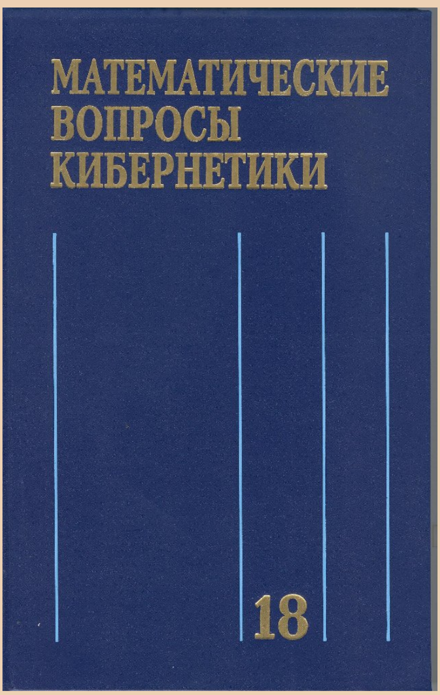


С. А. Матвеев

Построение всех E-замкнутых классов частичных булевых функций

ПОСТРОЕНИЕ ВСЕХ E-ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ ЧАСТИЧНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

С. А. МАТВЕЕВ

(МОСКВА)

Изучение классификации множества P_2^* частичных булевых функций относительно оператора суперпозиции было начато Р. В. Фрейвалдом в работе [6], где были построены все предполные классы в P_2^*. В дальнейшем выяснилось [1], что число замкнутых классов в P_2^* континуально. Как и для функций многозначной логики, это обстоятельство затрудняет исследование порождающих возможностей частичных булевых функций. Вместе с тем в теории функций многозначной логики известны более сильные (по сравнению с оператором суперпозиции) операторы замыкания, которые порождают конечную классификацию k-значных функций при всех $k \geqslant 2$. Некоторые из этих операторов исследовались также и применительно к частичным булевым функциям (см. [2–5]). Так, в работе [5] были построены все 10 позитивно замкнутых классов в P_2^*, а в работе [4] все 16 эквационально замкнутых классов частичных булевых функций. Действие оператора E-замыкания (замыкания с разветвлением по предикату равенства) на множестве P_2^* исследовалось в статье [2], где были построены все предполные и некоторые другие E-замкнутые классы в P_2^*.

В настоящей статье излагается метод компьютеризированного перебора, позволивший описать все 100 E-замкнутых классов частичных булевых функций. Для каждого класса указывается его E-порождающая система. Строится диаграмма включений E-замкнутых классов частичных булевых функций.

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, P_2 множество всех функций на E_2 (множество булевых функций), P_2^* множество всех частичных функций на E_2 (множество частичных булевых функций). Если n-местная функция f из P_2^* не определена на наборе $(a_1, \ldots, a_n) \in E_2^n$, то пишем $f(a_1, \ldots, a_n) = *$. Символом $*$ будем также обозначать нигде не определенную функцию от любого числа переменных. Двуместную функцию f будем задавать вектором значений, i-я компонента которого равна $f(\lfloor i/2 \rfloor, i \pmod 2)$ $(0 \leqslant i \leqslant 3)$. Через $Q(n)$ будем обозначать множество всех n-местных функций из класса Q.

Функции e_i^n $(1 \leqslant i \leqslant n)$, для которых $e_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, будем называть селекторными функциями. Будем говорить, что функция f получена из функций $g, g_1, \ldots, g_k$ применением операции суперпозиции, если для нее справедливо равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1), \ldots, h_m(x_1^m, \ldots, x_{n_m}^m)),$$

где $\{x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1, \ldots, x_1^m, \ldots, x_{n_m}^m\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ и каждая из функций h_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ либо принадлежит множеству $\{g_1, \ldots, g_k\}$, либо является селекторной функцией. При этом функцию f считаем неопределенной на наборе $\widetilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ в том и только том случае, когда значение хотя бы одной из функций $h_1, \ldots, h_m$ не определено на наборе $\widetilde{a}$ или не определено значение функции g на наборе $(h_1(\widetilde{a}), \ldots, h_m(\widetilde{a}))$.

