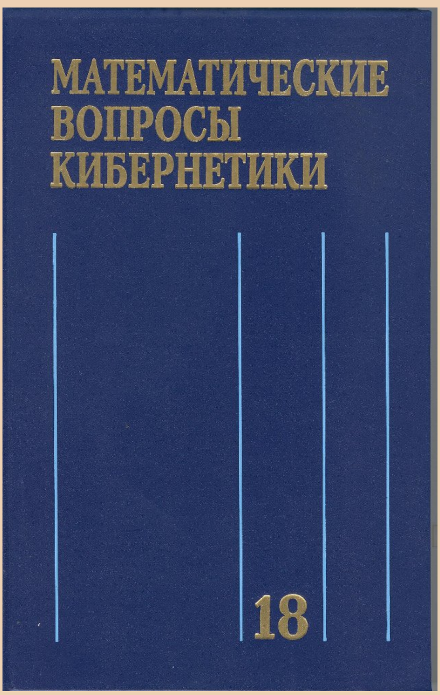

А. В. Михайлович

О замкнутых классах функций многозначной логики, порожденных симметрическими функциями

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Михайлович А. В. О замкнутых классах функций многозначной логики, порожденных симметрическими функциями // Математические вопросы кибернетики. Вып. 18. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — С. 123–212. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2013-123

О ЗАМКНУТЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ, ПОРОЖДЕННЫХ СИММЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ *)

А. В. МИХАЙЛОВИЧ

(МОСКВА)

Оглавление

Введение 123
§ 1. Основные определения и вспомогательные утверждения 129
1.1. Определения и обозначения 129
1.2. Вспомогательные утверждения 136
§ 2. Классы, порожденные функциями из множества NS^1 141
2.1. Критерии базируемости и конечной порожденности 142
2.2. Замыкание относительно отождествления переменных 144
§ 3. Классы, порожденные функциями из множества $M\mathrm{S}_3$ 170
3.1. Критерии базируемости и конечной порожденности 170
3.2. Изображение монотонных функций на плоскости 176
3.3. Критерии базируемости и конечной порожденности в терминах свойств множества точек на плоскости 183
§ 4. Классы, порожденные функциями со специальными свойствами 194
4.1. Критерий базируемости для множеств, обладающих свойствами (*) и (**) 194
4.2. Примеры классов, обладающих свойствами (*) и (**) . 196
Литература 207

Введение

В данной работе изучаются свойства замкнутых классов функций многозначной логики. Рассматривается задача о существовании базисов для некоторых семейств замкнутых классов.

Э. Л. Пост [142, 143] описал все замкнутые (относительно операции суперпозиции) классы булевых функций и показал, что множество замкнутых классов **) в P_2 счетно, при этом каждый такой класс имеет конечный базис (см. также [144]). Описание классов Поста можно найти также в работах [33, 42, 70, 71, 75, 112, 127, 132, 140, 147]. Предикатное описание классов Поста дано в [4] (см. также [33, 42, 132]). Алгебраический подход к понятиям суперпозиции и замкнутого класса предложен А. И. Мальцевым [24, 28].

Многозначные логики во многом похожи на двузначную логику. В них сохраняются многие результаты, имеющие место в двузначной логике.

*) Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08–01–00863), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4470.2008.1) и Программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики» (проект «Синтез и сложность управляющих систем»).

**) Через P_k обозначается множество всех функций k-значной логики, $k \geqslant 2$.

Можно, например, отметить решения проблемы функциональной полноты [21, 22, 25, 73, 74, 154, 155, 159] и задачи описания предполных классов [16, 29, 74, 134–137, 145, 148, 149]. В то же время имеются существенные различия между P_2 и P_k при $k \geqslant 3$. К их числу относятся примеры Ю.И. Янова о существовании замкнутых классов в P_k, не имеющих базиса, и А.А. Мучника о существовании замкнутых классов в P_k со счетным базисом ($k \geqslant 3$) [79]. Из этих результатов следует, что мощность семейства замкнутых классов в P_k при всех $k \geqslant 3$ континуальна. Это делает труднообозримой структуру данного множества.

Поскольку при $k \geqslant 3$ изучение замкнутых классов k-значной логики наталкивается на значительные трудности, то, с одной стороны, многие авторы стали рассматривать задачу изучения классов, замкнутых относительно более сильных операций замыкания, которые позволили бы получить множество замкнутых классов конечной или счетной мощности (см., например, [1, 8, 9, 23, 34, 36, 38, 59–62, 64–69, 84]). С другой стороны, изучались отдельные семейства замкнутых классов функций k-значной логики, содержащих конечное, счетное или континуальное множество подклассов. К настоящему времени получено описание свойств некоторых семейств замкнутых классов *) в P_k. Отметим некоторые из этих результатов.

Наиболее хорошо изучены свойства предполных **) классов функций k-значной логики. Конечность числа предполных классов в P_k установил А.В. Кузнецов [44]. Все предполные классы функций трехзначной логики описал С.В. Яблонский [73, 74]. Отдельные семейства предполных классов в P_k найдены в работах [2, 13, 14, 29, 74, 134–137]. Полное описание всех предполных классов в P_k при всех $k \geqslant 3$ было дано И. Розенбергом [148, 149] (см. также [5, 15, 35, 77, 132, 145]). Асимптотически точная формула для числа $\pi(k)$ всех предполных классов в P_k найдена в [15]. Конечная порожденность всех предполных классов при $k \leqslant 7$ доказана Д. Лау [116]. Пример предполного в P_8 класса типа ***) $\mathbb{O}$ (замкнутого класса функций, монотонных относительно частичного порядка специального вида), не имеющего конечной порождающей системы, приведен Г. Тардошем [166]. Необходимые и достаточные условия конечной порожденности предполных классов функций в P_k ($k \geqslant 3$), монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины 2, получены в [10–12].

Свойства минимальных классов и минимальных клонов ****) в решетке $\mathfrak{M}_k$ (семействе замкнутых классов функций k-значной логики, упорядоченных по включению) изучались в работах [95–97, 108–111, 132, 133, 139, 141, 146, 152, 153, 160, 167]. В [141] приведена формула для числа минимальных классов функций k-значной логики, $k \geqslant 3$, и дано описание свойств функций, порождающих эти классы (см. также [132]). Все минимальные клоны в P_3 описаны Б. Чаканем [95, 96]. В [109, 110, 141] описаны все минимальные клоны в P_k ($k \geqslant 3$) порядка 1. Розенберг [152] установил конечность множества минимальных клонов в P_k при всех $k \geqslant 3$ и привел классификацию функций, определяющих минимальные клоны в решетке $\mathfrak{M}_k$. Отдельные семейства минимальных клонов в P_4 изучены в [167]; в работе [139] приведены примеры минимальных клонов в P_k, $k \geqslant 3$, порядка t, $1 \leqslant t \leqslant k$.

В работах [6, 25, 30–32, 36–41, 55–63, 74, 154, 155, 159] изучаются свойства замкнутых классов в P_k, содержащих заданное множество функций одной переменной. Е. Слупецкий [159] предложил критерий полноты

*) Обзор результатов, полученных в этом направлении, можно найти, например, в [132, 141].

**) Предполные классы в P_k называются также максимальными.

***) Будем использовать обозначения семейств предполных классов из книги [77].

****) Клоном называется замкнутый класс, содержащий все селекторные функции.

для систем функций k-значной логики, содержащих множество*) $P_k(1)$, $k \geqslant 3$. Все замкнутые классы в P_k, содержащие множество $P_k(1)$, перечислены Г. А. Бурле [6]. Яблонский [74] получил критерий полноты для систем функций в P_k, содержащих множество всех функций из $P_k(1)$, принимающих не более $k-1$ значения, $k \geqslant 3$. Некоторое усиление этого результата получено А. И. Мальцевым [25]. Критерии полноты для систем функций из P_k при $k \geqslant 5$, содержащих группу $\mathfrak{S}_k$ всех подстановок на множестве $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, получены в [154, 155]. Все замкнутые классы в P_k, содержащие заданный предполный в $[P_k(1)]$ класс функций, для всех $k \geqslant 3$ описаны в [63]. Описание семейства замкнутых классов в P_k, содержащих группу $\mathfrak{S}_k$, при всех $k \geqslant 3$ получено в [30–32, 43, 59–61]. Свойства семейств замкнутых классов в P_k, содержащих некоторые подгруппы группы $\mathfrak{S}_k$, изучены в работах [37, 39–41, 55–58, 62].

В работах В. Б. Кудрявцева [17–20] изучаются свойства систем функций k-значной логики, состоящих только из функций, принимающих все значения из множества E_k (такие системы называются S-системами); приводятся критерии S-полноты для рассматриваемых систем функций, устанавливается асимптотическое поведение числа S-предполных S-множеств и их типов.

Замкнутые классы функций из множества**) $P_{k,l}$ изучаются в работах [91–94, 105–107, 113–115, 120, 124, 125, 132]. Рассматривается отображение замкнутых классов из $P_{k,l}$ в замкнутые классы P_l, и для каждого класса $B \subseteq P_l$ описывается семейство $\mathfrak{N}_{k,l}(B)$ замкнутых классов из $P_{k,l}$, состоящих из функций, ограничение которых на множестве E_l определяет функции из класса B. Ряд важных свойств замкнутых классов из $P_{3,2}$ изучен в [105–107, 120, 125]; в частности, для каждого замкнутого класса B булевых функций установлена мощность семейства $\mathfrak{N}_{3,2}(B)$, а также для некоторых классов $B \subseteq P_2$ приведено описание фрагментов решетки $\mathfrak{M}_3$, содержащих классы из диаграммы включений, соответствующих семейству $\mathfrak{N}_{3,2}(B)$. В работах [91–94, 107, 124] найдены все максимальные и все предмаксимальные***) замкнутые классы множества $P_{k,2}$, изучены некоторые свойства семейств $\mathfrak{N}_{k,2}(B)$ для всех $B \subseteq P_2$.

Семейства замкнутых классов в P_k ($k \geqslant 3$), содержащихся в заданном предполном классе, изучаются в работах [30–32, 82, 83, 85, 87, 88, 98–103, 117–119, 121, 123, 126, 128–132, 138, 150, 151, 156, 161–165]. Показано [30–32, 82, 83, 98, 100, 117, 156], что предполный класс в P_k ($k \geqslant 3$) содержит континуальное множество замкнутых классов тогда и только тогда, когда он не является классом типа $\mathbb{L}$ (классом линейных функций). Некоторые свойства замкнутых классов линейных функций изучены в [82, 83, 87, 88, 117, 123, 126, 156, 161–165]. Все предмаксимальные классы в P_3 найдены в [31, 83, 100, 118, 138, 156]; в работе [85] для каждого предмаксимального класса в P_3 установлена мощность семейства замкнутых классов, содержащихся в рассматриваемом классе. Все максимальные классы для предполных классов типа $\mathbb{P}$ (классов самодвойственных функций) при всех $k \geqslant 3$ найдены в [30–32, 98, 99, 121, 151]. Описание некоторых семейств предмаксимальных классов в P_k при $k \geqslant 4$ содержится в [119, 128–132, 150].

Существование континуального семейства классов в P_k, содержащих цепи неограниченной длины ($k \geqslant 3$), доказано в [157, 158]. Примеры цепей и антицепей в $\mathfrak{M}_k$ ($k \geqslant 3$) континуальной мощности приведены в [104, 141].

---

*) Через $P_k(1)$ обозначается множество всех функций $f(x)$ из P_k, $k \geqslant 2$.

**) Через $P_{k,l}$ обозначается множество всех функций k-значной логики, принимающих значения только из множества E_l, $2 \leqslant l < k$.

***) Предмаксимальными называются такие замкнутые классы в P_k, которые являются предполными для максимальных.

Достаточные условия, при выполнении которых заданный класс функций в P_k ($k \geqslant 3$) содержит не более чем счетное семейство подклассов, приведены в [122, 132]; приведены также примеры классов, удовлетворяющих этим условиям. Ряд свойств решетки $\mathfrak{M}_k$ изучен в работах [26, 27, 86, 89, 90]. Верхние и нижние окрестности замкнутых классов различного вида в решетке $\mathfrak{M}_k$ описаны в [53, 76]. Примеры замкнутых классов в P_k ($k \geqslant 3$), не являющихся конечно-порожденными, в которых каждый предполный класс имеет конечный базис, приведены в [54]; показано также, что мощность семейства таких классов не более чем счетная.

Таким образом, было проведено значительное число исследований, направленных на изучение свойств замкнутых классов функций k-значной логики. Вместе с тем в настоящее время недостаточно информации, которая позволяла бы для классов из заданного континуального семейства определять, имеют ли эти классы базисы и являются ли они конечно-порожденными. В связи с этим представляется важным получение необходимых и достаточных условий, позволяющих отвечать на поставленные вопросы для континуальных семейств замкнутых классов в P_k.

Как уже говорилось, семейство замкнутых классов из работы Янова и Мучника является первым примером континуального семейства замкнутых классов функций k-значной логики ($k \geqslant 3$). Следует отметить, что функции из этих примеров обладают следующими свойствами: каждая функция является симметрической, принадлежит множеству $P_{k,2}$ (т. е. принимает значения только из множества $\{0, 1\}$), принимает значение 0 на единичном наборе и всех наборах, содержащих хотя бы одну нулевую компоненту и, кроме того, замыкание произвольного множества F этих функций совпадает с множеством $\cup[\{f\}]$, где объединение берется по всем функциям из множества F.

В настоящей работе изучаются семейства замкнутых классов в P_k, порожденных функциями, которые обладают аналогичными свойствами. Для этих классов доказываются критерии базируемости и конечной порожденности, устанавливаются также другие свойства рассматриваемых классов.

Дадим некоторые определения. Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, E_k^n — множество всех наборов вида $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E_k$, $k \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, а $\mathbb{X}$ — счетное множество переменных. Пусть $\mathfrak{A} = \{f_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}), f_2(x_{j_1}, \ldots$ $\ldots, x_{j_{n_2}}), \ldots,\}$ — некоторое множество функций из P_k. Дадим определение понятия формулы над $\mathfrak{A}$.

(1) Символ переменной из множества $\mathbb{X}$ является формулой над $\mathfrak{A}$; такие формулы называются тривиальными.

(2) Если $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — формулы над $\mathfrak{A}$, а $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}$, то выражение $\Phi = f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ является формулой над $\mathfrak{A}$, $n \geqslant 1$, при этом Φ, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ называются подформулами формулы Φ. Подформулами формулы Φ называется также сама формула Φ и все подформулы формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$.

Формула Φ называется простой, если она имеет вид $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, где $g \in \mathfrak{A}$, а $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ — символы переменных, $n \geqslant 1$.

Пусть F — замкнутый (относительной операции суперпозиции и введения фиктивной переменной) класс функций k-значной логики, $k \geqslant 2$. Множество функций $\mathfrak{A} \subseteq F$ называется базисом класса F, если $[\mathfrak{A}] = F$ и для любого множества $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$, выполняется неравенство $[\mathfrak{B}] \neq F$. Замкнутый класс F называется базируемым, если существует множество $\mathfrak{A}$, такое что $\mathfrak{A}$ — базис класса F. Замкнутый класс F называется конечно-порожденным, если он имеет конечный базис.

Пусть $\mathfrak{A} \subseteq P_k$, $k \geqslant 2$. Множество всех функций, которые могут быть получены из функций системы $\mathfrak{A}$ применением операций переименования, отождествления переменных и введения фиктивной переменной, будем называть p-замыканием множества $\mathfrak{A}$ (обозначение $<\mathfrak{A}>$). Множество $\mathfrak{A}$ называется p-замкнутым, если $\mathfrak{A} = <\mathfrak{A}>$; p-замкнутые множества называются также p-замкнутыми классами.

Обозначим через R_k, $k \geqslant 3$, множество всех функций k-значной логики, принимающих значения только из множества $\{0, 1\}$ и равных нулю на единичном наборе и на всех наборах, содержащих хотя бы одну нулевую компоненту. Множество всех наборов из E_k^n, которые получаются друг из друга перестановкой компонент, называется слоем. Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ из R_k будем называть симметрической, если для любого слоя $\mathscr{L} \subseteq E_k^n$ и любых двух наборов $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta} \in \mathscr{L}$ выполняется равенство $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta})$. Множество всех симметрических функций из R_k будем обозначать через S_k. Функция из R_k называется m-слойной симметрической, если существуют m слоев, $m \geqslant 1$, таких, что эта функция равна единице на всех наборах из этих слоев и равна нулю на всех остальных наборах. Множество всех m-слойных симметрических функций из R_k будем обозначать через S_k^m, $m \geqslant 1$. Множество всех однослойных симметрических функций из R_k, равных нулю на всех наборах, все компоненты которых совпадают, будем обозначать через NS_k^1, $k \geqslant 3$.

Пусть*) $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha \geqslant 0$, а $f(x_1, \ldots, x_n)$ — однослойная симметрическая функция. Будем говорить, что f является функцией типа σ (тип функции f равен σ), если отношение числа единиц к числу двоек в слое, на наборах которого эта функция равна единице, равно σ. Множество всех функций из S_3^1, тип которых равен σ, будем обозначать через F_σ, $\sigma \in \mathbb{Q}$, $\sigma \geqslant 0$. Функцию из P_3 будем называть монотонной, если она монотонна относительно порядка $0 < 1 < 2$ на множестве E_3. Множество всех монотонных функций из R_3 будем обозначать через MS. Пусть f — монотонная симметрическая функция из R_3. Обозначим через e_f и d_f число единиц и двоек соответственно в слое с наибольшим числом единиц, на котором функция f принимает значение 1. Пусть $G \subseteq \mathrm{MS}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Будем называть множество G k-ограниченным, если для любой функции $f \in G$ выполняется неравенство $e_f \leqslant k$ и найдется функция $g \in G$, такая, что $e_g = k$. Пусть G — k-ограниченное множество. Положим $\mathscr{K}(G) = \{g \in G \mid e_g = k\}$.

Пусть $\mathrm{A} \subseteq P_k$, $k \geqslant 3$. Будем говорить, что множество A обладает свойством $(*)$, если для любого $G \subseteq \mathrm{A}$ выполняется равенство $\big(\cup[\{g\}]\big) \cap \mathrm{A} = [\cup\{g\}] \cap \mathrm{A}$, где объединение берется по всем функциям g из множества G. Таким образом, если функция f из множества A выражается некоторой формулой над G, то найдется функция g из G, такая, что $f \in [\{g\}]$. Будем говорить, что функция f не превосходит функцию g относительно отношения $\preceq$ (обозначение $f \preceq g$), если $f \in [\{g\}]$. Функции f и g называются эквивалентными (обозначение $f \sim g$), если $f \preceq g$ и $g \preceq f$. Будем говорить, что функция f не превосходит функцию g относительно отношения $\trianglelefteq_{\mathrm{A}}$ (обозначение $f \trianglelefteq_{\mathrm{A}} g$), если существует формула Φ над A, реализующая функцию f и содержащая подформулу вида $g(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m)$, где $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ — формулы над A. Будем говорить, что множество A обладает свойством $(**)$, если для любых $f, g \in \mathrm{A}$, таких, что $f \trianglelefteq_{\mathrm{A}} g$ и $g \trianglelefteq_{\mathrm{A}} f$, выполняется соотношение $f \sim g$ и для любых функций $f, g, h \in \mathrm{A}$, таких, что $f \trianglelefteq_{\mathrm{A}} g$, $g \trianglelefteq_{\mathrm{A}} h$, $f \preceq h$, выполняется, по крайней мере, одно из следующих соотношений: $f \preceq g$, $g \preceq h$.

Опишем кратко содержание работы.

*) Через $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{N}$ обозначаем множество всех рациональных и множество всех натуральных чисел соответственно, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

В параграфе 1 приводятся основные определения, обозначения и вспомогательные утверждения (см. также [3,7,72,78,80,81]).

В параграфе 2 изучаются замкнутые (относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной) классы, порожденные однослойными симметрическими функциями из R_3. Вводится специальное отношение порядка на множестве S_3^1. В п. 2.1 доказывается, что класс F, порожденный множеством G, $G \subseteq \mathrm{NS}_3^1$, имеет базис тогда и только тогда, когда каждая функция из G содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G относительно введенного отношения порядка; при этом F имеет конечный базис тогда и только тогда, когда множество G конечно (теорема 2.1). В п. 2.2 сопоставляются замкнутые классы и p-замкнутые классы, порожденные однослойными симметрическими функциями. Показывается, что замыкание множества S_3^1 совпадает с p-замыканием этого множества (теорема 2.2). Далее, для любой функции f из NS_3^1 и любого $\sigma \in \mathbb{Q}$, $\sigma > 0$, приводятся необходимые и достаточные условия выполнения соотношения $[\{f\}] \subseteq < F_\sigma \cup \{f\} >$ (теорема 2.3). Отсюда, в частности, следует, что для каждой функции f из S^1 существует число $\sigma \in \mathbb{Q}^+$, такое, что $[\{f\}] \subseteq < F_\sigma \cup \{f\} >$ (следствие 2.2.14), и для каждой функции $f \in \mathrm{NS}^1$ множество таких чисел σ всюду плотно в некотором интервале (утверждение 2.2.15). Наконец, доказывается, что замкнутый класс, порожденный функциями из множества S_3^1, является конечно-порожденным тогда и только тогда, когда существуют рациональные числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$, $t \geqslant 1$, такие, что каждая функция из этого класса принадлежит множеству $< F >$, где $F = F_{\sigma_1} \cup \ldots \cup F_{\sigma_t}$ (теорема 2.4).

В параграфе 3 изучаются замкнутые классы, порожденные монотонными симметрическими функциями из множества R_3. Приводятся критерии базируемости и конечной порожденности для рассматриваемых классов. В п. 3.1 вводится отношение порядка $\preceq_{\mathrm{MS}}$ на множестве MS. Показывается, что класс F, порожденный множеством G, $G \subseteq \mathrm{MS}$, имеет базис тогда и только тогда, когда каждая функция из G содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G относительно введенного отношения порядка; при этом F имеет конечный базис тогда и только тогда, когда множество G является k-ограниченным и множество $\mathscr{K}(G)$ конечно (теорема 3.1). В п. 3.2 рассматривается представление монотонных симметрических функций точками на плоскости из множества $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{N}$. Каждой функции f из MS ставится в соответствие точка на плоскости с координатами (e_f, d_f) и указываются все точки плоскости, соответствующие функциям g и h из MS, таким, что $g \preceq_{\mathrm{MS}} f \preceq_{\mathrm{MS}} h$ (следствие 3.2.3). В п. 3.3 приводятся критерии базируемости и конечной порожденности замкнутых классов, порожденных монотонными симметрическими функциями, в терминах свойств множеств точек из $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{N}$, соответствующих порождающим системам этих классов (теоремы 3.2 и 3.3).

В параграфе 4 изучаются множества, обладающие свойствами $(*)$ и $(**)$. Доказывается критерий базируемости для классов, порождающие системы которых содержатся в множествах, обладающих этими свойствами. Приводятся также примеры множеств, обладающих свойствами $(*)$ и $(**)$. В п. 4.1 доказывается критерий базируемости для замкнутых классов, порождающие системы которых состоят из попарно неэквивалентных функций и содержатся в множествах, обладающих свойствами $(*)$ и $(**)$. Показано, что каждый такой класс F имеет базис тогда и только тогда, когда всякая функция из системы G, порождающей класс F, содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G относительно порядка $\preceq$ (теорема 4.1). Этот критерий является обобщением критерия базируемости для однослойных симметрических функций, полученного в п. 2.1. Кроме того, показывается, что если класс F имеет базис, то существует базис класса F, состоящий из всех верхних граней ограниченных максимальных цепей множества G (следствие 4.1.1). В п. 4.2 приводятся примеры множеств функций, удовлетворяющих условиям полученных критериев (теоремы 4.2–4.4). Показывается, что свойствами ($*$) и ($**$) обладают множество всех немонотонных функций из S_3^m, $m \geqslant 1$, множество NS_k^1, $k \geqslant 3$, а также некоторые подмножества множества S_3, обладающие рядом дополнительных свойств.

§ 1. Основные определения и вспомогательные утверждения

В этом параграфе приводятся основные определения и вспомогательные утверждения.

1.1. Определения и обозначения. Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $k \geqslant 2$. Через E_k^n обозначим множество всех наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in E_k$, $n \geqslant 1$. Число единиц в наборе $\widetilde{\alpha}$ обозначим через $|\widetilde{\alpha}|$. Набор из E_k^n, все компоненты которого равны a, будем обозначать через a^n. Пусть $\mathbb{X}$ — счетное множество переменных. Будем обозначать переменные символами $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, $y_1, \ldots, y_n, \ldots$, а набор переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ — через $\widetilde{x}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{X}$. Обозначим набор $(x, \ldots, x)$ длины q, состоящий из q одинаковых переменных x, через x^q, $q \geqslant 1$.

Пусть A — произвольное множество. Множество $\mathrm{B} = \{A_1, \ldots, A_s\}$, $s \geqslant 1$, называется разбиением множества A, если выполняются следующие условия:

(1) $A_i \neq \varnothing$ для всех $i = 1, \ldots, s$;

(2) $A_i \cap A_j = \varnothing$ для любых $1 \leqslant i, j \leqslant s$, $i \neq j$;

(3) $A_1 \cup \ldots \cup A_s = A$.

Пусть $A_1 \subseteq E_k^{n_1}, \ldots, A_p \subseteq E_k^{n_p}$, $p \geqslant 1$. Через $\prod\limits_{i=1}^{p} A_i = A_1 \times \ldots \times A_p$ обозначим множество всех наборов из E_k^n вида $(\widetilde{\alpha^1}, \ldots, \widetilde{\alpha^p})$, где $\widetilde{\alpha}_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, p$, $n = n_1 + \ldots + n_p$. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\{X_1, \ldots, X_p\}$ — разбиение множества X, $X_1 = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}\}$, $X_2 = \{x_{i_{n_1+1}}, \ldots, x_{i_{n_2}}\}, \ldots, X_p = \{x_{i_{n_{p-1}+1}}, \ldots, x_{i_{n_p}}\}$, $n_p > n_{p-1} > \ldots > n_1 \geqslant 1$. Пусть $A_1 \subseteq E_k^{n_1}, \ldots, A_p \subseteq E_k^{n_p}$. Будем обозначать через $\prod\limits_{i=1}^{p} A_i(X_i) = A_1(X_1) \times \ldots \times A_p(X_p)$ множество всех таких наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, что $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{n_1}}) \in A_1$, $(\alpha_{i_{n_1+1}}, \ldots, \alpha_{i_{n_2}}) \in A_2$, $\ldots$, $(\alpha_{i_{n_{p-1}+1}}, \ldots, \alpha_{i_{n_p}}) \in A_p$.

Множество всех натуральных чисел будем обозначать через $\mathbb{N}$, множество всех рациональных чисел — через $\mathbb{Q}$, множество всех действительных чисел — через $\mathbb{R}$. Пусть $a \in \mathbb{Q}$. Обозначим через $]a[$ наименьшее целое число, которое не меньше a. Положим $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geqslant 0\}$, $\mathbb{R}^+ = \{q \in \mathbb{R} \mid q \geqslant 0\}$. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Наибольший общий делитель чисел m и n будем обозначать через (m, n).

Частично упорядоченным множеством (см. [3, 72]) называется система элементов $A = \{a, b, c, \ldots\}$ с отношением порядка $\preceq_A$ для некоторых элементов и равенством, в которой для любых элементов $a, b, c \in A$ выполняются следующие соотношения (аксиомы):

(1) $a \preceq_A a$ (рефлексивность);

(2) если $a \preceq_A b$ и $b \preceq_A c$, то $a \preceq_A c$ (транзитивность);

(3) если $a \preceq_A b$ и $b \preceq_A a$, то $a = b$ (антисимметричность).

Соотношения $a \preceq_A b$ и $a \prec b$ будем также записывать в виде $b \succeq_A a$ и $b \succ a$ соответственно. Частично упорядоченное множество A называется линейно упорядоченным множеством (или цепью), если оно также удовлетворяет аксиоме:

(4) если $a, b \in A$, то $a \preceq_A b$ или $b \preceq_A a$.

Функцией k-значной логики называется функция, все переменные которой принимают значения из множества E_k и которая сама также принимает значения из E_k, $k \geqslant 2$. Множество всех функций k-значной логики обозначается через P_k, $k \geqslant 2$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k зависит существенным образом от переменной x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, если существуют такие наборы $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, $\widetilde{\beta} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \beta_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \neq \beta_i$, что $f(\widetilde{\alpha}) \neq f(\widetilde{\beta})$. В этом случае переменная x_i называется существенной. Если x_i не является существенной переменной, то она называется несущественной (или фиктивной). Пусть $f, g \in P_k$. Функции f и g называются равными (обозначение $f = g$), если на любом наборе значений существенных переменных они принимают равные значения. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$. Будем обозначать через N_f множество всех наборов из E_k^n, на которых функция f принимает значение 1.

Функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(y_1, \ldots, y_n)$ из P_k называются конгруэнтными, если одна из них получается из другой переименованием переменных без отождествления (обозначение $f \cong g$). Пусть $A, B \subseteq P_k$. Будем говорить, что $A \cong B$, если для любой функции $f \in A$ существует функция $g \in B$, такая, что $f \cong g$, и наоборот, для любой функции $g \in B$ существует функция $f \in A$, такая, что $g \cong f$. Отметим, что если $N_f = N_g$, то $f \cong g$.

Пусть $\mathrm{A} \subseteq P_k$, $f \in \mathrm{A}$. Положим $\mathscr{F}_{\mathrm{A}}(f) = \{g \in \mathrm{A} | g \cong f\}$, $\mathscr{F}_{\mathrm{A}} = \cup \mathscr{F}_{\mathrm{A}}(f)$, где объединение берется по всем функциям множества A. Очевидно, что $\mathscr{F}_{\mathrm{A}}$ является разбиением множества A на классы, состоящие из конгруэнтных функций. Пусть на множестве $\mathscr{F}_{\mathrm{A}}$ задан порядок $\preceq_{\mathrm{A}}$. Будем также писать $f \preceq_{\mathrm{A}} g$, сравнивая f и g как представителей классов $\mathscr{F}_{\mathrm{A}}(f)$ и $\mathscr{F}_{\mathrm{A}}(g)$ соответственно. Будем использовать обозначение $f \prec_{\mathrm{A}} g$, если $f \preceq_{\mathrm{A}} g$ и $f \ncong g$. Будем говорить, что функции f и g несравнимы относительно $\preceq_{\mathrm{A}}$, если $f \npreceq_{\mathrm{A}} g$ и $g \npreceq_{\mathrm{A}} f$. Если $\mathrm{A} = P_k$, то индекс множества A в этих обозначениях будем опускать.

Пусть на множестве A задано отношение $\preceq_{\mathrm{A}}$. Пусть $H \subseteq G \subseteq \mathrm{A}$, где H — цепь, а G — множество попарно неконгруэнтных функций. Цепь H называется максимальной цепью множества G, если для любой цепи $H_1 \subseteq \mathrm{A}$, такой, что $H \subseteq H_1$, $H \neq H_1$, цепь H_1 не является подмножеством множества G. Функция $f \in H$ называется верхней гранью цепи H, если для любой функции $g \in H$ выполняется неравенство $g \preceq_{\mathrm{A}} f$. Цепь называется ограниченной, если она имеет верхнюю грань.

Пусть $\mathfrak{A} = \{f_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}), f_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_2}}), \ldots, \}$ — некоторое множество функций из P_k. Дадим определение понятия формулы над $\mathfrak{A}$.

(1) Символ переменной из множества $\mathbb{X}$ является формулой над $\mathfrak{A}$; такие формулы называются тривиальными.

(2) Если $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — формулы над $\mathfrak{A}$, а $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}$, то выражение $\Phi = f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ является формулой над $\mathfrak{A}$, $n \geqslant 1$, при этом Φ,

$\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ называются подформулами формулы Φ. Подформулами формулы Φ называется также сама формула Φ и все подформулы формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$.

Пусть Φ — формула над $\mathfrak{A}$. Будем обозначать через $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ такую формулу, которая содержит символы переменных $x_1, \ldots, x_n$ и не содержит символы других переменных. Множество всех переменных, которые содержатся в формуле Φ, будем обозначать через X_Φ.

Для каждого набора $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$ определим значение $\Phi(\widetilde{\alpha})$ формулы Φ на наборе $\widetilde{\alpha}$. Если Φ — тривиальная формула вида x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, то это значение равно α_i. Пусть Φ имеет вид $f(\Phi_1(\widetilde{x}^1), \ldots, \Phi_m(\widetilde{x}^m))$, где $f \in \mathfrak{A}$, $\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^m$ — поднаборы набора $\widetilde{x}$, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ — формулы над $\mathfrak{A}$, для которых значения $\Phi_1(\widetilde{\alpha}^1), \ldots, \Phi_m(\widetilde{\alpha}^m)$ уже определены и равны $\beta_1, \ldots, \beta_m$ соответственно. Тогда $\Phi(\widetilde{\alpha}) = f(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Пусть $\Psi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$ — некоторая формула над $\mathfrak{A}$, $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_k^n$. Будем обозначать через $\Psi(\widetilde{\alpha})$ значение формулы Ψ на наборе $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m})$. Будем обозначать через N_Φ множество всех наборов из E_k^n, на которых формула Φ принимает значение 1.

Формулы Φ и Ψ называются эквивалентными, если они реализуют равные функции (обозначение $\Phi = \Psi$). Формулы Φ и Ψ называются конгруэнтными, если они реализуют конгруэнтные функции (обозначение $\Phi \cong \Psi$).

Пусть Φ — некоторая формула над $\mathfrak{A}$. Определим глубину формулы Φ. Если Φ — тривиальная формула, то глубина формулы Φ равна нулю. Пусть Φ имеет вид $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$, где $f \in \mathfrak{A}$, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ — формулы над $\mathfrak{A}$, глубина которых равна $d_1, \ldots, d_m$ соответственно. Тогда глубина формулы Φ равна $1 + \max d_i$, где максимум берется по всем $i = 1, \ldots, m$.

Формула Φ над $\mathfrak{A}$ называется простой, если она имеет вид $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, где $g \in \mathfrak{A}$, а $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ — символы переменных, $n \geqslant 1$. Пусть $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_n$ — формулы над $\mathfrak{A}$. Будем обозначать через $\Phi(\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_n)$ формулу над $\mathfrak{A}$, полученную из Φ подстановкой формулы $\mathscr{C}_i$ вместо каждого вхождения переменной x_i, $i = 1, \ldots, n$. Формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ над $\mathfrak{A}$ называется бесповторной, если символ каждой переменной $x_1, \ldots, x_n$ встречается ровно один раз.

Пусть $\mathfrak{A} \subseteq P_k$, Φ — некоторая формула над $\mathfrak{A}$. Множество всех функций, символы которых содержатся в формуле Φ, обозначим через $\Theta(\Phi)$. Очевидно, что Φ является формулой над $\Theta(\Phi)$, и для любого $\mathfrak{B} \subseteq \Theta(\Phi)$, $\mathfrak{B} \neq \Theta(\Phi)$, формула Φ не является формулой над $\mathfrak{B}$.

Пусть $\mathfrak{A} \subseteq P_k$. Будем говорить, что $f(x_1, \ldots, x_n)$ получена операцией суперпозиции из функций системы $\mathfrak{A}$, если функция реализована некоторой нетривиальной формулой над $\mathfrak{A}$. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ выразима над множеством $\mathfrak{A}$, если ее можно представить в виде суперпозиции функций из $\mathfrak{A}$. Будем говорить, что функция $g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ получена добавлением несущественной (фиктивной) переменной из функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in {E_k}^{n+1}$ выполняется равенство $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Множество всех функций, которые могут быть получены из функций системы $\mathfrak{A}$ применением операций суперпозиции и введения фиктивной переменной, будем называть замыканием множества $\mathfrak{A}$ (относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной) и обозначать $[\mathfrak{A}]$. Множество $\mathfrak{A}$ называется замкнутым (относительно операций суперпозиции и введения фиктивной переменной), если $\mathfrak{A} = [\mathfrak{A}]$; замкнутые множества будем называть также замкнутыми классами. Множество всех функций, которые могут быть реализованы простыми формулами над $\mathfrak{A}$ и применением операции введения фиктивной переменной, будем называть p-замыканием множества $\mathfrak{A}$ (обозначение $<\mathfrak{A}>$). Множество $\mathfrak{A}$ называется p-замкнутым, если $\mathfrak{A} = <\mathfrak{A}>$.

Пусть $F \subseteq P_k$, $F = [F]$. Множество функций $\mathfrak{A} \subseteq F$ называется базисом класса F, если $[\mathfrak{A}] = F$ и для любого множества $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$, выполняется неравенство $[\mathfrak{B}] \neq F$. Замкнутый класс F называется базируемым, если существует множество $\mathfrak{A}$, такое, что $\mathfrak{A}$ — базис класса F. Замкнутый класс F называется конечно-порожденным, если он имеет конечный базис.

Пусть $\mathrm{A} \subseteq P_k$. Будем говорить, что множество A обладает свойством $(*)$, если для любого $G \subseteq \mathrm{A}$ выполняется равенство

$$\left(\bigcup_{g \in G} [\{g\}]\right) \bigcap \mathrm{A} = \left[\bigcup_{g \in G} \{g\}\right] \bigcap \mathrm{A}. \tag{1}$$

Пусть $f, g \in \mathrm{A} \subseteq P_k$. Будем говорить, что функция f не превосходит функцию g относительно $\preceq$ (обозначение $f \preceq g$), если $f \in [\{g\}]$. Будем говорить, что функции f и g эквивалентны (обозначение $f \sim g$), если $f \preceq g$ и $g \preceq f$. Пусть $\mathfrak{G}_{\mathrm{A}}$ — разбиение множества A на классы эквивалентности относительно отношения $\sim$. Положим $\mathscr{G}_{\mathrm{A}}(f) = \{g \in \mathrm{A} | g \sim f\}$. Очевидно, что для любых $f, g \in \mathrm{A}$ соотношение $f \sim g$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathscr{G}_{\mathrm{A}}(f) = \mathscr{G}_{\mathrm{A}}(g)$. Будем говорить, что $\mathscr{G}_{\mathrm{A}}(f) \preceq \mathscr{G}_{\mathrm{A}}(g)$, если $f \preceq g$. Легко видеть, что на множестве $\mathfrak{G}_{\mathrm{A}}$ отношение $\preceq$ рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Следовательно, отношение $\preceq$ является отношением порядка на множестве $\mathfrak{G}_{\mathrm{A}}$. Будем использовать обозначение $f \prec g$, если $f \preceq g$ и $f \not\sim g$. Пусть A — множество неэквивалентных функций из P_k, $H \subseteq \mathrm{A}$ — цепь относительно порядка $\preceq$, f — верхняя грань цепи H. Тогда очевидно, что $H \subseteq [\{f\}]$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{A} \subseteq P_k$, $n, m \geqslant 1$. Будем говорить, что функция f не превосходит функцию g относительно $\trianglelefteq_A$ (обозначение $f \trianglelefteq_{\mathrm{A}} g$), если существует формула Φ над A, реализующая функцию f и содержащая подформулу вида $g(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m)$, где $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ — формулы над A (т. е. если $g \in \Theta(\Phi)$). Очевидно, что если $f \preceq g$, то $f \trianglelefteq_{\mathrm{A}} g$. Будем использовать обозначение $\mathscr{G}_{\mathrm{A}}(f) \trianglelefteq_{\mathrm{A}} \mathscr{G}_{\mathrm{A}}(g)$, если $f \trianglelefteq_{\mathrm{A}} g$. Легко видеть, что это определение не зависит от выбора функций f и g.

