



С. С. Марченков
Оператор
***E*-замыкания на**
множестве частичных
функций
многозначной логики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки:
Марченков С. С. Оператор E -замыкания на множестве частичных функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 18. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — С. 227–238. URL: <http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2013-227>

ОПЕРАТОР E -ЗАМКНАНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ ЧАСТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ *)

С. С. МАРЧЕНКОВ

(МОСКВА)

Начало функциональным исследованиям в области частичных булевых функций положили работы Р. В. Фрейвалда [19, 20] (в [2] имеется ссылка на работу Ван Сянхао по частичным функциям многозначной логики, опубликованную на китайском языке в 1963 г.). В работах [19, 20] была решена проблема функциональной полноты для частичных булевых функций и построен пример замкнутого класса, не имеющего конечного базиса. Континуальность числа замкнутых классов частичных булевых функций установлена в работе [1].

Исследования по проблеме функциональной полноты для частичных функций многозначной логики проводились независимо Б. А. Ромовым [15, 16] и Ло Чжукаем [2, 3] (обе работы опубликованы на китайском языке в 1984 г.). В работах [2, 3] при любом $k \geq 3$ определены все предполные классы частичных функций k -значной логики. Аналогичный результат получен другим методом в работе [17]. Следует также отметить публикацию [23], где для любого $k \geq 4$ анонсировано решение проблемы полноты для частичных функций k -значной логики.

Все перечисленные результаты относятся к понятиям полноты и замыкания, основанным на операции суперпозиции. Однако существует ряд операторов замыкания более сильных, нежели суперпозиция. К таким операторам относятся, в частности, операторы позитивного [7] и эквационального [10] замыканий, а также оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства (оператор E -замыкания) [8, 18]. Для этих операторов число соответствующих замкнутых классов частичных булевых функций оказывается конечным [11–14].

В настоящей работе рассматривается действие оператора E -замыкания на множестве частичных функций многозначной логики. При любом $k \geq 3$ находятся все E -предполные классы k -значной логики и доказывається, что любой E -замкнутый класс частичных функций k -значной логики E -порождается своими функциями от k переменных. Определяются три серии E -предполных классов частичных функций многозначной логики. На их основе устанавливается критерий функциональной полноты в классе частичных функций трехзначной логики.

Введем необходимые понятия. Пусть $k \geq 2$, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, P_k — множество всех функций на E_k (множество функций k -значной логики), P_k^* — множество всех частичных функций на E_k (множество частичных

*) Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00701).

функций k -значной логики). Если $Q \subseteq P_k^*$, то через $Q^{(n)}$ обозначаем множество всех функций из Q , которые зависят от n переменных. Если $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k^*$, $(a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ и функция f не определена на наборе (a_1, \dots, a_n) , то этот факт будем записывать в виде $f(a_1, \dots, a_n) = *$. Символом $*$ обозначаем также нигде не определенную функцию (от любого числа переменных).

Произвольную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k^* рассматриваем также как функцию от любого большего числа переменных $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$, считая переменные x_{n+1}, \dots, x_{n+m} фиктивными для функции f . На множестве P_k^* вводим операцию суперпозиции. Если $g, g_1, \dots, g_m \in P_k^*$ и

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)), \quad (1)$$

то для произвольного набора $\tilde{a} \in E_k^n$ значение $f(\tilde{a})$ считаем определенным в том и только том случае, когда определены все значения $g_1(\tilde{a}), \dots, g_m(\tilde{a})$ и значение функции g определено на наборе $(g_1(\tilde{a}), \dots, g_m(\tilde{a}))$.

Пусть $Q \subseteq P_k^*$. Замыканием Q (обозначение $[Q]$) называется множество всех функций из P_k^* , которые можно получить из функций множества Q с помощью операций введения фиктивных переменных, отождествления и перестановки переменных и суперпозиции. Множество Q называется замкнутым, если $Q = [Q]$. Замкнутые множества называем также замкнутыми классами. Понятия полного множества и предполного класса [21] относим к данным понятиям замыкания и замкнутого класса.