Будем говорить, что n-местная функция f получена из n-местных функций g_1, g_2 применением операции разветвления по предикату равенства, если для некоторых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выполняется соотношение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } x_i = x_j, \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) & \text{иначе.} \end{cases}$$

E-замыкание множества $Q \subseteq P_2^*$ определяем как множество всех функций из P_2^*, которые можно получить из функций множества Q применением операций введения несущественных переменных, суперпозиции и разветвления по предикату равенства. E-замыкание множества Q обозначаем через $[Q]_E$. Если $Q = [Q]_E$, то множество Q называем E-замкнутым классом. Говорим, что множество $R \subseteq Q$ E-порождает E-замкнутый класс Q, если $[R]_E = Q$.

Функция g называется двойственной к функции f, если

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n).$$

Класс, состоящий из всех функций, двойственных к функциям класса Q, называем двойственным к классу Q и обозначаем $\overline{Q}$. Ясно, что $\overline{\overline{Q}} = Q$ и, кроме того, если класс Q E-замкнут, то класс $\overline{Q}$ также является E-замкнутым. Класс Q будем называть самодвойственным, если $\overline{Q} = Q$.

Следуя [2], определим некоторые известные E-замкнутые классы в P_2^*. Обозначим через T_0^* множество всех функций, которые на нулевом наборе принимают значение 0 или $*$. Класс T_1^* определим как двойственный к нему. Через S^* обозначим множество всех функций, которые на любой паре противоположных наборов принимают значения, отличные от $(0,0)$ и $(1,1)$. Обозначим через I^* множество всех функций, которые на нулевом и единичном наборе принимают значения, отличные от $(0,0), (1,0), (1,1)$. Через $T_{0,0}^*$ обозначим множество всех функций, сохраняющих константу 0. Пусть $T_{0,1}^*$ — множество всех функций из класса T_0^*, которые не принимают значение 1. Двойственным образом определим классы $T_{1,1}^*$ и $T_{1,0}^*$. Через S^{**} обозначим множество всех функций, которые на любой паре противоположных наборов принимают лишь значения $(0,1), (1,0)$ или $(*,*)$. Наконец, пусть I_{01}^* — множество всех таких функций, которые не определены на нулевом или единичном наборе.

Помимо перечисленных, E-замкнутыми являются классы $S^* \cap I^*$, $T_0^* \cap I^*$, $T_1^* \cap I^*$, а также следующие классы булевых функций: P_2, T_0 (класс функций, сохраняющих константу 0), T_1 (двойственный к классу T_0), S (класс самодвойственных функций), $T_{01} = T_0 \cap T_1$, $S_{01} = S \cap T_{01}$ и классы C_0 и C_1, состоящие из константных функций 0 и 1 соответственно.

В [2] доказано, что любой E-замкнутый класс в P_2^* E-порождается множеством всех своих двуместных функций. Таким образом, для любых двух E-замкнутых классов C' и C'' включение $C' \subseteq C''$ эквивалентно включению $C'(2) \subseteq C''(2)$. Задача описания всех E-замкнутых классов в P_2^* сводится тем самым к построению всех различных множеств вида $[Q]_E(2)$, где $Q \subseteq P_2^*(2)$. Далее будет описан алгоритм, осуществляющий построение всех таких множеств вместе с их E-порождающими системами Q.

Как легко видеть, применение операции разветвления по предикату равенства может порождать функции с большим числом существенных переменных, чем у любой из исходных функций. Более того, даже если каждая из функций $g_1, \ldots, g_k, f$ зависит не более чем от n переменных, вывод функции f из функций $g_1, \ldots, g_k$ с помощью операций суперпозиции и разветвления по предикату равенства может потребовать использования промежуточных функций, зависящих более чем от n переменных. Так, ограничиваясь лишь двуместными функциями, из функции xy можно получить (кроме ее самой) лишь селекторные функции. Используя промежуточную функцию трех переменных, можно получить, например, дизъюнкцию: $x \vee y = f(x, y, xy)$, где

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } y = z, \\ y & \text{иначе.} \end{cases}$$

От необходимости рассмотрения функций большего числа переменных можно избавиться, заменив в операции разветвления предикат равенства переменных предикатом равенства функций.

