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А.Е. Метод бесповторной редукции синтеза самокорректирующихся схем // Доклады АН СССР. — 1985. — Т. 283, № 2. — С. 265–269.
2. Андреев А.Е. О сложности монотонных функций // Вестник МГУ. Математика. Механика. — М.: Изд-во МГУ. — 1985. — № 4. — С. 83–87.
3. Андреев А.Е. О синтезе схем из функциональных элементов в полных монотонных базисах // Математические вопросы кибернетики. Вып.1. — М.: Наука, 1988. — С.114–139.
4. Андреев А.Е. О синтезе функциональных сетей. Докт. дисс. — М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1985.
5. Байрамов Р.А. Об одной серии предполных классов в k-значной логике // Кибернетика. — 1967.— Т. 1.— С. 7–9.
6. Буевич В.А. Вариант доказательства критерия полноты для функций k-значной логики // Дискретная математика. — М.: Наука. — 1996.— Т. 8, вып. 4. — С. 11–36.
7. Васильев Ю.Л., Глаголев В.В. Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, I. — М.: Наука, 1974. — С. 99–148.

8. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2004.
9. Гашков С.Б. О параллельном вычислении некоторых классов многочленов с растущим числом переменных // Вестник МГУ. Математика. Механика. — М.: Изд-во МГУ. — 1990. — №2.— С. 88–92.
10. Дагаев Д.А. О сложности псевдолинейных функций // Вестник МГУ. Математика. Механика. — М.: Изд-во МГУ. — 2010.— №2.— С. 53–56.
11. Дагаев Д.А. О сложности функций из некоторых классов трехзначной логики // Вестник МГУ. Математика. Механика. — М.: Изд-во МГУ. — 2011. — №3. — С. 60–63.
12. Дагаев Д.А. О поведении функций Шеннона для некоторых семейств классов функций трехзначной логики // Вестник МГУ. Математика. Механика. — М.: Изд-во МГУ. — 2012. — №4. — С. 58–61.
13. Захарова Е.Ю. Об одном достаточном условии полноты в P_k // Проблемы кибернетики. Вып. 16. — М.: Наука, 1966. — С. 239–244.
14. Захарова Е.Ю. Критерий полноты системы функций из P_k // Проблемы кибернетики. Вып. 18. — М.: Наука, 1967. — С. 5–10.
15. Захарова Е.Ю. Реализация функций из P_k формулами // Матем. заметки. — 1972. — Т. 11, №1. — С. 99–108.
16. Захарова Е.Ю., Яблонский С.В. Некоторые свойства невырожденных суперпозиций в P_k // Матем. заметки. — 1972. — Т. 12, №1. — С. 3–12.
17. Коробков В.К. Оценка числа монотонных функций алгебры логики и сложности алгоритма отыскания разрешающего множества для произвольной монотонной функции алгебры логики // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 150, №4.
18. Коробков В.К. О монотонных функциях алгебры логики // Проблемы кибернетики. Вып. 13. — М.: Наука, 1965. — С. 5–28.
19. Кудрявцев В.Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во МГУ, 1982.
20. Кузнецов А.В. О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. — М.: Изд-во АН СССР. — 1956. — Т. 2. — С. 145–146.
21. Кузнецов А.В. Алгебра логики и ее обобщения // Математика в СССР за 40 лет (1917–1957). — 1959. — Т. 1. — С. 102–115.
22. Ложкин С.А. Новые, более точные оценки функций Шеннона для сложности управляющих систем // Дискретный анализ и исследование операций. — 1995. — Т. 2, №3. — С. 77–78.
23. Ложкин С.А. О синтезе некоторых типов схем на основе сдвиговых разбиений, порожденных универсальными матрицами // Вестник МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. — М.: Изд-во МГУ. — 1996. — №1. — С. 62–69.
24. Ложкин С.А. О сложности реализации функций k-значной логики формулами и квазиформулами // Материалы XI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (г. Ульяновск, 10–14 июня 1996 г.). — М.: РГГУ. — 1996. — С. 125–127.
25. Ложкин С.А. Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. — М.: Наука. — 1996. — С. 190–214.
26. Ложкин С.А. Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем. Докт. дисс. — М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1997.