Будем говорить, что множество A обладает свойством $(**)$, если для любых $f, g \in \mathrm{A}$, таких, что $f \trianglelefteq_{\mathrm{A}} g$ и $g \trianglelefteq_{\mathrm{A}} f$, выполняется соотношение $f \sim g$ и для любых функций $f, g, h \in \mathrm{A}$, таких, что $f \trianglelefteq_{\mathrm{A}} g$, $g \trianglelefteq_{\mathrm{A}} h$, $f \preceq h$, выполняется, по крайней мере, одно из следующих соотношений: $f \preceq g$, $g \preceq h$.

Положим $D_k^n = \{1, 2, \ldots, k-1\}^n \setminus \{1\}^n$, $k \geqslant 2$, $n \geqslant 1$. Обозначим через $R_k^{(n)}$ множество всех функций из P_k, зависящих от n переменных, принимающих значения только из множества $\{0, 1\}$ и равных нулю на всех наборах из множества $E_k^n \setminus D_k^n$. Положим $R_k = \bigcup_{n \geqslant 1} R_k^{(n)}$. Обозначим через $\widehat{R_k}$ множество всех функций из P_k, принимающих значения только из множества $\{0, 1\}$ и равных нулю на всех наборах, содержащих хотя бы один нуль. Положим $R = R_3$, $\widehat{R} = \widehat{R_3}$.

З а м е ч а н и е 1.1.1. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \widehat{R_k}$ *и* f *отлична от константы* 0. *Тогда функция* f *существенно зависит от переменных* $x_1, \ldots, x_n$.

Зададим на множестве E_k отношение порядка: $0 < 1 < \ldots < k-1$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ называется монотонной, если для любых двух наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, из E_k^n, таких, что $\alpha_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n \leqslant \beta_n$ выполняется неравенство $f(\widetilde{\alpha}) \leqslant f(\widetilde{\beta})$.

Множество всех наборов из E_k^n, которые получаются друг из друга перестановкой компонент, будем называть слоем. Слой из $\{1, 2, \ldots, k-1\}^n$, содержащий e единиц, d_1 двоек, d_2 троек, ..., d_{k-2} символов $k-1$, обозначим через $\mathscr{L}(e, d_1, \ldots, d_{k-2})$, $0 \leqslant e \leqslant n$, $0 \leqslant d_i \leqslant n$, $i = 1, \ldots, k-2$, $e + d_1 + \ldots + d_{k-2} = n$. Слой из $\{1, 2\}^n$, содержащий e единиц и d двоек, будем обозначать также через $\mathscr{L}(e, d)$, где $0 \leqslant e \leqslant n$, $0 \leqslant d \leqslant n$, $e + d = n$. Типом слоя $\mathscr{L}(e, d)$ из D_3^n ($e \geqslant 0$, $d \geqslant 1$) называется рациональное число, равное $\frac{e}{d}$. Множество наборов вида $\prod_{i=1}^{p} \mathscr{L}(e_i, d_i)$, $p \geqslant 1$, $e_1, \ldots, e_p, d_1, \ldots, d_p \geqslant 0$, будем называть произведением подслоев, а множества $\mathscr{L}(e_1, d_1)$, $\ldots$, $\mathscr{L}(e_p, d_p)$ — сомножителями этого произведения.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Через $f^{(i,j)}(x_1, \ldots, x_n)$ обозначим функцию, полученную из $f(x_1, \ldots, x_n)$ перестановкой переменных x_i и x_j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, т.е.

$$f^{(i,j)}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

Очевидно, что при $i = j$ выполняется $f^{(i,j)}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, через $(f^{(i,j)})^{(m,n)}$ обозначается функция, полученная из функции $f^{(i,j)}$ перестановкой переменных x_m и x_n. Например,

$$(f^{(1,2)})^{(1,3)}(x_1, \ldots, x_n) = f^{(1,3)}(x_2, x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n) = \\ = f(x_3, x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, \ldots, x_n), \ n \geqslant 3.$$

Замечание 1.1.2. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$. *Тогда*

$$((f^{(i,j)})^{(i,k)})^{(i,j)}(x_1, \ldots, x_n) = f^{(j,k)}(x_1, \ldots, x_n).$$

Действительно, пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$. Легко видеть, что выполняются равенства

$$((f^{(i,j)})^{(i,k)})^{(i,j)}(x_1, \ldots, x_n) = \\ = (f^{(i,k)})^{(i,j)}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n) = \\ = f^{(i,j)}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_k, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_j, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \\ = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_j, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \\ = f^{(j,k)}(x_1, \ldots, x_n).$$

Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является симметрической относительно множества переменных X_1, $X_1 \subseteq X$, если для любых переменных x_i, $x_j \in X_1$ выполняется равенство $f(x_1, \ldots, x_n) = f^{(i,j)}(x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является симметрической относительно множества переменных X_1. Будем говорить, что множество X_1 максимально по симметричности для функции f, если для любого множества $X_2 \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, такого, что $X_1 \subseteq X_2$, $X_1 \neq X_2$, функция f не является симметрической относительно множества X_2. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Разбиение множества X вида $\mathrm{X}_f = \{X_1, \ldots, X_m\}$ будем называть максимальным по симметричности для функции f, если множества $X_1, \ldots, X_m$ — максимальные по симметричности для функции f.

Функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ будем называть симметрической, если множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — максимальное по симметричности для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Очевидно, что если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — симметрическая функция из $\widehat{R_k}$, то для любого слоя $\mathscr{L}(e, d_1, \ldots, d_{k-2})$ из $\{1, 2, \ldots, k-1\}^n$,

$e+d_1+\ldots+d_{k-2}=n$, и для любых наборов $\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\in\mathscr{L}(e,d_1,\ldots,d_{k-2})$ выполняется равенство $f(\widetilde{\alpha})=f(\widetilde{\beta})$. Множество всех симметрических функций из R_k будем обозначать через S_k. Функцию $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{S}_k$ будем называть m-слойной симметрической функцией, если существует m слоев $\mathscr{L}_1,\ldots,\mathscr{L}_m$ из D_k^n, $m\geqslant 1$, таких, что $N_f=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\mathscr{L}_i$. Множество всех m-слойных симметрических функций из R_k будем обозначать через S_k^m, $m\geqslant 1$. Множество всех немонотонных m-слойных симметрических функций из R_3 будем обозначать через NS_3^m, $m\geqslant 1$. Положим $\mathrm{S}=\mathrm{S}_3$, $\mathrm{S}^m=\mathrm{S}_3^m$, $\mathrm{NS}^m=\mathrm{NS}_3^m$. Множество всех немонотонных однослойных симметрических функций из R_k, принимающих значение 1 на наборах, содержащих, по крайней мере, две различные компоненты, будем обозначать через NS_k^1.

Замечание 1.1.3. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{NS}_3^m$, $N_f=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\mathscr{L}(e_i,d_i)$, $e_i+d_i=n$, $i=1,\ldots,m$, $0\leqslant e_1<e_2<\ldots<e_m$. *Тогда справедливы следующие неравенства:* $e_m\geqslant m$, $e_i\geqslant i-1$ *для всех* $i=1,\ldots,m-1$, $d_i\geqslant m-(i-1)$ *для всех* $i=1,\ldots,m$.

Действительно, поскольку $e_i\in\mathbb{Z}^+$, $i=1,\ldots,m$ и $0\leqslant e_1<e_2<\ldots<e_m$, то очевидно, что $e_i\geqslant i-1$. Так как $d_i\in\mathbb{N}$, $i=1,\ldots,m$ и $e_i+d_i=n$, то $1\leqslant d_m<d_{m-1}<\ldots<d_1$. Поэтому очевидно, что $d_i\geqslant m-(i-1)$. Покажем, что $e_m\geqslant m$. В самом деле, предположим, что $e_m<m$. Тогда для всех $i=1,\ldots,m-1$ выполняется неравенство $e_i<i$. Следовательно, $e_1=0$, $e_2=1,\ldots e_m=m-1$. Тогда функция f монотонная, что противоречит тому, что $f\in\mathrm{NS}_3^m$. Следовательно, $e_m\geqslant m$.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{S}_3^m$. Тогда по определению m-слойной симметрической функции найдутся числа $e_1,\ldots,e_m$, $d_1,\ldots,d_m$, такие, что $0\leqslant e_1<\ldots<e_m<n$, $0<d_m<\ldots<d_1\leqslant n$, $e_i+d_i=n$, где $i=1,2,\ldots,m$, и выполняется равенство $N_f=\cup\mathscr{L}(e_i,d_i)$, где объединение берется по всем $i=1,\ldots,m$. Типом m-слойной симметрической функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ назовем набор чисел $(\frac{e_1}{c},\frac{d_1}{c},\ldots,\frac{e_m}{c},\frac{d_m}{c})$, где c — наибольший общий делитель чисел $e_1,\ldots,e_m$, $d_1,\ldots,d_m$. Отметим, что тип однослойной функции однозначно определяется типом слоя, на котором эта функция равна единице.

Определим на множестве $\mathscr{F}_{\mathrm{S}^m}=\cup\{\mathscr{F}_{\mathrm{S}^m}(f)\}$, где объединение берется по всем функциям множества S^m, отношение частичного порядка $\preceq_{\mathrm{S}^m}$. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$, $g(y_1,\ldots,y_p)\in\mathrm{S}^m$. Будем говорить, что $\mathscr{F}_{\mathrm{S}^m}(f)\preceq_{\mathrm{S}^m}\mathscr{F}_{\mathrm{S}^m}(g)$, если f и g — функции одного типа и p кратно n. Очевидно, что отношение $\preceq_{\mathrm{S}^m}$ транзитивно, рефлексивно и антисимметрично. Поэтому $\preceq_{\mathrm{S}^m}$ является отношением частичного порядка на множестве $\mathscr{F}_{\mathrm{S}^m}$. Будем также писать $f\preceq_{\mathrm{S}^m}g$, сравнивая f и g как представителей классов $\mathscr{F}_{\mathrm{S}^m}(f)$ и $\mathscr{F}_{\mathrm{S}^m}(g)$ соответственно.

Замечание 1.1.4. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n),g(x_1,\ldots,x_p)\in\mathrm{S}^m$, $f\preceq_{\mathrm{S}^m}g$, $N_f=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\mathscr{L}(e_i,d_i)$ *и* $N_g=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\mathscr{L}(a_i,b_i)$, $i=1,\ldots,m$. *Тогда для некоторого натурального числа* q *выполняются равенства* $a_i=qe_i$, $b_i=qd_i$, *для всех* $i=1,\ldots,m$.

В самом деле, пусть c_f — наибольший общий делитель чисел $e_1,\ldots,e_m$, $d_1,\ldots,d_m$, c_g — наибольший общий делитель чисел $a_1,\ldots,a_m$, $b_1,\ldots,b_m$. Поскольку $f\preceq_{\mathrm{S}^m}g$, то типы функций f и g совпадают. Поэтому $c_ge_i=c_fa_i$ и $c_gd_i=c_fb_i$. А значит, $c_gn=c_g(e_i+d_i)=c_f(a_i+b_i)=c_fp$. Поскольку p кратно n, то c_g кратно c_f. Следовательно, для $q=\dfrac{c_g}{c_f}$ выполняются равенства $a_i=qe_i$, $b_i=qd_i$, $i=1,\ldots,m$.

Обозначим множество всех монотонных симметрических функций из R_k через MS_k, $k \geqslant 3$. Положим $\mathrm{MS} = \mathrm{MS}_3$. Пусть $f \in \mathrm{MS}$. Число единиц и число двоек в слое с наибольшим числом единиц, на котором монотонная симметрическая функция f принимает значение 1, обозначим через e_f и d_f соответственно. Типом функции $f \in \mathrm{MS}$ называется число $\frac{e_f}{d_f}$. Очевидно, что тип функции совпадает с типом слоя с наибольшим числом единиц, на котором эта функция принимает значение 1.

Пусть $G \subseteq \mathrm{MS}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Будем называть множество G k-ограниченным, если для любой функции $f \in G$ выполняется неравенство $e_f \leqslant k$ и найдется функция $g \in G$, такая, что $e_g = k$. Пусть G — k-ограниченное множество. Функцию $g \in G$, для которой выполняется равенство $e_g = k$, будем называть максимальной функцией множества G. Обозначим множество всех максимальных функций множества G через $\mathscr{K}(G)$, т. е. $\mathscr{K}(G) = \{g \in G | e_g = k\}$.

Определим на множестве $\mathscr{F}_{\mathrm{MS}} = \cup\{\mathscr{F}_{\mathrm{MS}}(f)\}$, где объединение берется по всем функциям f из множества MS, отношение частичного порядка $\preceq_{\mathrm{MS}}$. Пусть $f, g \in \mathrm{MS}$. Будем говорить, что $\mathscr{F}_{\mathrm{MS}}(f) \preceq_{\mathrm{MS}} \mathscr{F}_{\mathrm{MS}}(g)$, если $f \in [\{g\}]$. Очевидно, что отношение $\preceq_{\mathrm{MS}}$ транзитивно и рефлексивно. Ниже будет показано (см. следствие 1.2.9), что отношение $\preceq_{\mathrm{MS}}$ антисимметрично. Поэтому $\preceq_{\mathrm{MS}}$ является отношением частичного порядка на множестве $\mathscr{F}_{\mathrm{MS}}$.

Положим $I = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{N}$. Пусть $D \subseteq I$, $D \neq \varnothing$. Множество D можно рассматривать также как множество точек на плоскости с целочисленными координатами.

Будем говорить, что множество D имеет n-границу, если для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}^+$ множество $\{(e, d) \in D \mid e > \alpha d\}$ конечно.

В этом случае n-границей будем называть прямую, которая задается уравнением $e = \alpha d$.

Обозначим через $\gamma(D)$ такое число из $\mathbb{R}^+$, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\alpha < \gamma(D)$, прямая, задаваемая уравнением $e = \alpha d$, не является n-границей, и для всех $\beta \in \mathbb{R}^+$, $\beta > \gamma(D)$, прямая, задаваемая уравнением $e = \beta d$ является n-границей. Если прямая $e = \gamma(D) \cdot d$ является n-границей множества D, то будем называть эту прямую точной n-границей множества D. Определим множество $\Gamma_n(D)$ следующим образом. Положим $\Gamma_n(D) = \{(e, d) \in D \,| e = \gamma(D) \cdot d\}$.

Будем говорить, что множество D имеет g-границу, если существует $a \in \mathbb{Z}^+$, такое, что для любой пары $(e, d) \in D$ выполняется неравенство $e \leqslant a$. Легко видеть, что если множество D имеет g-границу, то существует прямая, задаваемая уравнением $e = a$, $a \in \mathbb{Z}^+$, такая, что для любой пары (e, d) выполняется неравенство $e \leqslant a$ и для любого числа $b < a$, $b \in \mathbb{Z}^+$ существует пара $(e, d) \in D$, такая, что $e > b$. Будем называть такую прямую точной g-границей множества D. Обозначим множество целочисленных точек из D, лежащих на точной g-границе множества D, через $\Gamma_g(D)$. Будем говорить, что множество D имеет конечную g-границу, если множество D имеет g-границу и множество $\Gamma_g(D)$ конечно.

Множество точек D называется тривиальным, если точная g-граница задается уравнением $e = 0$. Будем называть множество функций $G \subseteq \mathrm{MS}$ нетривиальным, если множество $D(G)$ не является тривиальным. Назовем множество D линейным, если существует число $\alpha \in \mathbb{R}^+$, такое, что все точки множества D лежат на прямой, задаваемой уравнением $e = \alpha d$.

Пусть $D \subseteq I$. Определим множество $F(D)$ следующим образом. Положим $F(D) = \{f \in \mathrm{MS} | (e_f, d_f) \in D\}$. Легко видеть, что множество $F(I)$ совпадает с множеством MS. Пусть $F \subseteq \mathrm{MS}$. Определим множество $D(F)$ следующим образом: $D(F) = \{(e, d) \in I \mid$ существует функция $f \in F, e_f = e, d_f = d\}$.

1.2. Вспомогательные утверждения.

Утверждение 1.2.1. *Пусть* Φ *— некоторая формула над* $\mathfrak{A} \subseteq R_k$, *а* Φ_1 *– произвольная подформула формулы* Φ. *Пусть* $\widetilde{\alpha}$ *— произвольный набор из* E_k^n, *такой, что* $\Phi_1(\widetilde{\alpha}) = 0$. *Тогда* $\Phi(\widetilde{\alpha}) = 0$.

Доказательство. Пусть Φ — некоторая формула над $\mathfrak{A} \subseteq R_k$, Φ_1 – произвольная подформула формулы Φ, $\widetilde{\alpha}$ — произвольный набор из E_k^n, такой, что $\Phi_1(\widetilde{\alpha}) = 0$. Будем вести доказательство индукцией по глубине формулы Φ. Если глубина формулы Φ равна нулю, то Φ является символом переменной и совпадает с подформулой Φ_1. Очевидно, что в этом случае утверждение выполняется. Пусть для всех формул, глубина которых меньше s, $s \geqslant 1$, утверждение доказано. Рассмотрим формулу Φ над $\mathfrak{A}$, глубина которой равна s, $s \geqslant 1$. Если подформула Φ_1 совпадает с формулой Φ, то утверждение доказано. Пусть формула Φ имеет вид $f(\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$, где $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}$, а $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ — формулы над $\mathfrak{A}$, глубина каждой из которых меньше s. Тогда для некоторого Ψ_i, $i = 1, \ldots, n$, формула Φ_1 является подформулой формулы Ψ_i. По предположению индукции $\Psi_i(\widetilde{\alpha}) = 0$. Тогда $\Phi(\widetilde{\alpha}) = f(\Psi_1(\widetilde{\alpha}), \ldots, \Psi_{i-1}(\widetilde{\alpha}), 0, \Psi_{i+1}(\widetilde{\alpha}), \ldots, \Psi_n(\widetilde{\alpha}))$. Поскольку $f \in R_k$, то $\Phi(\widetilde{\alpha}) = 0$.

Следствие 1.2.2. *Пусть* Φ *— некоторая формула над* $\mathfrak{A} \subseteq R_k$, *а* Φ_1 *– произвольная нетривиальная подформула формулы* Φ. *Пусть* $\widetilde{\alpha}$ *— произвольный набор из* E_k^n, *такой, что* $\Phi(\widetilde{\alpha}) = 1$. *Тогда* $\Phi_1(\widetilde{\alpha}) = 1$.

Доказательство. Пусть Φ — некоторая формула над $\mathfrak{A} \subseteq R_k$, Φ_1 — произвольная нетривиальная подформула формулы Φ, $\widetilde{\alpha}$ — произвольный набор из E_k^n, такой, что $\Phi(\widetilde{\alpha}) = 1$. Поскольку формулы Φ и Φ_1 являются нетривиальными формулами над $\mathfrak{A} \subseteq R_k$, то они могут принимать значения только из множества $\{0, 1\}$. Предположим, что $\Phi_1(\widetilde{\alpha}) = 0$. Тогда по утверждению 1.2.1 выполняется равенство $\Phi(\widetilde{\alpha}) = 0$, что противоречит условию. Следовательно, $\Phi_1(\widetilde{\alpha}) = 1$.

Утверждение 1.2.3. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{NS}^l$, $l \geqslant 1$, Φ *— формула над* S, *реализующая функцию* f, *а* Φ_1 *— подформула формулы* Φ, *имеющая вид* $g(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m)$, *где* $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ *— формулы над* S, $g \in \mathrm{S}^r$, $r \leqslant l$. *Тогда среди формул* $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ *есть символы переменных, причем символ каждой переменной из множества* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *встречается одинаковое число раз.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{NS}^l$, $l \geqslant 1$, Φ — формула над S, реализующая функцию f, а Φ_1 — подформула формулы Φ, имеющая вид $g(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m)$, где $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ — формулы над S, $g \in \mathrm{S}^r$, $r \leqslant l$. Пусть $N_f = \bigcup\limits_{i=1}^{l} \mathscr{L}(e_i, d_i)$, $0 \leqslant e_1 < e_2 < \ldots < e_l < n$, $e_i + d_i = n$, $i = 1, \ldots, l$. Тогда $n \geqslant d_1 > \ldots > d_l > 0$. Пусть среди $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ символы переменных $x_1, \ldots, x_n$ встречаются $q_1, \ldots, q_n$ раз соответственно, а нетривиальные формулы — r раз, $r, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Z}^+$. Без ограничения общности будем считать, что $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_n \geqslant 0$.

Покажем, что $q_{e_l+1} > 0$. Предположим, что $q_{e_l+1} = 0$. Тогда для всех $i \geqslant e_l + 1$ выполняются равенства $q_i = 0$. Положим $\widetilde{\alpha} = (1^{e_l}, 2^{d_l})$. Поскольку $\widetilde{\alpha} \in \mathscr{L}(e_l, d_l) \subseteq N_f$, то $f(\widetilde{\alpha}) = 1$. По следствию 1.2.2 имеет место равенство $\Phi_1(\widetilde{\alpha}) = 1$. Кроме того, $\Phi_1(\widetilde{\alpha}) = g(\widetilde{\beta})$, где $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, $\beta_i = \mathscr{B}_i(\widetilde{\alpha})$, $i = 1, \ldots, m$. Если $\mathscr{B}_i$ является нетривиальной формулой, то в силу следствия 1.2.2 выполняется равенство $\mathscr{B}_i(\widetilde{\alpha}) = 1$. Поэтому $\mathscr{B}_i(\widetilde{\alpha}) = \beta_i = 1$, $i = 1, \ldots, m$. Так как $g \in R$, то $g(\widetilde{\beta}) = 0$. Это противоречит тому, что $\Phi_1(\widetilde{\alpha}) = g(\widetilde{\beta}) = 1$. Следовательно, $q_{e_l+1} > 0$.

Поскольку $f \in \mathrm{NS}^l$, то по замечанию 1.1.3 получаем, что $e_l \geqslant l$. Поэтому имеют место неравенства $q_{l+1} \geqslant q_{e_l+1} > 0$.

Покажем, что если среди чисел $q_1, \ldots, q_n$ есть различные, то $g \notin \bigcup\limits_{i=1}^{l} \mathrm{S}^i$. Предположим, что существуют j, k, $1 \leqslant j, k \leqslant n$, такие, что $q_j \neq q_k$. Поскольку $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_n$, то существует j, $2 \leqslant j \leqslant n$, такое, что $q_1 = \ldots = q_{j-1} > q_j$.

Рассмотрим три случая. Пусть $q_j = 0$. Поскольку $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_{l+1} > 0$, то $j > l+1$. Положим $q = q_1 = \ldots = q_{j-1}$. В силу замечания 1.1.3 выполняются неравенства $e_i \geqslant i-1$, $i = 1, \ldots, l-1$ и $e_l \geqslant l$. Определим наборы $\widetilde{\alpha}_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n}) \in \{1,2\}^n$, $i = 1, \ldots, l+1$ следующим образом. Положим

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_i &= (1^{i-1}, 2^{d_i}, 1^{e_i-i+1}), \quad i = 1, \ldots, l,\\ \widetilde{\alpha}_{l+1} &= (1^l, 2^{d_l-1}, 1^{e_l-l}, 2).\end{aligned}$$

Легко видеть, что $\widetilde{\alpha}_{l+1} \in \mathscr{L}(e_l, d_l)$ и для всех $i = 1, \ldots, l$ выполняются соотношения $\widetilde{\alpha}_i \in \mathscr{L}(e_i, d_i)$. Поскольку для всех $i = 1, \ldots, l$ выполняются соотношения $\mathscr{L}(e_i, d_i) \subseteq N_f$, то при всех $p = 1, \ldots, l+1$ справедливо равенство $f(\widetilde{\alpha}_p) = 1$. Поскольку $d_1 > \ldots > d_l$, то для всех $i = 2, \ldots, l$ выполняются неравенства $i - 1 + d_i \leqslant i - 2 + d_{i-1}$. Поэтому $\alpha_{i,k} \leqslant \alpha_{i-1,k}$ для всех $i = 2, \ldots, l$, $k = 1, \ldots, n$. Кроме того, для всех $k = 1, \ldots, n-1$ справедливы неравенства $\alpha_{l+1,k} \leqslant \alpha_{l,k}$ и для всех $i = 2, \ldots, l+1$ имеют место равенства $\alpha_{i,i-1} = 1$, $\alpha_{i-1,i-1} = 2$. Определим наборы $\widetilde{\beta}_i = (\beta_{i,1}, \ldots, \beta_{i,m})$ следующим образом. Положим

$$\beta_{i,k} = \mathscr{B}_k(\widetilde{\alpha}_i), \quad i = 1, \ldots, l+1, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Поскольку $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_{l+1} \in N_f$, то по следствию 1.2.2 получаем, что для всех $i = 1, \ldots, l+1$ имеют место равенства $g(\widetilde{\beta}_i) = f(\widetilde{\alpha}_i) = 1$. Поскольку $j > l+1$, то очевидно, что для всех $i = 2, \ldots, l+1$ имеют место неравенства

$$|\widetilde{\beta}_i| - |\widetilde{\beta}_{i-1}| = (r + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n\\ \alpha_{i,k}=1}} q_k) - (r + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n\\ \alpha_{i-1,k}=1}} q_k) \geqslant \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant j-1\\ \alpha_{i,k}=1\\ \alpha_{i-1,k}=2}} q_k \geqslant q > 0.$$

Поэтому выполняются неравенства $|\widetilde{\beta}_1| < |\widetilde{\beta}_2| < \ldots < |\widetilde{\beta}_{l+1}|$. Так как справедливы соотношения $\widetilde{\beta}_i \in \mathscr{L}(|\widetilde{\beta}_i|, m - |\widetilde{\beta}_i|) \subseteq N_g$, и $g(\widetilde{\beta}_i) = 1$, $i = 1, \ldots, l+1$, то функция g принимает значение 1 на наборах из более чем l различных слоев.

Пусть теперь $q_j > 0$, $e_1 = 0$. В силу замечания 1.1.3 выполняются неравенства $e_i \geqslant i-1$, $d_i \geqslant l-(i-1)$, $i = 1, \ldots, l$, $e_l \geqslant l$. Определим наборы $\widetilde{\gamma}_i = (\gamma_{i,1}, \ldots, \gamma_{i,n-2}) \in \{1,2\}^{n-2}$, $i = 1, \ldots, l$ следующим образом. Положим

$$\begin{aligned}\widetilde{\gamma}_1 &= (2^{n-2}),\\ \widetilde{\gamma}_i &= (1^{i-2}, 2^{l-i}, 1^{e_i-i+1}, 2^{d_i-l+i-1}), \quad i = 2, \ldots, l.\end{aligned}$$

Легко видеть, что $\widetilde{\gamma}_1 \in \mathscr{L}(0, n-2)$, $\widetilde{\gamma}_i \in \mathscr{L}(e_i - 1, d_i - 1)$, $i = 2, \ldots, l$. Так как $e_i > e_{i-1}$, то $e_i - i + 1 \geqslant e_{i-1} - (i-1) + 1$. Поэтому для всех $i = 2, \ldots, l$, $k = 1, \ldots, n-2$ выполняются неравенства $\gamma_{i,k} \leqslant \gamma_{i-1,k}$. Кроме того, для всех $i = 3, \ldots, l$ имеют место равенства $\gamma_{i,i-2} = 1$, $\gamma_{i-1,i-2} = 2$. Определим наборы $\widetilde{\alpha}_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n}) \in \{1,2\}^n$, $i = 1, \ldots, l+1$, следующим образом. Положим

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_1 &= (2^n),\\ \widetilde{\alpha}_i &= (\gamma_{i,1}, \ldots, \gamma_{i,j-2}, 2, 1, \gamma_{i,j-1}, \ldots, \gamma_{i,n-2}), \quad i = 2, \ldots, l,\\ \widetilde{\alpha}_{l+1} &= (\gamma_{l,1}, \ldots, \gamma_{l,j-2}, 1, 2, \gamma_{l,j-1}, \ldots, \gamma_{l,n-2}).\end{aligned}$$

Легко видеть, что $\widetilde{\alpha}_i \in \mathscr{L}(e_i, d_i)$, $i = 1, \ldots, l$ и $\widetilde{\alpha}_{l+1} \in \mathscr{L}(e_l, d_l)$. Поэтому для всех $i = 1, \ldots, l+1$ выполняются равенства $f(\widetilde{\alpha}_i) = 1$. Кроме того, для всех $i = 2, \ldots, l$, $k = 1, \ldots, n$ выполняются соотношения $\alpha_{i,k} \leqslant \alpha_{i-1,k}$. Очевидно, что существует k_i, $1 \leqslant k_i \leqslant \max(j, l)$, такое, что $\alpha_{i,k_i} = 1$, $\alpha_{i-1,k_i} = 2$. Определим наборы $\widetilde{\beta}_i = (\beta_{i,1}, \ldots, \beta_{i,m})$ следующим образом. Положим

$$\beta_{i,k} = \mathscr{B}_k(\widetilde{\alpha}_i), \quad i = 1, \ldots, l+1, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Поскольку $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l+1} \in N_f$, то по следствию 1.2.2 получаем, что для всех $i = 1, \ldots, l+1$ имеют место равенства $g(\widetilde{\beta}_i) = f(\widetilde{\alpha}_i) = 1$. Кроме того, выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\beta}_i| - |\widetilde{\beta}_{i-1}| &= \Big(r + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \alpha_{i,k}=1}} q_k\Big) - \Big(r + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \alpha_{i-1,k}=1}} q_k\Big) \geqslant \\
&\geqslant \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \alpha_{i,k}=1 \\ \alpha_{i-1,k}=2}} q_k \geqslant q_{k_i} \geqslant \min(q_j, q_l) > 0, \quad i = 2, \ldots, l, \\
|\widetilde{\beta}_{l+1}| - |\widetilde{\beta}_l| &= \Big(r + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \alpha_{l+1,k}=1}} q_k\Big) - \Big(r + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \alpha_{l,k}=1}} q_k\Big) = q_{j-1} - q_j > 0.
\end{aligned}$$

Поэтому выполняются неравенства $|\widetilde{\beta}_1| < |\widetilde{\beta}_2| < \ldots < |\widetilde{\beta}_{l+1}|$. Так как справедливы соотношения $\widetilde{\beta}_i \in \mathscr{L}(|\widetilde{\beta}_i|, m - |\widetilde{\beta}_i|) \subseteq N_g$, и $g(\widetilde{\beta}_i) = 1$, $i = 1, \ldots, l+1$, то функция g принимает значение 1 на наборах из более чем l различных слоев.

Пусть, наконец, $q_j > 0$, $e_1 > 0$. Поскольку имеют место неравенства $0 < e_1 < e_2 < \ldots < e_l$, $0 < d_l < d_{l-1} < \ldots < d_1$, то для всех $i = 1, \ldots, l$ выполняются неравенства $e_i \geqslant i$, $d_i \geqslant l - (i-1)$. Определим наборы $\widetilde{\gamma}_i = (\gamma_{i,1}, \ldots, \gamma_{i,n-2}) \in \{1, 2\}^{n-2}$, $i = 1, \ldots, l$, следующим образом. Положим

$$\widetilde{\gamma}_i = (1^{i-1}, 2^{l-i}, 1^{e_i - i}, 2^{d_i - l + i - 1}), \quad i = 1, \ldots, l.$$

Легко видеть, что $\widetilde{\gamma}_i \in \mathscr{L}(e_i - 1, d_i - 1)$, $i = 1, \ldots, l$. Так как $e_i > e_{i-1}$, то $e_i - i + 1 \geqslant e_{i-1} - (i-1) + 1$. Поэтому для всех $i = 2, \ldots, l$, $k = 1, \ldots, n-2$ выполняются неравенства $\gamma_{i,k} \leqslant \gamma_{i-1,k}$. Кроме того, имеют место равенства $\gamma_{i,i-1} = 1$, $\gamma_{i-1,i-1} = 2$. Для всех $i = 1, \ldots, l+1$ определим наборы $\widetilde{\alpha}_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n})$ следующим образом. Положим

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_i &= (\gamma_{i,1}, \ldots, \gamma_{i,j-2}, 2, 1, \gamma_{i,j-1}, \ldots, \gamma_{i,n-2}), \quad i = 1, \ldots l, \\
\widetilde{\alpha}_{l+1} &= (\gamma_{l,1}, \ldots, \gamma_{l,j-2}, 1, 2, \gamma_{l,j-1}, \ldots, \gamma_{l,n-2}).
\end{aligned}$$

Легко видеть, что $\widetilde{\alpha}_i \in \mathscr{L}(e_i, d_i)$, $i = 1, \ldots, l$, $\widetilde{\alpha}_{l+1} \in \mathscr{L}(e_l, d_l)$. Поэтому для всех $i = 1, \ldots, l+1$ выполняются равенства $f(\widetilde{\alpha}_i) = 1$. Кроме того, для всех $i = 2, \ldots, l$, $k = 1, \ldots, n$ выполняются соотношения $\alpha_{i,k} \leqslant \alpha_{i-1,k}$. Очевидно, что существует k_i, $1 \leqslant k_i \leqslant \max(j, l+1)$, такое, что $\alpha_{i,k_i} = 1$, $\alpha_{i-1,k_i} = 2$. Определим наборы $\widetilde{\beta}_i = (\beta_{i,1}, \ldots, \beta_{i,m})$ следующим образом. Положим

$$\beta_{i,k} = \mathscr{B}_k(\widetilde{\alpha}_i), \quad i = 1, \ldots, l+1, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Поскольку $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l+1} \in N_f$, то по следствию 1.2.2 получаем, что для всех $i = 1, \ldots, l+1$ имеет место равенство $g(\widetilde{\beta}_i) = f(\widetilde{\alpha}) = 1$. Кроме того, выполняются следующие соотношения:

$$|\widetilde{\beta}_i| - |\widetilde{\beta}_{i-1}| = (r + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ \alpha_{i,k}=1}} q_k) - (r + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ \alpha_{i-1,k}=1}} q_k) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ \alpha_{i,k}=1\\ \alpha_{i-1,k}=2}} q_k \geqslant q_{k_i} \geqslant \min(q_j, q_{l+1}) > 0, \quad i = 2, \ldots, l,$$

$$|\widetilde{\beta}_{l+1}| - |\widetilde{\beta}_l| = (r + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ \alpha_{l+1,k}=1}} q_k) - (r + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ \alpha_{l,k}=1}} q_k) = q_{j-1} - q_j > 0.$$

Поэтому выполняются неравенства $|\widetilde{\beta}_1| < |\widetilde{\beta}_2| < \ldots < |\widetilde{\beta}_{l+1}|$. Так как справедливы соотношения $\widetilde{\beta}_i \in \mathscr{L}(|\widetilde{\beta}_i|, m - |\widetilde{\beta}_i|) \subseteq N_g$, и $g(\widetilde{\beta}_i) = 1$, $i = 1, \ldots, l+1$, то функция g принимает значение 1 на наборах из более чем l различных слоев.

Таким образом, если существуют числа j, k, $1 \leqslant j, k \leqslant n$, такие, что $q_j \neq q_k$, то функция g принимает значение 1 на наборах из более чем l различных слоев. Это противоречит условию $g \in \mathrm{S}^r$, $r \leqslant l$. Поэтому $q_1 = \ldots = q_n$. Кроме того, так как $q_{l+1} > 0$, то $q_1, \ldots, q_n > 0$.

Утверждение 1.2.4. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{NS}^m$, $m \geqslant 1$, $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ *— формула над* S, *реализующая функцию* f, *а* Φ_1 *— простая подформула формулы* Φ, *имеющая вид* $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})$, *где* $g \in \mathrm{NS}^m$, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_p} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$. *Тогда выполняется неравенство* $f \preceq_{\mathrm{S}^m} g$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{NS}^m$, Φ — формула над R, реализующая функцию f, а $\Phi_1 = g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})$ — простая подформула формулы Φ, $g \in \mathrm{NS}^m$. По утверждению 1.2.3 среди $x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}$ встречается каждая переменная из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$, причем одинаковое число раз. В силу следствия 1.2.2 получаем, что если для некоторого $\widetilde{\alpha} \in {E_3}^n$ выполняется равенство $f(\widetilde{\alpha}) = 1$, то справедливо равенство $\Phi_1(\widetilde{\alpha}) = 1$. Следовательно, если $\mathscr{L}(e, d) \in N_f$, то для некоторого $k \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение $\mathscr{L}(ke, kd) \in N_g$. Очевидно, что $k = p/n$. Поскольку $f \in \mathrm{NS}^m$, то $N_f = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathscr{L}(e_i, d_i)$ для некоторых $e_1, \ldots, e_m \in \mathbb{Z}^+$, $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{N}$. Тогда $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathscr{L}(ke_i, kd_i) \subset N_g$. Поскольку $g \in \mathrm{NS}^m$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathscr{L}(ke_i, kd_i) = N_g$. Следовательно, функции f и g являются функциями одного типа и p кратно n. Поэтому $f \preceq_{\mathrm{S}^m} g$.