Пусть $g_1, g_2 \in P_k^*$. Говорим, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ получается из функций $g_1(x_1, \dots, x_n), g_2(x_1, \dots, x_n)$ с помощью операции *разветвления по предикату равенства*, если для некоторых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполняется соотношение

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n), & \text{если } x_i = x_j, \\ g_2(x_1, \dots, x_n) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2)$$

E-замыкание множества $Q \subseteq P_k^*$ определяем как множество всех функций из P_k^* , которые можно получить из функций множества Q с помощью операций введения фиктивных переменных, отождествления и перестановки переменных, суперпозиции и разветвления по предикату равенства. *E*-замыкание множества Q обозначаем через $[Q]_E$. Множество функций, которое совпадает со своим *E*-замыканием, называем *E*-замкнутым классом. Говорим, что множество $R \subseteq Q$ *E*-порождает *E*-замкнутый класс Q (*E*-полно в классе Q), если $[R]_E = Q$. Понятие *E*-предполного класса аналогично соответствующему понятию для операции суперпозиции.

Утверждение 1. При любом $k \geq 2$ система всех констант $\{0, 1, \dots, k-1\}$ *E*-полна в классе P_k .

Доказательство. Пусть $a \neq 0$. Положим

$$h_a(x_1, x_2) = \begin{cases} a, & \text{если } x_1 = x_2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Понятно, что $h_a \in [\{0, 1, \dots, k-1\}]_E$.

Пусть f — произвольная функция из $P_k^{(1)}$, $1 \leq m \leq k$, i_1, \dots, i_m — различные элементы из E_k . Положим

$$f_{i_1, \dots, i_m}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in \{i_1, \dots, i_m\}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, что функция $f_i(x)$ совпадает с функцией $h_{f(i)}(x, i)$.

Предположим, что в E -замыкании множества $\{0, 1, \dots, k-1\}$ уже получены все функции вида $f_{i_1 \dots i_m}(x)$, где $1 \leq m < k$, и пусть $i_{m+1} \notin \{i_1, \dots, i_m\}$. Определим

$$h(x_1, x_2) = \begin{cases} f(i_{m+1}), & \text{если } x_1 = x_2, \\ f_{i_1 \dots i_m}(x_1) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда будем иметь

$$f_{i_1 \dots i_{m+1}}(x) = h(x, i_{m+1}).$$

Итак, имеем включение $P_k^{(1)} \subseteq [\{0, 1, \dots, k-1\}]_E$. Если теперь определить

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, & \text{если } x_1 = x_2, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

то g будет являться существенной функцией, принимающей все k значений (при $k=2$ функция $g(x_1, x_2)$ совпадает с функцией $x_1 \& x_2$). Поэтому, применяя при $k=2$ критерий Поста, а при $k \geq 3$ — критерий Слупецкого [21], получаем полноту системы $P_k^{(1)} \cup \{g\}$ в классе P_k . Утверждение доказано.

С л е д с т в и е. При любом $k \geq 2$ система $\{0, 1, \dots, k-1, *\}$ E -полна в классе P_k^* .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная функция из P_k^* . Определим в классе P_k функции $f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n)$:

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = f_2(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n), \text{ если } f(x_1, \dots, x_n) \neq *, \\ f_1(x_1, \dots, x_n) \neq f_2(x_1, \dots, x_n), \text{ если } f(x_1, \dots, x_n) = *.$$

Положим

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, & \text{если } x_1 = x_2, \\ * & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что $g \in [\{0, 1, \dots, k-1, *\}]_E$. Далее получаем

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n)).$$

Следствие доказано.

Пусть D — непустое подмножество множества E_k , отличное от E_k . Обозначим через T_D множество всех функций из P_k , сохраняющих множество D (сохраняющих предикат $x \in D$). Хорошо известно, что множество T_D является замкнутым классом. Нетрудно проверить, что множество T_D также и E -замкнуто.

Пусть π — перестановка на E_k и $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$. Функция

$$f^\pi(x_1, \dots, x_n) = \pi^{-1}(f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)))$$

называется *двойственной* к функции f относительно перестановки π (здесь π^{-1} есть перестановка, обратная к перестановке π). Функция f называется *самодвойственной* относительно перестановки π , если $f = f^\pi$.

Множество всех функций из P_k , самодвойственных относительно перестановки π , обозначим через S_π . Хорошо известно, что для любой перестановки π множество S_π является замкнутым классом. Нетрудно убедиться в том, что множество S_π также и E -замкнуто.