27. Ложкин С.А. Об асимптотическом поведении функции Шеннона для сложности схем из функциональных элементов в k-значной логике // Труды IV Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Красновидово, 19–25 июня 2000 г.) — М.: МАКС Пресс. — 2000. — С. 64–67.
28. Лупанов О.Б. О синтезе контактных схем // Доклады АН СССР. — 1958. — Т. 119, №1. — С. 23–26.
29. Лупанов О.Б. Об одном методе синтеза схем // Известия вузов, Радиофизика I. — 1958. — С. 120–140.
30. Лупанов О.Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. — М.: Наука, 1960. — С. 61–80.
31. Лупанов О.Б. Об одном классе схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 7. — М.: Наука, 1961. — С. 60–114.
32. Лупанов О.Б. О принципе локального кодирования и реализации функций из некоторых классов схемами из функциональных элементов // Доклады АН СССР. — 1961. — Т. 140, №2. — С. 322–325.
33. Лупанов О.Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. Вып. 10. — М.: Наука, 1963. — С. 63–97.
34. Лупанов О.Б. О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11.— М.: Наука, 1964. — С. 25–48.
35. Лупанов О.Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14. — М.: Наука, 1965. — С. 31–110.

36. Лупанов О.Б. О синтезе схем из пороговых элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 26. — М.: Наука, 1973. — С. 109–140.
37. Лупанов О.Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
38. Конспект лекций О.Б. Лупанова по курсу «Введение в математическую логику» / Отв. ред. А.Б. Угольников. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2007.
39. Мартынюк В.В. Исследование некоторых классов в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. Вып. 3. — М.: Наука, 1960. — С. 49–60.
40. Марченков С.С. О равномерном id-разложении булевых функций // Дискретная математика. — 1990. — Т. 2, вып. 3. — С. 29–41.
41. Марченков С.С., Угольников А.Б. Замкнутые классы булевых функций. — М.: Изд-во ИПМ им. М. В. Келдыша, 1990.
42. Марченков С.С. Замкнутые классы булевых функций. — М.: Физматлит, 2000.
43. Нечипорук Э.И. О вентильных схемах // Международный симпозиум по теории релейных устройств и конечных автоматов. Тез. док. — М., 1962. — С. 42–43.
44. Нечипорук Э.И. О синтезе логических сетей в неполных и вырожденных базисах // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 155. № 2. — С. 299–301.
45. Нечипорук Э.И. О синтезе логических сетей в неполных и вырожденных базисах // Проблемы кибернетики. Вып. 14. — М.: Наука, 1965. — С. 111–160.
46. Нечипорук Э.И. О реализации дизъюнкции и конъюнкции в некоторых монотонных базисах // Проблемы кибернетики. Вып. 23. — М.: Наука, 1970. — С. 291–293.
47. Орлов В.А. Реализация функций из P_k схемами в произвольном базисе из функциональных элементов // Доклады РАН. — 1998. — Т. 359, № 3. — С. 308–309.
48. Орлов В.А. Об оптимальности почти всех базисов из P_k // Доклады РАН. — 1998. — Т. 363, № 5. — С. 602–603.
49. Орлов В.А. Об особенностях асимптотического поведения сложности реализации k-значных и автоматных функций схемами в произвольном конечном базисе. Докт. диссертация. — М.: РГГУ, 1999.
50. Редькин Н.П. О реализации монотонных функций контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 35. — М.: Наука, 1979. — С. 87–110.
51. Резник В.И. О реализации монотонных функций схемами из функциональных элементов // Доклады АН СССР. — 1979. — Т. 139, № 3. — С. 566–569.
52. Рохлина М.М. О схемах, повышающих надежность // Проблемы кибернетики. Вып. 23. — М.: Наука, 1970. — С. 295–301.
53. Субоч Н.Н. Реализация монотонных функций алгебры логики контактными π-схемами //Проблемы кибернетики. Вып. 17. — М.: Наука, 1966. — С. 247–254.
54. Ткачев Г.А. О сложности реализации одной последовательности функций k-значной логики // Вестник МГУ. Вычисл. матем. и кибернетика. — 1977. — №1. — С. 45–57.