Пусть функции f, g_1, g_2, h_1, h_2 зависят от двух переменных. Говорим, что функция f получается из функций g_1, g_2, h_1, h_2 с помощью операции обобщенного разветвления по предикату равенства, если

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} g_1(x_1, x_2), & \text{если } h_1(x_1, x_2) = h_2(x_1, x_2), \\ g_2(x_1, x_2) & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

Если при этом хотя бы одна из функций h_1, h_2 не определена на данном наборе значений переменных, значение функции f на этом наборе также считается неопределенным. Далее, ограничим операцию суперпозиции так, чтобы при ее применении получались только функции двух переменных. Будем рассматривать только суперпозиции вида

$$f(h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)). \tag{2}$$

Замыкание множества Q по операции обобщенного разветвления по предикату равенства и ограниченной операции суперпозиции будем обозначать через $[Q]_E^{(2)}$. При этом в качестве функций h_1, h_2 в (1) и (2) допускаются селекторные функции.

Т е о р е м а. *Пусть множество Q содержит лишь функции, зависящие от двух переменных. Тогда*

$$[Q]_E(2) = [Q]_E^{(2)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $[Q]_E(2) \supseteq [Q]_E^{(2)}$ выполняется, поскольку функцию f в (1) можно выразить формулой

$$f'(x_1, x_2, h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)),$$

где

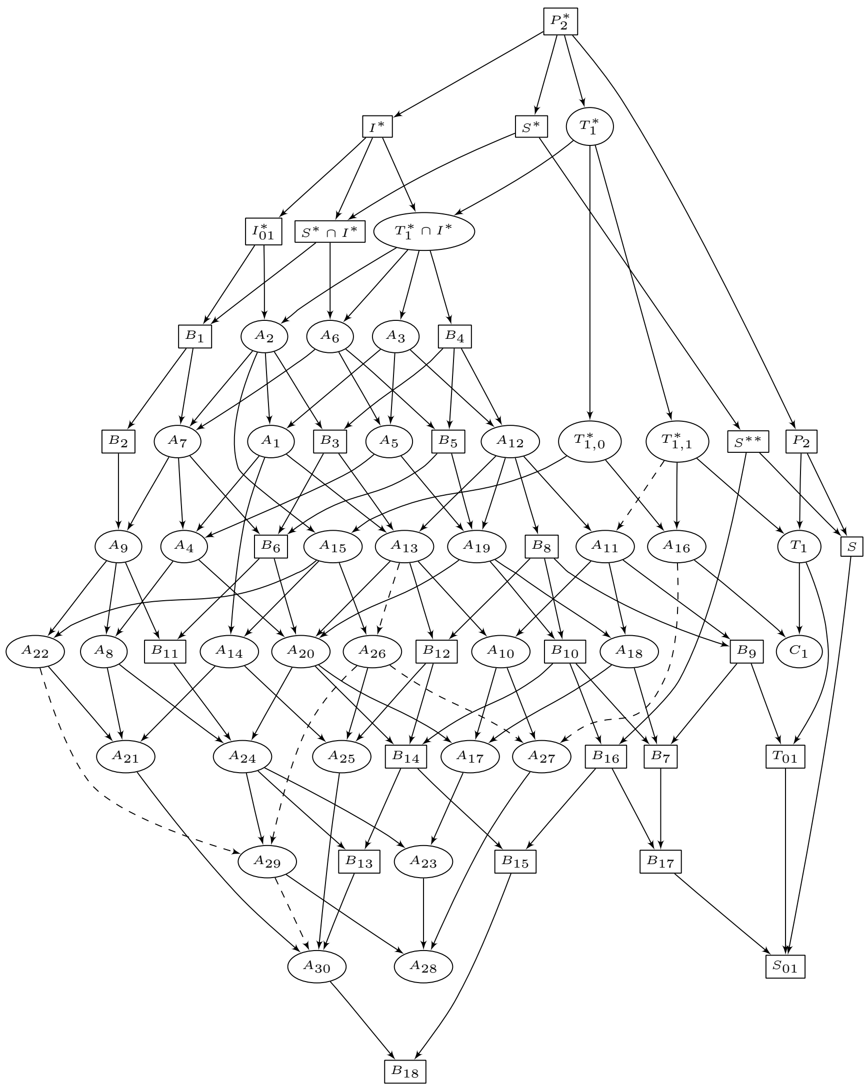
$$f'(x_1, x_2, y, z) = \begin{cases} g_1'(x_1, x_2, y, z), & \text{если } y = z, \\ g_2'(x_1, x_2, y, z) & \text{иначе} \end{cases}$$

и функции g_1', g_2' получены из функций g_1, g_2 введением несущественных переменных y и z.