Лемма 1. Пусть $k \geq 2$, Q — замкнутый класс функций из P_k , который целиком не содержится ни в одном из классов вида T_D . Тогда для любых $a, b \in E_k$ в класс Q входит такая функция $h_{ab}(x)$, что $h_{ab}(a) = b$.

Доказательство. Согласно условиям леммы, для любых попарно различных элементов a_1, \dots, a_m из E_k ($1 \leq m < k$) в класс Q входит функция $g'_{a_1 \dots a_m}$, не сохраняющая множество $\{a_1, \dots, a_m\}$. отождествляя и переставляя, если необходимо, переменные в функции $g'_{a_1 \dots a_m}$, получим такую функцию $g_{a_1 \dots a_m}(x_1, \dots, x_m)$, что

$$g_{a_1 \dots a_m}(a_1, \dots, a_m) \notin \{a_1, \dots, a_m\}.$$

Возьмем произвольное a из E_k . Если $g_a(a) = b_1$, то в качестве функции h_{ab_1} можно выбрать функцию g_a . Пусть $g_{ab_1}(a, b_1) = b_2$. Тогда можно положить

$$h_{ab_2}(x) = g_{ab_1}(x, h_{ab_1}(x)).$$

Вообще, если уже получены функции $h_{ab_1}, \dots, h_{ab_m}$, где $m < k - 1$ и элементы a, b_1, \dots, b_m попарно различны, и $g_{ab_1 \dots b_m}(a, b_1, \dots, b_m) = b_{m+1}$, то полагаем

$$h_{ab_{m+1}}(x) = g_{ab_1 \dots b_m}(x, h_{ab_1}(x), \dots, h_{ab_m}(x)).$$

Таким образом, для любого $b \neq a$ в класс Q входит функция h_{ab} . Чтобы теперь получить функцию h_{aa} , достаточно заметить, что по доказанному классу Q принадлежит функция $h_{b_1 a}$ и, следовательно, будет принадлежать функция

$$h_{b_1 a}(h_{ab_1}(x)) = h_{aa}(x).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. При любом $k \geq 2$ все E -предполные в P_k классы исчерпываются классами вида T_D и S_π , где перестановка π разлагается в произведение циклов одной и той же простой длины.

Доказательство. Сначала установим, что любой E -предполный в P_k класс Q содержит тождественную функцию x . Это очевидно для классов Q , которые целиком содержат один из классов T_D или S_π (напомним, что классы T_D, S_π E -замкнуты и потому E -неполны).

Пусть теперь E -замкнутый класс Q (не обязательно E -предполный) целиком не входит ни в один из классов T_D . Тогда согласно лемме 1 он содержит все функции вида h_{ab} . Положим $h_1(x) = h_{00}(x)$. Если функция $h_1(x)$ отлична от тождественной функции x , то пусть a — такой элемент из E_k , что $h_1(a) \neq a$. Определим в классе Q функции g и h_2 :

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} h_1(x_1), & \text{если } x_1 = x_2, \\ h_{aa}(x_1) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$h_2(x) = g(x, h_1(x)).$$

выполнении условия

$$x_1 = x_2 \vee (x_1 \neq x_2) \& (x_1 = x_3),$$

что равносильно условию $x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3$. Далее, функция f_2 совпадает с функцией f , если выполняется условие

$$x_1 = x_4 \vee (x_1 \neq x_4) \& (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3),$$

что равносильно условию

$$x_1 = x_4 \vee x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3.$$

Продолжая «спускаться» вниз по схеме, для функции f_{k-1} будем иметь условие

$$x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee \dots \vee x_1 = x_{k+1},$$

для функции f_k — условие

$$x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee \dots \vee x_1 = x_{k+1} \vee x_2 = x_3,$$

а для функции f_{m-2} — условие

$$\bigvee_{\substack{1 \leq i < j \leq k+1, \\ (i,j) \neq (k,k+1)}} x_i = x_j.$$

Наконец, правая часть последнего равенства схемы задает функцию, которая совпадает с функцией f при выполнении условия

$$\bigvee_{1 \leq i < j \leq k+1} x_i = x_j.$$

Однако последнее условие тождественно истинно, поскольку среди произвольных $k+1$ элементов x_1, \dots, x_{k+1} из E_k , по крайней мере, два элемента совпадают. Это означает, что последнее равенство определяет функцию f «без всяких условий». Теорема доказана.