55. Угольников А.Б. О реализации монотонных функций схемами из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 31. — М.: Наука, 1976. — С. 167–185.
56. Угольников А.Б. Синтез схем и формул в неполных базисах // Доклады АН СССР. — 1979. — Т. 249, № 1. — С. 60–62.
57. Угольников А.Б. Синтез схем и формул в неполных базисах. Препринт ИПМ АН СССР. — М., 1980.
58. Угольников А.Б. О реализации функций из замкнутых классов схемами из функциональных элементов в полном базисе // Доклады АН СССР. — 1983. Т. 271. № 1. — С. 49–51.
59. Угольников А.Б. О реализации булевых функций из некоторых замкнутых классов схемами из функциональных элементов в неполных базисах // Вестник МГУ. Математика. Механика. — М.: Изд-во МГУ. — 1985. — № 3. — С. 87–89.
60. Угольников А.Б. О глубине и сложности формул, реализующих функции из замкнутых классов // Доклады АН СССР. — 1988. — Т. 298. № 6. — С. 1341–1344.
61. Угольников А.Б. О глубине формул в неполных базисах // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 242–245.
62. Угольников А.Б. О замкнутых классах Поста // Изв. вузов. Сер. Матем. — 1988. — № 7. — С. 79 – 88.
63. Угольников А.Б. О реализации функций из замкнутых классов схемами из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 89–113.
64. Угольников А.Б. О сложности реализации формулами одной последовательности функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. — М.: Наука, 1989. — С. 174–176.
65. Угольников А.Б. Глубина формул в некоторых классах k-значной логики // Вестник МГУ. Математика. Механика. — М.: Изд-во МГУ. — 1991. — № 4. — С. 44–47.

66. Угольников А.Б. О сложности схем в неполных базисах // Вестник МГУ. Математика. Механика. — М.: Изд-во МГУ. — 1997. — №2. — С. 58–61.
67. Угольников А.Б. О сложности реализации формулами одной последовательности функций 4-значной логики // Вестник МГУ. Математика. Механика. — М.: Изд-во МГУ. — 2004. — №3. — С. 52–55.
68. Угольников А.Б. Классы Поста. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008.
69. Яблонский С.В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // Доклады АН СССР. — 1954. — Т. 95, №6. — С. 1152–1156.
70. Яблонский С.В. О классах функций алгебры логики, допускающих простую схемную реализацию // УМН. — 1957. — Т. 12, вып. 6. — С. 189–196.
71. Яблонский С.В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. — 1958. — Т. LI. — С. 5–142.
72. Яблонский С.В. Основные понятия кибернетики // Проблемы кибернетики. Вып. 2. — М.: Наука, 1959. — С. 7–38.
73. Яблонский С.В. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 2. — М.: Наука, 1959. — С. 75–121.
74. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2008.
75. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.
76. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Набебин А.А. Предполные классы в многозначных логиках. — М.: Изд-во МЭИ, 1997.
77. Янов Ю.И., Мучник А.А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады АН СССР. — 1959. — Т. 127. №1. — С. 44–46.
78. Burosch G. Über die Ordnung der prëvollständigen Klassen in Algebren von Prädikaten. Preprint. — WPU Rostock, 1973.
79. Burosch G. Über Algebren von Prädikaten. Preprint Univ. Rostock. — 1974.
80. Burosh G., Dassow J., Harnau W., Lau D. Über Algebren von Prädikaten. Preprint. – WPU Rostock. 1979.
81. Burosh G., Dassow J., Harnau W., Lau D. On subalgebras of an algebra of predicates // J. Inf. Process Cybern. — 1985. — EIK 21, 1/2. — P. 9–22.
82. Grünwald N. Bestimmung sämtlischer abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion F_8^n ist // Rostock. Math. Kolloq. — 1983. — V. 23. — P. 5–26.
83. Grünwald N. Beschreibung aller abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion F_8^n ist, mit Hilfe von Relationen // Rostock. Math. Kolloq. — 1983. — V. 23. — P. 27–34.
84. Grünwald N. Strukturaussagen über den Verband der abgeschlossenen Mengen von $P_{k,2}$, insbesondere von $P_{3,2}$. Dissertation A, Universität Rostock. — 1984.