Для того чтобы доказать обратное включение, сформулируем утверждение в таком виде, который допускает индуктивное доказательство. Докажем, что для любого натурального m и любой функции $f \in [Q]_E$, зависящей от m переменных, выполняется свойство

$$\forall h_1, \ldots, h_m \in \{e_1^2, e_2^2\} \cup [Q]_E^{(2)} \left(f(h_1(x_1, x_2), \ldots, h_m(x_1, x_2)) \in [Q]_E^{(2)} \right). \tag{3}$$

Рассмотрим последовательность классов $Q_0, Q_1, \ldots$, в которой $Q_0 = Q$ и Q_{i+1} класс функций, получающихся из функций класса Q_i однократным



применением операции разветвления по предикату равенства, суперпозиции или введения несущественных переменных. Выполнение свойства (3) для функций из Q_0 очевидно. Справедливость индуктивного перехода устанавливается непосредственной проверкой. Поскольку $[Q]_E = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} Q_i$, доказательство теоремы тем самым завершено.

В силу доказанной теоремы построение множества $[Q]_E(2)$ для системы двуместных функций Q возможно за конечное число шагов. Действительно, пусть $Q_0 = Q$ и $Q_{i+1} = Q_i^s \cup Q_i^b$ при $i = 0, 1, \ldots,$ где Q_i^s и Q_i^b — это множества функций, получаемых из функций множества Q_i однократным применением ограниченной операции суперпозиции и операции обобщенного разветвления по предикату равенства соответственно. Тогда

$$[Q]_E(2) = [Q]_E^{(2)} = \bigcup_{i=0}^{\infty} Q_i.$$

Очевидно, $Q_i \subseteq P_2^*(2)$ и $Q_i \subseteq Q_{i+1}$ при любом i. Поскольку множество $P_2^*(2)$ содержит 81 функцию, последовательность множеств Q_i стабилизируется не более чем через 80 шагов (на практике стабилизация наступает уже на четвертом шаге, т. е. $Q_3 = Q_4$).

Укажем теперь алгоритм эффективного перебора E-порождающих систем двуместных функций. Пронумеруем двуместные функции числами от 1 до 81 и будем, в целях упрощения обозначений, отождествлять функцию с ее номером. Очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением таких E-порождающих систем $\{i_1, \ldots, i_k\}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, для которых условие

$$i_j \notin [\{i_1, \ldots, i_{j-1}\}]_E^{(2)} \tag{4}$$

выполняется при всех j $(2 \leqslant j \leqslant k)$. Этому требованию, однако, могут удовлетворять две и более различные системы функций, порождающие один и тот же E-замкнутый класс. Потребуем дополнительно, чтобы при всех j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ выполнялось условие

$$[\{i_1, \ldots, i_j\}]_E^{(2)} \setminus [\{i_1, \ldots, i_{j-1}\}]_E^{(2)} \subseteq \{i_j, i_j + 1, \ldots, 81\}. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что каждому множеству C вида $[Q]_E^{(2)}$ соответствует в точности одна порождающая система, отвечающая обоим требованиям. В качестве элемента i_1 при этом должен быть выбран наименьший элемент класса C, а в качестве элемента i_j $(2 \leqslant j \leqslant k)$ — наименьший элемент множества $C \setminus [\{i_1, \ldots, i_{j-1}\}]_E^{(2)}$, удовлетворяющий соотношениям (4) и (5).

Алгоритм 1, представленный в виде процедуры FindClasses (в псевдокоде), перечисляет все порождающие системы, отвечающие обоим требованиям, если в качестве параметра Q на вход подается пустое множество. Вместе с каждой порождающей системой Q' выводится множество $[Q']_E^{(2)}$.

Алгоритм 1 FindClasses(Q)

```
if Q = ∅ then
  k ← 0
else
  k ← max(Q)
end if
C ← [Q]_E^(2)
R ← {k + 1, ..., 81} \ C
for i ∈ R do
  Q' ← Q ∪ {i}
  C' ← [Q']_E^(2)
  if min(C' \ C) ⩾ i then
    print Q', C'
    FindClasses(Q')
  end if
end for
```

В результате работы алгоритма (для реализации которого была написана программа на языке Python) было установлено, что в P_2^* имеется в точности 100 непустых E-замкнутых классов. Из этих классов 28 являются самодвойственными, а остальные разбиваются, очевидно, на 36 пар попарно двойственных классов. На диаграмме, приведенной на рисунке, представлено по одному классу из каждой пары. Самодвойственные классы расположены в прямоугольных вершинах диаграммы. Сплошная дуга, проведенная из вершины X в вершину Y, означает, что класс Y является максимальным подклассом класса X; пунктирная дуга означает то же самое для класса $\overline{Y}$. Пунктирные дуги проведены только между парами несамодвойственных классов, поскольку для любого самодвойственного класса X и любого класса Y справедливы эквивалентности

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow X \subseteq \overline{Y}$$

и

$$Y \subseteq X \Leftrightarrow Y \subseteq \overline{X}.$$

Полный вид диаграммы легко восстанавливается исходя из этих соображений.