Утверждение 1.2.5. *Пусть* $f, g \in \mathrm{S}^m$, $m \in \mathbb{N}$. *Тогда соотношение* $f \preceq_{\mathrm{S}^m} g$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $f \in [\{g\}]$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_s) \in \mathrm{S}^m$, где $m, n, s \in \mathbb{N}$ и $f \preceq_{\mathrm{S}^m} g$. Тогда типы функций f и g совпадают и для некоторого $r \geqslant 1$ выполняется соотношение $s = rn$. Из определения симметрических m-слойных функций получаем, что $f(x_1, \ldots, x_n) = g({x_1}^r, \ldots, {x_n}^r)$. Следовательно, $f \in [\{g\}]$.

Пусть $f \in [\{g\}]$. Тогда существует формула Φ над $\{g\}$, реализующая функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть Φ_1 — некоторая простая подформула формулы Φ, имеющая вид $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$. По утверждению 1.2.3 среди переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ встречается каждая переменная из $x_1, \ldots, x_n$, причем одинаковое число раз. Пусть каждая переменная встречается r раз, $r \geqslant 1$. Тогда $s = rn$, и из утверждения 1.2.1 и следствия 1.2.2 следует, что функция g принимает значение 1 на слоях, тип которых равен типу слоев, на которых функция f принимает значение 1. Поскольку число таких слоев для функций f и g одинаково, то и типы функций f и g совпадают. Следовательно, $f \preceq_{\mathrm{S}^m} g$.

Утверждение 1.2.6. *Пусть* $\mathfrak{A}\subseteq R$, $\mathfrak{A}\cap \mathrm{MS}\neq\varnothing$, $f(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{MS}$, Φ — *некоторая формула над* $\mathfrak{A}$, *реализующая функцию* f, *а* Φ_1 — *подформула формулы* Φ, *имеющая вид* $g(\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_m)$, *где* $g(x_1,\ldots,x_m)\in\mathfrak{A}\cap \mathrm{MS}$, *а* $\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_m$ — *формулы на* $\mathfrak{A}$. *Тогда выполняются следующие соотношения*:

(1) $e_f\leqslant e_g$;

(2) $\frac{e_f}{d_f}\leqslant\frac{e_g}{d_g}$;

(3) *если* $e_f\neq 0$, *то* $\left]\frac{d_g}{d_f}\right[\leqslant\frac{e_g}{e_f}$.

При этом если Φ_1 *не является простой формулой, то*

(1′) $e_f<e_g$;

(2′) $\frac{e_f}{d_f}<\frac{e_g}{d_g}$;

(3′) *если* $e_f\neq 0$, *то* $\left]\frac{d_g}{d_f}\right[<\frac{e_g}{e_f}$.

Доказательство. Пусть $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ — формула над $\mathfrak{A}\subseteq R$, реализующая функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$, а Φ_1 — некоторая подформула формулы Φ, которая имеет вид $g(\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_m)$, где g — некоторая монотонная симметрическая функция из $\mathfrak{A}$. Пусть среди формул $\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_m$ символы переменных $x_1,\ldots,x_n$ встречаются $q_1,\ldots,q_n$ раз соответственно, а формулы, не являющиеся символами переменных, встречаются r раз, $r\geqslant 0$. Без ограничения общности будем считать, что $q_1\geqslant q_2\geqslant\ldots\geqslant q_n\geqslant 0$. Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha}\in\mathscr{L}(e_f,d_f)$, $\widetilde{\alpha}=(1^{e_f},2^{d_f})$, $0\leqslant e_f<n$, $0<d_f\leqslant n$. Поскольку $f(\widetilde{\alpha})=1$, то по следствию 1.2.2 выполняется равенство $\Phi_1(\widetilde{\alpha})=1$. Кроме того, из следствия 1.2.2 следует, что если формула $\mathscr{B}_i$ не является символом переменной, то $\mathscr{B}_i(\widetilde{\alpha})=1$ для всех $i=1,\ldots,m$. Положим $\beta_i=\mathscr{B}_i(\widetilde{\alpha})$. Тогда $\Phi_1(\widetilde{\alpha})=g(\beta_1,\ldots,\beta_m)=1$ и $|\widetilde{\beta}|=q_1+\ldots+q_{e_f}+r$. Покажем, что $q_{e_f+1}>0$. Пусть $q_{e_f+1}=0$. Тогда набор $(\beta_1,\ldots,\beta_m)$ не содержит двоек. Поскольку $g\in\mathrm{MS}\subseteq R$, то $g(\beta_1,\ldots,\beta_m)=0$. Получили противоречие. Следовательно, $q_{e_f+1}>0$ и $q_1\geqslant\ldots\geqslant q_{e_f+1}>0$. Поскольку $\Phi_1(\widetilde{\alpha})=1$, то функция g равна единице на наборе, содержащем $q_1+\ldots q_{e_f}+r$ единиц и $q_{e_f+1}+\ldots+q_n$ двоек. Так как функция g монотонна, получаем следующие неравенства:

$$e_g\geqslant q_1+\ldots+q_{e_f}+r\geqslant e_fq_{e_f}+r\geqslant e_f;$$
$$d_g\leqslant q_{e_f+1}+\ldots+q_n\leqslant q_{e_f+1}d_f;$$
$$\frac{e_g}{d_g}\geqslant\frac{e_fq_{e_f}+r}{q_{e_f+1}d_f}\geqslant\frac{e_fq_{e_f}}{q_{e_f+1}d_f}\geqslant\frac{e_f}{d_f}$$

и если $e_f\neq 0$, то

$$\frac{e_g}{e_f}\geqslant\frac{e_fq_{e_f}+r}{e_f}\geqslant q_{e_f}\geqslant q_{e_f+1}=\frac{q_{e_f+1}d_f}{d_f}=\left]\frac{q_{e_f+1}d_f}{d_f}\right[\geqslant\left]\frac{d_g}{d_f}\right[.$$

Отсюда следует, что $e_g\geqslant e_f$, $\frac{e_g}{d_g}\geqslant\frac{e_f}{d_f}$ и при $e_f\neq 0$ выполняется неравенство $\frac{e_g}{e_f}\geqslant\left]\frac{d_g}{d_f}\right[$. Таким образом, неравенства (1) – (3) доказаны. Если Φ_1 не является простой подформулой, то $r \geqslant 1$. Поэтому $e_f q_{e_f} + r > e_f q_{e_f} \geqslant e_f$, следовательно,

$$e_g > e_f, \quad \frac{e_g}{d_g} > \frac{e_f}{d_f}$$

и если $e_f \neq 0$, то $\frac{e_g}{e_f} > \left]\frac{d_g}{d_f}\right[$.

Следствие 1.2.7. *Пусть $H = \{f_1, \ldots, f_s\}$, $H \subseteq \mathrm{MS}$, $e_H = \max e_{f_i}$, где максимум берется по всем функциям множества H. Тогда для любой функции $g \in [H]$ выполняется неравенство $e_g \leqslant e_H$.*

Утверждение 1.2.8. *Пусть $f, g \in \mathrm{MS}$. Если $f \preceq_{\mathrm{MS}} g$ и $g \preceq_{\mathrm{MS}} f$, то $f \cong g$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{MS}$, $\frac{e_f}{d_f}$ — тип функции f, $e_f + d_f = n$, $\frac{e_g}{d_g}$ — тип функции g, $e_g + d_g = m$. Поскольку $f \preceq_{\mathrm{MS}} g$, то существует формула над $\{g\}$, реализующая функцию f. Поэтому в силу утверждения 1.2.6 выполняются неравенства: $e_g \geqslant e_f$ и $\frac{e_g}{d_g} \geqslant \frac{e_f}{d_f}$. Аналогично из соотношения $g \preceq_{\mathrm{MS}} f$ следует, что $e_f \geqslant e_g$ и $\frac{e_f}{d_f} \geqslant \frac{e_g}{d_g}$. Поэтому $e_g = e_f$, $\frac{e_g}{d_g} = \frac{e_f}{d_f}$, а значит, $d_g = d_f$. Следовательно, $f \cong g$.

Следствие 1.2.9. *Отношение $\preceq_{\mathrm{MS}}$ является отношением порядка на множестве $\mathscr{F}_{\mathrm{MS}}$.*

Доказательство. Очевидно, что отношение $\preceq_{\mathrm{MS}}$ на $\mathscr{F}_{\mathrm{MS}}$ транзитивно и рефлексивно. Из утверждения 1.2.8 следует, что отношение $\preceq_{\mathrm{MS}}$ на $\mathscr{F}_{\mathrm{MS}}$ антисимметрично. Следовательно, отношение $\preceq_{\mathrm{MS}}$ является отношением порядка на множестве $\mathscr{F}_{\mathrm{MS}}$.

Утверждение 1.2.10. *Пусть $f \in \mathrm{MS}$, $e_f = 0$. Тогда для любой функции $g \in \mathrm{MS}$, такой, что $e_g > 0$, выполняется неравенство $f \prec_{\mathrm{MS}} g$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{MS}$, $e_f = 0$, $e_g > 0$. Положим $h(x_1, x_2) = g(x_1, x_2, \ldots, x_2)$. Легко видеть, что $f(x_1, \ldots, x_n) = \underbrace{h(h(\ldots(h(}_{n} x_1, x_1), x_2), \ldots), x_n)$. Следовательно, $f \preceq_{\mathrm{MS}} g$. Поскольку $e_f < e_g$, то $N_f \neq N_g$, а значит $f \ncong g$. Поэтому $f \prec_{\mathrm{MS}} g$.

§ 2. Классы, порожденные функциями из множества NS^1

В этом параграфе изучаются свойства функций из множества S^1 всех симметрических однослойных функций трехзначной логики. Приводятся критерии базируемости и конечной порожденности для классов, порожденных однослойными немонотонными симметрическими функциями (множество всех таких функций обозначается через NS^1). Приводится также критерий выразимости функций из P_k, принимающих значения только из множества $\{0, 1\}$ и равных нулю на наборе из одних единиц и на всех наборах, содержащих хотя бы один нуль (множество всех таких функций обозначается через R) формулами над S^1. Устанавливаются некоторые соответствия между замкнутыми классами и p-замкнутыми классами.

В параграфе 1 на множестве $\mathscr{F}_{\mathrm{S}^m}$ был определен порядок $\preceq_{\mathrm{S}^m}$, $m \in \mathbb{N}$. В этом параграфе будем обозначать отношение $\preceq_{\mathrm{S}^1}$ через $\preceq_1$. Понятия цепи, максимальной цепи, ограниченной цепи и верхней грани цепи соответствуют отношению порядка $\preceq_1$.

2.1. Критерии базируемости и конечной порожденности. В этом пункте (см. также [45]) приводится критерий базируемости и конечной порожденности классов для произвольных порождающих систем однослойных симметрических функций в терминах отношения $\preceq_1$.

Теорема 2.1. *Пусть G — произвольное множество попарно неконгруэнтных функций из NS^1, $F=[G]$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *класс F имеет конечный базис тогда и только тогда, когда множество G содержит конечное число функций;*

(2) *класс F имеет счетный базис тогда и только тогда, когда G содержит счетное число функций и каждая функция, принадлежащая G, содержится в некоторой конечной максимальной цепи множества G;*

(3) *класс F не имеет базиса тогда и только тогда, когда G содержит счетное число функций и найдется функция $h\in G$, такая, что h не принадлежит никакой конечной максимальной цепи множества G.*

Доказательство. Достаточность. Существование конечного базиса в случае (1) очевидно. Рассмотрим случай (2). Пусть $\mathfrak{A}\subseteq G$ — множество всех (попарно неконгруэнтных) функций, являющихся верхними гранями конечных максимальных цепей множества G. Очевидно, что множество $\mathfrak{A}$ счетно и все функции из $\mathfrak{A}$ попарно несравнимы. Покажем, что $[\mathfrak{A}]=F$. В самом деле, по утверждению 1.2.5 для любых функций $f,g\in\mathrm{S}^1$ соотношение $f\preceq_1 g$ выполняется тогда и только тогда, когда $f\in[\{g\}]$. Поэтому очевидно, что если функция $f\in\mathrm{S}^1$ является верхней гранью некоторой максимальной цепи множества G, то все функции из этой цепи содержатся в множестве $[\{f\}]$. Поскольку по условию каждая функция из G лежит в некоторой конечной максимальной цепи, то $[\mathfrak{A}]=F$. Далее покажем, что для любой функции $g(x_1,\dots,x_p)\in\mathfrak{A}$ выполнено соотношение $g\notin[\mathfrak{A}\setminus\{g\}]$. Предположим, что это не так. Пусть формула $\Phi(x_1,\dots,x_p)$ над $\mathfrak{A}\setminus\{g\}$ реализует функцию g. Пусть некоторая простая подформула формулы Φ имеет вид $f(x_{i_1},\dots,x_{i_n})$, $f\in\mathfrak{A}\setminus\{g\}$. Тогда по утверждению 1.2.4 справедливо неравенство $g\preceq_1 f$. Получили противоречие с тем, что все функции множества $\mathfrak{A}$ несравнимы. Следовательно, $g\notin[\mathfrak{A}\setminus\{g\}]$. То есть $\mathfrak{A}$ — базис класса F. Таким образом, достаточность для случая (2) доказана.

Докажем достаточность для случая (3). Предположим, что класс F имеет базис $\mathfrak{A}$ и существует функция $h(x_1,\dots,x_s)\in G$, которая не содержится ни в какой конечной максимальной цепи множества G. Пусть функция $f\in\mathfrak{A}$ реализуется некоторой формулой Υ_f над G. Пусть Φ — произвольная формула над $\mathfrak{A}$. Заменим в формуле Φ каждую из функций базиса $\mathfrak{A}$ на соответствующую ей подформулу над G. Полученную формулу над G обозначим через $\pi(\Phi)$.

Рассмотрим функцию $f\in\mathfrak{A}$ и некоторую формулу Υ_f над G, реализующую функцию f. Легко видеть, что существует некоторая подформула Φ вида $g(\mathscr{B}_1,\dots,\mathscr{B}_m)$ формулы Υ_f, такая, что $g\notin[\mathfrak{A}\setminus\{f\}]$. Покажем, что подформула Φ простая. Пусть $\Phi_g(x_1,\dots,x_m)$ — некоторая формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию $g(x_1, \ldots, x_m)$. Тогда формула $\pi(\Phi_g)$ реализует функцию g над G. В формуле $\pi(\Phi_g)$ есть подформула вида $g(\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_m)$. По утверждению 1.2.3 среди $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_m$ встречаются переменные, причем каждая переменная из множества $\{x_1, \ldots, x_m\}$ встречается одинаковое число раз. Следовательно, все подформулы $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_m$ являются символами переменных. Таким образом, формула $g(\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_m)$ — простая. Тогда легко видеть, что подформула Φ — простая. Покажем теперь, что функция g является верхней гранью некоторой конечной максимальной цепи множества G. Предположим, что существует функция $g'(x_1, \ldots, x_r) \in G$, такая, что $g \prec_1 g'$. Тогда очевидно, что $g' \notin [\mathfrak{A} \backslash \{f\}]$. Поэтому любая формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию g', содержит подформулу вида $f(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_n)$, где $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_n$ — некоторые формулы над $\mathfrak{A}$. Пусть $\Psi(x_1, \ldots, x_r)$ — произвольная формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию g'. Рассмотрим формулу $\pi(\Psi)$. Эта формула содержит подформулу вида $g(\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_m)$. Из утверждения 1.2.3 следует, что среди подформул $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_m$ встречается каждая переменная из множества $\{x_1, \ldots, x_r\}$. Следовательно, $m \geqslant r$. С другой стороны, поскольку $g \prec_1 g'$, то $r > m$. Получили противоречие. Следовательно, не существует функции $g' \in G$, для которой выполняется соотношение $g \prec g'$. Таким образом, g является верхней гранью некоторой максимальной цепи в G. Легко видеть, что все функции, содержащиеся в этой максимальной цепи, зависят не более, чем от m переменных. Поскольку множество G состоит из неконгруэнтных функций, то эта цепь конечна. Следовательно, функция g является верхней гранью некоторой конечной максимальной цепи множества G. Таким образом, для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}$ каждая формула Υ_f, реализующая функцию f, содержит простую подформулу, имеющую вид $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$, такую, что g — верхняя грань некоторой конечной максимальной цепи множества G.

По условию существует функция $h(x_1, \ldots, x_s) \in G$, не содержащаяся ни в какой конечной максимальной цепи множества G. Пусть $\Phi_h(x_1, \ldots, x_s)$ — формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию h, а Φ_1 — некоторая простая подформула формулы Φ_h, имеющая вид $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Поскольку формула $\Upsilon_f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ содержит простую подформулу $g(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})$, такую, что g — верхняя грань некоторой конечной максимальной цепи множества G, то и в формуле $\pi(\Phi_h(x_1, \ldots, x_s))$ найдется простая подформула вида $g(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})$. В силу утверждения 1.2.4 выполняется неравенство $h \preceq_1 g$. Следовательно, функция h лежит в конечной максимальной цепи $H \subseteq G$, для которой функция g является верхней гранью. Получили противоречие. Следовательно, класс F не имеет базиса.

Необходимость. Покажем, что класс F может иметь конечный базис только тогда, когда число функций в G конечно. Предположим, что класс F имеет конечный базис, но при этом множество G содержит счетное число функций. Возможны два случая: либо каждая функция из G лежит в некоторой конечной максимальной цепи множества G, либо существует функция $h \in G$, которая не принадлежит никакой конечной максимальной цепи в G. Выше показано, что в первом случае класс F имеет счетный базис, а во втором случае не имеет базиса. Получили противоречие с тем, что базис класса F конечный. Очевидно, что в случаях (2) и (3) множество G не может состоять из конечного числа функций. Аналогично случаю (1), предполагая, что в случае (2) существует хотя бы одна функция, не принадлежащая никакой конечной максимальной цепи множества G, получаем, что класс F не имеет базиса, что противоречит условию. Если в случае (3) каждая функция из G лежит в некоторой конечной максимальной цепи в G, то получаем, что класс F имеет счетный базис, что противоречит условию.

2.2. Замыкание относительно отождествления переменных. В этом пункте (см. также [50]) сопоставляются замкнутые классы и p-замкнутые классы, порожденные однослойными симметрическими функциями. Показывается, что замыкание множества S_3^1 совпадает с p-замыканием этого множества. Для любой функции f из NS_3^1 и любого $\sigma \in \mathbb{Q}$, $\sigma > 0$, приводится критерий выполнения соотношения $[\{f\}] \subseteq < F_\sigma \cup \{f\} >$ и некоторые следствия из него. Доказывается, что замкнутый класс, порожденный функциями из множества S_3^1, является конечно-порожденным тогда и только тогда, когда существуют рациональные числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$, $t \geqslant 1$, такие, что каждая функция из этого класса принадлежит множеству $< F >$, где $F = F_{\sigma_1} \cup \ldots \cup F_{\sigma_t}$.

Утверждение 2.2.1. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $h(x_1, \ldots, x_m)$ — функции из $\widehat{R}$, такие, что $N_h = \mathscr{L}(e, d)$, $N_f = \prod\limits_{i=1}^{s} \mathscr{L}(e_i, d_i)$, где $e_1, \ldots, e_s$, $d_1, \ldots$ $\ldots, d_s, e, d \in \mathbb{Z}^+$, $s \in \mathbb{N}$, $m \geqslant n$. Пусть $n_1 = e_1 + d_1$, $n_2 = e_1 + d_1 + e_2 + d_2$, $\ldots$ $\ldots$, $n_{s-1} = e_1 + d_1 + \ldots + e_{s-1} + d_{s-1}$. Пусть для некоторых $q_1, \ldots, q_s \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения*

$$e = \sum_{i=1}^{s} q_i e_i, \quad d = \sum_{i=1}^{s} q_i d_i, \quad q_i > \sum_{j=i+1}^{s} q_j(e_j + d_j),$$

где $i = 1, \ldots, s-1$. Тогда справедливо равенство $f(x_1, \ldots, x_n) = h(\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^s)$, где $\widetilde{x}^1 = (x_1^{q_1}, \ldots, x_{n_1}^{q_1})$, $\widetilde{x}^2 = (x_{n_1+1}^{q_2}, \ldots, x_{n_2}^{q_2})$, $\ldots$, $\widetilde{x}^s = (x_{n_{s-1}+1}^{q_s}, \ldots, x_n^{q_s})$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $h(x_1, \ldots, x_m)$ — некоторые функции из $\widehat{R}$, такие, что $N_h = \mathscr{L}(e, d)$, $N_f = \prod\limits_{i=1}^{s} \mathscr{L}(e_i, d_i)$, $e_1, \ldots, e_s, d_1, \ldots, d_s, e, d \in \mathbb{Z}^+$, $s \in \mathbb{N}$, $m \geqslant n$. Положим $n_1 = e_1 + d_1$, $n_2 = e_1 + d_1 + {}$ $+ e_2 + d_2$, $\ldots$, $n_{s-1} = e_1 + d_1 + \ldots + e_{s-1} + d_{s-1}$. Пусть для некоторых $q_1, \ldots, q_s \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения $q_i > \sum\limits_{j=i+1}^{s} q_j(e_j + d_j)$, $i = 1, \ldots, s-1$, $e = \sum\limits_{i=1}^{s} q_i e_i$, $d = \sum\limits_{i=1}^{s} q_i d_i$. Очевидно, что для всех $i = 1, \ldots, s-1$ из соотношения $q_i > \sum\limits_{j=i+1}^{s} q_j(e_j + d_j)$, следуют неравенства $q_i > \sum\limits_{j=i+1}^{s} q_j e_j$, $q_i > \sum\limits_{j=i+1}^{s} q_j d_j$.

Покажем, что для любого набора $\widetilde{\alpha} \in E_3^n$ выполняется равенство $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = h(\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^s)$, где $\widetilde{\alpha}^1 = (\alpha_1^{q_1}, \ldots, \alpha_{n_1}^{q_1})$, $\widetilde{\alpha}^2 = (\alpha_{n_1+1}^{q_2}, \ldots, \alpha_{n_2}^{q_2})$, $\ldots$ $\ldots$, $\widetilde{\alpha}^s = (\alpha_{n_{s-1}+1}^{q_s}, \ldots, \alpha_n^{q_s})$. Отметим, что длина набора $\widetilde{\alpha}^i$ равна $q_i(e_i + d_i)$, $i = 1, \ldots, s$.

Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_3^n$ — такой набор, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$. Положим $\widetilde{\alpha}^1 = (\alpha_1^{q_1}, \ldots, \alpha_{n_1}^{q_1})$, $\widetilde{\alpha}^2 = (\alpha_{n_1+1}^{q_2}, \ldots, \alpha_{n_2}^{q_2})$, $\ldots$, $\widetilde{\alpha}^s = (\alpha_{n_{s-1}+1}^{q_s}, \ldots, \alpha_n^{q_s})$. Так как по условию $N_f = \prod\limits_{i=1}^{s} \mathscr{L}(e_i, d_i)$, то выполняются следующие соотношения $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}) \in \mathscr{L}(e_1, d_1)$, $(\alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_{n_2}) \in \mathscr{L}(e_2, d_2)$, $\ldots$, $(\alpha_{n_{s-1}+1}, \ldots, \alpha_n) \in$ $\in \mathscr{L}(e_s, d_s)$. Следовательно $|\widetilde{\alpha}^1| = q_1 e_1$, $\ldots$, $|\widetilde{\alpha}^s| = q_s e_s$, и набор $(\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^s)$ содержит $e_1 q_1 + \ldots + e_s q_s = e$ единиц и $d_1 q_1 + \ldots + d_s q_s = d$ двоек. Поэтому $h(\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^s) = 1$.

Рассмотрим теперь произвольный набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, для которого выполнено $h(\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^s) = 1$, где $\widetilde{\alpha}^1 = (\alpha_1^{q_1}, \ldots, \alpha_{n_1}^{q_1})$, $\widetilde{\alpha}^2 = (\alpha_{n_1+1}^{q_2}, \ldots, \alpha_{n_2}^{q_2})$, $\ldots$, $\widetilde{\alpha}^s = (\alpha_{n_{s-1}+1}^{q_s}, \ldots, \alpha_n^{q_s})$. Покажем, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}) \in \mathscr{L}(e_1, d_1),\ (\alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_{n_2}) \in \mathscr{L}(e_2, d_2), \ldots \\ \ldots, (\alpha_{n_{s-1}+1}, \ldots, \alpha_n) \in \mathscr{L}(e_s, d_s).\end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку $(\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^s) \in N_h \subseteq \{1, 2\}^m$, то достаточно показать, что выполнены $|(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1})| = e_1$, $|(\alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_{n_2})| = e_2$, ..., $|(\alpha_{n_{s-1}+1}, \ldots, \alpha_n)| = e_s$.

Положим $a = |(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1})|$. Тогда $|\widetilde{\alpha}^1| = q_1 a$. Так как $(\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^s) \in N_h = \mathscr{L}(e, d)$, то $|(\widetilde{\alpha}^2, \ldots, \widetilde{\alpha}^s)| = e - q_1 a$. Следовательно, $0 \leqslant e - aq_1 \leqslant m - q_1(e_1 + d_1)$. Поскольку $q_1 > \sum\limits_{i=2}^{s} q_i e_i$, $e - aq_1 \geqslant 0$ и $e = q_1 e_1 + \ldots + q_s e_s$, то справедливы соотношения

$$a \leqslant \frac{e}{q_1} = \frac{q_1 e_1 + \ldots + q_s e_s}{q_1} = e_1 + \frac{1}{q_1} \sum_{i=2}^{s} q_i e_i < e_1 + 1.$$

Так как $q_1 > \sum\limits_{i=2}^{s} q_i d_i$, $e - aq_1 \leqslant m - q_1(e_1 + d_1)$, $e + d = m$ и $d = q_1 d_1 + \ldots + q_s d_s$, то выполняются соотношения

$$a \geqslant \frac{e - m + q_1(e_1 + d_1)}{q_1} = e_1 + d_1 - \frac{d}{q_1} = e_1 + d_1 - \frac{q_1 d_1 + \ldots + q_s d_s}{q_1} = e_1 - \frac{1}{q_1} \sum_{i=2}^{s} q_i d_i > e_1 - 1.$$

Поэтому, так как a — целое число, то $a = e_1$.

Аналогично, положим $b = |(\alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_{n_2})|$. Из соотношений

$$q_2 > \sum_{i=3}^{s} q_i e_i, \quad q_2 > \sum_{i=3}^{s} q_i d_i,$$
$$0 \leqslant e - e_1 q_1 - b q_2 \leqslant m - q_1(e_1 + d_1) - q_2(e_2 + d_2),$$
$$e + d = m, \quad e = e_1 + \ldots + e_s, \quad d = d_1 + \ldots + d_s$$

получаем, что $b = e_2$. Таким же образом можно показать, что выполняются равенства

$$|(\alpha_{n_2+1}, \ldots, \alpha_{n_2+n_3})| = e_3, \ldots, |(\alpha_{n_{s-1}+1}, \ldots, \alpha_n)| = e_s.$$

Следовательно, выполняются соотношения (2). Поэтому $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N_f$, а значит $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$.

Таким образом, показано, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = h(\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^s)$ для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_3^n$. Поэтому $f(x_1, \ldots, x_n) = h(\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^s)$.

Следствие 2.2.2. *Пусть $s, n, n_1, \ldots, n_s$ — произвольные натуральные числа, такие, что $s \leqslant n$ и $n_1 < n_2 < \ldots < n_s$, а $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f_1(x_1, \ldots, x_{n_1})$, $f_2(x_1, \ldots, x_{n_2 - n_1})$, ..., $f_s(x_1, \ldots, x_{n_s - n_{s-1}})$ — функции из S^1. Пусть функция $g(x_1, \ldots, x_t) \in [\mathrm{S}^1]$ такая, что*

$$g(x_1, \ldots, x_t) =$$
$$= f(f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), f_2(x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_2}), \ldots, f_s(x_{n_{s-1}+1}, \ldots, x_{n_s}), x_{n_s+1}, \ldots, x_t),$$

где $t = n + n_s - s$. Тогда существует функция $h(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{S}^1$, такая, что g реализуется простой формулой над $\{h\}$, $m \geqslant t$.

Доказательство. Пусть $s, n, n_1, \ldots, n_s$ — произвольные натуральные числа, такие, что $s \leqslant n$, $n_1 < \ldots < n_s$, а $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f_1(x_1, \ldots, x_{n_1})$, $f_2(x_1, \ldots, x_{n_2 - n_1})$, ..., $f_s(x_1, \ldots, x_{n_s - n_{s-1}})$ — некоторые функции из S^1. Пусть функция $g(x_1, \ldots, x_t) \in [\mathrm{S}^1]$, такая, что выполняется равенство

$$g(x_1, \ldots, x_t) =$$
$$= f(f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), f_2(x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_2}), \ldots, f_s(x_{n_{s-1}+1}, \ldots, x_{n_s}), x_{n_s+1}, \ldots, x_t),$$

где $t = n + n_s - s$. Пусть $N_{f_1} = \mathscr{L}(e_1, d_1)$, ..., $N_{f_s} = \mathscr{L}(e_s, d_s)$, $N_f = \mathscr{L}(e, d)$, где $e, e_1, \ldots, e_s \in \mathbb{Z}^+$, $d, d_1, \ldots, d_s \in \mathbb{N}$. Рассмотрим два случая.

Пусть $s > e$. Тогда для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in E_3^t$ выполняется равенство $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_t) = f(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s, \alpha_{n_s+1}, \ldots, \alpha_t)$, где $\varepsilon_i = f_i(\alpha_{n_{i-1}+1}, \ldots, \alpha_{n_i}) \in \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, s$, $n_0 = 0$. Тогда значение функции g на наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ совпадает со значение функции f на наборе, содержащем не более чем $t - n_s = n - s < n - e = d$ двоек. Поскольку $N_f = \mathscr{L}(e, d)$, то $g \equiv 0$. Рассмотрим функцию $h(x_1, x_2) \in \mathrm{S}^1$, такую, что $N_h = \mathscr{L}(1, 1)$. Очевидно, что $h(x, x) \equiv 0$. Поэтому $g \in < \{h\} >$.

Пусть $s \leqslant e$. Очевидно, что $N_g = \left(\prod_{i=1}^{s} \mathscr{L}(e_i, d_i)\right) \times \mathscr{L}(e-s, d)$. Положим

$$q_{s+1} = 1, \quad q_i = 1 + q_{s+1}(e - s + d) + \sum_{j=i+1}^{s} q_j(e_j + d_j), \quad i = 1, \ldots, s,$$

$$\widehat{e} = q_{s+1}(e - s) + \sum_{i=1}^{s} q_i e_i, \quad \widehat{d} = q_{s+1} d + \sum_{i=1}^{s} q_i d_i.$$

По определению чисел $q_1, \ldots, q_{s+1}$ для всех $i = 1, \ldots, s$ выполняются соотношения

$$q_i > q_{s+1}(e - s + d) + \sum_{j=i+1}^{s} q_j(e_j + d_j).$$

Пусть $h(x_1, \ldots, x_{\widehat{e}+\widehat{d}})$ — некоторая функция из S^1, такая, что $N_h = \mathscr{L}(\widehat{e}, \widehat{d})$. Тогда по утверждению 2.2.1 выполняется равенство $g(x_1, \ldots, x_t) = = h(\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^s, x_{n_s+1}, \ldots, x_t)$, где $\widetilde{x}^i = (x_{n_{i-1}+1}^{q_i}, \ldots, x_{n_i}^{q_i})$, $i = 1, \ldots, s$. Таким образом, функция g реализуется простой формулой над $\{h\}$.

Следствие 2.2.3. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из $\widehat{R}$, такая, что $N_f = \prod_{i=1}^{s} \mathscr{L}(e_i, d_i)$, где $e_1, \ldots, e_s \in \mathbb{Z}^+, d_1, \ldots, d_s \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$, $e_1 + \ldots + e_s + d_1 + \ldots + d_s = n$. Тогда существует функция $h \in \mathrm{S}^1$, такая, что f содержится в $< \{h\} >$.*

Теорема 2.2. *Имеет место равенство* $[\mathrm{S}^1] = < \mathrm{S}^1 >$.

Доказательство. Очевидно, что $< \mathrm{S}^1 > \subseteq [\mathrm{S}^1]$. Покажем, что $[\mathrm{S}^1] \subseteq < \mathrm{S}^1 >$. Для этого достаточно показать, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $[\mathrm{S}^1]$ существует функция h из S^1, такая, что $f(x_1, \ldots, x_n)$ реализуется простой формулой над $\{h\}$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in [\mathrm{S}^1]$, Φ — некоторая формула над S^1, реализующая функцию f. Построим простую формулу, эквивалентную формуле Φ. Построение будем проводить индукцией по глубине формулы Φ. Если Φ является простой формулой, то утверждение очевидно. Предположим, что для каждой формулы над S^1, глубина которой меньше k, существует эквивалентная простая формула. Пусть глубина формулы Φ равна k, $k > 1$. Пусть формула Φ имеет вид $g(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m)$, где $g \in \mathrm{S}^1$, $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ — формулы над S^1, глубина которых меньше k. Без ограничения общности будем считать, что формулы $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p$ нетривиальны, а формулы $\mathscr{B}_{p+1}, \ldots, \mathscr{B}_m$ являются символами переменных $x_{j_{p+1}}, \ldots, x_{j_m}$ из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $1 \leqslant p \leqslant m$. Поскольку глубина формулы $\mathscr{B}_i$ меньше k, то по предположению индукции существует простая формула $\mathscr{C}_i$ над S^1, эквивалентная формуле $\mathscr{B}_i$, $i = 1, \ldots, p$. Пусть $\mathscr{C}_i$ имеет вид $g_i(\widetilde{x^i})$, где $\widetilde{x^i} = (x_{k_{n_{i-1}+1}}, \ldots, x_{k_{n_i}})$, $g_i \in \mathrm{S}^1$, $i = 1, \ldots, p$, $n_0 = 0$, $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{n_p}} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(g_1(\widetilde{x^1}), \ldots, g_p(\widetilde{x^p}), x_{j_p+1}, \ldots, x_{j_m}).$$

Рассмотрим функцию $\widehat{f}(y_1,\ldots,y_t)=g(g_1(\widetilde{y^1}),\ldots,g_p(\widetilde{y^p}),y_{n_p+1},\ldots,y_t)$, где $\widetilde{y^i}=(y_{n_{i-1}+1},\ldots,y_{n_i})$. По следствию 2.2.2 существует функция $h\in \mathrm{S}^1$, такая, что функция $\widehat{f}(y_1,\ldots,y_t)$, реализуется простой формулой над $\{h\}$. Поскольку функция f может быть реализована простой формулой над $\{\widehat{f}\}$, то f может быть реализована простой формулой над $\{h\}$. Поэтому выполнено $[\mathrm{S}^1]\subseteq<\mathrm{S}^1>$.

Утверждение 2.2.4. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n)\in[\mathrm{S}^1]\cap R$, $f(x_1,\ldots,x_n)=g(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$, *где* $g\in\mathrm{S}^1$, $m\geqslant n\geqslant 1$. *Пусть функция* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *— симметрическая относительно множества переменных* $X=\{x_{j_1},\ldots,x_{j_s}\}\subseteq\{x_1,\ldots,x_n\}$. *Пусть существует такой набор* $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in N_f$, *что* $\alpha_{j_k}=1$ *и* $\alpha_{j_l}=2$, *где* $1\leqslant k,l\leqslant s$. *Тогда среди* $x_{i_1},\ldots,x_{i_m}$ *встречается символ каждой переменной из множества* X, *причем одинаковое число раз.*

Доказательство. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in[\mathrm{S}^1]$, функция f является симметрической относительно множества $X=\{x_{j_1},\ldots,x_{j_s}\}\subseteq\{x_1,\ldots,x_n\}$, и существует набор $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in N_f$, такой, что для некоторых k, l, $1\leqslant k,l\leqslant s$, выполняются равенства $\alpha_{j_k}=1$ и $\alpha_{j_l}=2$. Без ограничения общности будем считать, что $X=\{x_1,\ldots,x_s\}$, $j_k=1$, $j_l=2$. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)=g(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$, $g\in\mathrm{S}^1$, $x_{i_1},\ldots,x_{i_m}\in\{x_1,\ldots,x_n\}$, $m\geqslant n\geqslant 1$. Пусть $N_g=\mathscr{L}(e,d)$, $e,d\in\mathbb{N}$. Пусть среди $x_{i_1},\ldots,x_{i_m}$ переменные $x_1,\ldots,x_n$ встречаются $q_1,\ldots,q_n$ раз соответственно, $q_1,\ldots,q_n\in\mathbb{Z}^+$. Покажем, что $q_1=\ldots=q_s>0$.

Покажем сначала, что $q_1=q_2$. Поскольку $x_1,x_2\in X$, то для любого набора $\widetilde{\beta}\in\{1,2\}^n$ выполняется равенство $f(\widetilde{\beta})=f^{(1,2)}(\widetilde{\beta})$. Кроме того, значение $f(1,2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)$ равно значению функции g на некотором наборе $\widetilde{\gamma}_1\in\{1,2\}^m$, содержащем $q_2+\sum\limits_{i=3}^{n}(\alpha_i-1)q_i$ двоек, а значение $f(2,1,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)$ равно значению функции g на некотором наборе $\widetilde{\gamma}_2\in\{1,2\}^m$, содержащем $q_1+\sum\limits_{i=3}^{n}(\alpha_i-1)q_i$ двоек.

Так как $f(1,2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)=f(2,1,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)=g(\widetilde{\gamma}_1)=g(\widetilde{\gamma}_2)=1$ и $g\in\mathrm{S}^1$, то $|(\widetilde{\gamma}_1)|=|(\widetilde{\gamma}_2)|$. Следовательно

$$q_2+\sum_{i=3}^{n}(\alpha_i-1)q_i=n-|(\widetilde{\gamma}_1)|=n-|(\widetilde{\gamma}_2)|=q_1+\sum_{i=3}^{n}(\alpha_i-1)q_i.$$

Поэтому $q_1=q_2$. Если $s=2$, то утверждение доказано.

Пусть $s>2$. Тогда $\{x_1,x_2,x_3\}\subseteq X$. Поскольку функция f является симметрической относительно множества X, то $f(1,2,\alpha_3,\alpha_4,\ldots,\alpha_n)=f(1,\alpha_3,2,\alpha_4,\ldots,\alpha_n)=1$. Кроме того, для любого набора $\widetilde{\beta}\in\{1,2\}^n$ выполняется равенство $f(\widetilde{\beta})=f^{(1,3)}(\widetilde{\beta})$. Отсюда аналогично получаем, что $q_1=q_3$. Таким же образом можно показать, что $q_1=q_4$, $\ldots$, $q_1=q_s$. Следовательно, $q_1=\ldots=q_s$.