С л е д с т в и е. При любом $k \geq 3$ число E -замкнутых классов в P_k^* конечно.

Определим в P_k^* ряд E -замкнутых классов.

Пусть D — непустое подмножество множества E_k , отличное от множества E_k . Обозначим через T_D^* множество всех функций из P_k^* , которые сохраняют множество D (сохраняют предикат $x \in D$). Иными словами, функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит множеству T_D^* в том и только том случае, когда для любого набора $(a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ значение $f(a_1, \dots, a_n)$ либо не определено, либо принадлежит множеству D .

Пусть π — перестановка на множества E_k и $(a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$. Назовем π -орбитой набора (a_1, \dots, a_n) (конечное) множество всех наборов вида $(\pi^i(a_1), \dots, \pi^i(a_n))$, где π^i — i -кратная композиция перестановки π , для $i = 1, 2, \dots$

Пусть D — подмножество множества E_k , содержащее не менее двух элементов, π — перестановка на множестве D . Обозначим через $S_{D,\pi}^*$ множество всех функций $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_k^* , которые обладают следующим свойством. Для любого набора (a_1, \dots, a_n) из D^n функция f либо не определена на некотором наборе, принадлежащем π -орбите набора (a_1, \dots, a_n) , либо при любом i удовлетворяет равенству

$$f(\pi^{i+1}(a_1), \dots, \pi^{i+1}(a_n)) = \pi(f(\pi^i(a_1), \dots, \pi^i(a_n))) \quad (3)$$

(самодвойственна на π -орбите набора (a_1, \dots, a_n)).

Для любого непустого подмножества D множества E_k (случай $D = E_k$ не исключается) обозначим через I_D^* множество всех функций f из P_k^* , которые обладают следующим свойством: либо для некоторого $a \in D$ значение $f(a, \dots, a)$ не определено, либо для всех $a \in D$ выполняется равенство $f(a, \dots, a) = a$.

Отметим, что для одноэлементного множества D множество I_D^* совпадает с множеством T_D^* .

Нетрудно показать, что все определенные множества $T_D^*, S_{D,\pi}^*, I_D^*$ являются E -замкнутыми классами. Прделаем это, например, для множеств $S_{D,\pi}^*$.

Пусть функция f определяется через функции g, g_1, \dots, g_m согласно равенству (1) и $g, g_1, \dots, g_m \in S_{D,\pi}^*$. Возьмем произвольный набор $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ из D^n . Если на π -орбите набора \tilde{a} не определена полностью хотя бы одна из функций g_1, \dots, g_m , то аналогичное утверждение будет, очевидно, справедливо и для функции f . Пусть, напротив, все функции g_1, \dots, g_m полностью определены на π -орбите набора \tilde{a} . Тогда в силу условия (3), справедливого для каждой из функций g_1, \dots, g_m , набор функций (g_1, \dots, g_m) переводит π -орбиту набора \tilde{a} в π -орбиту набора $(g_1(\tilde{a}), \dots, g_m(\tilde{a}))$. Пользуясь включением $g \in S_{D,\pi}^*$, приходим к выводу, что функция g либо не определена на некотором наборе из π -орбиты набора $(g_1(\tilde{a}), \dots, g_m(\tilde{a}))$, либо при любом i удовлетворяет условию

$$g(\pi^{i+1}(g_1(\tilde{a})), \dots, \pi^{i+1}(g_m(\tilde{a}))) = \pi(g(\pi^i(g_1(\tilde{a})), \dots, \pi^i(g_m(\tilde{a})))) \quad (4)$$

Поскольку условие (3) выполняется для каждой из функций g_1, \dots, g_m , равенство (4) можно переписать в виде

$$g(g_1(\pi^{i+1}(\tilde{a})), \dots, g_m(\pi^{i+1}(\tilde{a}))) = \pi(g(g_1(\pi^i(\tilde{a})), \dots, g_m(\pi^i(\tilde{a}))))$$

где $\pi^i(\tilde{a}) = (\pi^i(a_1), \dots, \pi^i(a_n))$. А это, в свою очередь, в силу равенства (1) эквивалентно равенству (3).