85. Hansel G. Sur le nombre des fonctions booléennes monotones de n variables // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1966. — V. 262, №20. — P. 1088–1090. [Имеется перевод: Ансель Ж. О числе монотонных булевых функций n переменных // Кибернетич. сб. Новая серия. Вып. 5 — М.: Мир, 1968.]
86. Kleitman D. On Dedekind's problem: the number of monotone Boolean functions // Proc. of the Amer. Math. Soc. — V. 21. №3. — 1969. — P. 677–682. [Имеется перевод: Клейтмен Д. О проблеме Дедекинда: число булевых монотонных функций // Кибернетич. сб. Новая серия. Вып. 7. — М.: Мир, 1970. — С. 43–52.]
87. Kleitman D., Markowsky G. On Dedekind's problem: the number of monotone Boolean functions, II // Trans. AMS. — 1975. — V. 213. — P. 373–390.
88. Kuntzman J. Algebra de Boole. — Paris: Dunod, 1965.
89. Lau D. Prävollständige Klassen von $P_{k,l}$ // Elektron. Informationsverarb. Kybernet. EIK. — 1975. — V. 11. — P. 10–12, 624–626.
90. Lau D. Kongruenzen auf gewissen Teilklassen von $P_{k,l}$ // Rostock. Math. Kolloq. — 1977. — V. 3. — P. 37–43.
91. Lau D. Funktionenalgebren über endlichen Mengen. Dissertation B, Universität Rostock. — 1984.
92. Lau D. Über abgeschlossene Teilmengen von $P_{k,2}$ // J. Inf. Process. Cybern. — 1988. — EIK 24, 10. — P. 495–513.
93. Lau D. Über abgeschlossene Teilmengen von $P_{3,2}$ // J. Inf. Process. Cybern. — 1988. — EIK 24, 11/12. — P. 561–572.
94. Lau D. On closed subsets of Boolean functions (A new proof for Post's theorem) // J. Inform. Process Cybern. — EIK 27, 3. — 1991. — P. 167–178.
95. Lau D. Function Algebras on Finite Sets. Springer-Verlag, — Berlin, 2006.
96. Lo Czu Kai. Precompleteness of a set and rings of linear functions // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. — 1963. — V. 2.

97. Lo Czu Kai. On the precompleteness of the classes of functions preserving a partition // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. — 1963. — V. 2.
98. Lo Czu Kai, Lju Sjui Hua. Precomplete classes defined by binary relations in many-valued logics // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. — 1963. — V. 4.
99. Lo Czu Kai. Precomplete classes defined by normal k-ary relations in k-valued logics // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. — 1964. — V. 3.
100. Pippenger N.J. The complexity of monotone Boolean functions // Math. Systems Theory. — 1978. — V. 11. — P. 289–316.
101. Post E.L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. — 1921. — 43, №3. — P. 163–185.
102. Post E.L. The two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. — Princeton Univ. Press. — 1941. — №5.
103. Rosenberg I.G. La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini // Comptes Rendus de l'Academ. — Paris. — 1965. — V. 260. — P. 3817–3819.
104. Rosenberg I.G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpr. ČSAV Řada Mat. Přiv. Věd. — Praha. — 1970. — V. 80. — P. 3–93.
105. Reschke M., Denecke K. Ein neuer Beweis für die Ergebnisse von E. L. Post über abgeschlossene Klassen Boolescher Funktionen // J. Inform. Process Cybern. — EIK 25, 7. — 1989. — P. 361–380.
106. Savage J.E. The complexity of computing. — New York: Robert E. Kreiger Publishing Company, 1987. [Имеется перевод: Джон Э. Сэвидж. Сложность вычислений. — М.: Факториал, 1998.]
107. Shannon C.E. The synthesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. Journ. — 1949. — V. 28, №1. — P. 59–98. [Имеется перевод: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. — М.: ИЛ, 1963.]
108. Ugol'nikov A.B. Complexity and depth of formulas realizing functions from closed classes // Lecture Notes in Comput. Sci. — 1987. — V. 278. — P. 456–461.

Поступило в редакцию 30.V.2012.