Покажем, что $q_1>0$. Предположим, что $q_1=0$. Тогда $q_1=\ldots=q_s=0$. Поэтому $f(x_1,\ldots,x_n)=g(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$, $x_{i_1},\ldots,x_{i_m}\in\{x_{s+1},\ldots,x_n\}$. Следовательно, переменные $x_1,\ldots,x_s$ не являются существенными для функции f, что противоречит тому, что $f\in[\mathrm{S}^1]\cap R\subseteq\widehat{R}$ (см. замечание 1.1.1). А значит, $q_1=\ldots=q_s>0$.

Таким образом, среди $x_{i_1},\ldots,x_{i_m}$ встречается символ каждой переменной из множества X, причем одинаковое число раз.

Утверждение 2.2.5. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n)\in R$, $e_1,d_1,e_2,d_2\in\mathbb{N}$, $n_1=e_1+d_1$, $n=e_1+d_1+e_2+d_2$, $N_f=\mathscr{L}(e_1,d_1)\times\mathscr{L}(e_2,d_2)$, $\sigma\in\mathbb{Q}$, $\sigma>0$, *чис-*

ла $a, b \in \mathbb{N}$ такие, что $\frac{a}{b} = \sigma$. Тогда функция f содержится в $< F_\sigma >$ в том и только в том случае, когда существуют числа $p, q, k \in \mathbb{N}$ такие, что система

$$\left\{\begin{array}{ccccc} px & + & qu & = & ka; \\ py & + & qv & = & kb; \\ x & + & y & = & n_1 \end{array}\right. \tag{3}$$

имеет единственное решение $(x, y, u, v) = (e_1, d_1, e_2, d_2)$ с компонентами из $\mathbb{Z}^+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in R$, $e_1, d_1, e_2, d_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 = e_1 + d_1$, $n = e_1 + d_1 + e_2 + d_2$, $N_f = \mathscr{L}(e_1, d_1) \times \mathscr{L}(e_2, d_2)$, $\sigma \in \mathbb{Q}$, $\sigma > 0$, числа $a, b \in \mathbb{N}$ такие, что $\frac{a}{b} = \sigma$. Пусть функция f содержится в $< F_\sigma >$. Тогда существует функция $h(x_1, \ldots, x_m) \in F_\sigma$, такая, что $N_h = \mathscr{L}(ka, kb)$, $f(x_1, \ldots, x_n) = h(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, где $k \in \mathbb{N}$, $m = ka + kb$.

Из условия утверждения следует, что функция f является симметрической относительно множеств $\{x_1, \ldots, x_{n_1}\}$ и $\{x_{n_1+1}, \ldots, x_n\}$. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (1^{e_1}, 2^{d_1}, 1^{e_2}, 2^{d_2})$, $e_1, e_2, d_1, d_2 > 0$. Очевидно, что $\widetilde{\alpha} \in \mathscr{L}(e_1, d_1) \times \mathscr{L}(e_2, d_2) = N_f$. Поэтому $f(\widetilde{\alpha}) = 1$. Так как $f \in [\mathrm{S}^1]$, то по утверждению 2.2.4 среди $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ встречается каждая из переменных $x_1, \ldots, x_n$, причем каждая из переменных $x_1, \ldots, x_{n_1}$ встречается одинаковое число раз и каждая из переменных $x_{n_1+1}, \ldots, x_n$ также встречается одинаковое число раз. Пусть каждая из переменных $x_1, \ldots, x_{n_1}$ встречается среди $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ p раз, а каждая из переменных $x_{n_1+1}, \ldots, x_n$ — q раз, p, $q > 0$. Положим $\widetilde{\beta} = (\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m})$. Тогда $h(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\alpha}) = 1$. А значит, $\widetilde{\beta} \in N_h = \mathscr{L}(ka, kb)$. Следовательно, выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} |\widetilde{\beta}| = |(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m})| = p|(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1})| + q|(\alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_n)| = pe_1 + qe_2 = ka; \\ m - |\widetilde{\beta}| = m - |(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m})| = p(n_1 - |(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1})|) + \\ + q(n - n_1 - |(\alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_n)|) = pd_1 + qd_2 = kb. \end{aligned} \tag{4}$$

Поэтому набор (e_1, d_1, e_2, d_2) является решением системы (3) с компонентами из $\mathbb{Z}^+$.

Предположим, что (a_1, b_1, a_2, b_2) — решение системы (3), такое, что a_1, b_1, a_2, $b_2 \in \mathbb{Z}^+$, $(a_1, b_1, a_2, b_2) \neq (e_1, d_1, e_2, d_2)$. Рассмотрим произвольный набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из множества $\mathscr{L}(a_1, b_1) \times \mathscr{L}(a_2, b_2)$. Положим $\widetilde{\beta} = (\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m})$. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} |\widetilde{\beta}| = |(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m})| = p|(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1})| + q|(\alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_n)| = pa_1 + qa_2 = ka; \\ m - |\widetilde{\beta}| = m - |(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m})| = p(n_1 - |(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1})|) + \\ + q(n - n_1 - |(\alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_n)|) = p(n_1 - a_1) + q(n - n_1 - a_2) = pb_1 + qb_2 = kb. \end{aligned}$$

Поэтому $\widetilde{\beta} \in \mathscr{L}(ka, kb) = N_h$, и $h(\widetilde{\beta}) = 1$. Следовательно, $f(\widetilde{\alpha}) = h(\widetilde{\beta}) = 1$, а значит, $\widetilde{\alpha} \in N_f = \mathscr{L}(e_1, d_1) \times \mathscr{L}(e_2, d_2)$. Поскольку $(a_1, b_1, a_2, b_2) \neq (e_1, d_1, e_2, d_2)$, то $\mathscr{L}(a_1, b_1) \times \mathscr{L}(a_2, b_2) \cap \mathscr{L}(e_1, d_1) \times \mathscr{L}(e_2, d_2) = \varnothing$, поэтому $\widetilde{\alpha} \notin \mathscr{L}(e_1, d_1) \times \mathscr{L}(e_2, d_2) = N_f$. Получили противоречие. Следовательно, (e_1, d_1, e_2, d_2) — единственное решение системы (3) с компонентами из $\mathbb{Z}^+$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in R$, $e_1, d_1, e_2, d_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 = e_1 + d_1$, $n = e_1 + d_1 + e_2 + d_2$, $N_f = \mathscr{L}(e_1, d_1) \times \mathscr{L}(e_2, d_2)$, $\sigma \in \mathbb{Q}$, $\sigma > 0$, числа $a, b \in \mathbb{N}$ такие, что $\frac{a}{b} = \sigma$. Пусть существуют числа $p, q, k \in \mathbb{N}$ такие, что система (3) имеет единственное решение (e_1, d_1, e_2, d_2) с компонентами из $\mathbb{Z}^+$. Рассмотрим функцию $h(x_1, \ldots, x_m) \in F_\sigma$, такую, что $N_h = \mathscr{L}(ka, kb)$, $m = ka+kb$. Покажем, что $f(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1^p, \ldots, x_{n_1}^p, x_{n_1+1}^q, \ldots, x_n^q)$.

Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N_f$. Положим $\widetilde{\beta} = (\alpha_1^p, \ldots, \alpha_{n_1}^p, \alpha_{n_1+1}^q, \ldots, \alpha_n^q)$. Тогда

$$|\widetilde{\beta}| = |(\alpha_1^p, \ldots, \alpha_{n_1}^p, \alpha_{n_1+1}^q, \ldots, \alpha_n^q)| = \\ = p|(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1})| + q|(\alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_n)| = pe_1 + qe_2 = ka;$$

$$m - |\widetilde{\beta}| = m - |(\alpha_1^p, \ldots, \alpha_{n_1}^p, \alpha_{n_1+1}^q, \ldots, \alpha_n^q)| = \\ = p(n_1 - |(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1})|) + q(n - n_1 - |(\alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_n)|) = pd_1 + qd_2 = kb.$$

Поэтому $\widetilde{\beta} \in \mathscr{L}(ka, kb) = N_h$, а значит, $h(\widetilde{\beta}) = 1$.

Пусть теперь $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — произвольный набор из множества $\{1, 2\}^n$, такой, что $h(\alpha_1^p, \ldots, \alpha_{n_1}^p, \alpha_{n_1+1}^q, \ldots, \alpha_n^q) = 1$. Положим $r = |(\alpha_1, \ldots \ldots, \alpha_{n_1})|$, $s = |(\alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_n)|$. Очевидно, что $0 \leqslant r \leqslant n_1$, $0 \leqslant s \leqslant n - n_1$. Тогда $|(\alpha_1^p, \ldots, \alpha_{n_1}^p)| = pr$, $|(\alpha_{n_1+1}^q, \ldots, \alpha_n^q)| = qs$. Так как $N_h = \mathscr{L}(ka, kb)$, то выполняются соотношения

$$\begin{array}{rcl} pr + qs & = & ka; \\ p(n_1 - r) + q(n - n_1 - s) & = & kb; \\ r + (n_1 - r) & = & n_1. \end{array}$$

Поскольку r, s, $n_1 - r$, $n - n_1 - s \in \mathbb{Z}^+$ и система (3) имеет единственное решение (e_1, d_1, e_2, d_2) с компонентами из $\mathbb{Z}^+$, то $r = e_1$, $n_1 - r = d_1$, $s = e_2$, $n - n_1 - r = d_2$. Следовательно, $\widetilde{\alpha} \in \mathscr{L}(e_1, d_1) \times \mathscr{L}(e_2, d_2) = N_f$. Поэтому $f(\widetilde{\alpha}) = 1$.

Утверждение 2.2.6. *Пусть* p, q, e_1, d_1, e_2, $d_2 \in \mathbb{N}$, $a = pe_1 + qe_2$, $b = pd_1 + qd_2$, $n_1 = e_1 + d_1$. *Тогда система*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} px + qu & = & a; \\ py + qv & = & b; \\ x + y & = & n_1 \end{array} \right. \tag{5}$$

имеет единственное решение $(x, y, u, v) = (e_1, d_1, e_2, d_2)$ *с компонентами из* $\mathbb{Z}^+$ *тогда и только тогда, когда выполняется, по крайней мере, одно из неравенств:*

$$d_1 < \frac{q}{(p,q)}; \quad e_2 < \frac{p}{(p,q)} \tag{6}$$

и, по крайней мере, одно из неравенств:

$$e_1 < \frac{q}{(p,q)}; \quad d_2 < \frac{p}{(p,q)}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть p, q, e_1, d_1, e_2, $d_2 \in \mathbb{N}$, $a = pe_1 + qe_2$, $b = pd_1 + qd_2$, $n_1 = e_1 + d_1$.

Найдем сначала все целочисленные решения системы (5). Все решения системы (5) имеют вид $(x_0 + x_1, y_0 + y_1, u_0 + u_1, v_0 + v_1)$, где (x_0, y_0, u_0, v_0) — некоторое частное решение системы (5), а (x_1, y_1, u_1, v_1) — произвольное решение однородной системы

$$\left\{ \begin{array}{rcl} px + qu & = & 0; \\ py + qv & = & 0; \\ x + y & = & 0. \end{array} \right. \tag{8}$$

Из условия утверждения следует, что (e_1, d_1, e_2, d_2) является решением системы (5). Очевидно, что решения однородной системы (8) имеют вид $(x, -x, \frac{-px}{q}, \frac{px}{q})$, $x \in \mathbb{R}$. Так как $p, q \in \mathbb{N}$, то компоненты этого решения являются целыми числами в том и только в том случае, когда $x \in \mathbb{Z}$ и $t = \frac{x \cdot (p,q)}{q} \in \mathbb{Z}$. Тогда решения системы (8) с целочисленными компонентами имеют вид $\left(\frac{qt}{(p,q)}, \frac{-qt}{(p,q)}, \frac{-pt}{(p,q)}, \frac{pt}{(p,q)}\right)$, $t \in \mathbb{Z}$. Следовательно, все решения системы (5) с целочисленными компонентами имеют вид $\left(e_1 + \frac{qt}{(p,q)}, d_1 - \frac{qt}{(p,q)}, e_2 - \frac{pt}{(p,q)}, d_2 + \frac{pt}{(p,q)}\right)$, где t — произвольное целое число.

Покажем теперь, что система (5) имеет единственное решение с компонентами из $\mathbb{Z}^+$ тогда и только тогда, когда имеет место, по крайней мере, одно из неравенств (6) и, по крайней мере, одно из неравенств (7).

Пусть система (5) имеет единственное решение с компонентами из $\mathbb{Z}^+$. Поскольку решение (e_1, d_1, e_2, d_2) является решением системы (5) с компонентами из $\mathbb{Z}^+$, то все другие целочисленные решения содержат хотя бы одну отрицательную компоненту. Рассмотрим произвольное целочисленное решение $(\widehat{e}_1, \widehat{d}_1, \widehat{e}_2, \widehat{d}_2) = \left(e_1 + \frac{qt_0}{(p,q)}, d_1 - \frac{qt_0}{(p,q)}, e_2 - \frac{pt_0}{(p,q)}, d_2 + \frac{pt_0}{(p,q)}\right)$, $t_0 \in \mathbb{Z}$. Поскольку $(\widehat{e}_1, \widehat{d}_1, \widehat{e}_2, \widehat{d}_2) \neq (e_1, d_1, e_2, d_2)$, то $t_0 \neq 0$ и хотя бы одно из чисел $\widehat{e}_1$, $\widehat{d}_1$, $\widehat{e}_2$, $\widehat{d}_2$ отрицательно. Следовательно, имеет место, по крайней мере, одно из неравенств:

$$e_1 + \frac{qt_0}{(p,q)} < 0; \quad d_1 - \frac{qt_0}{(p,q)} < 0; \quad e_2 - \frac{pt_0}{(p,q)} < 0; \quad d_2 + \frac{pt_0}{(p,q)} < 0.$$

Рассмотрим два случая. Пусть $t_0 > 0$. Поскольку $e_1, d_1, e_2, d_2, p, q > 0$, то $e_1 + \frac{qt_0}{(p,q)} > 0$ и $d_2 + \frac{pt_0}{(p,q)} > 0$. Поэтому выполняется хотя бы одно из неравенств:

$$d_1 < \frac{qt_0}{(p,q)}; \quad e_2 < \frac{pt_0}{(p,q)}.$$

Следовательно, выполняется, по крайней мере, одно из неравенств:

$$d_1 < \frac{q}{(p,q)}; \quad e_2 < \frac{p}{(p,q)}.$$

Пусть теперь $t_0 < 0$. Тогда $d_1 - \frac{qt_0}{(p,q)} > 0$ и $e_2 - \frac{pt_0}{(p,q)} > 0$. Поэтому выполняется, по крайней мере, одно из неравенств:

$$e_1 < \frac{qt_0}{(p,q)}; \quad d_2 < \frac{pt_0}{(p,q)}.$$

Следовательно, выполняется, по крайней мере, одно из неравенств:

$$e_1 < \frac{q}{(p,q)}; \quad d_2 < \frac{p}{(p,q)}.$$

Пусть теперь выполняется, по крайней мере, одно из неравенств (6) и, по крайней мере, одно из неравенств (7). Покажем, что в этом случае система (5) имеет единственное решение с компонентами из $\mathbb{Z}^+$. Из условия утверждения следует, что набор (e_1, d_1, e_2, d_2) с компонентами из $\mathbb{Z}^+$ является решением системы (5). Покажем, что система (5) не имеет других решений с компонентами из $\mathbb{Z}^+$. Пусть (x_1, y_1, x_2, y_2) — целочисленное решение системы (5), такое, что $(x_1, y_1, x_2, y_2) \neq (e_1, d_1, e_2, d_2)$. Выше показано, что решение (x_1, y_1, x_2, y_2) имеет вид $\left(e_1 + \frac{qt_0}{(p,q)}, d_1 - \frac{qt_0}{(p,q)}, e_2 - \frac{pt_0}{(p,q)}, d_2 + \frac{pt_0}{(p,q)}\right)$, $t_0 \in \mathbb{Z}$. Так как $(x_1, y_1, x_2, y_2) \neq (e_1, d_1, e_2, d_2)$, то $t_0 \neq 0$. Покажем, что хотя бы одна из его компонент отрицательна. Рассмотрим два случая.

Пусть $t_0 > 0$. Поскольку $d_1, e_2, p, q > 0$, то справедливы неравенства $d_1 - \frac{qt_0}{(p,q)} < d_1 - \frac{q}{(p,q)}$ и $e_2 - \frac{pt_0}{(p,q)} < e_2 - \frac{p}{(p,q)}$. Так как выполняется, по крайней мере, одно из неравенств (6), то выполняется, по крайней мере, одно из неравенств $d_1 - \frac{qt_0}{(p,q)} < 0$ или $e_2 - \frac{pt_0}{(p,q)} < 0$. Следовательно, хотя бы одна компонента решения (x_1, y_1, x_2, y_2) отрицательна.

Пусть $t_0 < 0$. Поскольку $e_1, d_2, p, q > 0$, то справедливы неравенства $e_1 + \frac{qt_0}{(p,q)} < e_1 - \frac{q}{(p,q)}$ и $d_2 + \frac{pt_0}{(p,q)} < e_2 - \frac{p}{(p,q)}$. Так как выполняется, по крайней мере, одно из неравенств (7), то выполняется, по крайней мере, одно из неравенств $e_1 + \frac{qt_0}{(p,q)} < 0$ или $d_2 + \frac{pt_0}{(p,q)} < 0$. Следовательно, хотя бы одна компонента решения (x_1, y_1, x_2, y_2) отрицательна.

Таким образом, решение

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) = \left(e_1 + \frac{qt_0}{(p,q)}, d_1 - \frac{qt_0}{(p,q)}, e_2 - \frac{pt_0}{(p,q)}, d_2 + \frac{pt_0}{(p,q)}\right)$$

при $t_0 \neq 0$ содержит хотя бы одну отрицательную компоненту. Следовательно, (e_1, d_1, e_2, d_2) является единственным решением системы (5) с компонентами из $\mathbb{Z}^+$.

У т в е р ж д е н и е 2.2.7. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in R$, $N_f = \mathscr{L}(e, d) \times \mathscr{L}(0, d)$, $e, d, n \in \mathbb{N}$, $e + 2d = n$, $\sigma \in \mathbb{Q}$, $\sigma > 0$, *числа* $a, b \in \mathbb{N}$ *такие, что* $(a, b) = 1$ *и* $\frac{a}{b} = \sigma$. *Тогда функция* f *содержится в* $< F_\sigma >$ *в том и только в том случае, когда выполняются следующие соотношения*:

(1) $be - ad > 0$;

(2) $be - ad \neq ta$ *при всех* $t = 1, \ldots, e$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in R$, $N_f = \mathscr{L}(e, d) \times \mathscr{L}(0, d)$, $e, d, n \in \mathbb{N}$, $e + 2d = n$, $\sigma \in \mathbb{Q}$, $\sigma > 0$, числа $a, b \in \mathbb{N}$ такие, что $(a, b) = 1$ и $\frac{a}{b} = \sigma$. Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ содержится в $< F_\sigma >$. Тогда существует функция $h(x_1, \ldots, x_m) \in F_\sigma$, такая, что $N_h = \mathscr{L}(ca, cb)$, где $c \in \mathbb{N}$, $m = ca + cb$, $f(x_1, \ldots, x_n) = h(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

По условию функция f является симметрической относительно множества $\{x_1, \ldots, x_{e+d}\}$. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (1^e, 2^d, 2^d)$, $e, d > 0$. Очевидно, что $\widetilde{\alpha} \in \mathscr{L}(e, d) \times \mathscr{L}(0, d) = N_f$. Поэтому $f(\widetilde{\alpha}) = 1$. Так как $f \in [\mathrm{S}^1]$, то по утверждению 2.2.4 среди $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ встречается каждая из переменных $x_1, \ldots, x_{e+d}$, причем каждая из переменных встречается одинаковое число раз. Пусть каждая из переменных $x_1, \ldots, x_{e+d}$ встречается среди $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ ровно p раз, а переменные $x_{e+d+1}, \ldots, x_n$ встречаются $q_{e+d+1}, \ldots, q_n$ раз соответственно, $q_{e+d+1}, \ldots, q_n \in \mathbb{Z}^+$. Тогда $m = (e + d)p + q_{e+d+1} + \ldots + q_n$. Поскольку функция f существенно зависит от переменных $x_{e+d+1}, \ldots, x_n$, то среди $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ встречается каждая из этих переменных, а значит, $q_{e+d+1}, \ldots, q_n \in \mathbb{N}$.

Положим $\widetilde{\beta} = (\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m})$. Тогда $h(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\alpha}) = 1$. Поэтому $\widetilde{\beta} \in N_h = \mathscr{L}(ca, cb)$. Следовательно, выполняются следующие соотношения:

$$|\widetilde{\beta}| = ca = |(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m})| = p|(\alpha_1, \ldots, \alpha_{e+d})| = pe;$$

$$m - |\widetilde{\beta}| = cb = m - |(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m})| =$$
$$= p(e + d) + q_{e+d+1} + \ldots + q_n - p|(\alpha_1, \ldots, \alpha_{e+d})| = pd + q_{e+d+1} + \ldots + q_n.$$

Таким образом, $p=ca/e$. Поэтому $ca/e\in\mathbb{N}$. Кроме того, выполняются равенства $q_{e+d+1}+\ldots+q_n=cb-pd=c(be-ad)/e$. Поэтому $be-ad>0$.

Покажем, что если для некоторого $t\in\mathbb{N}$, $1\leqslant t\leqslant e$, выполняется соотношение $be-ad=ta$, то функция f не содержится в $<F_\sigma>$. Предположим, что $be-ad=ta$, $t\in\mathbb{N}$, $1\leqslant t\leqslant e$. Определим наборы $\widetilde{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\{1,2\}^n$ и $\widetilde{\delta}\in\{1,2\}^m$ следующим образом. Положим $\widetilde{\gamma}=(2^{t+d},1^{e-t},1^d)$, $\widetilde{\delta}=(\gamma_{i_1},\ldots,\gamma_{i_m})$. Так как $\widetilde{\gamma}\notin\mathscr{L}(e,d)\times\mathscr{L}(0,d)=N_f$, то $f(\widetilde{\gamma})=0$, а значит, $h(\widetilde{\delta})=0$. Поскольку выполняются соотношения

$$|\widetilde{\delta}|=|(\gamma_{i_1},\ldots,\gamma_{i_m})|=p|(\gamma_1,\ldots,\gamma_{e+d})|+q_{e+d+1}+\ldots+q_n=p(e-t)+(cb-pd)=$$
$$=\frac{ca}{e}\cdot(e-t)+\frac{c}{e}\cdot(be-ad)=\frac{c}{e}\cdot(ae-(be-ad)+(be-ad))=ca$$

и $m=ca+cb$, то $\widetilde{\delta}\in\mathscr{L}(ca,cb)=N_h$. Поэтому $h(\widetilde{\delta})=1$. Получили противоречие. Значит, для всех $t=1,\ldots,e$ выполняется соотношение $be-ad\neq ta$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in R$, $N_f=\mathscr{L}(e,d)\times\mathscr{L}(0,d)$, $e,d\in\mathbb{N}$, $e+2d=n$, $\sigma\in\mathbb{Q}$, $\sigma>0$, числа $a,b\in\mathbb{N}$ такие, что $(a,b)=1$ и $\frac{a}{b}=\sigma$. Пусть выполняются соотношения (1) и (2). Рассмотрим функцию $h(x_1,\ldots,x_m)\in F_\sigma$, такую, что $N_h=\mathscr{L}(dae/(a,e),dbe/(a,e))$, $m=ed(a+b)/(a,e)$. Положим $p=da/(a,e)$, $q=d\cdot\dfrac{be-ad}{(a,e)}-d+1$. Покажем, что выполняется равенство

$$f(x_1,\ldots,x_n)=h(x_1^p,\ldots,x_{e+d}^p,x_{e+d+1}^q,x_{e+d+2},\ldots,x_n). \tag{9}$$

Поскольку $be-ad>0$, то $p,q\in\mathbb{N}$.

Пусть набор $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ содержится в $N_f=\mathscr{L}(e,d)\times\mathscr{L}(0,d)$. Положим $\widetilde{\beta}=(\alpha_1^p,\ldots,\alpha_{e+d}^p,\alpha_{e+d+1}^q,\alpha_{e+d+2},\ldots,\alpha_n)$. Поскольку справедливо равенство

$$p(e+d)+q+n-(e+d+1)=da\cdot\frac{e+d}{(a,e)}+d\cdot\frac{be-ad}{(a,e)}-d+1+d-1=de\cdot\frac{a+b}{(a,e)}=m,$$

то $\widetilde{\beta}\in\{1,2\}^m$. Кроме того, выполняются равенства

$$|\widetilde{\beta}|=|(\alpha_1^p,\ldots,\alpha_{e+d}^p,\alpha_{e+d+1}^q,\alpha_{e+d+2},\ldots,\alpha_n)|=$$
$$=p|(\alpha_1,\ldots,\alpha_{e+d})|=pe=dae/(a,e).$$

Поэтому $\widetilde{\beta}\in\mathscr{L}(dae/(a,e),dbe/(a,e))=N_h$, а значит, $h(\widetilde{\beta})=1$.

Пусть теперь $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — произвольный набор из $\{1,2\}^n$, такой, что выполняется равенство $h(\widetilde{\beta})=1$, где $\widetilde{\beta}=(\alpha_1^p,\ldots,\alpha_{e+d}^p,\alpha_{e+d+1}^q,\alpha_{e+d+2}\ldots$ $\ldots,\alpha_n)$. Положим $r=|(\alpha_1,\ldots,\alpha_{e+d})|$, $s=|(\alpha_{e+d+2},\ldots,\alpha_n)|$. Очевидно, что $0\leqslant r\leqslant e+d$, $0\leqslant s\leqslant d-1$, $|({\alpha_1}^p,\ldots,\alpha_{e+d}^p)|=pr$. Так как $\widetilde{\beta}\in N_h=$ $=\mathscr{L}(dae/(a,e),dbe/(a,e))$, то $pr\leqslant dae/(a,e)$. Поэтому $r\leqslant\dfrac{dae/(a,e)}{p}=e$. Тогда $|(\alpha_1^p,\ldots,\alpha_{e+d}^p)|=pr=dar/(a,e)$. Так как $N_h=\mathscr{L}(dae/(a,e),dbe/(a,e))$, то справедливы равенства

$$|\widetilde{\beta}|=|(\alpha_1^p,\ldots,\alpha_{e+d}^p,\alpha_{e+d+1}^q,\alpha_{e+d+2},\ldots,\alpha_n)|=\frac{dae}{(a,e)}=$$
$$=|(\alpha_1^p,\ldots,\alpha_{e+d}^p)|+|(\alpha_{e+d+1}^q)|+|(\alpha_{e+d+2},\ldots,\alpha_n)|=$$
$$=\frac{dar}{(a,e)}+\left(d\frac{be-ad}{(a,e)}-d+1\right)\cdot\lambda+s,$$

где $\lambda=1$, если $\alpha_{e+d+1}=1$, и $\lambda=0$, если $\alpha_{e+d+1}=2$.

Предположим, что $\alpha_{e+d+1}=1$. Тогда $\lambda=1$ и $d\cdot\dfrac{be-ad}{(a,e)}-d+1+s=\dfrac{da(e-r)}{(a,e)}$. Поэтому $d\cdot\dfrac{be-ad-a(e-r)}{(a,e)}=d-1-s$. Поскольку $0\leqslant s\leqslant d-1$, то справедливы неравенства

$$0\leqslant d\cdot\frac{be-ad-a(e-r)}{(a,e)}\leqslant d-1.$$

Положим $l=\dfrac{be-ad-a(e-r)}{(a,e)}$. Очевидно, что $l\in\mathbb{Z}$. Тогда выполняются соотношения $0\leqslant d\cdot\dfrac{be-ad-a(e-r)}{(a,e)}=dl\leqslant d-1$. Следовательно, $dl=0$. Тогда выполняется равенство $be-ad=a(e-r)$. Положим $t=e-r$. Так как $0\leqslant r\leqslant e$, то $0\leqslant t\leqslant e$. В силу условия (1) выполняется неравенство $t>0$, что противоречит условию (2). Поэтому $\alpha_{e+d+1}\neq 1$. Следовательно, $\alpha_{e+d+1}=2$. Тогда $\lambda=0$ и $s=\dfrac{da(e-r)}{(a,e)}$. Поскольку $0\leqslant s\leqslant d-1$, то справедливы неравенства

$$0\leqslant d(e-r)\frac{a}{(a,e)}\leqslant d-1.$$

Так как $a/(a,e)\in\mathbb{N}$, $d\in\mathbb{N}$, то $e-r=0$ и $s=0$. Таким образом, $|(\alpha_1,\ldots,\alpha_{e+d})|=r=e$, $\alpha_{e+d+1}=2$, $|(\alpha_{e+d+2},\ldots,\alpha_n)|=0$. Следовательно, $\widetilde{\alpha}\in\mathscr{L}(e,d)\times\mathscr{L}(0,d)=N_f$. А значит, $f(\widetilde{\alpha})=1$. Таким образом, установлено равенство (9). Следовательно, $f\in<F_\sigma>$.

Утверждение 2.2.8. *Пусть $\sigma\in\mathbb{Q}$, $\sigma>0$, s, $n_1,\ldots,n_s\in\mathbb{N}$, $g_1(x_1,\ldots,x_{n_1})$, $\ldots$, $g_s(x_1,\ldots,x_{n_s})$ — произвольные функции из $<F_\sigma>$, а $f(x_1,\ldots,x_n)$ — функция из R, такая, что $N_f=N_{g_1}\times\ldots\times N_{g_s}$, $n=n_1+\ldots+n_s$. Тогда f содержится в $<F_\sigma>$.*

Доказательство. Пусть $\sigma\in\mathbb{Q}$, $\sigma>0$, s, $n_1,\ldots,n_s\in\mathbb{N}$, $g_1(x_1,\ldots,x_{n_1})$, $\ldots$, $g_s(x_1,\ldots,x_{n_s})$ — произвольные функции из $<F_\sigma>$, а $f(x_1,\ldots,x_n)$ — функция из R, такая, что $N_f=N_{g_1}\times\ldots\times N_{g_s}$, $n=n_1+\ldots+n_s$. Пусть числа $a,b\in\mathbb{N}$ такие, что $\sigma=\dfrac{a}{b}$.

Поскольку функции g_1, $\ldots$, g_s содержатся в $<F_\sigma>$, то для каждого $i=1,\ldots,s$ существует такая функция $h_i(x_1,\ldots,x_{m_i})\in F_\sigma$, $m_i\geqslant n_i$, что g_i реализуется простой формулой над $\{h_i\}$. Пусть выполнено равенство $g_i(x_1,\ldots,x_{n_i})=h_i(x_{j_1},\ldots,x_{j_{m_i}})$, где $x_{j_1},\ldots,x_{j_{m_i}}\in\{x_1\ldots,x_{n_i}\}$, $i=1,\ldots,s$.

Пусть $N_{h_i}=\mathscr{L}(t_ia,t_ib)$, $t_i\in\mathbb{N}$, $i=1,\ldots,s$. Пусть $h(\widetilde{x}^1,\ldots,\widetilde{x}^s)$ — некоторая функция из R, такая, что $N_h=N_{h_1}\times\ldots\times N_{h_s}=\mathscr{L}(t_1a,t_1b)\times\ldots\times\mathscr{L}(t_sa,t_sb)$, $m=m_1+\ldots+m_s$, $\widetilde{x}^i=(x_{i,1},\ldots,x_{i,m_i})$, $i=1,\ldots,s$. Покажем, что функция h содержится в $<F_\sigma>$. Положим

$$q_s=1,\quad q_i=1+\sum_{j=i+1}^{s}q_jt_j(a+b),\quad i=1,\ldots,s-1,$$

$$\widehat{e}=a\sum_{i=1}^{s}q_it_i,\quad \widehat{d}=b\sum_{i=1}^{s}q_it_i.$$

По определению чисел $q_1,\ldots,q_s$ для всех $i=1,\ldots,s-1$ выполняются соотношения

$$q_i>\sum_{j=i+1}^{s}q_jt_j(a+b).$$

Пусть $\widehat{h}(x_1,\ldots,x_{\widehat{e}+\widehat{d}})$ — некоторая функция из S^1 такая, что $N_{\widehat{h}}=\mathscr{L}(\widehat{e},\widehat{d})$. Легко видеть, что $\widehat{h}\in F_\sigma$. Тогда по утверждению 2.2.1 выполняется соотношение

$$h(\widetilde{x}^1,\ldots,\widetilde{x}^s)=\widehat{h}(\widetilde{y}^1,\ldots,\widetilde{y}^s),$$

где $\widetilde{x}^i=(x_{i,1},\ldots,x_{i,m_i})$, $\widetilde{y}^i=(x_{i,1}^{q_i},\ldots,x_{i,m_i}^{q_i})$, $i=1,\ldots,s$. Следовательно, функция h реализуется простой формулой над $\{\widehat{h}\}$. Поэтому функция h содержится в $<F_\sigma>$.

Поскольку $N_f=N_{g_1}\times\ldots\times N_{g_s}$, $g_i(x_1,\ldots,x_{n_i})=h_i(x_{j_1},\ldots,x_{j_{m_i}})$, $i=1,\ldots,s$, $N_h=N_{h_1}\times\ldots\times N_{h_s}$, то выполняется равенство $f(\widetilde{u}^1,\ldots,\widetilde{u}^s)=h(\widetilde{v}^1,\ldots,\widetilde{v}^s)$, где $\widetilde{u}^i=(x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i})$, $\widetilde{v}^i=(x_{i,j_1},\ldots,x_{i,j_{m_i}})$, $i=1,\ldots,s$. Следовательно, функция f содержится в $<\{h\}>$. Поэтому f содержится в $<F_\sigma>$.

Утверждение 2.2.9. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n)\in S^1$, $N_f=\mathscr{L}(e,d)$, $e\in\mathbb{Z}^+$, $d\in\mathbb{N}$, $e+d=n$. *Пусть* Φ *— бесповторная формула над* $\{f\}$, *реализующая функцию, отличную от константы* 0. *Тогда существуют бесповторная формула* $\widehat{\Phi}$ *над* $\{f\}$ *и числа* $s_0\in\mathbb{N}$, $s_1,\ldots,s_e\in\mathbb{Z}^+$, *такие, что* $\widehat{\Phi}\cong\Phi$, $X_{\widehat{\Phi}}=X_\Phi$ *и*

$$N_{\widehat{\Phi}}=\prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant e\\ s_i\neq 0}}\Bigg(\underbrace{\mathscr{L}(e-i,d)\times\ldots\times\mathscr{L}(e-i,d)}_{s_i}\Bigg); \tag{10}$$

при этом если Φ *не является простой формулой, то* $s_1+\ldots+s_e>0$.

Доказательство. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in S^1$, $N_f=\mathscr{L}(e,d)$, $e,d\in\mathbb{N}$, $e+d=n$. Пусть $\Phi(x_1,\ldots,x_m)$ — некоторая бесповторная формула над $\{f\}$, реализующая функцию $g(x_1,\ldots,x_m)$, такую, что $g\neq 0$, $m\geqslant n$.

Доказательство будем проводить индукцией по глубине формулы Φ. Если Φ является простой бесповторной формулой, то без ограничения общности будем считать, что она имеет вид $\Phi=f(x_1,\ldots,x_n)$. Положим $\widehat{\Phi}=f(x_1,\ldots,x_n)$. Тогда $\widehat{\Phi}\cong\Phi$, $X_\Phi=X_{\widehat{\Phi}}$ и $N_{\widehat{\Phi}}=\mathscr{L}(e,d)$. Положим $s_0=1$, $s_i=0$, $1\leqslant i\leqslant e$. Очевидно, что формула $\widehat{\Phi}$ и числа $s_0,s_1,\ldots,s_e$ удовлетворяют условиям утверждения.

Предположим, что для каждой бесповторной формулы Ψ над $\{f\}$, глубина которой меньше k, $k>1$, найдутся бесповторная формула $\widehat{\Psi}$ над $\{f\}$ и числа $s_0\in\mathbb{N}$, $s_1,\ldots,s_e\in\mathbb{Z}^+$, такие, что $\widehat{\Psi}\cong\Psi$, $X_\Psi=X_{\widehat{\Psi}}$ и выполняется равенство (10). Пусть глубина формулы $\Phi(x_1,\ldots,x_m)$ равна k, $k>1$, и формула Φ имеет вид $f(\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_n)$. Без ограничения общности будем считать, что формулы $\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_r$ нетривиальны, а $\mathscr{B}_{r+1},\ldots,\mathscr{B}_n$ являются символами переменных из множества $\{x_1,\ldots,x_m\}$, $1\leqslant r\leqslant n$. Поскольку формула Φ является бесповторной, то можем считать, что $\mathscr{B}_{r+1},\ldots,\mathscr{B}_n$ являются символами переменных $x_{m-n+r+1},\ldots,x_m$ соответственно. Очевидно, что формулы $\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_r$ являются бесповторными.

Покажем, что $r\leqslant e$. Предположим, что $r>e$. Поскольку формула Φ имеет вид $f(\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_r,x_{m-n+r+1},\ldots,x_m)$, где $\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_r$ — нетривиальные формулы над $\{f\}$, принимающие значения из множества $\{0,1\}$, и $N_f=\mathscr{L}(e,d)$, то Φ реализует функцию, тождественно равную нулю. Это противоречит условию утверждения. Поэтому $r\leqslant e$.

Поскольку формула Φ является бесповторной и представима в виде $f(\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_r,x_{m-n+r+1},\ldots,x_m)$, то без ограничения общности будем считать, что $N_\Phi=N_{\mathscr{B}_1}\times\ldots\times N_{\mathscr{B}_r}\times\mathscr{L}(e-r,d)$.