Пусть теперь функция f определяется через функции g_1, g_2 согласно равенству (2) и $g_1, g_2 \in S_{D,\pi}^*$. Понятно, что для произвольного набора (a_1, \dots, a_n) из D^n значения функции f на π -орбите набора (a_1, \dots, a_n) будут совпадать либо с соответствующими значениями функции g_1 (случай $a_i = a_j$), либо с соответствующими значениями функции g_2 (случай $a_i \neq a_j$). Отсюда сразу следует, что $f \in S_{D,\pi}^*$.

Утверждение 2. *Класс P_k и классы T_D^* E -предполны в классе P_k^* .*

Доказательство. Очевидно, что класс P_k E -замкнут. Если $f(x_1, \dots, x_n) \notin P_k$, то найдется такой набор (a_1, \dots, a_n) , что $f(a_1, \dots, a_n) = *$. Подставляя в функцию f константы a_1, \dots, a_n (которые принадлежат классу P_k), получим функцию $*$. Далее пользуемся следствием из утверждения 1.

Известно (см. [2, 3, 17, 23]), что классы T_D^* предполны в P_k^* (относительно операции суперпозиции). Поэтому из E -замкнутости классов T_D^* вытекает их E -предполнота в классе P_k^* . Утверждение доказано.

Утверждение 3. *Класс $S_{D,\pi}^*$ E -предполон в P_k^* , если перестановка π разлагается в произведение циклов одной и той же простой длины.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \notin S_{D,\pi}^*$. Тогда найдется такой набор $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D^n$, что функция f определена на всех наборах π -орбиты набора \tilde{a} и равенство (3) не выполняется при некотором i . Если

функция f не всюду определена, то выберем в классе $S_{D,\pi}^*$ такие всюду определенные функции $g_1(x_1, \dots, x_n)$, $g_2(x_1, \dots, x_n)$, что для любого набора $\tilde{b} \in E_k^n$ имеем $g_1(\tilde{b}) = g_2(\tilde{b})$, если набор \tilde{b} не входит в π -орбиту набора \tilde{a} , и $g_1(\tilde{b}) \neq g_2(\tilde{b})$ в противном случае (последнему условию можно удовлетворить, поскольку π — неединичная перестановка на D).

Определим функции g и f' :

$$g(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2) = \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n), & \text{если } y_1 = y_2, \\ f(x_1, \dots, x_n) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$f'(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n, g_1(x_1, \dots, x_n), g_2(x_1, \dots, x_n)).$$

Тогда функции g, f' всюду определены, принадлежат множеству $[S_{D,\pi}^* \cup \{f\}]_E$ и функция f' совпадает с функцией f на π -орбите набора \tilde{a} .

Таким образом, можно предполагать, что f — всюду определенная функция. Кроме того, из определения следует, что функция f' при любом i удовлетворяет равенству вида (3) для любого набора, не входящего в π -орбиту набора \tilde{a} . Это свойство мы будем предполагать и у функции f . Далее рассмотрим два случая.

1. Функция f сохраняет множество D .

Рассмотрим ограничения на множество D функций из $S_{D,\pi}^* \cap P_k$ (это будут все функции, самодвойственные относительно перестановки π) и функции f (это будет функция, несамоподобная относительно перестановки π). Применим к этим ограничениям известный результат (см. [5, 9, 24]) о предполноте класса S_π , когда перестановка π разлагается в произведение циклов одной и той же простой длины. Согласно этому результату суперпозициями функций из $S_{D,\pi}^* \cap P_k$ и функции f можно получить такую функцию $f_1(x)$, которая на множестве D есть константа $d \in D$.

Возьмем теперь в классе $S_{D,\pi}^*$ такие всюду определенные функции $g_3(x)$ и $g_4(x)$, что $g_3(x) = g_4(x) = d$, если $x \notin D$, и $g_3(x) \neq g_4(x)$ при $x \in D$ (еще раз напомним, что на множестве D перестановка π не имеет «неподвижных» точек). Тогда функции

$$g_5(x, y_1, y_2) = \begin{cases} g_3(x), & \text{если } y_1 = y_2, \\ f_1(x) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$f_2(x) = g_5(x, g_3(x), g_4(x))$$

принадлежат множеству $[S_{D,\pi}^* \cup \{f\}]_E$ и, кроме того, функция f_2 есть константа d .

Понятно, что для любого $e \in E_k$ в класс $S_{D,\pi}^*$ входит функция $h_{de}(x)$, которая определена только в точке d и $h_{de}(d) = e$.