Помимо классов, описанных в [2], на диаграмме отмечены самодвойственные классы $B_1, \ldots, B_{18}$ и несамодвойственные классы $A_1, \ldots, A_{30}$. Приведем их порождающие системы.

$$A_1 = [(100*)]_E,\ A_2 = [(*001), (100*)]_E,\ A_3 = [(01*1), (100*)]_E,$$

$$A_4 = [(101*)]_E,\ A_5 = [(01*1), (101*)]_E,\ A_6 = [(*011), (01*1), (101*)]_E,$$
$$A_7 = [(*011), (101*)]_E,\ A_8 = [(10**)]_E,\ A_9 = [(*0*1), (10**)]_E,$$
$$A_{10} = [(011*)]_E,\ A_{11} = [(01*1), (011*)]_E,\ A_{12} = [(*11*), (01*1), (011*)]_E,$$
$$A_{13} = [(*11*), (011*)]_E,\ A_{14} = [(111*)]_E,\ A_{15} = [(*111), (111*)]_E,$$
$$A_{16} = [(1**1)]_E,\ A_{17} = [(001*)]_E,\ A_{18} = [(001*), (01*1)]_E,$$
$$A_{19} = [(*1**), (001*), (01*1)]_E,\ A_{20} = [(*1**), (001*)]_E,\ A_{21} = [(1***)]_E,$$
$$A_{22} = [(***1), (1***)]_E,\ A_{23} = [(01**)]_E,\ A_{24} = [(*1**), (01**)]_E,$$
$$A_{25} = [(*11*)]_E,\ A_{26} = [(*11*), (*111)]_E,\ A_{27} = [(000*)]_E,$$
$$A_{28} = [(0***)]_E,\ A_{29} = [(*0**), (0***)]_E,\ A_{30} = [(*1**)]_E,$$
$$B_1 = [(*010), (101*)]_E,\ B_2 = [(*1*0), (10**)]_E,\ B_3 = [(*001), (011*)]_E,$$
$$B_4 = [(*001), (01*1), (011*)]_E,\ B_5 = [(*011), (001*), (01*1)]_E,$$
$$B_6 = [(*011), (001*)]_E,\ B_7 = [(01*1)]_E,\ B_8 = [(*11*), (01*1)]_E,$$
$$B_9 = [(01*1), (0111)]_E,\ B_{10} = [(*1**), (01*1)]_E,\ B_{11} = [(*0*1), (01**)]_E,$$
$$B_{12} = [(*00*), (*11*)]_E,\ B_{13} = [(*0**), (*1**)]_E,$$
$$B_{14} = [(*0**), (*01*), (*1**)]_E,\ B_{15} = [(*01*)]_E,\ B_{16} = [(*01*), (0**1)]_E,$$
$$B_{17} = [(0**1)]_E,\ B_{18} = [*]_E.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В. Б., Вороненко А. А. О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике // Дискретная математика. — 1994. — Т. 6, № 4. — С. 58–79.
2. Марченков С. С. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций // Дискретная математика. — 2008. — Т. 20, № 3. — С. 80–88.
3. Марченков С. С. Сильные операторы замыкания на множестве частичных булевых функций // Доклады РАН. — 2008. — Т. 419, № 5. — С. 599–600.
4. Марченков С. С. Эквационально замкнутые классы частичных булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. — 2008. — Т. 15, № 1. — С. 82–97.
5. Марченков С. С., Попова А. А. Позитивно замкнутые классы частичных булевых функций // Вестник МГУ. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2008. — № 3. — С. 30–34.
6. Фрейвалд Р. В. Функциональная полнота для не всюду определенных функций алгебры логики // Дискретный анализ. — 1996. — № 8. — С. 55–68.

Поступило в редакцию 17.III.2009.