Так как для каждого $i=1,\ldots,r$ формула $\mathscr{B}_i$ является бесповторной и ее глубина меньше k, то по предположению индукции существует бесповторная формула $\widehat{\mathscr{B}}_i$ над $\{f\}$, такая, что $\widehat{\mathscr{B}}_i\cong\mathscr{B}_i$, $X_{\mathscr{B}_i}=X_{\widehat{\mathscr{B}}_i}$ и для некоторых $s_0^i \in \mathbb{N}$, $s_1^i, \ldots, s_e^i \in \mathbb{Z}^+$ справедливо равенство

$$N_{\widehat{\mathscr{B}}_i} = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant e \\ s_j \neq 0}} \Bigl(\underbrace{\mathscr{L}(e-j,d) \times \ldots \times \mathscr{L}(e-j,d)}_{s_j^i} \Bigr).$$

Определим формулу Φ_1 над $\{f\}$: $\Phi_1 = f(\widehat{\mathscr{B}}_1, \ldots, \widehat{\mathscr{B}}_r, x_{m-n+r+1}, \ldots, x_m)$. Легко видеть, что формула Φ_1 бесповторная и выполняется равенство

$$\begin{aligned} N_{\Phi_1} = & N_{\widehat{\mathscr{B}}_1} \times \ldots \times N_{\widehat{\mathscr{B}}_r} \times \mathscr{L}(e-r,d) = \\ & = \Biggl(\prod_{i=1}^{r} \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant e \\ s_j^i \neq 0}} \underbrace{\mathscr{L}(e-j,d) \times \ldots \times \mathscr{L}(e-j,d)}_{s_j^i} \Biggr) \times \mathscr{L}(e-r,d). \end{aligned}$$

Поскольку $\widehat{\mathscr{B}}_i \cong \mathscr{B}_i$ и $X_{\widehat{\mathscr{B}}_i} = X_{\mathscr{B}_i}$, то $\Phi_1 \cong \Phi$ и $X_{\Phi_1} = X_\Phi$.

Положим $s_i = s_i^1 + \ldots + s_i^r$ для всех $i = 0, \ldots, r-1, r+1, \ldots, e$; $s_r = s_r^1 + \ldots + s_r^r + 1$. Легко видеть, что выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant e \\ s_i \neq 0}} \Bigl(\underbrace{\mathscr{L}(e-i,d) \times \ldots \times \mathscr{L}(e-i,d)}_{s_i} \Bigr) = \\ & \qquad = \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant r-1 \\ s_i \neq 0}} \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant r \\ s_i^j \neq 0}} \Bigl(\underbrace{\mathscr{L}(e-i,d) \times \ldots \times \mathscr{L}(e-i,d)}_{s_i^j} \Bigr) \times \\ & \qquad \times \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant r \\ s_r^j \neq 0}} \Bigl(\underbrace{\mathscr{L}(e-r,d) \times \ldots \times \mathscr{L}(e-r,d)}_{s_r^j} \Bigr) \times \mathscr{L}(e-r,d) \times \\ & \qquad\qquad \times \prod_{\substack{r+1 \leqslant i \leqslant e \\ s_i \neq 0}} \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant r \\ s_i^j \neq 0}} \Bigl(\underbrace{\mathscr{L}(e-i,d) \times \ldots \times \mathscr{L}(e-i,d)}_{s_i^j} \Bigr). \end{aligned}$$

Поэтому множества N_{Φ_1} и

$$\prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant e \\ s_i \neq 0}} \Bigl(\underbrace{\mathscr{L}(e-i,d) \times \ldots \times \mathscr{L}(e-i,d)}_{s_i} \Bigr)$$

отличаются только перестановкой сомножителей. Так как формула Φ_1 является бесповторной, то существует бесповторная формула $\widehat{\Phi}$, полученная из формулы Φ_1 перестановкой переменных, такая, что

$$N_{\widehat{\Phi}} = \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant e \\ s_i \neq 0}} \Bigl(\underbrace{\mathscr{L}(e-i,d) \times \ldots \times \mathscr{L}(e-i,d)}_{s_i} \Bigr).$$

Поскольку $\widehat{\Phi}\cong\Phi_1$ и $X_{\widehat{\Phi}}=X_{\Phi_1}$, то выполняются соотношения $\widehat{\Phi}\cong\Phi$, $X_{\widehat{\Phi}}=X_{\Phi}$. Кроме того, $s_r\geqslant 1$. Поэтому $s_1+\ldots+s_e\geqslant s_r>0$. Таким образом, для чисел $s_0,\ldots,s_e$ и формулы $\widehat{\Phi}$ утверждение выполняется.

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

Утверждение 2.2.10. *Пусть* $F\subseteq \mathrm{S}^1$, $F=\{f_1(x_1,\ldots,x_{n_1}),\ldots \ldots,f_t(x_1,\ldots,x_{n_t})\}$, $N_{f_i}=\mathscr{L}(e_i,d_i)$, $e_i\in\mathbb{Z}^+$, $d_i\in\mathbb{N}$, $e_i+d_i=n_i$, $i=1,\ldots,t$. *Пусть* Φ *— бесповторная формула над* F, *реализующая функцию, отличную от константы* 0. *Тогда существуют бесповторная формула* $\widehat{\Phi}$ *над* F *и числа* $s_{i,j}\in\mathbb{Z}^+$, $i=1,\ldots,t$, $j=0,\ldots,e_i$, $s_{1,0}+\ldots+s_{t,0}>0$, *такие, что* $\widehat{\Phi}\cong\Phi$, $X_{\Phi}=X_{\widehat{\Phi}}$ *и*

$$N_{\widehat{\Phi}}=\prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant t\\ s_{i,1}+\ldots+s_{i,e_i}\neq 0}}\ \prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant e_i\\ s_{i,j}\neq 0}}\left(\underbrace{\mathscr{L}(e_i-j,d_i)\times\ldots\times\mathscr{L}(e_i-j,d_i)}_{s_{i,j}}\right).$$

Утверждение 2.2.11. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{S}^1$, $N_f=\mathscr{L}(e,d)$, $e,d\in\mathbb{N}$, $n=e+d$, *числа* $a,b\in\mathbb{N}$ *такие, что* $(a,b)=1$ *и* $\sigma=\frac{a}{b}$. *Тогда для того, чтобы выполнялось соотношение* $[\{f\}]\subseteq\ <F_\sigma\cup\{f\}>$, *необходимо и достаточно, чтобы для всех* $i=1,\ldots,e$ *выполнялось соотношение* $be-ad\neq ia$, *существовали числа* $r,q,k\in\mathbb{N}$, *для которых выполнялись следующие соотношения:*

$$\begin{array}{rcl} re-q&=&ka;\\ rd&=&kb;\\ (r,q)&=&1;\\ r&>&q \end{array}\tag{11}$$

и для каждого i, $1\leqslant i<e$, *выполнялось, по крайней мере, одно из неравенств:*

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{q}{(q,i)}&>&\max(e,d);\\ \dfrac{ir-q}{(q,i)}&>&\max(e-i,d);\\ e&<&\min\left(\dfrac{ir-q}{(q,i)}+i,\ \dfrac{q}{(q,i)}\right);\\ d&<&\min\left(\dfrac{ir-q}{(q,i)},\ \dfrac{q}{(q,i)}\right). \end{array}\tag{12}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{S}^1$, $N_f=\mathscr{L}(e,d)$, $e,d\in\mathbb{N}$, $n=e+d$, числа $a,b\in\mathbb{N}$ такие, что $\sigma=\frac{a}{b}$. Пусть выполняется соотношение $[\{f\}]\subseteq\ <F_\sigma\cup\{f\}>$. Определим функции f_i, $i=1,\ldots,e$, следующим образом. Положим

$$f_i(x_1,\ldots,x_{2n-i})=f(\underbrace{f(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f(x_1,\ldots,x_n)}_{i},x_{n+1},\ldots,x_{2n-i}).$$

Легко видеть, что $N_{f_i}=\mathscr{L}(e,d)\times\mathscr{L}(e-i,d)$ для всех $i=1,\ldots,e$. Поскольку $[\{f\}]\subseteq\ <F_\sigma\cup\{f\}>$, то для всех i, $1\leqslant i\leqslant e$, выполняются соотношения

$$f_i\in[\{f\}]\subseteq\ <F_\sigma\cup\{f\}>.$$

Так как $e<n$, то для всех $i=1,\ldots,e$ справедливо неравенство $2n-i>n$, т. е. число переменных, от которых зависит функция f_i, больше, чем число переменных, от которых зависит функция f. Поэтому функцию f_i нельзя реализовать простой формулой над $\{f\}$, $i=1,\ldots,e$. Следовательно, $f_i \in < F_\sigma >$, где $i=1,\ldots,e$.

Найдем необходимые условия того, что функции $f_i, i=1,\ldots,e$, содержатся в множестве $< F_\sigma >$.

Поскольку $f_e \in < F_\sigma >$, $N_{f_e}=\mathscr{L}(e,d)\times\mathscr{L}(0,d)$ и $\sigma=\frac{a}{b}$, то в силу утверждения 2.2.7 получаем, что при всех $j=1,\ldots,e$ выполняется соотношение $be-ad\neq ja$.

Так как для каждого $i=1,\ldots,e-1$ выполняется равенство $N_{f_i}=\mathscr{L}(e,d)\times\times\mathscr{L}(e-i,d)$, то по утверждению 2.2.5 существуют числа $p_i,q_i,k_i\in\mathbb{N}$, такие, что набор $(e,d,e-i,d)$ является единственным решением системы

$$\left\{\begin{array}{cccccc} p_ix & + & q_iu & = & k_ia; \\ p_iy & + & q_iv & = & k_ib; \\ x & + & y & = & n \end{array}\right. \qquad (13)$$

с компонентами из $\mathbb{Z}^+$. В силу утверждения 2.2.6 набор $(e,d,e-i,d)$ является единственным решением системы (13) с компонентами из $\mathbb{Z}^+$ тогда и только тогда, когда для каждого $i=1,\ldots,e-1$ справедливо, по крайней мере, одно из неравенств:

$$e-i<\frac{p_i}{(q_i,p_i)},\qquad d<\frac{q_i}{(q_i,p_i)}$$

и, по крайней мере, одно из неравенств:

$$e<\frac{q_i}{(q_i,p_i)},\qquad d<\frac{p_i}{(q_i,p_i)}.$$

Положим $\varkappa_i=\frac{q_i}{(q_i,p_i)}$, $\lambda_i=\frac{p_i}{(q_i,p_i)}$. Тогда для каждого $i=1,\ldots,e-1$ выполняется хотя бы одна из систем неравенств:

$$\left\{\begin{array}{ccc} e & < & \varkappa_i; \\ d & < & \varkappa_i, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccc} e-i & < & \lambda_i; \\ d & < & \lambda_i, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccc} e & < & \lambda_i+i; \\ e & < & \varkappa_i, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccc} d & < & \lambda_i; \\ d & < & \varkappa_i. \end{array}\right.$$

Отсюда получаем, что для каждого $i=1,\ldots,e-1$ выполняется, по крайней мере, одно из неравенств:

$$\begin{array}{ccl} \varkappa_i & > & \max(e,d); \\ \lambda_i & > & \max(e-i,d); \\ e & < & \min(\lambda_i+i,\varkappa_i); \\ d & < & \min(\lambda_i,\varkappa_i). \end{array} \qquad (14)$$

Установим некоторые соотношения между наборами p_1,q_1,k_1 и p_i,q_i,k_i, $i=2,\ldots,e-1$. Поскольку при всех $i=1,\ldots,e-1$ набор $(e,d,e-i,d)$ является решением системы (13), то имеют место следующие соотношения:

$$\begin{array}{ccccc} p_1e & + & q_1(e-1) & = & k_1a; \\ p_1d & + & q_1d & = & k_1b; \\ p_ie & + & q_i(e-i) & = & k_ia; \\ p_id & + & q_id & = & k_ib, \end{array} \qquad (15)$$

где $i=2,\ldots,e-1$. Так как $k_i\neq 0$ при всех $i=1,\ldots,e-1$, то получаем следующие равенства:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{p_1e+q_1(e-1)}{k_1} & = & \dfrac{p_ie+q_i(e-i)}{k_i}; \\ \dfrac{p_1d+q_1d}{k_1} & = & \dfrac{p_id+q_id}{k_i}. \end{array}$$

Поэтому для всех $i=2,\ldots,e-1$ выполняются следующие равенства:

$$q_i=\frac{k_iq_1}{ik_1};\quad p_i=\frac{k_i}{k_1}\left(p_1+q_1\left(\frac{i-1}{i}\right)\right). \tag{16}$$

Найдем числа r, q, k, удовлетворяющие соотношениям (11) и (12). Положим $r=\frac{p_1+q_1}{(p_1,q_1)}$, $q=\frac{q_1}{(p_1,q_1)}$. Очевидно, что $r,q\in\mathbb{N}$, $(r,q)=1$ и $r>q$. Кроме того, из соотношений (15) следует, что для чисел r и q выполняются равенства

$$re(p_1,q_1)-q(p_1,q_1)=k_1a;\quad rd(p_1,q_1)=k_1b. \tag{17}$$

По условию $(a,b)=1$. Покажем, что $k_1/(p_1,q_1)\in\mathbb{N}$. В самом деле, если $k_1/(p_1,q_1)\notin\mathbb{N}$, то $(k_1,(p_1,q_1))<(p_1,q_1)$. Из соотношений (17) следует, что числа $ak_1/(p_1,q_1)$ и $bk_1/(p_1,q_1)$ натуральные. Поэтому числа $\frac{a}{(p_1,q_1)/(k_1,(p_1,q_1))}$ и $\frac{b}{(p_1,q_1)/(k_1,(p_1,q_1))}$ натуральные. Следовательно, $(a,b)\geqslant(p_1,q_1)/(k_1,(p_1,q_1))>1$. Получили противоречие. Следовательно, $k_1/(p_1,q_1)\in\mathbb{N}$. Положим $k=k_1/(p_1,q_1)$. Очевидно, что выполняется равенство $k_1=k(p_1,q_1)$.

Очевидно, что для чисел r, q, k выполняются соотношения (11). Покажем, что для чисел r, q, k выполняются соотношения (12). Из определений чисел r, q, k и равенств (16) следует

$$q_i=\frac{k_iq}{ik};\quad p_i=\frac{k_i}{k}\left(r-\frac{q}{i}\right), \tag{18}$$

где $i=1,\ldots,e-1$. Поэтому $\frac{k_iq}{ik}$, $\frac{k_i}{k}\left(r-\frac{q}{i}\right)\in\mathbb{N}$, а значит, k_iq/k, $k_ir/k\in\mathbb{N}$, где $i=1,\ldots,e-1$. Поскольку $(r,q)=1$, то $v_i=k_i/k\in\mathbb{N}$. Из соотношений (18) для всех $i=1,\ldots,e-1$ получаем следующие равенства:

$$q_i=v_iq/i;\quad p_i=v_i\cdot(r-q/i). \tag{19}$$

Следовательно, имеют место следующие равенства:

$$(p_i,q_i)=\left(\frac{v_iq}{i},\ v_i\left(r-\frac{q}{i}\right)\right)=\left(\frac{v_iq}{i},\ v_ir\right)=\left(\frac{v_i\cdot(q/(q,i))}{i/(q,i)},\ \frac{v_ir\cdot(i/(q,i))}{i/(q,i)}\right),$$

где $i=1,\ldots,e-1$. Поскольку $(q/(q,i),i/(q,i))=1$, то число $\frac{v_i}{i/(q,i)}$ — натуральное, $i=1,\ldots,e-1$. Кроме того, так как $(q,r)=1$, то $(q/(q,i),ir/(q,i))=1$, $i=1,\ldots,e-1$. Поэтому выполняются следующие равенства:

$$(p_i,q_i)=\left(\frac{v_i}{i/(q,i)}\cdot\frac{q}{(q,i)},\ \frac{v_i}{i/(q,i)}\cdot r\cdot(i/(q,i))\right)=\frac{v_i\cdot(q,i)}{i}\left(\frac{q}{(q,i)},\ \frac{ir}{(q,i)}\right)=\frac{v_i\cdot(q,i)}{i},$$

где $i=1,\ldots,e-1$. Используя полученное равенство и соотношения (19), для всех $i=1,\ldots,e-1$ получаем следующие равенства:

$$\varkappa_i=\frac{q_i}{(q_i,p_i)}=\frac{v_iqi}{iv_i\cdot(q,i)}=\frac{q}{(q,i)};\quad \lambda_i=\frac{p_i}{(q_i,p_i)}=\frac{v_ii\cdot(ir-q)}{iv_i\cdot(q,i)}=\frac{ir-q}{(q,i)}.$$

Таким образом, из соотношений (14) получаем, что для всех $i = 1, \ldots, e-1$ выполняется, по крайней мере, одно из неравенств:

$$\begin{aligned}
\frac{q}{(q,i)} &> \max(e,d);\\
\frac{ir-q}{(q,i)} &> \max(e-i,d);\\
e &< \min\left(\frac{ir-q}{(q,i)}+i,\ \frac{q}{(q,i)}\right);\\
d &< \min\left(\frac{ir-q}{(q,i)},\ \frac{q}{(q,i)}\right).
\end{aligned}$$

Достаточность. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{S}^1$, $N_f = \mathscr{L}(e,d)$, $e, d \in \mathbb{N}$, $n = e + d$. Пусть a, b, r, q, k — произвольные натуральные числа, для которых выполняются соотношения $(a,b) = 1$, $\frac{a}{b} = \sigma$, соотношения (11), для всех $i = 1, \ldots, e$ выполняются соотношения $be - ad \neq ia$, и для каждого $i = 1, \ldots, e-1$ выполняется, по крайней мере, одно из неравенств (12).

Определим функции f_i, $i = 1, \ldots, e$, следующим образом. Положим

$$f_i(x_1,\ldots,x_{2n-i}) = f(\underbrace{f(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f(x_1,\ldots,x_n)}_{i}, x_{n+1},\ldots,x_{2n-i}).$$

Легко видеть, что $N_{f_i} = \mathscr{L}(e,d) \times \mathscr{L}(e-i,d)$ для всех $i = 1, \ldots, e$.

Покажем сначала, что при всех $i = 1, \ldots, e$ функция f_i содержится в $< F_\sigma >$.

Построим простые формулы над F_σ, реализующие функции f_i, $i = 1, \ldots, e-1$. Рассмотрим такие функции $h_i(x_1,\ldots,x_{m_i}) \in F_\sigma$, что выполняется следующее: $m_i = ik(a+b)$ и $N_{h_i} = \mathscr{L}(ika, ikb)$ для всех $i = 1, \ldots, e-1$. Так как $ka = re - q$, $kb = rd$, то $N_{h_i} = \mathscr{L}(i(re-q), ird)$, $i = 1, \ldots, e-1$. Положим $p_i = ir - q$, $i = 1, \ldots, e-1$, очевидно, что $p_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, e-1$. Так как $r > q$, то $p_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, e-1$. Кроме того, так как $ka = re - q$, $kb = rd$, то для всех $i = 1, \ldots, e$ выполняются соотношения

$$i(ka+kb) = i(re-q+rd) = (ir-q)(e+d) + q(e-i+d) = p_i(e+d) + q(e+d-i).$$

Покажем, что для каждого $i = 1, \ldots, e-1$ выполняется равенство

$$f_i(x_1,\ldots,x_{2n-i}) = h_i(x_1^{p_i},\ldots,x_n^{p_i}, x_{n+1}^q,\ldots,x_{2n-i}^q). \tag{20}$$

Пусть $i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant e-1$, $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n-i})$ — произвольный набор из $\{1,2\}^{2n-i}$. Положим $\widetilde{\beta} = (\alpha_1^{p_i},\ldots,\alpha_n^{p_i},\alpha_{n+1}^q,\ldots,\alpha_{2n-i}^q)$. Покажем, что $f_i(\widetilde{\alpha}) = h_i(\widetilde{\beta})$.

Пусть $f_i(\widetilde{\alpha}) = 1$. Тогда $\widetilde{\alpha} \in N_{f_i}$. Поскольку $N_{f_i} = \mathscr{L}(e,d) \times \mathscr{L}(e-i,d)$, то выполняются равенства

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\beta}| &= |(\alpha_1^{p_i},\ldots,\alpha_n^{p_i},\alpha_{n+1}^q,\ldots,\alpha_{2n-i}^q)| =\\
&= ep_i + (e-i)q = e(ir-q) + q(e-i) = i(er-q).
\end{aligned}$$

Так как $N_{h_i} = \mathscr{L}(ika, ikb) = \mathscr{L}(i(er-q), ird)$, то $\widetilde{\beta} \in N_{h_i}$. Поэтому $h_i(\widetilde{\beta}) = 1$.

Пусть $h_i(\widetilde{\beta}) = 1$. Положим $s = |(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)|$, $v = |(\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{2n-i})|$. Очевидно, что $0 \leqslant s \leqslant n$, $0 \leqslant v \leqslant n-i$. Так как выполняются равенства

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\beta}| &= |(\alpha_1^{p_i},\ldots,\alpha_n^{p_i},\alpha_{n+1}^q,\ldots,\alpha_{2n-i}^q)| = p_i|(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)| +\\
&+ q|(\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{2n-i})| = p_i s + qv = (ir-q)s + qv
\end{aligned}$$

и $\widetilde{\beta}\in N_h=\mathscr{L}(i(er-q), ird)$, то пара (s,v) является целочисленным решением следующей системы:

$$\begin{cases} (ir-q)u+qz=i(er-q); \\ 0\leqslant u\leqslant n; \\ 0\leqslant z\leqslant n-i. \end{cases} \tag{21}$$

Покажем, что пара $(e, e-i)$ является единственным целочисленным решением системы (21). Легко видеть, что целочисленные решения первого уравнения системы (21) имеют вид (u_0+u_1, z_0+z_1), где (u_0, z_0) — некоторое частное целочисленное решение уравнения

$$(ir-q)u+qz=i(er-q), \tag{22}$$

а (u_1, z_1) — произвольное целочисленное решение однородного уравнения

$$(ir-q)u+qz=0. \tag{23}$$

Очевидно, что пара $(e, e-i)$ является целочисленным решением уравнения (22). Легко видеть, что целочисленные решения уравнения (23) имеют вид $\left(t\frac{q}{(ir-q,q)}, -t\frac{ir-q}{(ir-q,q)}\right)$, где $t\in\mathbb{Z}$. Так как $(q,r)=1$, то $(ir-q,q)=(ir,q)=(i,q)$. Поэтому целочисленные решения уравнения (23) имеют вид $\left(t\frac{q}{(i,q)}, -t\frac{ir-q}{(i,q)}\right)$. А значит, целочисленные решения уравнения (22) имеют вид

$$\left(e+\frac{tq}{(q,i)},\ (e-i)-\frac{t(ir-q)}{(q,i)}\right),\ t\in\mathbb{Z}.$$

Пусть пара $\left(e+\frac{t_0q}{(q,i)},\ (e-i)-\frac{t_0(ir-q)}{(q,i)}\right)$, $t_0\in\mathbb{Z}$, является решением системы (21). Тогда выполняются соотношения

$$0\leqslant e+\frac{t_0q}{(q,i)}\leqslant n;\quad 0\leqslant (e-i)-\frac{t_0(ir-q)}{(q,i)}\leqslant n-i. \tag{24}$$

Поскольку $e+d=n$, то выполняются соотношения

$$0\leqslant d-\frac{t_0q}{(q,i)}\leqslant n;\quad 0\leqslant d+\frac{t_0(ir-q)}{(q,i)}\leqslant n-i. \tag{25}$$

Покажем, что пара $\left(e+\frac{t_0q}{(q,i)},\ (e-i)-\frac{t_0(ir-q)}{(q,i)}\right)$, $t_0\in\mathbb{Z}$, является решением системы (21) только при $t_0=0$.

По условию утверждения выполняется, по крайней мере, одно из соотношений (12). Возможны четыре случая.

Предположим, что выполняется первое соотношение из (12). Пусть выполнено $\frac{q}{(q,i)}>\max(e,d)$. Тогда при $t_0>0$ выполняются неравенства $\frac{t_0q}{(q,i)}\geqslant\frac{q}{(q,i)}>d$. Поэтому $d-\frac{t_0q}{(q,i)}<0$, что противоречит (25). При $t_0<0$ выполняются неравенства $\frac{t_0q}{(q,i)}\leqslant\frac{-q}{(q,i)}<-e$. Поэтому $e+\frac{t_0q}{(q,i)}<0$, что противоречит (24). Таким образом, если выполняется неравенство $\frac{q}{(q,i)}>\max(e,d)$ и $t_0\neq 0$, то пара $\left(e+\frac{t_0q}{(q,i)},(e-i)-\frac{t_0(ir-q)}{(q,i)}\right)$ не является решением системы (21). Аналогично нетрудно показать, что если выполняется второе неравенство из (12) $\frac{ir-q}{(q,i)}>\max(e-i,d)$ и $t_0\neq 0$, то пара $\left(e+\frac{t_0q}{(q,i)},(e-i)-\frac{t_0(ir-q)}{(q,i)}\right)$ не является решением системы (21).

Предположим теперь, что выполняется третье соотношение из (12). Пусть $e < \min\left(\frac{ir-q}{(q,i)} + i, \frac{q}{(q,i)}\right)$. Тогда при $t_0 > 0$ выполняются неравенства $\frac{t_0(ir-q)}{(q,i)} \geqslant \frac{ir-q}{(q,i)} > e-i$. Поэтому $(e-i) - \frac{t_0(ir-q)}{(q,i)} < 0$, что противоречит (24). При $t_0 < 0$ выполняются неравенства $\frac{t_0 q}{(q,i)} \leqslant \frac{-q}{(q,i)} < -e$. Поэтому $e + \frac{t_0 q}{(q,i)} < 0$, что противоречит (24). Таким образом, если выполняется неравенство $e < \min\left(\frac{ir-q}{(q,i)} + i, \frac{q}{(q,i)}\right)$ и $t_0 \neq 0$, то пара $\left(e + \frac{t_0 q}{(q,i)}, (e-i) - \frac{t_0(ir-q)}{(q,i)}\right)$ не является решением системы (21). Аналогично нетрудно показать, что если выполняется последнее неравенство из (12) $d < \min\left(\frac{ir-q}{(q,i)}, \frac{q}{(q,i)}\right)$ и $t_0 \neq 0$, то пара $\left(e + \frac{t_0 q}{(q,i)}, (e-i) - \frac{t_0(ir-q)}{(q,i)}\right)$ не является решением системы (21).

Таким образом, пара $\left(e + \frac{t_0 q}{(q,i)}, (e-i) - \frac{t_0(ir-q)}{(q,i)}\right)$ является решением системы (21) только при $t_0 = 0$. Следовательно, единственным целочисленным решением системы (21) является пара $(e, e-i)$. Поэтому $s = |(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| = e$ и $v = |(\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n-i})| = e - i$. Следовательно, имеет место $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-i}) \in \mathscr{L}(e,d) \times \mathscr{L}(e-i,d) = N_{f_i}$, а значит, $f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-i}) = 1$.

Таким образом, для каждого $i = 1, \ldots, e-1$ имеет место равенство (20). А значит, $f_i \in < F_\sigma >$ для всех $i = 1, \ldots, e-1$.

Покажем, что $f_e \in < F_\sigma >$. Действительно, из соотношений (11) следует, что $be - ad = \frac{rd}{k} \cdot e - \frac{re-q}{k} \cdot d = \frac{qd}{k} > 0$. Кроме того, по условию для всех $i = 1, \ldots, e$ выполняется соотношение $be - ad \neq ia$. Тогда в силу утверждения 2.2.7 выполняется соотношение $f_e \in < F_\sigma >$.

Таким образом, при всех $i = 1, \ldots, e$ функции f_i содержатся в $< F_\sigma >$.

Покажем теперь, что любая функция из $[\{f\}]$, которая может быть реализована бесповторной формулой над $\{f\}$, реализуется простой формулой над $F_\sigma \cup \{f\}$. Пусть Φ — произвольная бесповторная формула над $\{f\}$. Пусть $g(x_1, \ldots, x_m)$ — функция, реализуемая формулой Φ. Очевидно, что если формула Φ является простой, то утверждение выполняется. Пусть Φ не является простой формулой. Покажем, что функция g содержится в $< F_\sigma >$. Рассмотрим два случая.

Пусть $g \equiv 0$. Пусть h — произвольная функция из F_σ. Тогда легко видеть, что формула $h(x, \ldots, x)$ реализует функцию g.

Пусть теперь $g \not\equiv 0$. По утверждению 2.2.9 существуют формула $\widehat{\Phi}$ над $\{f\}$ и числа $s_0 \in \mathbb{N}$, $s_1, \ldots, s_e \in \mathbb{Z}^+$, такие, что $\widehat{\Phi} \cong \Phi$, $X_{\widehat{\Phi}} = X_\Phi$ и

$$N_{\widehat{\Phi}} = \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant e \\ s_i \neq 0}} \left(\underbrace{\mathscr{L}(e-i,d) \times \ldots \times \mathscr{L}(e-i,d)}_{s_i} \right),$$

при этом $s_1 + \ldots + s_e > 0$. Пусть $g_1(x_1, \ldots, x_m)$ — функция, реализуемая формулой $\widehat{\Phi}$. Очевидно, что $g_1 \cong g$. Покажем, что функция g_1 содержится в $< F_\sigma >$.

Определим числа $t_1, \ldots, t_e, t_0$ следующим образом. Положим

$$t_1 = \begin{cases} 0, \text{ если } s_1 = 0; \\ \max(s_1, s_0 - (s_2 + \ldots + s_e)) \text{ в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$t_i = \begin{cases} 0, \text{ если } s_i = 0; \\ \max(s_i, s_0 - (s_{i+1} + \ldots + s_e)) \text{ если } s_1 = \ldots = s_{i-1} = 0; \\ s_i \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $i=2,\ldots,e$. Положим $t_0=t_1+\ldots+t_e$. Рассмотрим функцию $g_2(x_1,\ldots,x_u)$, $u\geqslant m$, такую, что

$$N_{g_2}=\prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant e\\ t_i\neq 0}}\Bigl(\underbrace{\mathscr{L}(e-i,d)\times\ldots\times\mathscr{L}(e-i,d)}_{t_i}\Bigr).$$

Очевидно, что для всех $i=1,\ldots,e$ выполняются неравенства $t_i\geqslant s_i$. Покажем, что $t_0\geqslant s_0$. Поскольку $s_1+\ldots+s_e>0$, то существует число i_0, $1\leqslant i_0\leqslant e$, такое, что при $1\leqslant i<i_0$ выполняется равенство $s_i=0$ и $s_{i_0}>0$. Тогда $t_{i_0}=\max(s_{i_0},s_0-(s_{i_0+1}+\ldots+s_e))\geqslant s_0-(s_{i_0+1}+\ldots+s_e)$. Поэтому $t_0=t_1+\ldots+t_e=t_{i_0}+\ldots+t_e\geqslant s_0-(s_{i_0+1}+\ldots+s_e)+s_{i_0+1}+\ldots+s_e=s_0$. Таким образом, для каждого $i=0,\ldots,e$ выполняется неравенство $t_i\geqslant s_i$. Следовательно, функция g_1 может быть получена из функции g_2 отождествлением переменных, т. е. $g_1\in<\{g_2\}>$.

Покажем, что $g_2\in<F_\sigma>$. Рассмотрим функцию $g_3(x_1,\ldots,x_u)$, такую, что

$$N_{g_3}=\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant e\\ t_i\neq 0}}\Bigl(\underbrace{(\mathscr{L}(e,d)\times\mathscr{L}(e-i,d))\times\ldots\times(\mathscr{L}(e,d)\times\mathscr{L}(e-i,d))}_{t_i}\Bigr).$$

Очевидно, что $g_2\cong g_3$. Покажем, что $g_3\in<F_\sigma>$. Поскольку имеет место равенство

$$N_{g_3}=\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant e\\ t_i\neq 0}}\Bigl(\underbrace{N_{f_i}\times\ldots\times N_{f_i}}_{t_i}\Bigr)$$

и для всех $i=1,\ldots,e$ выполняется соотношение $f_i\in<F_\sigma>$, то в силу утверждения 2.2.8 функция g_3 содержится в $<F_\sigma>$. Поэтому функции g,g_1,g_2 также содержатся в $<F_\sigma>$.

Таким образом, любая функция из $[\{f\}]$, которая может быть реализована бесповторной формулой над $\{f\}$, реализуется простой формулой над $F_\sigma\cup\{f\}$. Поскольку любая формула над $\{f\}$ может быть получена отождествлением переменных в некоторой бесповторной формуле, то любая функция из $[\{f\}]$ может быть реализована простой формулой над $F_\sigma\cup\{f\}$. А значит, выполняется соотношение $[\{f\}]\subseteq<F_\sigma\cup\{f\}>$.

Следствие 2.2.12. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{S}^1$, $N_f=\mathscr{L}(e,d)$, $e,d\in\mathbb{N}$, $e+d=n$, $\sigma\in\mathbb{Q}$, $\sigma>0$. *Если имеет место соотношение* $[\{f\}]\subseteq<F_\sigma\cup\{f\}>$, *то* $\frac{e-1}{d}<\sigma<\frac{e}{d}$.

Доказательство. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{S}^1$, $N_f=\mathscr{L}(e,d)$, $e,d\in\mathbb{N}$, $e+d=n$, $\sigma\in\mathbb{Q}$, $\sigma>0$. Пусть имеет место соотношение $[\{f\}]\subseteq<F_\sigma\cup\{f\}>$. Тогда по утверждению 2.2.11 выполняются соотношения (11). Следовательно, $\frac{a}{b}=\frac{re-q}{rd}$. Поскольку справедливы неравенства $0<q<r$, то имеют место соотношения $\frac{e-1}{d}<\frac{re-q}{rd}=\frac{a}{b}<\frac{e}{d}$.

Теорема 2.3. *Пусть* $f\in \mathrm{S}^1$, $N_f=\mathscr{L}(e,d)$, $a,b,e,d\in\mathbb{N}$, $(a,b)=1$, $\sigma=\frac{a}{b}$, $q=\frac{be-ad}{(b,d)}$, $r=\frac{b}{(b,d)}$. *Тогда для того, чтобы выполнялось соотношение* $[\{f\}]\subseteq<F_\sigma\cup\{f\}>$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* $r>q$, *для всех* $i=1,\ldots,e$ *выполнялись соотноше-*

ния $be-ad\neq ia$, *было справедливо, по крайней мере, одно из неравенств*:

$$\begin{array}{rcl} q & > & \max(e,d); \\ r-q & > & \max(e-1,d); \\ e & < & \min(r-q+1,q); \\ d & < & \min(r-q,q) \end{array} \qquad (26)$$

и для каждого $i=2,\ldots,e$ *выполнялось, по крайней мере, одно из неравенств:*

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{q}{(q,i)} & > & \min(e,d); \\ \dfrac{ir-q}{(q,i)} & > & \max(e-i,d). \end{array} \qquad (27)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f\in S^1$, $N_f=\mathscr{L}(e,d)$, $a,b,e,d\in\mathbb{N}$, $(a,b)=1$, $\sigma=\frac{a}{b}$. Пусть выполняется соотношение $[\{f\}]\subseteq<F_\sigma\cup\{f\}>$. По утверждению 2.2.11 для всех $i=1,\ldots,e$ выполняется соотношение $be-ad\neq ia$ и существуют числа $\widehat{r},\widehat{q},\widehat{k}\in\mathbb{N}$, для которых выполняются соотношения (11). Выразим числа $\widehat{r}$, $\widehat{q}$ и $\widehat{k}$ через a,b,e,d. Поскольку для чисел $\widehat{r}$, $\widehat{q}$ и $\widehat{k}$ выполняются соотношения (11), то легко видеть, что $\widehat{q}=\dfrac{\widehat{k}(be-ad)}{d}$, $\widehat{r}=\dfrac{\widehat{k}b}{d}$. Поскольку $(\widehat{r},\widehat{q})=1$ и $(a,b)=1$, то имеют место равенства

$$(\widehat{r},\widehat{q})=\left(\frac{\widehat{k}b}{d},\frac{\widehat{k}(be-ad)}{d}\right)=\left(\frac{\widehat{k}b/(b,d)}{d/(b,d)},\widehat{k}a\right).$$

Поскольку $(b/(b,d),d/(b,d))=1$, то число $l=\dfrac{\widehat{k}}{d/(b,d)}$ — натуральное. Тогда справедливы равенства

$$(\widehat{r},\widehat{q})=\left(\frac{lb}{(b,d)},\frac{lda}{(b,d)}\right)=1.$$

Следовательно, $l=1$. Поэтому $\widehat{k}=\dfrac{d}{(b,d)}$, $\widehat{q}=\dfrac{be-ad}{(b,d)}$, $\widehat{r}=\dfrac{b}{(b,d)}$. А значит, $\widehat{r}=r$, $\widehat{q}=q$.

По утверждению 2.2.11 при каждом $i=1,\ldots e-1$ для чисел r,q выполняется, по крайней мере, одно из неравенств (12). При $i=1$ неравенства (12) совпадают с неравенствами (26).

Покажем, что при $i=2,\ldots,e-1$ из неравенств (12) следуют неравенства (27). Пусть $2\leqslant i\leqslant e-1$. Рассмотрим неравенства (12). Поскольку $r>q$, то при $i>1$ выполняются неравенства $\dfrac{ir-q}{(q,i)}>\dfrac{(i-1)q}{(q,i)}>\dfrac{q}{(q,i)}$. Следовательно, имеют место соотношения $\min\left(\dfrac{ir-q}{(q,i)}+i,\dfrac{q}{(q,i)}\right)=\min\left(\dfrac{ir-q}{(q,i)},\dfrac{q}{(q,i)}\right)=\dfrac{q}{(q,i)}$. Следовательно, выполняется, по крайней мере, одно из неравенств:

$$\frac{q}{(q,i)}>\max(e,d);\quad \frac{ir-q}{(q,i)}>\max(e-i,d);\quad e<\frac{q}{(q,i)};\quad d<\frac{q}{(q,i)}.$$

Поэтому выполняется, по крайней мере, одно из неравенств:

$$\frac{q}{(q,i)}>\min(e,d);\quad \frac{ir-q}{(q,i)}>\max(e-i,d).$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $f\in S^1$, $N_f=\mathscr{L}(e,d)$, $a,b,e,d\in\mathbb{N}$, $(a,b)=1$, $\sigma=\frac{a}{b}$, $q=\frac{be-ad}{(b,d)}$, $r=\frac{b}{(b,d)}$. Пусть $r>q$ и для всех $i=1,\ldots,e$ выполняется соотношение $be-ad\neq ia$. Пусть выполняется хотя бы одно из неравенств (26) и для каждого $i=2,\ldots,e$ справедливо, по крайней мере, одно из неравенств (27).