Итак, в множестве $[S_{D,\pi}^* \cup \{f\}]_E$ содержатся все константы. Поскольку в класс $S_{D,\pi}^*$ входит не всюду определенная функция, на основании следствия из утверждения 1 получаем, что система $S_{D,\pi}^* \cup \{f\}$ E -полна в классе P_k^* .

2. Функция f не сохраняет множество D .

Этот случай сводится к случаю 1. Действительно, возьмем такую всюду определенную функцию $f_3(x)$ из $S_{D,\pi}^*$, что f_3 принимает только значения из множества D , $f_3(x) = x$ при $x \in D$ и функция $f_3(f(x_1, \dots, x_n))$ не принадлежит классу $S_{D,\pi}^*$. Это сделать можно, поскольку множество D содержит не менее двух элементов. Утверждение доказано.

Утверждение 4. Классы вида I_D^* E -предполны в P_k^* .

Доказательство. Пусть $f \notin I_D^*$. Тогда функция $f_1(x) = f(x, \dots, x)$ определена при всех $x \in D$ и для некоторого $a \in D$ выполняется неравенство $f_1(a) \neq a$. Можно считать, что функция f_1 всюду определена. В самом деле, в противном случае возьмем в классе I_D^* такие всюду определенные функции $g_1(x), g_2(x)$, что $g_1(x) = g_2(x) = x$ при $x \in D$ и $g_1(x) \neq g_2(x)$ при $x \notin D$, и положим

$$g(x, y_1, y_2) = \begin{cases} f_1(x), & \text{если } y_1 = y_2, \\ g_1(x) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$f'_1(x) = g(x, g_1(x), g_2(x)).$$

Тогда функция f'_1 всюду определена и совпадает с функцией f на множестве D .

Предположим, что функция $f_1(x)$ отлична от функции x всюду на множестве D . Для любого $c \in E_k$ выберем в классе I_D^* такую функцию $h_c(x_1, x_2)$, что $h_c(x, x) = x$ при $x \in D$ и $h_c(x_1, x_2) = c$ для остальных наборов (x_1, x_2) . Тогда функция $h_c(x, f_1(x))$ есть константа c . Далее подстановкой подходящих констант в не всюду определенную функцию из I_D^* получаем функцию $*$ и применяем следствие из утверждения 1.

Пусть теперь для некоторых x из D функция f_1 удовлетворяет равенству $f_1(x) = x$. Выберем в классе I_D^* не всюду определенную функцию $g_3(x)$, чтобы при любом $x \in D$ из соотношения $f_1(x) = x$ следовало бы неравенство $g_3(x) \neq x$. Положим

$$g_4(x_1, x_2) = \begin{cases} g_3(x), & \text{если } x_1 = x_2, \\ f_1(x) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда функция $g_4(x, f_1(x))$ определена на множестве D и всюду на этом множестве отлична от функции x . Этот случай рассмотрен выше. Утверждение доказано.

В теореме 3 в обозначениях перестановок $x + 1, 2x, 2x + 1, 2x + 2$ сложение и умножение рассматриваются по модулю 3. Кроме того, для некоторых одноместных функций f из P_3 используем векторное обозначение $(f(0)f(1)f(2))$.

Теорема 3. Система функций из P_3^* E -полна в классе P_3^* тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из E -замкнутых классов

$$P_3, T_0^*, T_1^*, T_2^*, T_{\{0,1\}}^*, T_{\{0,2\}}^*, T_{\{1,2\}}^*, S_{E_3, x+1}^*, S_{\{0,1\}, 2x+1}^*, S_{\{0,2\}, 2x+2}^*, S_{\{1,2\}, 2x}^*, I_{\{0,1\}}^*, I_{\{0,2\}}^*, I_{\{1,2\}}^*, I_{E_3}^*. \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость условий теоремы вытекает из E -замкнутости классов (5) и несовпадении их с классом P_3^* .

Установим достаточность условий теоремы. Пусть система функций $Q \subseteq P_3^*$ целиком не содержится ни в одном из классов (5). Можно считать, что Q — E -замкнутый класс функций. Заметим, что доказательство леммы 1 проходит и для классов вида T_D^* . Поэтому далее будем предполагать, что для любых $a, b \in E_3$ класс Q содержит функцию вида $h_{ab}(x)$.