Положим $k=\frac{rd}{b}=\frac{d}{(b,d)}$. Легко проверить, что числа q,r,k удовлетворяют соотношениям (11). Покажем, что для чисел q,r,k выполняется, по крайней мере, одно из соотношений (12). Очевидно, что при $i=1$ неравенства (12) совпадают с (26).

Покажем, что при $i=2,\ldots,e-1$ из неравенств (27) следуют неравенства (12). Пусть $2\leqslant i\leqslant e-1$. Из соотношений (27) следует, что для всех $i=1,\ldots,e-1$ выполняется, по крайней мере, одно из неравенств:

$$\frac{q}{(q,i)}>\max(e,d);\quad \frac{ir-q}{(q,i)}>\max(e-i,d);\quad e<\frac{q}{(q,i)};\quad d<\frac{q}{(q,i)}.$$

Поскольку $r>q$, то при $i>1$ выполняются неравенства $\frac{ir-q}{(q,i)}>\frac{(i-1)q}{(q,i)}>\frac{q}{(q,i)}$. Следовательно, имеют место соотношения

$$\min\left(\frac{ir-q}{(q,i)}+i,\ \frac{q}{(q,i)}\right)=\min\left(\frac{ir-q}{(q,i)},\ \frac{q}{(q,i)}\right)=\frac{q}{(q,i)}.$$

Поэтому при $i=2,\ldots,e$ выполняется, по крайней мере, одно из неравенств:

$$\frac{q}{(q,i)}>\max(e,d);\quad \frac{ir-q}{(q,i)}>\max(e-i,d);$$
$$e<\min\left(\frac{ir-q}{(q,i)}+i,\ \frac{q}{(q,i)}\right);\quad d<\min\left(\frac{ir-q}{(q,i)},\ \frac{q}{(q,i)}\right).$$

Таким образом, выполняется, по крайней мере, одно из неравенств 12. Следовательно, по утверждению 2.2.11 выполнено включение $[\{f\}]\subseteq<F_\sigma\cup\{f\}>$.

С л е д с т в и е 2.2.13. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n)\in S^1$, $N_f=\mathscr{L}(e,d)$, $e+d=n$, $r,q,e,d\in\mathbb{N}$, $(r,q)=1$, $r>q$, $qd\neq i(er-q)$ *при всех* $i=1,\ldots,e$, $\sigma=\frac{er-q}{rd}$ *и выполняется, по крайней мере, одно из неравенств*

$$r-q>\max(e-1,d);\tag{28}$$
$$q>ed.\tag{29}$$

Тогда $[\{f\}]\subseteq<F_\sigma\cup\{f\}>$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — функция из S^1, такая, что $N_f=\mathscr{L}(e,d)$, $e+d=n$, $e,d,n\in\mathbb{N}$. Пусть r,q — натуральные числа, такие, что $(r,q)=1$, $r-q>\max(e-1,d)$, $qd\neq i(er-q)$ при всех $i=1,\ldots,e$, $\sigma=\frac{er-q}{rd}$. Положим $a=\frac{er-q}{(er-q,rd)}$, $b=\frac{rd}{(er-q,rd)}$. Поскольку $(r,q)=1$, то $((er-q,rd),r)=1$. Так как число $\frac{rd}{(er-q,rd)}$ натуральное и $((er-q,rd),r)=1$, то число $\frac{d}{(er-q,rd)}$ — натуральное. Следовательно, выполняются равенства

$$(b,d)=\left(\frac{rd}{(er-q,rd)},d\right)=\left(r\cdot\frac{d}{(er-q,rd)},(er-q,rd)\cdot\frac{d}{(er-q,rd)}\right)=$$
$$=\frac{d}{(er-q,rd)}\cdot(r,(er-q,rd))=\frac{d}{(er-q,rd)}.$$

Поэтому справедливы соотношения

$$\frac{b}{(b,d)}=\frac{rd}{(er-q,rd)}\cdot\frac{(er-q,rd)}{d}=r$$
$$\frac{be-ad}{(b,d)}=\left(\frac{rde}{(er-q,rd)}-\frac{(er-q)d}{(er-q,rd)}\right)\cdot\frac{(er-q,rd)}{d}=q.$$

Из соотношений $qd\neq i(er-q)$ при всех $i=1,\ldots,e$ следуют соотношения

$$be-ad=q\cdot(b,d)=\frac{qd}{(er-q,rd)}\neq\frac{i(er-q)}{(er-q,rd)}=ia.$$

Пусть выполняется неравенство (28), то для всех $i=2,\ldots,e-1$ имеют место соотношения

$$\frac{ir-q}{(q,i)}\geqslant\frac{i(r-q)}{i}\geqslant r-q>\max(e-1,d)\geqslant\max(e-i,d).$$

Из полученных соотношений в силу теоремы 2.3 получаем, что выполняется соотношение $f\in<F_\sigma>$.

Если выполняется неравенство (29), то для всех $i=2,\ldots,e-1$ имеют место неравенства

$$\frac{q}{(q,i)}\geqslant\frac{q}{e}>\frac{ed}{e}=d\geqslant\min(e,d).$$

Кроме того, поскольку $e,d\in\mathbb{N}$, то $ed\geqslant\max(e,d)$. Поэтому $q>\max(e,d)$. Из полученных соотношений в силу теоремы 2.3 следует соотношение $f\in<F_\sigma>$.

Следствие 2.2.14. *Для любой функции f из S^1 существует число $\sigma\in\mathbb{Q}^+$, такое, что $[\{f\}]\subseteq<F_\sigma\cup\{f\}>$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{S}^1$, $N_f=\mathscr{L}(e,d)$. Рассмотрим два случая.

Пусть $e=0$, $d=n$. Легко видеть, что все функции из множества $[\{f\}]$ принимают значение 1 на наборах из множества $\mathscr{L}(0,a)$, $0<a\leqslant d$, и равны нулю на остальных наборах или тождественно равны нулю. Если $g\in[\{f\}]$, $g\not\equiv0$, то есть $N_g=\mathscr{L}(0,a)$, $0<a\leqslant d$, то очевидно, что

$$g(x_1,\ldots,x_a)=f(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{n-a+1},x_2,\ldots,x_a).$$

Если же $g\equiv0$, то $g\in F_\sigma$ для любого $\sigma\in\mathbb{Q}$, $\sigma>0$. Действительно, пусть h — произвольная функция из F_σ. Тогда очевидно, что формула $h(x,\ldots,x)$ реализует функцию g.

Пусть теперь e, $d\in\mathbb{N}$. Положим $\sigma=\dfrac{(n+2)e-1}{(n+2)d}$, $r=n+2$, $q=1$. Тогда по следствию 2.2.13 получаем, что $[\{f\}]\subseteq<F_\sigma\cup\{f\}>$.

Утверждение 2.2.15. *Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{NS}^1$, $N_f=\mathscr{L}(e,d)$, $e,d\in\mathbb{N}$, $e+d=n$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$, $\dfrac{e-1}{d}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\dfrac{e}{d}$. Тогда существует такое число $\gamma\in\mathbb{Q}$, $\alpha<\gamma<\beta$, что $[\{f\}]\subseteq<F_\gamma\cup\{f\}>$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{NS}^1$, $N_f=\mathscr{L}(e,d)$, $e,d\in\mathbb{N}$, $e+d=n$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$, $\dfrac{e-1}{d}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\dfrac{e}{d}$. Выберем число $r\in\mathbb{N}$ так, что $r>\max\left(2ed,\dfrac{2}{(\beta-\alpha)d}\right)$ и r — простое. Поскольку $r>\dfrac{2}{(\beta-\alpha)d}$, то $\beta-\alpha>\frac{2}{rd}$. Поэтому существует число $c\in\mathbb{N}$, такое, что $\alpha<\frac{c}{rd}<\beta$. Положим $q=re-c$, заметим, что $(q,r)=1$. Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &q=re-c>re-\beta rd\geqslant re-\frac{e}{d}rd=0;\\ &q=re-c<re-\alpha rd\leqslant re-\frac{e-1}{d}rd=r. \end{aligned} \tag{30}$$

Таким образом, $0<q<r$.

Покажем, что для всех $i=1,\ldots,e$ выполняются неравенства $qd\neq i(er-q)$. Предположим, что для некоторого i, $1\leqslant i\leqslant e$, имеет место равенство $qd=i(er-q)$. Тогда $q(d+i)=ier$. Поскольку r — простое, то, по крайней мере, одно из чисел $\frac{d+i}{r}$ и $\frac{q}{r}$ натуральное. Поэтому выполняется, по крайней мере, одно из неравенств $d+i\geqslant r$, $q\geqslant r$. Так как имеют место неравенства $q<r$ и $d+i\leqslant d+e\leqslant 2ed<r$, то получаем противоречие. Следовательно, для всех $i=1,\ldots,e$ выполняются неравенства $qd\neq i(er-q)$.

Положим $\gamma=\frac{re-q}{rd}$. Очевидно, что $\alpha<\gamma<\beta$. Тогда возможны два случая: $r-q>\max(e,d)$ и $r-q\leqslant\max(e,d)$ и в этом случае поскольку $r>2ed$, то $q\geqslant r-\max(e,d)>2ed-ed=ed$. Таким образом, выполняются все условия следствия 2.2.13, поэтому выполняется соотношение $[\{f\}]\subseteq<F_\gamma\cup\{f\}>$.

У т в е р ж д е н и е 2.2.16. *Пусть $\sigma\in\mathbb{Q}$, $\sigma>0$. Тогда существует лишь конечное число попарно неконгруэнтных функций $f\in\mathrm{S}^1$, таких, что $[\{f\}]\subseteq<F_\sigma\cup\{f\}>$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть заданы $\sigma\in\mathbb{Q}$, $\sigma>0$, $a,b\in\mathbb{N}$, такие, что $\sigma=\frac{a}{b}$ и $(a,b)=1$. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — такая функция из S^1, что выполнено $[\{f\}]\subseteq<F_\sigma\cup\{f\}>$, $N_f=\mathscr{L}(e,d)$, $e+d=n$, $e,d\in\mathbb{N}$. Положим $r=\frac{b}{(b,d)}$, $q=\frac{be-ad}{(b,d)}$. По теореме 2.3 выполняется по крайней мере одно из следующих неравенств:

$$\begin{array}{rcl} q & > & \max(e,d);\\ r-q & > & \max(e-1,d);\\ e & < & \min(r-q+1,q);\\ d & < & \min(p,q). \end{array} \tag{31}$$

То есть выполняется, по крайней мере, одно из неравенств:

$$\begin{array}{rcl} \frac{be-ad}{(b,d)} & > & \max(e,d);\\ \frac{b-(be-ad)}{(b,d)} & > & \max(e-1,d);\\ e & < & \min\left(\frac{b-(be-ad)}{(b,d)}+1,\frac{be-ad}{(b,d)}\right);\\ d & < & \min\left(\frac{b-(be-ad)}{(b,d)},\frac{be-ad}{(b,d)}\right). \end{array}$$

Поэтому справедливо хотя бы одно из неравенств:

$$\begin{array}{rcl} be-ad & > & \max(e,d);\\ b-(be-ad) & > & \max(e-1,d);\\ e & < & \min(b-(be-ad)+1,be-ad);\\ d & < & \min(b-(be-ad),be-ad). \end{array} \tag{32}$$

В силу следствия 2.2.12 выполняются соотношения $\frac{e-1}{d}<\frac{a}{b}<\frac{e}{d}$. Поэтому выполняются неравенства

$$ad>b(e-1);\quad be>ad. \tag{33}$$

Покажем, что существует лишь конечное число пар (e, d), $e, d \in \mathbb{Z}^+$, одновременно удовлетворяющих неравенствам (33) и, по крайней мере, одному из неравенств (32).

Рассмотрим четыре случая. Пусть $be - ad > \max(e, d)$. Тогда поскольку справедливо неравенство $ad > b(e-1)$, то $be - ad < b$. Следовательно, $\max(e, d) < b$. Пусть далее выполняется неравенство $b - (be - ad) > \max(e-1, d)$. Так как имеет место соотношение $be - ad > 0$, то $\max(e-1, d) < b$. Пусть теперь $e < \min(b - (be - ad) + 1, be - ad)$. Тогда $b - (be - ad) > e$. Так как имеет место соотношение $be - ad > 0$, то $e < b + 1$. Кроме того, $d < \frac{be}{a} < \frac{b(b+1)}{a}$. Пусть, наконец, выполняется неравенство $d < \min(b - (be - ad), be - ad)$. Поскольку $be - ad > 0$, то имеют место соотношения $d < b - (be - ad) < b$. Кроме того, так как $ad > b(e-1)$, то $e < \frac{ad}{b} + 1 < a + 1$.

Таким образом, выполняется, по крайней мере, одно из соотношений

$$\max(e, d) < b;$$
$$\max(e-1, d) < b;$$
$$e < b + 1, d < \frac{b(b+1)}{a};$$
$$d < b, e < a + 1.$$

Следовательно, выполнено $e < \max(a+1, b+1)$ и $d < \max\left(b, \frac{b(b+1)}{a}\right)$. Поскольку $e, d \in \mathbb{Z}^+$, то число пар (e, d), для которых выполняются соотношения (31), конечно. Поэтому получаем, что существует лишь конечное число функций f из S^1, для которых выполняется соотношение $[\{f\}] \subseteq < F \cup \{f\} >$.

Утверждение 2.2.17. *Пусть* $F \subseteq \mathrm{S}^1$, $F = \{f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), \ldots \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_{n_p})\}$, $N_{f_i} = \mathscr{L}(e_i, d_i)$, $i = 1, \ldots, p$. *Тогда существует конечный набор рациональных чисел* $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$, *таких, что* $[F] \subseteq < \bigcup_{i=1}^{t} F_{\sigma_i} \cup F >$. *При этом* $t < 2^r$, *где* $r = \sum_{j=1}^{p} (e_j + 1)$.

Доказательство. Пусть $F \subseteq \mathrm{S}^1$, $F = \{f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), \ldots, f_p(x_1, \ldots \ldots, x_{n_p})\}$, $N_{f_i} = \mathscr{L}(e_i, d_i)$, $i = 1, \ldots, p$. Рассмотрим всевозможные функции g из R, такие, что

$$N_g = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ q_{i,0} + \ldots + q_{i,e_i} > 0}} \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant e_i \\ q_{i,j} = 1}} \mathscr{L}(e_i - j, d_i),$$

где $q_{i,j} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 0, \ldots, e_i$ и существуют числа i, j, $1 \leqslant i \leqslant p$, $0 \leqslant j \leqslant e_i$, такие, что $q_{i,j} = 1$. Обозначим множество всех таких функций через G. Очевидно, что G содержит не более чем 2^r попарно неконгруэнтных функций, где $r = \sum_{j=1}^{p} (e_j + 1)$. В силу следствия 2.2.3 получаем, что для каждой функции g из G существует такая функция $h \in \mathrm{S}^1$, что g реализуется простой формулой над $\{h\}$. Поскольку множество G содержит конечное число попарно неконгруэнтных функций, то существует конечное число функций $h_1, \ldots, h_t$, таких, что $G \subseteq < \{h_1, \ldots, h_t\} >$. Обозначим через $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$ типы функций $h_1, \ldots, h_t$ соответственно. Покажем, что числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$ удовлетворяют условию теоремы. Без ограничения общности будем считать, что $\sigma_1 > 0$.

Покажем сначала, что любая функция, которая реализуется бесповторной формулой Φ над F, может быть реализована простой формулой над множеством функций $\bigcup_{i=1}^{t} F_{\sigma_i} \cup F$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая функция из $[F]$, которая реализуется бесповторной формулой Φ над F. Рассмотрим два случая.

Пусть $f \equiv 0$. Пусть h — произвольная функция из F_{σ_1}. Тогда легко видеть, что формула $h(x, \ldots, x)$ реализует функцию g.

Пусть теперь $f \not\equiv 0$. Тогда по утверждению 2.2.10 существуют бесповторная формула Φ_1 над F и числа $s_{i,j}$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 0, \ldots, e_i$, $s_{1,0}+\ldots+s_{p,0} > 0$, такие, что $\Phi \cong \Phi_1$, $X_\Phi = X_{\Phi_1}$ и справедливо равенство

$$N_{\Phi_1} = \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ s_{i,0}+\ldots+s_{i,e_i}\neq 0}} \prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant e_i \\ s_{i,j}\neq 0}} \Bigl(\underbrace{\mathscr{L}(e_i - j, d_i) \times \ldots \times \mathscr{L}(e_i - j, d_i)}_{s_{i,j}}\Bigr).$$

Пусть $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, реализуемая формулой Φ_1. Очевидно, что $f \cong f_1$. Покажем, что существует простая формула над $\bigcup_{i=1}^{t} F_{\sigma_i} \cup F$, реализующая функцию f_1.

Положим $r = \max\limits_{i,j} s_{i,j}$,

$$r_{i,j} = \begin{cases} r, & \text{если } s_{i,j} \neq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f_2 \in R$, такую, что

$$N_{f_2} = \prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant p \\ r_{i,1}+\ldots+r_{i,e_i}\neq 0}} \prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant e_i \\ r_{i,j}\neq 0}} \Bigl(\underbrace{\mathscr{L}(e_i - j, d_i) \times \ldots \times \mathscr{L}(e_i - j, d_i)}_{r_{i,j}}\Bigr).$$

Очевидно, что функция f_1 может быть получена из функции f_2 отождествлением переменных, т. е. $f_1 \in <\{f_2\}>$. Покажем, что функция f_2 содержится в $< \bigcup_{i=1}^{t} F_{\sigma_i} \cup F >$.

Положим

$$q_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } r_{i,j} \neq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f_3 \in R$, такую, что

$$N_{f_3} = \prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant p \\ q_{i,1}+\ldots+q_{i,e_i}\neq 0}} \prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant e_i \\ q_{i,j}\neq 0}} \Bigl(\underbrace{\mathscr{L}(e_i - j, d_i) \times \ldots \times \mathscr{L}(e_i - j, d_i)}_{q_{i,j}}\Bigr),$$

где $q_{i,j} \in \{0, 1\}$. Очевидно, что $f_3 \in G$. Как было показано выше, существует число σ_i, $1 \leqslant i \leqslant t$, такое, что $f_3 \in < F_{\sigma_i} > \subseteq < \bigcup_{i=1}^{t} F_{\sigma_i} \cup F >$.

Рассмотрим функцию $f_4 \in R$, такую, что

$$N_{f_4} = \underbrace{N_{f_3} \times \ldots \times N_{f_3}}_{r}.$$

Легко видеть, что $f_4 \cong f_2$. Покажем, что $f_4 \in < \bigcup\limits_{i=1}^{t} F_{\sigma_i} \cup F >$. Так как выполнено $N_{f_4} = \underbrace{N_{f_3} \times \ldots \times N_{f_3}}_{r}$ и $f_3 \in < F_{\sigma_i} >$, $1 \leqslant i \leqslant t$, то в силу утверждения 2.2.8 функция f_4 содержится в $< F_{\sigma_i} > \subseteq < \bigcup\limits_{i=1}^{t} F_{\sigma_i} \cup F >$.

Следовательно, функции f_2, f_1, f также содержатся в $< \bigcup\limits_{i=1}^{t} F_{\sigma_i} \cup F >$. Таким образом, любая функция, которая реализуется бесповторной формулой над F, может быть реализована простой формулой над множеством функций $\bigcup\limits_{i=1}^{t} F_{\sigma_i} \cup F$. Поскольку любая формула над F может быть получена из некоторой бесповторной формулы отождествлением переменных, то любая функция из $[F]$ может быть реализована простой формулой над множеством функций $\bigcup\limits_{i=1}^{t} F_{\sigma_i} \cup F$.

Из утверждений 2.2.16 и 2.2.17 следует теорема.

Теорема 2.4. *Пусть $H \subseteq \mathrm{S}^1$, $G = [H]$. Класс G имеет конечный базис тогда и только тогда, когда существуют числа $t \in \mathbb{N}$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_t \in \mathbb{Q}$, такие, что $G \subseteq < \bigcup\limits_{i=1}^{t} F_{\sigma_i} >$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $H \subseteq \mathrm{S}^1$, $G = [H]$, класс G имеет конечный базис. Без ограничения общности можем считать, что множество H состоит из попарно неконгруэнтных функций. В силу теоремы 2.1 множество H содержит конечное число функций. Пусть это функции $f_1, \ldots, f_s$. Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_s$ — типы функций $f_1, \ldots, f_s$ соответственно. Очевидно, что $H \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_{\tau_i}$. В силу утверждения 2.2.17 существуют такие числа $t_0 \in \mathbb{N}$, $\delta_1, \ldots, \delta_{t_0} \in \mathbb{Q}$, что $G \subseteq < \bigcup\limits_{i=1}^{t_0} F_{\delta_i} \cup H >$. Легко видеть, что существует число $t \leqslant s + t_0$, такое, что $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_t\} = \{\tau_1, \ldots, \tau_s\} \cup \{\delta_1, \ldots, \delta_{t_0}\}$. Тогда очевидно, что $G \subseteq < \bigcup\limits_{i=1}^{t} F_{\sigma_i} >$.

Достаточность. Пусть $H \subseteq \mathrm{S}^1$, $G = [H]$. Пусть существуют такие числа $t \in \mathbb{N}$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_t \in \mathbb{Q}$, что $G \subseteq < \bigcup\limits_{i=1}^{t} F_{\sigma_i} >$. В силу утверждения 2.2.16 для любого σ_j, $1 \leqslant j \leqslant t$, существует конечное число неконгруэнтных функций $f_1, \ldots, f_{s_j}$, таких, что $[\{f_i\}] \subseteq < F_{\sigma_j} \cup \{f_i\} >$, $i = 1, \ldots, s_j$. Поэтому существует конечное число функций $f_1, \ldots, f_p$, таких, что $[\{f_j\}] \subseteq < \bigcup\limits_{i=1}^{t} F_{\sigma_i} \cup \{f_j\} >$, $j = 1, \ldots, p$. Очевидно, что выполняется соотношение $\cup [\{f\}] \subseteq [H]$, где объединение берется по всем функциям множества H. Поскольку $G = [H] \subseteq < \bigcup\limits_{i=1}^{t} F_{\sigma_i} > \subseteq < \bigcup\limits_{i=1}^{t} F_{\sigma_i} \cup \bigcup\limits_{j=1}^{p} \{f_j\} >$, то множество H содержит конечное число неконгруэнтных функций. Таким образом, в силу теоремы 2.1 класс G имеет конечный базис.

§ 3. Классы, порожденные функциями из множества MS_3

В этом параграфе изучаются свойства функций из множества MS всех монотонных симметрических функций из P_3, принимающих значения только из множества $\{0,1\}$ и равных нулю на наборе, состоящем из всех единиц, и на всех наборах, содержащих хотя бы один нуль. Устанавливаются критерии базируемости и конечной порожденности классов, порожденных функциями множества MS. Описываются свойства функций множества MS при помощи сопоставления каждой функции точки на плоскости с целочисленными координатами.

На множестве $\mathscr{F}_{\mathsf{MS}}$ определен порядок $\preceq_{\mathsf{MS}}$. В этом параграфе будем обозначать отношение $\preceq_{\mathsf{MS}}$ через $\preceq$. Понятия цепи, максимальной цепи, ограниченной цепи и верхней грани цепи соответствуют отношению $\preceq$.

3.1. Критерии базируемости и конечной порожденности. В этом пункте вводится отношение порядка $\preceq_{\mathsf{MS}}$ на множестве MS и в терминах этого порядка доказывается критерий базируемости и конечной порожденности классов, порожденных множеством G, $G\subseteq M$ (см. также [46,49]).

Утверждение 3.1.1. *Пусть $f,g\in \mathsf{MS}$, $e_f>0$. Если $f\prec g$, то $e_g>e_f$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1,\dots,x_n), g(x_1,\dots,x_m)\in \mathsf{MS}$, $\frac{e_f}{d_f}$ — тип функции f, $e_f+d_f=n$, $\frac{e_g}{d_g}$ — тип функции g, $e_g+d_g=m$, и $f\prec g$. По утверждению 1.2.6 выполняются неравенства: $e_f\leqslant e_g$ и $\frac{e_f}{d_f}\leqslant\frac{e_g}{d_g}$. Покажем, что $e_f<e_g$. Предположим, что $e_f=e_g$. Тогда $\frac{e_f}{d_f}<\frac{e_g}{d_g}$. Действительно, если $\frac{e_f}{d_f}=\frac{e_g}{d_g}$, то $d_f=d_g$ и, следовательно, $f\cong g$, что противоречит тому, что $f\prec g$. Поскольку $e_f=e_g$, то $d_f>d_g$. Тогда $n=e_f+d_f>e_g+d_g=m$. Пусть $\Phi(x_1,\dots x_n)$ — некоторая формула, реализующая функцию $f(x_1,\dots,x_n)$ над $\{g\}$. Поскольку $n>m$, формула Φ не является простой. Тогда по утверждению 1.2.6 выполняется неравенство $e_g>e_f$. Получили противоречие. Следовательно, $e_g>e_f$.

Следствие 3.1.2. *Пусть $F\subseteq \mathsf{MS}$, $f\in F$, f не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества F. Тогда для любого $t\in\mathbb{N}$ существует функция $g\in F$, такая, что $f\prec g$ и $e_g\geqslant t$.*

Доказательство. Пусть $F\subseteq \mathsf{MS}$, $f\in F$, f не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества F. Пусть $t\in\mathbb{N}$. Поскольку функция f не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества F, то существуют функции $f_1,\dots,f_t\in F$, такие, что $f\prec f_1\prec\dots\prec f_t$. В силу утверждения 3.1.1 выполняются неравенства $e_f<e_{f_1}<\dots<e_{f_t}$. Поскольку $e_f,e_{f_1},\dots,e_{f_t}\in\mathbb{Z}^+$, то $e_{f_t}\geqslant t$. Положим $g=f_t$. Тогда функция g является искомой.

Утверждение 3.1.3. *Пусть $f(x_1,\dots,x_n), g(x_1,\dots,x_m)\in \mathsf{MS}$, $n\geqslant m\geqslant 1$. Пусть $e_f<e_g$. Тогда $f\prec g$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1,\dots,x_n), g(x_1,\dots,x_m)\in \mathsf{MS}$, $\frac{e_f}{d_f}$ — тип функции f, $e_f+d_f=n$, $\frac{e_g}{d_g}$ — тип функции g, $e_g+d_g=m$, выполняются соотношения $e_g>e_f$ и $n\geqslant m\geqslant 1$. Из неравенств $m>e_g>e_f\geqslant 0$ следует, что $m>1$.

Построим формулу над $\{g\}$, реализующую функцию $f(x_1,\dots,x_n)$. Пусть $X_1,\dots,X_p$ — все подмножества множества $\{x_1,\dots,x_n\}$, каждое из которых содержит $m-1$ элемент, $p=\frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}$. Рассмотрим множества $X_i=\{x_{j_1},\ldots,x_{j_{m-1}}\}$, $i=1,\ldots,p$, $j_1<j_2<\ldots<j_{m-1}$. Сопоставим множеству X_i упорядоченный набор $\widetilde{x}^i=(x_{j_1},\ldots,x_{j_{m-1}})$, $i=1,\ldots,p$. Если $\widetilde{\alpha}\in E_3{}^n$, $\widetilde{x}^s=(x_{i_1},\ldots,x_{i_{m-1}})$, то обозначим через $\widetilde{\alpha}^s$ набор $(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_{m-1}})$.

Обозначим через $h_1(x_1,\ldots,x_n)$ такую функцию из MS, что $e_h=e_g-1$, $d_h=d_g+1$. Построим формулу над $\{g\}$, реализующую функцию h_1. Для этого построим последовательность формул $\Psi_0,\ldots,\Psi_p$, таких, что $\Psi_i(\widetilde{\alpha})=1$ на всех наборах $\widetilde{\alpha}\in D_3^n$, удовлетворяющих соотношению $|\widetilde{\alpha}|\leqslant e_g-1$, $i=0,\ldots,p$. Положим

$$\Psi_0(x_1,\ldots,x_{m-1})=g(x_1,x_2,\ldots,x_{m-1},x_{m-1}).$$

Легко видеть, что для любого набора $\widetilde{\gamma}\in E_3{}^{m-2}$ выполняется следующее равенство:

$$\Psi_0(\widetilde{\gamma},\gamma_{m-1})=\begin{cases}1, & \text{если } \widetilde{\gamma}\in\{1,2\}^{m-2}, |\widetilde{\gamma}|\leqslant e_g \text{ и } \gamma_{m-1}=2;\\ & \text{или } \widetilde{\gamma}\in\{1,2\}^{m-2}, |\widetilde{\gamma}|\leqslant e_g-2 \text{ и } \gamma_{m-1}=1;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Очевидно, что $\Psi_0(\widetilde{\alpha})=1$ на всех наборах $\widetilde{\alpha}\in D_3^n$, таких, что $|\widetilde{\alpha}|\leqslant e_g-1$.

Обозначим через Ψ_i формулу вида $g(\Psi_{i-1},\widetilde{x}^i)$, $i=1,\ldots,p$. Очевидно, что если $\Psi_{i-1}(\widetilde{\alpha})=1$ и $g(1,\widetilde{\alpha}^i)=1$, то $\Psi_i(\widetilde{\alpha})=1$. Покажем по индукции, что при $i=1,\ldots,p$ формулы Ψ_i также принимают значение 1 на всех наборах $\widetilde{\alpha}\in D_3^n$, таких, что $|\widetilde{\alpha}|\leqslant e_g-1$. Из следствия 1.2.2 следует, что если $\Psi_i(\widetilde{\alpha})=1$, то $\Psi_{i-1}(\widetilde{\alpha})=1$ и $g(1,\widetilde{\alpha}^i)=1$. Легко видеть, что

$$g(1,\widetilde{\alpha}^i)=\begin{cases}1, & \text{если } \widetilde{\alpha}^i\in D_{m-1} \text{ и } |\widetilde{\alpha}^i|\leqslant e_g-1;\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

По предположению значение формулы Ψ_{i-1} равно 1 на всех наборах, содержащих не более чем e_g-1 единицу, а следовательно, для любого набора $\widetilde{\alpha}\in D_3^n$, такого, что $|\widetilde{\alpha}|\leqslant e_g-1$, выполняется равенство $\Psi_{i-1}(\widetilde{\alpha})=1$. Кроме того, $g(1,\widetilde{\alpha}^i)=1$. Тогда $\Psi_i(\widetilde{\alpha})=1$. Следовательно, значение формулы Ψ_p равно 1 на всех наборах $\widetilde{\alpha}\in D_3^n$, таких, что $|\widetilde{\alpha}|\leqslant e_g-1$.

Покажем, что на наборах, содержащих e_g и больше единиц, формула Ψ_p принимает значение 0. Пусть $\widetilde{\beta}\in D_3^n$, $|\widetilde{\beta}|\geqslant e_g$. Без ограничения общности будем считать, что $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_{e_g}=1$. Так как $e_g\leqslant m-1$, то найдется набор $\widetilde{x}^j$, $1\leqslant j\leqslant p$, содержащий все переменные $x_1,\ldots,x_{e_g}$. Поскольку $g(1,\widetilde{\beta}^j)=0$, то и $\Psi_j(\widetilde{\beta})=0$, а следовательно, по утверждению 1.2.1 выполняется равенство $\Psi_p(\widetilde{\beta})=0$. Таким образом, формула Ψ_p реализует функцию $h_1(x_1,\ldots,x_n)$, такую, что $h(\widetilde{\alpha})=1$ для любого набора $\widetilde{\alpha}\in D_3^n$, для которого выполняется неравенство $|\widetilde{\alpha}|\leqslant e_g-1$, а на всех остальных наборах равна нулю.

Если $e_g-e_f=1$, то $h(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_n)$, и утверждение доказано. Если $e_g-e_f=l>1$, то для каждого $i=2,\ldots,l$ рассмотрим функцию $h_i(x_1,\ldots,x_n)$, тип которой равен $\dfrac{e_g-i}{n-e_g+i}$. Аналогичным образом построим формулы Φ_2, $\ldots$, Φ_l над $\{g\}$, реализующие функции h_2, $\ldots$, h_l соответственно. Очевидно, что $f(x_1,\ldots,x_n)=h_l(x_1,\ldots,x_n)$. Следовательно, $f\in[\{g\}]$.

Утверждение 3.1.4. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n),g(x_1,\ldots,x_m)\in\mathrm{MS}$, $n<m$, $\dfrac{e}{d}$ *— тип функции* f, $e+d=n$, $e>0$, $\dfrac{e_g}{d_g}$ *— тип функции* g, $e_g+d_g=m$. *Тогда если* $\dfrac{e_g}{e}>\left]\dfrac{d_g}{d}\right[$, *то* $f\prec g$.

Доказательство. Пусть $f(x_1,\dots,x_n), g(x_1,\dots,x_m)\in \mathrm{MS}$, $\frac{e}{d}$ — тип функции f, $e+d=n$, $\frac{e_g}{d_g}$ — тип функции g, $e_g+d_g=m$. Пусть выполняются соотношения $\frac{e_g}{e} > \left]\frac{d_g}{d}\right[$ и $n<m$. Введем следующие обозначения:

$$k=\left]\frac{d_g}{d}\right[,\quad b=e_g-ke,\quad r=\left]\frac{b}{e}\right[-1,\quad s=b-re,\quad t=kd-d_g.$$

Легко видеть, что $k>0$, $b>0$, $0\leqslant t<n-e$, $0<s\leqslant e$, $r\geqslant 0$. Пусть $p=\frac{n!}{(e+1)!(d-1)!}$, $\mathscr{A}_1,\ \dots,\ \mathscr{A}_p$ — все такие различные разбиения множества $\{x_1,\dots,x_n\}$ на 2 непересекающихся подмножества, что $\mathscr{A}_i=\{Y_i,U_i\}$, а множества Y_i и U_i содержат $e+1$ и $d-1$ переменную соответственно, $i=1,\dots,p$. Обозначим через $\widetilde{x}^i$ некоторый (упорядоченный) набор переменных $(x^{(i)}_{j_1},\dots,x^{(i)}_{j_n})$, такой, что $\{x^{(i)}_{j_1},\dots,x^{(i)}_{j_{e+1}}\}=Y_i$, $\{x^{(i)}_{j_{e+2}},\dots,x^{(i)}_{j_n}\}=U_i$, где $i=1,\dots,p$.

Построим функцию h над $\{g\}$ следующего вида:

$$h(x_0,\dots,x_n)=$$
$$=g(x_0,x_1^{k+r+1},\dots,x_{s-1}^{k+r+1},x_s^{k+r},\dots,x_e^{k+r},x_{e+1}^{k},\dots,x_{n-t}^{k},x_{n-t+1}^{k-1},\dots,x_n^{k-1}).$$

Отметим некоторые свойства функции h. Если $k=1$, то h существенно зависит от $n-t$ переменных. Функция h монотонна, $h(1^{e+2},2^{d-1})=0$, поскольку значение $h(1^{e+2},2^{d-1})$ совпадает со значением функции g на наборе, содержащем

$$(k+r+1)(s-1)+(k+r)(e-s+1)+1+k>e_g$$

единиц. Для любого набора $\widetilde{\alpha}\in D_{n+1}$, $|\widetilde{\alpha}|\leqslant e$, справедливо равенство $h(1,\widetilde{\alpha})=1$, так как значение функции h на наборе $(1,\widetilde{\alpha})$ равно значению функции g на соответствующем наборе, содержащем не более чем

$$(k+r+1)(s-1)+(k+r)(e-s+1)+1=(k+r)e+s=ke+b=e_g$$

единиц.

Будем последовательно строить формулу, реализующую функцию f над $\{h\}$. Построим последовательность формул $\Phi_0,\ \dots,\ \Phi_p$ над $\{h\}$. Положим $\Phi_0=h(x_s,x_1,\dots,x_n)$. Для всех $q=1,\dots,p$ обозначим через Φ_q формулу вида $h(\Phi_{q-1},\widetilde{x}^q)$. Очевидно, что если $\Phi_{q-1}(\widetilde{\alpha})=1$ и $h(1,\widetilde{\alpha}^q)=1$, то $\Phi_q(\widetilde{\alpha})=1$. Из свойств функции h получаем, что на любом наборе $\widetilde{\alpha}\in D_3^n$, $|\widetilde{\alpha}|\leqslant e$, значение формулы Φ_0 равно 1.

Покажем по индукции, что формула Φ_p принимает значение 1 на всех наборах $\widetilde{\alpha}\in D_3^n$, $|\widetilde{\alpha}|\leqslant e$. Из следствия 1.2.2 следует, что если $\Phi_q(\widetilde{\alpha})=1$, то $\Phi_{q-1}(\widetilde{\alpha})=1$ и $h(1,\widetilde{\alpha}^q)=1$. По предположению индукции формула Φ_{q-1} принимает значение 1 на всех наборах $\widetilde{\alpha}\in D_3^n$, $|\widetilde{\alpha}|\leqslant e$, а следовательно, $\Phi_{q-1}(\widetilde{\alpha})=1$. Также выше показано, что $h(1,x_1,\dots,x_n)$ принимает значение 1 на всех наборах $\widetilde{\alpha}\in D_3^n$, $|\widetilde{\alpha}|\leqslant e$, откуда $h(1,\widetilde{\alpha}^q)=1$. Поэтому на любом наборе $\widetilde{\alpha}\in D_3^n$, $|\widetilde{\alpha}|\leqslant e$ формула Φ_q принимает значение 1. Следовательно, формула Φ_p принимает значение 1 на любом наборе $\widetilde{\alpha}\in D_3^n$, $|\widetilde{\alpha}|\leqslant e$.

Покажем, что на всех наборах, содержащих более чем e единиц, формула Φ_p принимает нулевое значение. Пусть $\widetilde{\beta}\in D_3^n$, $|\widetilde{\beta}|>e$. Без ограничения общности будем считать, что $\beta_1=\ldots=\beta_{e+1}=1$. Существует разбиение $\mathscr{A}_j$, такое, что $\{x_1, \ldots, x_{e+1}\} = Y_j$. Тогда по свойствам функции h выполняется равенство $h(1, \beta_1, \ldots, \beta_n) = 0$, следовательно, $\Phi_j(\widetilde{\beta}) = 0$, а поэтому и $\Phi_p(\widetilde{\beta}) = 0$. Получаем, что формула Φ_p реализует функцию, принимающую значение 1 на всех наборах из $\widetilde{\alpha} \in D_3^n$, $|\widetilde{\alpha}| \leqslant e$, и принимающую нулевое значение на всех остальных наборах. То есть формула Φ_p реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Утверждение 3.1.5. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathsf{MS}$, $\mathfrak{A} \subseteq R$, $\mathfrak{A} \cap \mathsf{MS} \neq \varnothing$, $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ *— некоторая формула над* $\mathfrak{A}$, *реализующая функцию* f, Φ_1 *— произвольная подформула формулы* Φ, *имеющая вид* $g(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m)$, $g \in \mathfrak{A} \cap \mathsf{MS}$, $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ *— формулы над* $\mathfrak{A}$. Φ_1 *не является простой формулой. Тогда* $f \prec g$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathsf{MS}$, $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая формула над $\mathfrak{A} \subseteq R$, реализующая функцию f, Φ_1 — произвольная подформула формулы Φ, имеющая вид $g(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m)$, $g \in \mathsf{MS}$, $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ — формулы над $\mathfrak{A}$, Φ_1 не является простой формулой, $\frac{e_f}{d_f}$ — тип функции f, $e_f + d_f = n$, $\frac{e_g}{d_g}$ — тип функции g, $e_g + d_g = m$. Рассмотрим два случая.

Пусть $e_f = 0$. Поскольку формула Φ_1 не является простой, то существует нетривиальная подформула $\mathscr{B}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Поскольку на всех наборах из E^n формула $\mathscr{B}_i$ принимает значения из множества $\{0, 1\}$, то существует набор $\widetilde{\alpha} \in N_g$, содержащий хотя бы одну единицу. Следовательно, $e_g > 0$. Тогда по утверждению 1.2.10 выполняется соотношение $f \prec g$.

Пусть теперь $e_f > 0$. По утверждению 1.2.6 выполняются неравенства: $e_f < e_g$ и $\left]\frac{d_g}{d}\right[< \frac{e_g}{e}$. Если $n \geqslant m$, то из неравенства $e_f < e_g$ и утверждения 3.1.3 следует, что $f \prec g$. Если $n \leqslant m$, то из неравенства $\left]\frac{d_g}{d}\right[< \frac{e_g}{e}$ и утверждения 3.1.4 следует $f \prec g$.

Следствие 3.1.6. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathsf{MS}$, $\mathfrak{A} \subseteq R$, $\mathfrak{A} \cap \mathsf{MS} \neq \varnothing$, $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ *— некоторая формула над* $\mathfrak{A}$, *реализующая функцию* f, Φ *имеет вид* $g(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m)$, $g \in \mathfrak{A} \cap \mathsf{MS}$, $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ *— формулы над* $\mathfrak{A}$. *Тогда* $f \preceq g$.

Утверждение 3.1.7. *Пусть* G *— произвольное множество, состоящее из попарно неконгруэнтных функций множества* MS. *Пусть* $g(x_1, \ldots, x_n) \in G$, g *является верхней гранью некоторой максимальной цепи множества* G. *Тогда любая формула над* G, *реализующая функцию* $g(x_1, \ldots, x_n)$, *имеет вид* $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, *где* $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\} = \{x_1, \ldots x_n\}$.

Доказательство. Пусть G — произвольное множество, состоящее из попарно неконгруэнтных функций множества MS, $g(x_1, \ldots, x_n) \in G$, пусть g является верхней гранью некоторой максимальной цепи множества G, Φ — формула над G, реализующая функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть формула Φ имеет вид $f(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m)$, где $f \in G$, а $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ — формулы над G. Если формула Φ не является простой, то по утверждению 3.1.5 $g \prec f$, что противоречит тому, что g — верхняя грань некоторой максимальной цепи множества G. Следовательно, формула Φ простая. Тогда $g \preceq f$. Поскольку g является верхней гранью некоторой максимальной цепи множества G, то $f \cong g$. Так как все функции множества G попарно неконгруэнтны, то f совпадает с g.

Утверждение 3.1.8. *Пусть* G *— произвольное множество, состоящее из попарно неконгруэнтных функций множества* MS, $\mathfrak{B}$ *— множество всех верхних граней максимальных цепей множества* G, $F = [G]$, *пусть* F *имеет базис и* $\mathfrak{A}$ *— базис класса* F. *Тогда выполняется соотношение* $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть G — произвольное множество, состоящее из попарно неконгруэнтных функций множества MS, $F=[G]$, класс F имеет базис $\mathfrak{A}$. Покажем, что для любой функции $g\in F$ выполняется условие: $g\in\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда g является верхней гранью некоторой максимальной цепи множества G. Для каждой функции $f\in\mathfrak{A}$ обозначим через Υ_f некоторую формулу над G, реализующую функцию f. Пусть Φ — произвольная формула над $\mathfrak{A}$. Заменим в формуле Φ каждую из функций базиса $\mathfrak{A}$ на соответствующую ей подформулу над G. Полученную формулу над G обозначим через $\pi(\Phi)$.

Пусть $g(x_1,\ldots,x_m)\in F$, g — верхняя грань некоторой максимальной цепи множества G. Пусть Φ — формула, реализующая функцию g над $\mathfrak{A}$. Тогда формула $\pi(\Phi)$ реализует функцию g над G. По утверждению 3.1.7 формула $\pi(\Phi)$ имеет вид $g(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$, $\{x_{i_1},\ldots,x_{i_m}\}=\{x_1,\ldots,x_m\}$. Следовательно, формула Φ имеет вид $g(x_{j_1},\ldots,x_{j_m})$, поэтому $g\in\mathfrak{A}$.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in F$, f не является верхней гранью никакой максимальной цепи множества G. Предположим, что $f\in\mathfrak{A}$. Рассмотрим формулу Υ_f над G, реализующую функцию f. Покажем, что для любой функции g из $\Theta(\Upsilon_f)$ выполняется соотношение $g\in[\mathfrak{A}\backslash\{f\}]$. Пусть $g\in\Theta(\Upsilon_f)$. Если функция g является верхней гранью некоторой максимальной цепи множества G, то $g\in\mathfrak{A}$ и $g\in\mathfrak{A}\backslash\{f\}\subseteq\left[\mathfrak{A}\backslash\{f\}\right]$. Если функция g не является верхней гранью некоторой максимальной цепи в G, то существует функция $g'\in G$, такая, что $g\prec g'$.

Предположим, что $g'\notin[\mathfrak{A}\backslash\{f\}]$. Тогда любая формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию g', содержит подформулу вида $f(\mathscr{C}_1,\ldots,\mathscr{C}_n)$. Пусть Ψ' — некоторая формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию g'. Легко видеть, что в формуле $\pi(\Psi')$ есть подформула вида $g(\mathscr{D}_1,\ldots,\mathscr{D}_m)$. Тогда по утверждению 1.2.6 получаем, что $e_g\geqslant e_{g'}$. Рассмотрим два случая.

Пусть $e_g>0$. Тогда в силу утверждения 3.1.1 выполняется неравенство $e_g<e_{g'}$, что противоречит неравенству $e_g\geqslant e_{g'}$. Следовательно, $g'\in[\mathfrak{A}\backslash\{f\}]$, а значит $g\in[\mathfrak{A}\backslash\{f\}]$.

Пусть теперь $e_g=0$. Поскольку $e_{g'}\leqslant e_g$, то $e_{g'}=0$. Если найдется функция $h\in\Theta(\Upsilon_f)$, такая, что $e_h>0$, то в силу утверждения 1.2.10 выполняется соотношение $g'\prec h$. Выше показано, что для каждой функции $h\in\Theta(\Upsilon_f)$ из неравенства $e_h>0$ следует, что $h\in[\mathfrak{A}\backslash\{f\}]$. А значит, выполняется соотношение $g'\in[\mathfrak{A}\backslash\{f\}]$. Если же для любой функции $h\in\Theta(\Upsilon_f)$ выполняется равенство $e_h=0$, то либо $f\equiv 0$, либо $N_f=\{(2,\ldots,2)\}$. Очевидно, что если $f\equiv 0$, то $g'\in[\mathfrak{A}\backslash\{f\}]$. Если же $N_f=\{(2,\ldots,2)\}$, то возможны два случая. Пусть существует функция $h_1\in G$, такая, что $e_{h_1}>0$. Тогда в силу утверждения 1.2.6 выполняется соотношение $h_1\in[\mathfrak{A}\backslash\{f\}]$. Кроме того, в силу утверждения 1.2.10 выполняется соотношение $g'\in[\{h_1\}]$. А значит, $g'\in[\mathfrak{A}\backslash\{f\}]$. Пусть теперь для любой функции $h_2\in G$ выполняется равенство $e_{h_2}=0$. Легко видеть, что всякая формула Φ над G, которая не является простой, реализует функцию, тождественно равную нулю. Тогда очевидно, что $f\in[\{g\}]$. Поскольку $g\prec g'$, то $g'\in[\mathfrak{A}\backslash\{f\}]$. Следовательно, в случае $e_g=0$ показано, что $g'\in[\mathfrak{A}\backslash\{f\}]$ и $g\in[\mathfrak{A}\backslash\{f\}]$.

Таким образом, для каждой функции g из $\Theta(\Upsilon_f)$ выполняется соотношение $g\in\left[\mathfrak{A}\backslash\{f\}\right]$. Тогда выполняется включение $f\in\left[\mathfrak{A}\backslash\{f\}\right]$, что противоречит определению базиса. Следовательно, базис $\mathfrak{A}$ содержит все функции из F, которые являются верхними гранями некоторых максимальных цепей множества G или конгруэнтны им, и только их.

Теорема 3.1. *Пусть G — произвольное множество, состоящее из попарно неконгруэнтных функций из* MS, $F=[G]$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) *F имеет базис тогда и только тогда, когда каждая функция из G содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G.*

(2) *F имеет конечный базис тогда и только тогда, когда для некоторого $k \in \mathbb{Z}^+$ множество G является k-ограниченным и множество $\mathscr{K}(G)$ конечно.*

(3) *F имеет счетный базис тогда и только тогда, когда каждая функция из G содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G и либо ни для какого $k \in \mathbb{Z}^+$ множество G не является k-ограниченным, либо для некоторого $k \in \mathbb{Z}^+$ множество G является k-ограниченным и множество $\mathscr{K}(G)$ счетно.*

Доказательство. (1) Необходимость. Пусть класс F имеет базис $\mathfrak{A}$. Из утверждения 3.1.8 следует, что выполняется соотношение $\mathfrak{A} \subseteq G$. Предположим, что существует некоторая функция $h(x_1, \ldots, x_p) \in G$, которая не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества G. Рассмотрим некоторую формулу Φ_h над $\mathfrak{A}$, реализующую функцию $h(x_1, \ldots, x_p)$, пусть формула Φ_h имеет вид $f(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_s)$, где $f \in \mathfrak{A}$, а $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_s$ — формулы над $\mathfrak{A}$. По следствию 3.1.6 выполняется соотношение $h \preceq f$. По утверждению 3.1.8 базис $\mathfrak{A}$ состоит только из тех функций, которые являются верхними гранями некоторых максимальных цепей множества G. Следовательно, функция f также является верхней гранью максимальной цепи множества G. Тогда функция h содержится в какой-то ограниченной максимальной цепи множества G. Получили противоречие. Следовательно, каждая функция h из G принадлежит некоторой ограниченной максимальной цепи множества G.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{A} \subseteq G$, $\mathfrak{A}$ — множество всех функций, которые являются верхними гранями максимальных цепей множества G. Очевидно, что все функции множества $\mathfrak{A}$ попарно несравнимы. Поскольку по условию каждая функция из G лежит в некоторой максимальной цепи, то $[\mathfrak{A}] = F$. Покажем, что для любой функции $g \in \mathfrak{A}$ выполняется соотношение $g \notin [\mathfrak{A} \setminus \{g\}]$. Предположим, что найдется функция $g(x_1, \ldots, x_p)$, для которой выполняется соотношение $g \in [\mathfrak{A} \setminus \{g\}]$. Пусть формула $\Phi(x_1, \ldots, x_p)$ над $\mathfrak{A} \setminus \{g\}$ реализует функцию g. Формула Φ имеет вид $f(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_n)$, где $f \in \mathfrak{A}$, а $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_n$ — формулы над $\mathfrak{A}$. Покажем, что выполняется неравенство $g \prec f$. Действительно, если формула Φ не является простой, то это неравенство следует из утверждения 3.1.5. Если же Φ является простой формулой, то это неравенство следует из соотношений $g \in [\{f\}]$ и $g \ncong f$. Полученное соотношение противоречит тому, что g — верхняя грань некоторой конечной максимальной цепи в G. Следовательно, $g \notin [\mathfrak{A} \setminus \{g\}]$. Таким образом, $\mathfrak{A}$ — базис класса F.

(2) Необходимость. Пусть G — множество, состоящее из попарно неконгруэнтных функций из MS, $F = [G]$, F имеет конечный базис. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторый базис класса F. Из утверждения 3.1.8 следует, что $\mathfrak{A} \subseteq G$. Поскольку множество $\mathfrak{A}$ конечно, существует число $k \in \mathbb{Z}^+$ такое, что множество $\mathfrak{A}$ является k-ограниченным. Рассмотрим произвольную функцию $g(x_1, \ldots, x_n) \in G$. Пусть она реализуется формулой Φ над $\mathfrak{A}$, формула Φ имеет вид $h(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m)$, $h \in \mathfrak{A}$, $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ — некоторые формулы над $\mathfrak{A}$. По утверждению 1.2.6 выполняется неравенство $e_g \leqslant e_h$, причем если формула Φ не является простой, то $e_g < e_h$. Если формула Φ простая, то либо $h \cong g$, что противоречит условию, либо $g \prec h$. Тогда по утверждению 3.1.1 выполняется неравенство $e_g < e_h$. Следовательно, для любой функции множества $g \in G \setminus \mathfrak{A}$ выполняется неравенство $e_g < e_h \leqslant k$. Отсюда следует, что множество G является k-ограниченным и что выполняется

включение $\mathscr{K}(G) \subseteq \mathfrak{A}$. А значит, так как множество $\mathfrak{A}$ конечно, то и множество $\mathscr{K}(G)$ конечно.

Достаточность. Пусть множество G k-ограниченно и множество $\mathscr{K}(G)$ конечно. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}(G)$. Тогда для любой функции $g(x_1, \ldots, x_m) \in G$ имеет место неравенство $e_g \leqslant e_f$. Из утверждения 3.1.3 следует, что для любой функции $g(x_1, \ldots, x_m)$, такой, что $e_g < e_f$, $m \geqslant n$, выполняется соотношение $g \in [\{f\}]$. Обозначим через $\mathscr{B}$ множество всех функций $h(x_1, \ldots, x_p) \in G$, таких, что $e_h < e_f$, $p < n$. Очевидно, что множество $\mathscr{B}$ конечно. Тогда для любой функции $g(x_1, \ldots, x_m) \in G$, такой, что $e_g < e_f$, выполняется по крайней мере одно из соотношений: $g \in [\{f\}]$, $g \in \mathscr{B}$. Далее, для любой функции $g \in G$, такой, что $e_g = e_f$, по определению множества $\mathscr{K}(G)$ выполняется включение $g \in \mathscr{K}(G)$. Следовательно, $G \subseteq [\mathscr{B} \cup \mathscr{K}(G)]$. Так как $\mathscr{B}$, $\mathscr{K}(G) \subseteq G$, то $F = [G] = [\mathscr{B} \cup \mathscr{K}(G)]$. Поскольку множество $\mathscr{B} \cup \mathscr{K}(G)$ конечно, класс F имеет конечный базис.

(3) Это утверждение следует из пунктов (1) и (2).

3.2. Изображение монотонных функций на плоскости. В этом пункте рассматривается представление монотонных симметрических функций точками на плоскости из множества $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{N}$. Каждой функции f из MS ставится в соответствие точка на плоскости с координатами (e_f, d_f) и указываются все точки плоскости, соответствующие функциям g и h из MS, таким, что $g \preceq_{\mathsf{MS}} f \preceq_{\mathsf{MS}} h$.

Утверждение 3.2.1. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_m) \in \mathsf{MS}$, $e_f \neq 0$, $f \not\cong g$, $k = \frac{e_g}{e_f}$, $t = \frac{e_g}{e_f} \cdot d_f - d_g$. *Тогда соотношение* $f \prec g$ *выполняется тогда и только тогда, когда имеют место неравенства*

$$e_f < e_g, \quad \frac{e_g}{e_f} \geqslant \left]\frac{d_g}{d_f}\right[\tag{34}$$

и выполняется, по крайней мере, одно из следующих соотношений:

$$n \geqslant m; \tag{35}$$

$$k > \left]\frac{d_g}{d_f}\right[; \tag{36}$$

$$k > e_f + 1; \tag{37}$$

$$k > t. \tag{38}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_m) \in \mathsf{MS}$, $f \prec g$. По утверждению 3.1.1 выполняется неравенство $e_f < e_g$. Так как $f \in [\{g\}]$ и $e_f \neq 0$, то в силу утверждения 1.2.6 справедливо неравенство $\frac{e_g}{e_f} \geqslant \left]\frac{d_g}{d_f}\right[$. Таким образом, неравенства (34) выполняются.

Покажем, что если неравенства (35) и (36) не выполняются, то выполняется соотношение (37) или (38). Очевидно, что если неравенства (35) и (36) не выполняются, то $n < m$ и $\frac{e_g}{e_f} = \left]\frac{d_g}{d_f}\right[$, т. е. $k = \left]\frac{d_g}{d_f}\right[$. Тогда $d_g \leqslant k d_f$, $d_g > (k-1) d_f$, $t = \left]\frac{d_g}{d_f}\right[\cdot d_f - d_g$. Поэтому выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} &t < \left(\frac{d_g}{d_f} + 1\right) d_f - d_g = d_f; \\ &t \geqslant \frac{d_g}{d_f} \cdot d_f - d_g = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Таким образом, $0 \leqslant t < d_f$. Поскольку $n = e_f + d_f$, $m = e_g + d_g$, $d_g = kd_f - t$, то выполняются равенства

$$m = e_g + d_g = ke_f + kd_f - t = kn - t. \tag{40}$$

Пусть Φ — некоторая формула над $\{g\}$, реализующая функцию f. Поскольку $\frac{e_g}{e_f} = \left]\frac{d_g}{d_f}\right[$, то из утверждения 1.2.6 получаем, что формула Φ простая.

Пусть формула Φ имеет вид $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$ и пусть среди $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ символы переменных $x_1, \ldots, x_n$ встречаются $q_1, \ldots, q_n$ раз соответственно. Очевидно, что выполняется равенство

$$m = q_1 + \ldots + q_n. \tag{41}$$

Без ограничения общности будем считать, что

$$q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_n \geqslant 0. \tag{42}$$

Очевидно, что для всех i, j, $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$, справедливо неравенство

$$\frac{q_{n-i+1} + \ldots + q_n}{i} \geqslant \frac{q_{n-j+1} + \ldots + q_n}{j}. \tag{43}$$

Установим некоторые соотношения между числами $q_1, \ldots, q_n, e_g, d_g$.

Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (1^{e_f}, 2^{d_f})$. Положим $\widetilde{\beta} = (\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m})$. Легко видеть, что $\widetilde{\beta} \in \mathscr{L}(q_1 + \ldots + q_{e_f}, q_{e_f+1} + \ldots + q_n)$. Так как $f(\widetilde{\alpha}) = g(\widetilde{\beta}) = 1$, то $\mathscr{L}(q_1 + \ldots + q_{e_f}, q_{e_f+1} + \ldots + q_n) \subseteq N_g$. Поэтому выполняются неравенства

$$q_1 + \ldots + q_{e_f} \leqslant e_g, \quad q_{e_f+1} + \ldots + q_n \geqslant d_g. \tag{44}$$

Аналогично из равенства $f(2^{d_f}, 1^{e_f}) = 1$, получаем неравенство

$$q_1 + \ldots + q_{d_f} \geqslant d_g. \tag{45}$$

Рассмотрим набор $\widetilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = (2^{d_f - 1}, 1^{e_f + 1})$. Положим $\widetilde{\delta} = (\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_m})$. Легко видеть, что $\widetilde{\delta} \in \mathscr{L}(q_{d_f} + \ldots + q_n, q_1 + \ldots + q_{d_f - 1})$. Так как $f(\widetilde{\gamma}) = g(\widetilde{\delta}) = 0$, то $\mathscr{L}(q_{d_f} + \ldots + q_n, q_1 + \ldots + q_{d_f - 1}) \nsubseteq N_g$. Поэтому имеют место неравенства

$$q_1 + \ldots + q_{d_f - 1} < d_g, \quad q_{d_f} + \ldots + q_n > e_g. \tag{46}$$

Покажем, что имеют место равенства

$$q_1 = \ldots = q_{n-t} = k. \tag{47}$$

Покажем сначала, что для всех $i = 1, \ldots, n - t$ выполняется неравенство $q_i \leqslant k$. Предположим, что это не так. Пусть для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n - t$, выполняется неравенство $q_i > k$. Тогда $q_1 \geqslant q_i > k$ (см. (42)). Так как $q_1 + \ldots + q_{e_f} \leqslant e_g$ (см. (44)) и $ke_f = e_g$, то имеет место неравенство $q_1 + \ldots + q_{e_f} \leqslant ke_f$, поэтому $q_{e_f} \leqslant k$. Если $q_{e_f} = k$, то так как $q_1 > k$, то $q_1 + \ldots + q_{e_f} > ke_f$. Получили противоречие. Следовательно, $q_{e_f} < k$. Поскольку $q_{e_f} \in \mathbb{Z}^+$, то $q_{e_f} \leqslant k - 1$. Поэтому в силу (42) выполняются соотношения

$$q_{e_f+1} + \ldots + q_n \leqslant q_{e_f}(n - e_f) = q_{e_f} d_f \leqslant (k-1)d_f < kd_f - t = d_g,$$

что противоречит неравенству $q_{e_f+1}+\ldots+q_n \geqslant d_g$ (см. (44)). Следовательно, для всех $i=1,\ldots,n-t$ выполняется неравенство $q_i \leqslant k$.

Покажем теперь, что для всех $i=1,\ldots,n-t$ выполняется неравенство $q_i \geqslant k$. Предположим, что это не так. Пусть для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n-t$, выполняется неравенство $q_i < k$. В силу соотношений (40), (41), (42) и неравенств $q_j \leqslant k$, $j=1,\ldots,n-t$, выполняются соотношения

$$m = q_1 + \ldots + q_{i-1} + q_i + \ldots + q_n \leqslant k(i-1)+ \\ + (k-1)(n-i+1) = kn - (n-i+1) < kn - t = m.$$

Получили противоречие. Следовательно, для всех $i=1,\ldots,n-t$ выполняется неравенство $q_i \geqslant k$. А значит $q_1=\ldots=q_{n-t}=k$.

Из соотношений (40) и (47) следуют равенства

$$q_{n-t+1} + \ldots + q_n = m - (q_1 + \ldots + q_{n-t}) = m - k(n-t) = \\ = ke_f + kd_f - t - k(e_f + d_f - t) = t(k-1). \tag{48}$$

Покажем, что при $t > e_f$ выполняется неравенство (37), а при $t \leqslant e_f$ — неравенство (38). Пусть $t > e_f$. Тогда $d_f = n - e_f > n - t$. Из соотношений (43) и (48) следуют соотношения

$$q_{d_f} + \ldots + q_n = \frac{q_{d_f} + \ldots + q_n}{n - d_f + 1} \cdot (n - d_f + 1) \leqslant \frac{q_{n-t+1} + \ldots + q_n}{t} \cdot (n - d_f + 1) = \\ = \frac{t(k-1)}{t}(e_f + 1) = ke_f + k - e_f - 1.$$

Из полученных соотношений и соотношений (46) следует, что выполняются неравенства $ke_f + k - e_f - 1 \geqslant q_{d_f} + \ldots + q_n > e_g = ke_f$. Поэтому имеет место неравенство $k > e_f + 1$, т. е. выполняется неравенство (37).

Пусть теперь $t \leqslant e_f$. Из соотношений (47) и (48) следуют равенства

$$q_{d_f} + \ldots + q_n = q_{d_f} + \ldots + q_{n-t} + q_{n-t+1} + \ldots + q_n = \\ = k(e_f - t + 1) + t(k-1) = ke_f + k - t.$$

Кроме того, в силу соотношений (46) выполняются соотношения

$$ke_f + k - t = q_{d_f} + \ldots + q_n > e_g = ke_f.$$

Следовательно, $k > t$, т. е. выполняется неравенство (38).

Таким образом, либо выполняется одно из неравенств (35) и (36), либо, если оба эти неравенства не выполняются, то выполняется одно из неравенств (37) и (38).

Достаточность. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$, $g(x_1,\ldots,x_m) \in \mathrm{MS}$. Пусть выполняются соотношения (34) и (35). Тогда по утверждению 3.1.3 выполняется соотношение $f \prec g$. Если неравенство (35) не выполняется, а неравенства (34) и (36) выполняются, то по утверждению 3.1.4 справедливо соотношение $f \prec g$.

Покажем, что если выполняется неравенство (34), неравенства (35) и (36) не выполняются и выполняется, по крайней мере, одно из неравенств: (37) или (38), то $f \prec g$.

Пусть выполняется неравенство (34), неравенства (35) и (36) не выполняются и имеет место, по крайней мере, одно из соотношений: (37) или (38).

Поскольку в силу (34) выполняется неравенство $\frac{e_g}{e_f} \geqslant \left]\frac{d_g}{d_f}\right[$ и неравенство (36) не выполняется, то $\frac{e_g}{e_f} = \left]\frac{d_g}{d_f}\right[$. Поэтому $k = \left]\frac{d_g}{d_f}\right[$, $t = \left]\frac{d_g}{d_f}\right[\cdot d_f - d_g$. А значит, $0 \leqslant t < d_g$ (см. соотношения (39)) Кроме того, поскольку $e_g > e_f$, то $k = \frac{e_g}{e_f} > 1$.

Покажем, что выполняется равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1^k, \ldots, x_{n-t}^k, x_{n-t+1}^{k-1}, \ldots x_n^{k-1}). \tag{49}$$

Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — произвольный набор из $\{1, 2\}^n$. Положим $\widetilde{\beta} = (\alpha_1^k, \ldots, \alpha_{n-t}^k, \alpha_{n-t+1}^{k-1}, \ldots, \alpha_n^{k-1})$. Покажем, что $f(\widetilde{\alpha}) = g(\widetilde{\beta})$.

Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = 1$. Тогда $\widetilde{\alpha} \in N_f$. Поэтому $|\widetilde{\alpha}| \leqslant e_f$. Легко видеть, что выполняются соотношения

$$|\widetilde{\beta}| = |(\alpha_1^k, \ldots, \alpha_{n-t}^k, \alpha_{n-t+1}^{k-1}, \ldots, \alpha_n^{k-1})| \leqslant k|(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| \leqslant ke_f = e_g.$$

Следовательно, $\widetilde{\beta} \in N_g$ и $g(\widetilde{\beta}) = 1$.

Пусть теперь $g(\widetilde{\beta}) = 1$. Положим $a = |(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-t})|$, $b = |(\alpha_{n-t+1}, \ldots, \alpha_n)|$. Очевидно, что $0 \leqslant a \leqslant n - t$, $0 \leqslant b \leqslant t$. Так как $\widetilde{\beta} \in N_g$, то $|\widetilde{\beta}| \leqslant e_g$, поэтому имеют место соотношения

$$\begin{aligned} |\widetilde{\beta}| = |(\alpha_1^k, \ldots, \alpha_{n-t}^k, \alpha_{n-t+1}^{k-1}, \ldots {\alpha_n}^{k-1})| = k \cdot |(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-t})| + \\ +(k-1) \cdot |(\alpha_{n-t+1}, \ldots, \alpha_n)| = ak + b(k-1) \leqslant e_g. \end{aligned} \tag{50}$$

Рассмотрим два случая. Пусть выполняется неравенство (37), т. е. $e_f < k - 1$. Тогда из неравенства $ak + b(k-1) \leqslant e_g$ (см. (50)) и равенства $e_g = ke_f$ следуют соотношения

$$a + b = \frac{(k-1)(a+b)}{k-1} \leqslant \frac{ak + b(k-1)}{k-1} \leqslant \frac{e_g}{k-1} = \frac{ke_f - e_f + e_f}{k-1} = e_f + \frac{e_f}{k-1}.$$

Поскольку $e_f < k - 1$, то $\frac{e_f}{k-1} < 1$. Так как $a, b \in \mathbb{Z}^+$, то $a + b \leqslant e_f$. Поэтому $f(\widetilde{\alpha}) = 1$.

Пусть теперь выполняется неравенство (38), т. е. $t < k$. Тогда из (50) и равенства $e_g = ke_f$ следуют соотношения

$$a + b = \frac{ka + b(k-1) + b}{k} \leqslant \frac{e_g + b}{k} \leqslant \frac{e_g + t}{k} < \frac{e_g + k}{k} = e_f + 1.$$

Поскольку $a + b \in \mathbb{Z}^+$, то $a + b \leqslant e_f$. Поэтому $|\widetilde{\alpha}| = a + b \leqslant e_f$. А значит, и в этом случае $f(\widetilde{\alpha}) = 1$. Следовательно, для всех наборов $\widetilde{\alpha} \in \{1, 2\}^n$ выполняется равенство

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = g(\alpha_1^k, \ldots, \alpha_{n-t}^k, \alpha_{n-t+1}^{k-1}, \ldots \alpha_n^{k-1}).$$

Поэтому выполняется равенство (49). Таким образом, $f \in [\{g\}]$, т. е. $f \preceq g$. Поскольку $f \not\cong g$, то $f \prec g$.

Утверждение 3.2.2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{MS}$, $f \not\cong g$, $e_f \neq 0$, $k = \frac{e_g}{e_f}$, $t = \frac{e_g}{e_f} \cdot d_f - d_g$. Соотношение $f \prec g$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняются неравенства* (34) *и, по крайней мере, одно из неравенств:* (36), (37), (38).

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$, $g(x_1,\ldots,x_m)\in\mathrm{MS}, e_f\neq 0$, $k=\frac{e_g}{e_f}$, $t=\frac{e_g}{e_f}d_f-d_g$. Пусть выполняется соотношение $f\prec g$. Тогда по утверждению 3.2.1 выполняются неравенства (34) и, по крайней мере, одно из соотношений (35), (36), (37), (38).

Покажем, что из соотношений (34) и (35) следует соотношение (36).

Предположим, что соотношения (34) и (35) выполняются, а неравенство (36) не выполняется. Тогда имеют место соотношения

$$e_f<e_g;\quad \frac{e_g}{e_f}=\left]\frac{d_g}{d_f}\right[;\quad n\geqslant m. \tag{51}$$

Поскольку $n=e_f+d_f$ и $m=e_g+d_g$, то из соотношений (51) следует, что $e_f+d_f\geqslant e_g+d_g$. Поскольку $e_g=e_f\left]\frac{d_g}{d_f}\right[$, то выполняются следующие неравенства:

$$e_f<e_f\left]\frac{d_g}{d_f}\right[;\quad e_f+d_f\geqslant e_f\left]\frac{d_g}{d_f}\right[+d_g.$$

Поскольку $e_f,d_f>0$, то имеют место неравенства

$$\left]\frac{d_g}{d_f}\right[>1;\quad \frac{d_g}{d_f}+\frac{e_f}{d_f}\cdot\left(\left]\frac{d_g}{d_f}\right[-1\right)\leqslant 1.$$

Поэтому $\frac{d_g}{d_f}>1$ и $\frac{d_g}{d_f}\leqslant\frac{d_g}{d_f}+\frac{e_f}{d_f}\cdot\left(\left]\frac{d_g}{d_f}\right[-1\right)\leqslant 1$. Получили противоречие. Таким образом, соотношения (51) выполняться не могут. Следовательно, если выполняется соотношения (34) и (35), то выполняется соотношение (36).

Достаточность следует из утверждения 3.2.1.

Следствие 3.2.3. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n)$, $g(x_1,\ldots,x_m)\in\mathrm{MS}$, $f\not\cong g$, $e_f,e_g>0$. *Тогда*

(1) $g\prec f$ *тогда и только тогда, когда* $e_g<e_f$, $\frac{e_f}{e_g}\geqslant\left]\frac{d_f}{d_g}\right[$ *и выполняется, по крайней мере, одно из следующих соотношений:*

(a) $\frac{e_f}{e_g}>\left]\frac{d_f}{d_g}\right[$;

(b) $e_f>e_g(e_g+1)$;

(c) $\frac{e_f}{e_g}d_g-d_f<\frac{e_f}{e_g}$;

(2) $f\prec g$ *тогда и только тогда, когда* $e_f<e_g$, $\frac{e_g}{e_f}\geqslant\left]\frac{d_g}{d_f}\right[$ *и выполняется, по крайней мере, одно из следующих соотношений:*

(a) $\frac{e_g}{e_f}>\left]\frac{d_g}{d_f}\right[$;

(b) $e_g>e_f(e_f+1)$;

(c) $\frac{e_g}{e_f}d_f-d_g<\frac{e_g}{e_f}$;

(3) f *и* g *несравнимы относительно* $\preceq$ *в остальных случаях.*

Следствие 3.2.4. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n)$, $g(x_1,\ldots,x_m)\in\mathrm{MS}$, $\frac{e_f}{d_f}=\frac{e_g}{d_g}$, $e_f\neq 0$. *Тогда* $f\preceq g$ *тогда и только тогда, когда существует такое* $k\in\mathbb{N}$, *что* $e_g=ke_f$, $d_g=kd_f$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$, $g(x_1,\ldots,x_m)\in\mathrm{MS}$, $\frac{e_f}{d_f}=\frac{e_g}{d_g}$, $f\preceq g$. Если $f\cong g$, то $e_f=e_g$, $d_f=d_g$, т. е. $k=1$.

Пусть теперь $f\prec g$. Тогда $e_g>e_f$, $\frac{e_g}{e_f}\geqslant\left]\frac{d_g}{d_f}\right[$ (см. (34)). По условию $\frac{e_f}{d_f}=\frac{e_g}{d_g}$. Кроме того, $\frac{d_g}{d_f}\leqslant\left]\frac{d_g}{d_f}\right[$. Поэтому $\frac{e_g}{e_f}\geqslant\left]\frac{d_g}{d_f}\right[\geqslant\frac{d_g}{d_f}=\frac{e_g}{e_f}$. А значит, $\frac{e_g}{e_f}=\left]\frac{d_g}{d_f}\right[=\frac{d_g}{d_f}$. Следовательно, $\frac{e_g}{e_f}\in\mathbb{N}$. Очевидно, что значение $k=\frac{e_g}{e_f}$ является искомым.

Достаточность. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$, $g(x_1,\ldots,x_m)\in\mathrm{MS}$, $\frac{e_f}{d_f}=\frac{e_g}{d_g}$. Пусть существует $k\in\mathbb{N}$, такое, что $e_g=ke_f$, $d_g=kd_f$. Пусть $k=1$. Тогда очевидно, что $f\cong g$. Пусть теперь $k>1$. Тогда $e_g>e_f$ и $\frac{e_g}{e_f}=\left]\frac{d_g}{d_f}\right[$. Кроме того, $\frac{e_g}{e_f}d_f-d_g=0<\frac{e_f}{e_g}$. Поэтому в силу утверждения 3.2.2 выполняется соотношение $f\prec g$.

Отметим, что любая функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ из MS характеризуется двумя натуральными числами: числом n переменных и числом e_f единиц в слое с наибольшим числом единиц, на котором эта функция принимает значение 1. Поскольку $\mathrm{MS}\subseteq R$, то число переменных функции равно сумме числа единиц и числа двоек в слое с наибольшим числом единиц, на котором эта функция равна единице. Следовательно, монотонная функция также характеризуется числом единиц и числом двоек в наборах из этого слоя. Сопоставим каждой функции $g\in\mathrm{MS}$ точку на плоскости с целочисленными координатами (e_g,d_g). Легко видеть, что множеству всех функций из MS соответствует множество $I=\mathbb{Z}^+\times\mathbb{N}$.

Введем следующие обозначения: $\mathfrak{P}(g)=\{f\in\mathrm{MS}\mid f\prec g\}$, $\mathfrak{S}(g)=\{f\in\mathrm{MS}\mid g\prec f\}$. Обозначим через $P(g)$ множество точек из I, соответствующих функциям из $\mathfrak{P}(g)$, а через $S(g)$ — множество точек из I, соответствующих функциям из $\mathfrak{S}(g)$.

Изобразим на плоскости области, содержащие множества $P(g)$ и $S(f)$ для произвольных $f,g\in\mathrm{MS}$ и не содержащие других точек с целочисленными координатами. Будем использовать следующие соглашения. Жирной сплошной линией обозначается граница, которая включается в рассматриваемую область, жирным пунктиром — граница, которая не включается в рассматриваемую область, внутренняя часть области заштриховывается, выколотые точки обозначаются белым цветом; остальные линии вспомогательные. Для удобства будем откладывать число единиц по вертикальной оси, а число двоек — по горизонтальной оси.

Рассмотрим функцию $g\in\mathrm{MS}$. Функции g соответствует точка $T=(e_g,d_g)$. Опишем множество $P(g)$.

Рассмотрим два случая. Пусть $e_g=0$. Легко видеть, что в этом случае справедливо $\mathfrak{P}(g)=\{f\in\mathrm{MS}\mid e_f=0,d_f<d_g\}$. Тогда $P(g)=\{(0,d)\in I\mid d<d_g\}$ (см. рис. 1).

Рис. 1. Множество $P(g)$ при $e_g=0$.

Пусть теперь $e_g > 0$. По утверждению 1.2.10 множество $P(g)$ содержит все точки с координатами (e, d), для которых выполняются соотношения

$$e = 0; \quad d > 0. \tag{52}$$

Из следствия 3.2.3 следует, что точка (e, d), $e > 0$ принадлежит множеству $P(g)$ тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$e < e_g; \quad \frac{e_g}{e} \geqslant \left]\frac{d_g}{d}\right[\tag{53}$$

и, по крайней мере, одно из неравенств:

$$\frac{e_g}{e} > \left]\frac{d_g}{d}\right[; \quad e_g > e(e+1); \quad \frac{e_g}{e}d - d_g < \frac{e_g}{e}.$$

Следовательно, множество $P(g)$ содержит все точки (e, d), которые удовлетворяют соотношениям (52), и все точки, которые удовлетворяют соотношениям (53) и, по крайней мере, одному из неравенств:

$$\frac{e_g}{e} > \left]\frac{d_g}{d}\right[; \quad e < \sqrt{e_g + 1/4} - 1/2; \quad e > \frac{e_g}{d_g}(d-1), \tag{54}$$

и только их (см. рис. 2).