Возьмем в классе Q функцию f'_1 , не входящую в класс $I_{E_3}^*$. Тогда отождествлением всех переменных из нее можно получить всюду определенную функцию $f_1(x)$, которая отлична от тождественной функции x . Далее рассмотрим четыре возможности для функции f_1 .

1. f_1 — константа.

Подстановкой функции f_1 в подходящие функции h_{ab} получаем остальные две константы. Затем образуем функцию $*$ подстановкой констант

в функцию из Q , не входящую в класс P_3 . Согласно следствию из утверждения 1 приходим к E -полной в P_3^* системе.

2. $f_1(x) \in \{x+1, x+2\}$.

Тогда, очевидно, $x \in Q$. Как и доказательстве теоремы 1, из функции x получаем тернарный дискриминатор p . Значит, в класс Q целиком входит класс H_3 всех однородных функций из P_3 , сохраняющих множество E_2 . Согласно результатам из [6] класс H_3 вместе с функцией f_1 порождает множество S_{x+1} всех функций из P_3 , самодвойственных относительно перестановки $x+1$.

Пусть $g \in Q \setminus S_{E_3, x+1}^*$. Так же, как при доказательстве E -предполноты классов вида $S_{E_k, \pi}^*$, из функции g и функций множества S_{x+1} получаем функцию из множества $P_3 \setminus S_{x+1}$. Поскольку класс S_{x+1} предполон в классе P_3 [5, 9, 24], приходим к соотношению $P_3 \subseteq Q$. Остается выбрать функцию из множества $Q \setminus P_3$ и получить из нее функцию $*$.

3. Функция f_1 принимает ровно два значения.

Тогда суперпозициями функции f_1 можно получить идемпотентную функцию $f_2(x)$ (функцию, удовлетворяющую тождеству $f_2(f_2(x)) = f_2(x)$). Все идемпотентные функции, отличные от константы (и принимающие два значения), суть

$$(010), (011), (002), (022), (112), (212).$$

Мы рассмотрим лишь функции (010) и (011), поскольку доказательства для остальных функций получаются соответствующей заменой значений 0, 1 на 0, 2 или 1, 2. Кроме того, функции (010), (011) легко трансформируются друг в друга. Например, функция (010) получается из функции (011):

$$g_1(x_1, x_2) = \begin{cases} (011)(x_1), & \text{если } x_1 = x_2, \\ h_{20}(x_1) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$(010)(x) = g_1(x, (011)(x)).$$

Поэтому далее в качестве функции f_2 рассматриваем только функцию (010).

Из функции $f'_3 \in Q \setminus S_{\{0,1\}, 2x+1}$ отождествлением и, возможно, перестановкой переменных получаем функцию $f_3(x_1, x_2)$ такую, что значения $f_3(0, 1), f_3(1, 0)$ определены и отличны от значений 0, 1 и 1, 0. Из функции $f'_4 \in Q \setminus I_{\{0,1\}}^*$ отождествлением переменных получаем функцию $f_4(x)$ такую, что значения $f_4(0), f_4(1)$ определены и выполняется хотя бы одно из неравенств $f_4(0) \neq 0, f_4(1) \neq 1$.

Функцию f_4 можно считать всюду определенной. В самом деле, если $f_4(2) = *$, то определим для любого $b \in E_3$ функцию g_2 :

$$g_2(x_1, x_2) = \begin{cases} f_4(x_1), & \text{если } x_1 = x_2, \\ h_{2b}(x_1) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда функция $g_2(x, f_2(x))$ совпадает с функцией f_4 на множестве $\{0, 1\}$ и равна b при $x = 2$.

Если $f_4(0) = f_4(1)$, то суперпозиция $f_4(f_2(x))$ дает константу — этот случай рассмотрен в п. 1. Если $f_4(0), f_4(1) \in \{0, 2\}$, то, предполагая, что $f_4(2) \in \{0, 2\}$, получаем константу 0 подстановкой функции f_4 в функцию f_2 . Аналогично, если $f_4(0), f_4(1) \in \{1, 2\}$, то предполагаем, что $f_4(2) \in \{1, 2\}$ и получаем константу 1, подставляя функцию f_4 в функцию (011) (напомним, что функция (011) получается из функции (010)).

Остается исследовать возможность, когда $f_4(0) = 1$ и $f_4(1) = 0$. В этом случае положим

$$f_5(x) = f_3(x, f_4(x)).$$

Тогда функция f_5 определена на множестве $\{0, 1\}$ и принимает на нем пару значений, отличную от $(0, 1)$ и $(1, 0)$. К функции f_5 можно применить рассуждения, проведенные для функции f_4 , и получить константу.

4. $f_1(x) \in \{2x, 2x + 1, 2x + 2\}$.

Этот случай можно свести к случаю 3. В самом деле, считая, например, что $f_1(x) = 2x$, образуем функции

$$g_3(x_1, x_2) = \begin{cases} h_{01}(x_1), & \text{если } x_1 = x_2, \\ x_1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$f_6(x) = g_3(x, 2x).$$

Тогда функция f_6 идемпотентна и принимает ровно два значения. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В.Б., Вороненко А.А. О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике // Дискретная математика. — 1994. — Т. 6, № 4. — С. 58–79.
2. Ло Чжукай. Максимальные замкнутые классы в множестве частичных функций многозначной логики // Кибернетический сборник. Вып. 25. — М.: Мир, 1988. — С. 131–141.
3. Ло Чжукай. Теория полноты для частичных функций многозначной логики // Кибернетический сборник. Вып. 25. — М.: Мир, 1988. — С. 142–161.
4. Марченков С.С. Однородные алгебры // Проблемы кибернетики. Вып. 39. — М.: Наука, 1982. — С. 85–106.
5. Марченков С.С. Предполнота замкнутых классов в P_k : предикатный подход // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. — М.: Наука, 1996. — С. 117–132.
6. Марченков С.С. Клоновая классификация дуально дискриминаторных алгебр с конечным носителем // Математические заметки. — 1997. — Т. 61, № 3. — С. 359–366.
7. Марченков С.С. О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках // Дискретная математика. — 1999. — Т. 11, № 4. — С. 110–126.
8. Марченков С.С. Операторы замыкания с разветвлением по предикату // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. — 2003. — № 6. — С. 37–39.
9. Марченков С.С. Функциональные системы с операцией суперпозиции. — М.: Физматлит, 2004.
10. Марченков С.С. Эквациональное замыкание // Дискретная математика. — 2005. — Т. 17, № 2. — С. 117–126.
11. Марченков С.С. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций // Дискретная математика. — 2008. — Т. 20, № 3. — С. 80–88.
12. Марченков С.С. Сильные операторы замыкания на множестве частичных булевых функций // Доклады РАН. — 2008. — Т. 419, № 5. — С. 599–600.
13. Марченков С.С. Эквационально замкнутые классы частичных булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. — 2008. — Т. 15, № 1. — С. 82–97.
14. Марченков С.С., Попова А.А. Позитивно замкнутые классы частичных булевых функций // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2008. — № 3. — С. 30–34.
15. Ромов Б.А. О максимальных подалгебрах алгебры частичных функций многозначной логики // Кибернетика. — 1980. — № 1. — С. 28–36.
16. Ромов Б.А. Алгебры частичных функций и их инварианты // Кибернетика. — 1981. — № 2. — С. 1–11.
17. Ромов Б.А. О проблеме полноты в алгебре частичных функций конечнозначной логики // Кибернетика. — 1990. — № 1. — С. 102–106.

18. Соловьев В. Д. Замкнутые классы в k -значной логике с операцией разветвления по предикатам // Дискретная математика. — 1990. — Т. 2, № 4. — С. 18–25.
19. Фрейвалд Р. В. Критерий полноты для частичных функций алгебры логики и многозначных логик // Доклады АН СССР. — 1966. — Т. 167, № 6. — С. 1249–1250.
20. Фрейвалд Р. В. Функциональная полнота для не всюду определенных функций алгебры логики // Дискретный анализ. — 1966. — № 8. — С. 55–68.
21. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.
22. Ganter В., Plonka J., Werner H. Homogeneous algebras are simple // Fund. Math. — 1973. — V. 79, № 3. — P. 217–220.
23. Haddad L., Rosenberg I. Critère général de complétude pour le algèbres partiellés finies // C. r. Acad. sci. — 1987. — V. 304, № 17. — P. 507–509.
24. Rosenberg I. G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozprawy Československe Akad. Věd. Řada Math. Přír. Věd. — Praha, 1970. — Bd. 80. — S. 3–93.

Поступило в редакцию 03.II.2009.