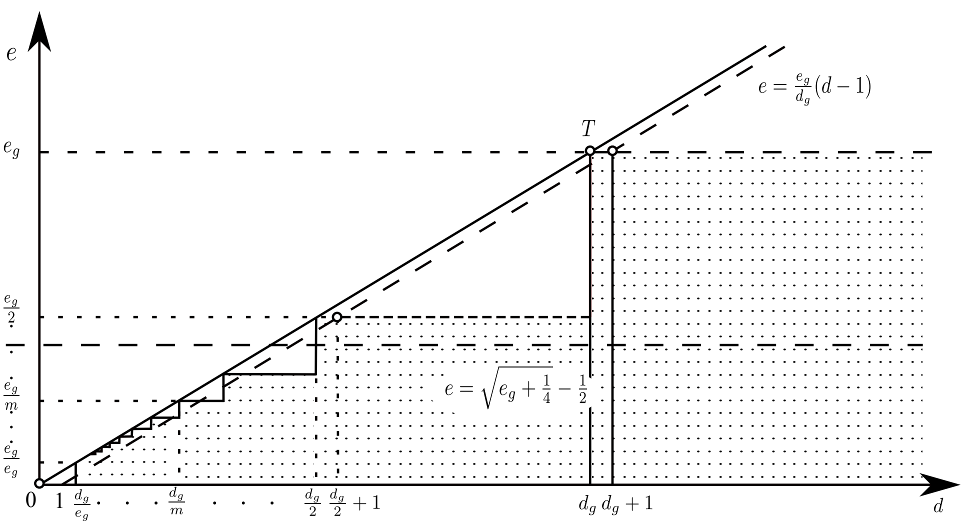

Рис. 2. Множество $P(g)$ при $e_g > 0$.

Таким образом, множество $P(g)$ содержит точки с целочисленными координатами, лежащие в следующих областях:

— во внутренней часть заштрихованной области;

— на луче $e = 0$, $d > 0$;

— на границе области, располагающейся ниже прямой $e = \sqrt{e_g + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$;

— на границе области, располагающейся выше прямой $e = \frac{e_g}{d_g}(d-1)$;

— на вертикальных границах области ($d = \frac{d_g}{i}$, $\frac{e_g}{i+1} \leqslant e < \frac{e_g}{i}$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, e_g - 1$ и $d = \frac{d_g}{e_g}$, $0 \leqslant e < \frac{e_g}{i}$, $i = 1, \ldots, e_g - 1$).

Рассмотрим теперь функцию $f \in \mathrm{MS}$. Функции f соответствует точка $T = (e_f, d_f)$. Опишем множество $S(f)$.

Рассмотрим два случая. Пусть $e_f = 0$. Из утверждения 1.2.10 следует, что

$$\mathfrak{S}(f) = \{g \in \mathrm{MS} \mid e_g = 0, d_g > d_f\} \cup \{g \in \mathrm{MS} | e_g > 0\}.$$

Поэтому (см. рис. 3)

$$S(f) = \{(0, d) \in I \mid d > d_f\} \cup \{(e, d) \in I \mid e > 0\}.$$

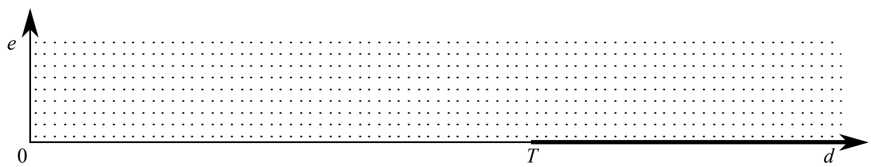

Рис. 3. Множество $S(f)$ при $e_f = 0$.

Пусть теперь $e_f > 0$. По следствию 3.2.3 точка $(e, d) \in I$ принадлежит множеству $S(f)$ тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$e > e_f; \quad \frac{e}{e_f} \geqslant \left] \frac{d}{d_f} \right[\tag{55}$$

и, по крайней мере, одно из неравенств

$$\frac{e}{e_f} > \left] \frac{d}{d_f} \right[; \quad e > e_f(e_f + 1); \quad \frac{e}{e_f} d_f - d < \frac{e}{e_f}.$$

Следовательно, множество $S(f)$ содержит все точки, которые удовлетворяют неравенствам (55) и, по крайней мере, одному из неравенств:

$$\frac{e}{e_f} > \left] \frac{d}{d_f} \right[; \quad e > e_f(e_f + 1); \quad e(d_f - 1) < de_f, \tag{56}$$

и только их (см. рис. 4).

Таким образом, множество $S(f)$ состоит из точек с целочисленными координатами, содержащихся в следующих областях:

— во внутренней части заштрихованной области;

— лежащие на границе, находящейся выше прямой $e = e_f(e_f + 1)$ или ниже прямой $e(d_f - 1) = de_f$;

— на вертикальных отрезках границы ($ie_f < e \leqslant (i+1)e_f$, $d = id_f$, $i \geqslant 1$).

3.3. Критерии базируемости и конечной порожденности в терминах свойств множества точек на плоскости. В этом пункте (см. также [52]) приводятся критерии базируемости и конечной порожденности замкнутых классов, порожденных монотонными симметрическими функциями, в терминах свойств множеств точек из $I = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{N}$, соответствующих порождающим системам этих классов.

Отметим два очевидных свойства множеств точек из I.

Свойство 3.3.1. *Пусть $D \subseteq I$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $t \in \mathbb{N}$. Тогда следующие множества конечны:*

$$\{(e, d) \in D \mid e \leqslant t, e \geqslant \alpha d\}, \{(e, d) \in D \mid e < t, e \geqslant \alpha d\},$$
$$\{(e, d) \in D \mid e \leqslant t, e > \alpha d\}, \{(e, d) \in D \mid e < t, e < \alpha d\}.$$

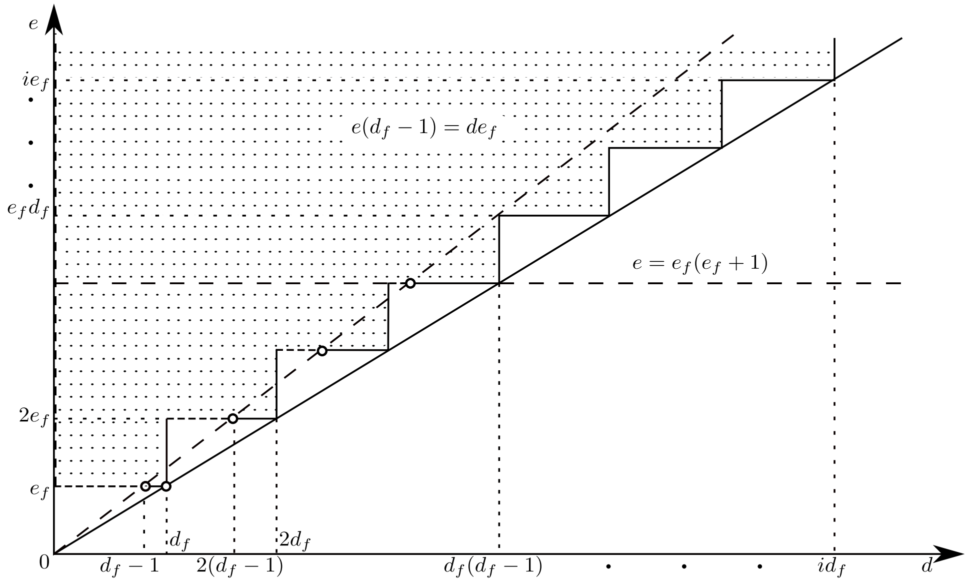

Рис. 4. Множество $S(f)$ при $e_f>0$.

Свойство 3.3.2. *Пусть $D\subseteq I$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, $t\in\mathbb{N}$ и пусть множество $\{(e,d)\in D\mid e\geqslant\alpha d\}$ (соответственно, $\{(e,d)\in D\mid e>\alpha d\}$) счетно. Тогда множества $\{(e,d)\in D\mid e>t, e\geqslant\alpha d\}$ и $\{(e,d)\in D\mid e\geqslant t, e\geqslant\alpha d\}$ (соответственно, $\{(e,d)\in D\mid e>t, e>\alpha d\}$ и $\{(e,d)\in D\mid e\geqslant t, e>\alpha d\}$) счетны.*

Теорема 3.2. *Пусть $D\subseteq I$, D — нетривиальное линейное множество, $G=[F(D)]$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) *Класс G имеет базис тогда и только тогда, когда для любой функции $f\in F(D)$ существует функция $g\in F(D)$, такая, что*

- *для некоторого $k\in\mathbb{N}$ выполняются равенства $e_g=ke_f$, $d_g=kd_f$;*
- *множество $F(D)$ не содержит функций h из* MS, *таких, что $e_h=le_g$, $d_h=ld_g$, $l\in\mathbb{N}$, $l>1$.*

(2) *Класс G имеет конечный базис тогда и только тогда, когда множество D содержит конечное число точек.*

Доказательство. Докажем утверждение (1).

Необходимость. Пусть $D\subseteq I$, D — нетривиальное линейное множество, $G=[F(D)]$. Пусть класс G имеет базис.

Пусть f — произвольная функция из $F(D)$. Тогда по теореме 3.1 функция f содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. А значит, существует функция $g\in F(D)$, такая, что $f\preceq g$ и g является верхней гранью некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Так как множество D является линейным, то существует такое число $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, что $e_f=\alpha d_f$, $e_g=\alpha d_g$. А значит, $\frac{e_f}{d_f}=\frac{e_g}{d_g}$. Кроме того, так как множество D нетривиально, то $e_f>0$. Поэтому в силу следствия 3.2.4 для некоторого $k\in\mathbb{N}$ выполняются равенства $e_g=ke_f$, $d_g=kd_f$.

Предположим, что существует такая функция $h \in F(D)$, что $e_h = le_g$, $d_h = ld_g$, $l \in \mathbb{N}$, $l > 1$. Тогда в силу следствия 3.2.4 выполняется соотношение $g \preceq h$. Поскольку $l > 1$, то $g \not\cong h$. Поэтому $g \prec h$. Это противоречит тому, что g — верхняя грань некоторой максимальной цепи. Следовательно, множество $F(D)$ не содержит функций h из MS, таких, что $e_h = le_g$, $d_h = ld_g$, $l \in \mathbb{N}$, $l > 1$.

Достаточность. Пусть $D \subseteq I$, D — нетривиальное линейное множество, $G = [F(D)]$.

Пусть f — произвольная функция из $F(D)$. Покажем, что f содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. По условию теоремы существует функция $g \in F(D)$, такая, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$ выполняются равенства $e_g = ke_f$, $d_g = kd_f$ и множество $F(D)$ не содержит функций h из MS, таких, что $e_h = le_g$, $d_h = ld_g$, $l \in \mathbb{N}$, $l > 1$. Очевидно, что $f \in [\{g\}]$. Покажем, что функция g является верхней гранью некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Предположим, что это не так. Тогда существует функция $h \in F(D)$, такая, что $g \prec h$. Поскольку D — нетривиальное линейное множество, то $e_g > 0$ и существует такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, что $e_g = \alpha d_g$, $e_h = \alpha d_h$. А значит, $\frac{e_g}{d_g} = \frac{e_h}{d_h}$. Поэтому в силу следствия 3.2.4 для некоторого $l \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения $e_h = le_g$, $d_h = ld_g$. Поскольку $h \not\cong g$, то $l > 1$. Получили противоречие с условием теоремы. Следовательно, функция g является верхней гранью ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Поэтому функция f содержится в ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. В силу теоремы 3.1 класс $F(D)$ имеет базис.

Докажем теперь утверждение (2).

Необходимость. Пусть $D \subseteq I$, D — нетривиальное линейное множество, $G = [F(D)]$, и пусть класс G имеет конечный базис. Тогда существует конечное множество $H = \{f_1, \ldots, f_s\}$, $H \subseteq F(D)$, такое, что $G = [H]$. Пусть $e_H = \max e_{f_i}$, где максимум берется по всем функциям из множества H. В силу следствия 1.2.7 для любой функции $f \in F(D)$ выполняется неравенство $e_f \leqslant e_H$. Поскольку D — нетривиальное линейное множество, то существует $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, такое, что для любой функции $f \in F(D)$ выполняется равенство $\frac{e_f}{d_f} = \alpha$. Очевидно, что множество $\{(e, d) \in I \mid e \leqslant e_H, e = \alpha d\}$ конечно. Так как $D \subseteq \{(e, d) \in I \mid e \leqslant e_H, e = \alpha d\}$, то множество D конечно.

Достаточность утверждения (2) очевидна.

Утверждение 3.3.3. *Пусть $f \in \mathrm{MS}$, $\frac{e_f}{d_f} < \alpha$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $H \subseteq \mathrm{MS}$, множество H счетно и для любой функции $h \in H$ выполняется неравенство $\frac{e_h}{d_h} \geqslant \alpha$. Тогда существует функция $g \in H$, такая, что $f \prec g$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{MS}$, $\frac{e_f}{d_f} < \alpha$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $H \subseteq \mathrm{MS}$, множество H счетно и для любой функции $h \in H$ выполняется неравенство $\frac{e_h}{d_h} \geqslant \alpha$.

Рассмотрим два случая. Пусть $e_f = 0$. Тогда для любой функции $h \in H$ выполняются неравенства $e_h \geqslant \alpha d_h > 0$. В силу утверждения 1.2.10 выполняется соотношение $f \prec h$.

Пусть теперь $e_f > 0$. Положим $s = \left] \frac{\alpha e_f}{\alpha - (e_f/d_f)} \right[+ 1$. Очевидно, что $s > e_f$. Кроме того, поскольку множество H счетно, то в силу свойства 3.3.2 множество $H_s = \{h \in H \mid e_h > s\}$ счетно. Пусть $h(x_1, \ldots, x_m) \in H_s$. Покажем, что $f \prec h$. В самом деле, выполняются неравенства $e_h > s > \frac{\alpha e_f}{\alpha - (e_f/d_f)} > e_f$,

$e_h \geqslant \alpha d_h$. Поэтому

$$\frac{e_h}{e_f} - \left]\frac{d_h}{d_f}\right[> \frac{e_h}{e_f} - \frac{d_h}{d_f} - 1 \geqslant \frac{e_h}{e_f}\left(1 - \frac{e_f/d_f}{\alpha}\right) - 1 > \frac{\alpha e_f}{\alpha - (e_f/d_f)} \cdot \frac{1}{e_f} \cdot \frac{\alpha - (e_f/d_f)}{e_f \alpha} - 1 = 0.$$

Следовательно, $\dfrac{e_h}{e_f} > \left]\dfrac{d_h}{d_f}\right[$ и $e_h > e_f$. В силу следствия 3.2.3 выполняется соотношение $f \prec h$. Поэтому для любой функции $h \in H_s$ выполняется соотношение $f \prec h$.

Утверждение 3.3.4. *Пусть $D \subseteq I$, множество D нетривиально и не имеет n-границы, $G = [F(D)]$. Тогда класс G не имеет базиса.*

Доказательство. Пусть $D \subseteq I$, множество D нетривиально и не имеет n-границы, $G = [F(D)]$.

Покажем сначала, что для любой функции $f \in F(D)$ существует функция $h \in F(D)$, такая, что $f \prec h$. Рассмотрим два случая.

Пусть $e_f = 0$. Поскольку множество D нетривиально, то существует функция $f \in F(D)$, такая, что $e_f > 0$. В силу утверждения 1.2.10 выполняется соотношение $f \prec h$.

Пусть теперь $e_f > 0$. Определим множество F_f следующим образом. Положим $\alpha_0 = e_f/d_f + 1$, $F_f = \{g \in F(D) \mid e_g > \alpha_0 d_g\}$. Поскольку множество D не имеет n-границы, то для любого $\alpha > 0$ множество $F_\alpha = \{g \in F(D) \mid e_g > \alpha d_g\}$ счетно. А значит, множество F_f счетно. Тогда по утверждению 3.3.3 существует функция $h \in F_f$, такая, что $f \prec h$.

Покажем, что множество $F(D)$ не содержит ограниченных цепей. Предположим, что существует функция $f \in F(D)$, которая содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Тогда существует функция $g \in F(D)$, такая, что g является верхней гранью этой цепи и $f \preceq g$. Как показано выше, существует функция $h \in F(D)$, такая, что $g \prec h$. Это противоречит тому, что функция g является верхней гранью некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Поэтому множество $F(D)$ не содержит функций, лежащих в ограниченных максимальных цепях множества $F(D)$. По теореме 3.1 получаем, что класс G не имеет базиса.

Напомним некоторые обозначения. Множество точек, соответствующих функциям h из MS, таким, что $f \prec h$, обозначается через $S(f)$. Множество точек (e, d) из D, таких, что $e = \gamma(D) \cdot d$, обозначается через $\Gamma_n(D)$, т. е. это множество точек из D, лежащих на точной n-границе множества D.

Утверждение 3.3.5. *Пусть $D \subseteq I$, множество D имеет n-границу. Тогда любая функция $f \in F(D)$, такая, что $e_f/d_f > \gamma(D)$, содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$.*

Доказательство. Пусть $D \subseteq I$, множество D имеет n-границу. Тогда по определению числа $\gamma(D)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\alpha > \gamma(D)$, прямая, задаваемая уравнением $e = \alpha d$, является n-границей. Пусть $f \in F(D)$, $e_f/d_f > \gamma(D)$. Положим $\beta = \frac{\gamma(D) + (e_f/d_f)}{2}$. Поскольку $e_f/d_f > \gamma(D)$, то $\beta > \gamma(D)$. Поэтому прямая, задаваемая уравнением $e = \beta d$, является n-границей множества D.

Пусть $h \in F(D)$. Если выполняется соотношение $f \prec h$, то в силу утверждения 1.2.6 выполняются неравенства $\frac{e_h}{d_h} \geqslant \frac{e_f}{d_f} > \beta$. Поскольку прямая, задаваемая уравнением $e = \beta d$, является n-границей множества D, то множество функций из $F(D)$, тип которых больше β, конечно. Следовательно, множество $S(f) \cap D$ конечно. А значит, функция f содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$.

Утверждение 3.3.6. *Пусть $D \subseteq I$, D — нетривиальное множество, имеющее точную n-границу, $G=[F(D)]$. Тогда*

(1) *класс G имеет конечный базис тогда и только тогда, когда $\gamma(D)=0$;*

(2) *класс G имеет счетный базис тогда и только тогда, когда класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет счетный базис.*

Доказательство. Докажем сначала утверждение (1).

Необходимость. Пусть $D \subseteq I$, D — нетривиальное множество, имеющее точную n-границу, $G = [F(D)]$, класс G имеет конечный базис. Тогда существует множество $H = \{f_1, \ldots, f_s\}$, $H \subseteq F(D)$, такое, что $G = [H]$. Пусть $e_H = \max e_{f_i}$, где максимум берется по всем функциям множества H. Тогда в силу следствия 1.2.7 для любой функции $g \in F(D)$ выполняется неравенство $e_g \leqslant e_H$. По свойству 3.3.1 для любых $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$, $t \in \mathbb{N}$ множество $\{g \in F(D) \mid e_g \leqslant t, e_g \geqslant \alpha d_g\}$ конечно. Поскольку для любой функции $g \in F(D)$ выполняется неравенство $e_g \leqslant e_H$, то для любого числа $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$, выполняется соотношение $\{g \in F(D) \mid e_g \geqslant \alpha d_g\} = \{g \in F(D) \mid e_g \leqslant e_H, e_g/d_g \geqslant \alpha\}$. Поэтому для любого $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$, множество $\{(e,d) \in D \mid e \geqslant \alpha d\}$ конечно. Следовательно, $\gamma(D)=0$.

Достаточность. Пусть $D \subseteq I$, D — нетривиальное множество, имеющее точную n-границу, $G = [F(D)]$, $\gamma(D) = 0$. Положим $H = \{f \in F(D) \mid e_f > 0\}$. Поскольку прямая, задаваемая уравнением $e=0$, является точной n-границей, то множество H конечно. Поскольку D — нетривиальное множество, то H — непустое множество. Из утверждения 1.2.10 следует, что $F(D) \subseteq [H]$. Поэтому $G=[H]$. Следовательно, класс G имеет конечный базис.

Докажем теперь утверждение (2).

Необходимость. Пусть $D \subseteq I$, D — нетривиальное множество, имеющее точную n-границу. Тогда эта прямая задается уравнением $e = \gamma(D) \cdot d$, где $\gamma(D) \in \mathbb{R}$, $\gamma(D) \geqslant 0$. Пусть $G = [F(D)]$ и класс G имеет счетный базис. Из пункта (1) следует, что $\gamma(D) > 0$. Покажем, что класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет счетный базис. Предположим, что это не так. Тогда класс $[F(\Gamma_n(D))]$ либо имеет конечный базис, либо не имеет базиса. Покажем, что каждый из этих случаев невозможен.

Пусть класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет конечный базис. Так как $\Gamma_n(D)$ — множество точек из D, лежащих на точной n-границе множества D, то $\Gamma_n(D)$ — нетривиальное линейное множество. Тогда по теореме 3.2 множество $\Gamma_n(D)$ конечно. Кроме того, поскольку точная n-граница множества D задается уравнением $e = \gamma(D) \cdot d$, то по определению множество функций $f \in F(D)$, таких, что $e_f/d_f > \gamma(D)$, конечно и для любого $\alpha < \gamma(D)$ существует бесконечное число функций $f \in F(D)$, таких, что $e_f/d_f > \alpha$. Поэтому для любого $\alpha < \gamma(D)$ множество функций $f \in F(D)$, таких, что $\alpha < e_f/d_f \leqslant \gamma(D)$, счетно.

Поскольку множество $\Gamma_n(D)$ конечно и лежит на прямой $e = \gamma(D) \cdot d$, то множество функций из $F(D)$, тип которых не меньше чем $\gamma(D)$, конечно. Положим $e_n = \max e_f$, где максимум берется по всем функциям f из множества $F(D)$, таким, что $e_f/d_f \geqslant \gamma(D)$. Тогда для любой функции $f \in F(D)$, такой, что $e_f > e_n$, выполняется неравенство $e_f/d_f < \gamma(D)$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $t \in \mathbb{N}$. Положим $F_{\alpha,t} = \{f \in F(D) \mid e_f > t, e_f > \alpha d_f\}$. Поскольку множество D имеет точную n-границу (задаваемую уравнением $e=\gamma(D)\cdot d$), то для любого $0<\alpha<\gamma(D)$ множество $\{f \in F(D) \mid e_f > \alpha d_f\}$ счетно. Следовательно, в силу свойства 3.3.2 для любых чисел $\alpha \in \mathbb{R}$, $0<\alpha<\gamma(D)$, $t \in \mathbb{N}$, множество $F_{\alpha,t}$ счетно.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \gamma(D)$. Рассмотрим произвольную функцию f из F_{α,e_n}. Покажем, что f не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Предположим, что функция f содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Тогда существует функция $g \in F(D)$, которая является верхней гранью этой цепи. Поскольку $g \succeq f$, то в силу утверждения 1.2.6 и определения множества F_{α,e_n} выполняются неравенства $e_g \geqslant e_f > e_n$, $e_g/d_g \geqslant e_f/d_f > \alpha$. Кроме того, поскольку $e_g > e_n$, то $e_g/d_g < \gamma(D)$. Положим $\beta = ((e_g/d_g) + \gamma(D))/2$. Поскольку множество D имеет точную n-границу (задаваемую уравнением $e = \gamma(D) \cdot d$) и $\beta < \gamma(D)$, то множество $F_\beta = \{f \in F(D) \,|e_f > \beta d_f\}$ счетно. По утверждению 3.3.3 существует функция $h \in F_\beta \subseteq F(D)$, такая, что $g \prec h$. Это противоречит тому, что функция g является верхней гранью некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Следовательно, функция f не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Поэтому в силу теоремы 3.1 класс G не имеет базиса, что противоречит условию утверждения. Следовательно, класс $[F(\Gamma_n(D))]$ не имеет конечного базиса.

Пусть теперь класс $[F(\Gamma_n(D))]$ не имеет базиса. Положим $e_n = \max e_f$, где максимум берется по всем функциям f из множества $F(D)$, тип которых больше $\gamma(D)$. Тогда для любой функции $f \in F(D)$, такой, что $e_f > e_n$, выполняется неравенство $e_f/d_f \leqslant \gamma(D)$.

Поскольку класс $[F(\Gamma_n(D))]$ не имеет базиса, то в силу теоремы 3.1 существует функция $f_0 \in F(\Gamma_n(D))$, такая, что f_0 не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$. Тогда в силу следствия 3.1.2 существует функция $f \in F(\Gamma_n(D))$, такая, что $f_0 \preceq f$, $e_f > e_n$. Очевидно, что функция f не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$.

Покажем, что функция f не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Предположим, что это не так. Тогда существует функция $g \in F(D)$, такая, что $f \preceq g$ и функция g является верхней гранью ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. По утверждению 1.2.6 выполняются неравенства $e_g \geqslant e_f > e_n$, $\dfrac{e_g}{d_g} \geqslant \dfrac{e_f}{d_f} = \gamma(D)$. Поскольку $e_g > e_n$, то $e_g/d_g \leqslant \gamma(D)$. Поэтому $e_g/d_g = \gamma(D)$. А значит $g \in F(\Gamma_n(D))$. Поскольку функция f не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$ и $f \prec g$, то функция g не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$. Следовательно, существует функция $h \in F(\Gamma_n(D)) \subseteq F(D)$, такая, что $g \prec h$. Это противоречит тому, что функция g является верхней гранью некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Следовательно, существует функция $f \in F(D)$, не содержащаяся ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Тогда по теореме 3.1 класс G не имеет базиса, что противоречит условию утверждения. Следовательно, класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет базис.

Таким образом, класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет счетный базис.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $D \subseteq I$, D — нетривиальное множество, имеющее точную n-границу, $G = [F(D)]$. Пусть класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет счетный базис. Тогда по теореме 3.1 каждая функция из $F(\Gamma_n(D))$ содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$.

Покажем, что $\gamma(D) > 0$. В самом деле, если $\gamma(D) = 0$, то легко видеть, что класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет конечный базис или не имеет базиса, что противоречит тому, что $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет счетный базис. Следовательно, $\gamma(D) > 0$.

Для доказательства утверждения достаточно показать, что каждая функция из множества $F(D)$ содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Покажем сначала, что любая функция из множества $F(\Gamma_n(D))$ содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Для этого достаточно показать, что каждая функция $f \in F(\Gamma_n(D))$, являющаяся верхней гранью какой-то ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$, содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$.

Пусть $f \in F(\Gamma_n(D))$, f является верхней гранью ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$. Тогда $e_f/d_f = \gamma(D)$. Поэтому в силу утверждения 1.2.6 для любой функции $h \in F(D)$, такой, что $f \prec h$, выполняются соотношения $\frac{e_h}{d_h} \geqslant \frac{e_f}{d_f} = \gamma(D)$. Поскольку функция f является верхней гранью ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$ и $f \prec h$, то $h \notin F(\Gamma_n(D))$. Поэтому $\frac{e_h}{d_h} > \gamma(D)$. В силу утверждения 3.3.5 функция h содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Поэтому и функция f содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. А значит, любая функция из $F(\Gamma_n(D))$ содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$.

Покажем наконец, что любая функция из множества $F(D)$ содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$.

Пусть f — произвольная функция из $F(D)$. Рассмотрим три случая. Если $e_f/d_f > \gamma(D)$, то в силу утверждения 3.3.5 функция f содержится в ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Если $e_f/d_f = \gamma(D)$, то $f \in F(\Gamma_n(D))$, и как показано выше, функция f содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$.

Пусть теперь $e_f/d_f < \gamma(D)$. Поскольку множество $F(\Gamma_n(D))$ счетно и $\gamma(D) > \frac{e_f}{d_f}$, то в силу утверждения 3.3.3 существует функция $g \in F(\Gamma_n(D))$, такая, что $f \prec g$. Поскольку функция g содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$, то и функция f содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$.

Таким образом, любая функция из множества $F(D)$ содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. В силу теоремы 3.1 класс G имеет базис.

Утверждение 3.3.7. *Пусть $D \subseteq I$, D — нетривиальное множество, имеющее n-границу и не имеющее точной n-границы, $G = [F(D)]$. Тогда класс G не имеет базиса тогда и только тогда, когда существует функция $g \in F(\Gamma_n(D))$, не лежащая ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$, и такая, что множество $(S(g) \cap D) \backslash \Gamma_n(D)$ (где $(S(g)$ — множество точек из I, соответствующих функциям h из* MS, *таким, что $g \prec h$) конечно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $D \subseteq I$, D — нетривиальное множество, имеющее n-границу и не имеющее точной n-границы, $G = [F(D)]$. Тогда для любого $\alpha > \gamma(D)$ уравнение $e = \alpha d$ задает n-границу множества D и для любого $0 \leqslant \beta \leqslant \gamma(D)$ прямая, задаваемая уравнением $e = \beta d$, не является n-границей множества D, $\gamma(D) \in \mathbb{R}^+$. Пусть класс G не имеет базиса.

Определим множества F_1 и F_2 следующим образом. Положим

$$F_1 = \{f \in F(D) \mid e_f/d_f > \gamma(D)\}, \quad F_2 = \{f \in F(D) \mid e_f/d_f < \gamma(D)\}.$$

Очевидно, что $F(D) = F_1 \cup F(\Gamma_n(D)) \cup F_2$.

Покажем сначала, что множество $\Gamma_n(D)$ счетно. Предположим, что множество $\Gamma_n(D)$ конечно. Покажем тогда, что любая функция из $F(D)$ содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Пусть f — произвольная функция из $F(D)$. Рассмотрим три случая.

Пусть $f \in F_1$. Так как $e_f/d_f > \gamma(D)$, то в силу утверждения 3.3.5 функция f содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$.

Пусть $f \in F(\Gamma_n(D))$. Поскольку для любой функции h из MS, такой, что $f \prec h$, выполняется неравенство $e_f/d_f \leqslant e_h/d_h$ (см. утверждение 1.2.6), то $F(S(f) \cap D) \subseteq F_1 \cup F(\Gamma_n(D)))$. Если $F_1 \cap F(S(f)) \neq \varnothing$, то существует функция $g \in F_1 \cap F(S(f))$, которая, как показано выше, содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Следовательно, и функция f содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Если $F_1 \cap F(S(f)) = \varnothing$, то $F(S(f) \cap D) \subseteq F(\Gamma_n(D))$. Поэтому множество $S(f) \cap D$ конечно (так как по предположению множество $\Gamma_n(D)$ конечно). А значит, функция f содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$.

Пусть $f \in F_2$. Тогда $e_f/d_f < \gamma(D)$. Поскольку множество D не имеет точной n-границы, то прямая, задаваемая уравнением $e = \gamma(D) \cdot d$, не является n-границей множества D. Поэтому по определению n-границы множество

$$F_1 \cup F(\Gamma_n(D)) = \{h \in F(D) \,|\, e_h/d_h \geqslant \gamma(D)\}$$

счетно. В силу утверждения 3.3.3 существует функция $g \in F_1 \cup F(\Gamma_n(D)) \subseteq \subseteq F(D)$, такая, что $f \prec g$. Как показано выше, функция g содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. А значит, функция f содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$.

Таким образом, предположив, что множество $\Gamma_n(D)$ конечно, мы получаем, что каждая функция из множества $F(D)$ содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи этого множества. В силу теоремы 3.1 класс $F(D)$ имеет базис, что противоречит условию утверждения. Следовательно, множество $\Gamma_n(D)$ счетно.

Покажем теперь, что существует функция $g \in F(\Gamma_n(D))$, не содержащаяся ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Поскольку класс G не имеет базиса, то в силу теоремы 3.1 существует функция $f \in F(D) = F_1 \cup F(\Gamma_n(D)) \cup F_2$, не содержащаяся ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Рассмотрим три случая.

Пусть $f \in F_1$. Так как $e_f/d_f > \gamma(D)$, то в силу утверждения 3.3.5 функция f содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$, что противоречит выбору функции f.

Пусть $f \in F(\Gamma_n(D))$. Тогда функция f является искомой.

Пусть $f \in F_2$. Тогда $e_f/d_f < \gamma(D)$. Поскольку множество $\Gamma_n(D)$ счетно, то в силу утверждения 3.3.3 существует функция $g \in \Gamma_n(D)$, такая, что $f \prec g$. Поскольку функция f не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$ и $f \prec g$, то и функция g не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$.

Таким образом, множество $F(\Gamma_n(D))$ содержит функцию g, которая не лежит ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$.

Покажем далее, что g не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$. Предположим, что это не так. Тогда существует функция $h \in F(\Gamma_n(D))$, такая, что $g \preceq h$ и функция h является верхней гранью некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$. Поскольку $g \preceq h$ и g не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$, то и h не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Следовательно, существует функция $h_1 \in F(D)$, такая, что $h \prec h_1$. Поскольку h является верхней гранью некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$, то $h_1 \notin F(\Gamma_n(D)$. В силу утверждения 1.2.6 выполняется соотношение $\frac{e_{h_1}}{d_{h_1}} \geqslant \frac{e_h}{d_h}$. Поскольку $h \in F(\Gamma_n(D))$ и $h_1 \notin F(\Gamma_n(D))$, то $\frac{e_{h_1}}{d_{h_1}} > \gamma(D)$.

Поэтому в силу утверждения 3.3.5 функция h_1 содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Так как $g \prec h \prec h_1$, то это противоречит тому, что функция g не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Следовательно, функция g не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$.

Покажем, наконец, что множество $(S(g) \cap D) \setminus \Gamma_n(D) = \varnothing$. Предположим, что это не так. Тогда существует функция $h \in F((S(g) \cap D) \setminus \Gamma_n(D)) \subseteq F(S(g))$. Так как $h \in F(S(g))$, то в силу утверждения 1.2.6 выполняется неравенство $\frac{e_h}{d_h} \geqslant \frac{e_g}{d_g}$. Поскольку $h \notin F(\Gamma_n(D))$ и $g \in F(\Gamma_n(D))$, то $\frac{e_h}{d_h} > \gamma(D)$. Поэтому в силу утверждения 3.3.5 функция h содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Поскольку $g \prec h$, то это противоречит тому, что функция g не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Следовательно, $(S(g) \cap D) \setminus \Gamma_n(D) = \varnothing$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $D \subseteq I$, D — нетривиальное множество, имеющее n-границу и не имеющее точной n-границы, $G = [F(D)]$. Пусть существует функция $g \in F(\Gamma_n(D))$, не лежащая ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$, такая, что множество $(S(g) \cap D) \setminus \Gamma_n(D)$ конечно.

Покажем, что существует функция f из $F(D)$, которая не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Положим $e_\Gamma = \max e_h$, где максимум берется по всем функциям h из множества $F((S(g) \cap D) \setminus \Gamma_n(D))$. Тогда для любой функции $h \in F(S(g) \cap D)$, такой, что $e_h > e_\Gamma$, выполняется соотношение $h \in F(\Gamma_n(D))$.

Поскольку функция g не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$, то в силу следствия 3.1.2 существует функция $f \in F(\Gamma_n(D))$, такая, что $g \prec f$ и $e_f > e_\Gamma$. Функция f не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$. Покажем, что функция f не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$.

Предположим, что существует функция $h \in F(D)$, такая, что $f \preceq h$ и h является верхней гранью некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. По утверждению 1.2.6 выполняются неравенства $\frac{e_h}{d_h} \geqslant \frac{e_f}{d_f}$, $e_h \geqslant e_f$. Кроме того, поскольку $g \prec f \preceq h$, то $h \in F(S(g) \cap D)$. Так как $e_h \geqslant e_f > e_\Gamma$, то $h \in F(\Gamma_n(D))$. Поскольку функция f не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$ и $f \preceq h$, то и функция h не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$. Поэтому существует функция $h_1 \in F(\Gamma_n(D)) \subseteq F(D)$, такая, что $h \prec h_1$, что противоречит тому, что функция h является верхней гранью некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. Следовательно, функция f не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(D)$. В силу теоремы 3.1 класс G не имеет базиса.

Т е о р е м а 3.3. *Пусть $D \subseteq I$, D — нетривиальное множество, $G = [F(D)]$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) *Класс G имеет конечный базис тогда и только тогда, когда множество D имеет конечную g-границу.*

(2) *Класс G имеет счетный базис тогда и только тогда, когда выполняется, по крайней мере, одно из условий:*

- *множество D не имеет конечной g-границы, имеет n-границу и не имеет точной n-границы и либо класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет базис, либо для любой функции $g \in F(\Gamma_n(D))$, не лежащей ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$, множество $(S(g) \cap D) \setminus \Gamma_n(D)$ счетно;*

— *множество D имеет точную n-границу и класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет счетный базис.*

(3) *Класс G не имеет базиса тогда и только тогда, когда выполняется, по крайней мере, одно из следующих условий:*

— *множество D не имеет n-границы;*

— *множество D имеет n-границу и не имеет точной n-границы и существует функция $g \in F(\Gamma_n(D))$, не лежащая ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$, и такая, что множество $(S(g) \cap D) \backslash \Gamma_n(D)$ конечно;*

— *множество D имеет точную n-границу, $\gamma(D) > 0$ и класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет конечный базис или не имеет базиса.*

Доказательство. Докажем сначала утверждение (1). Пусть $D \subseteq I$, D — нетривиальное множество, $G = [F(D)]$. В силу теоремы 3.1 класс G имеет конечный базис тогда и только тогда, когда для некоторого $k \in \mathbb{Z}^+$ множество $F(D)$ является k-ограниченным (т. е. для любой функции $f \in G$ выполняется неравенство $e_f \leqslant k$ и найдется функция $g \in G$, такая, что $e_g = k$) и множество $\mathscr{K}(F(D)) = \{g \in G | e_g = k\}$ конечно. Очевидно, что множество $F(D)$ является k-ограниченным тогда и только тогда, когда множество D имеет точную g-границу, задаваемую уравнением $e = kd$. Кроме того, легко видеть, что множество $\mathscr{K}(F(D))$ совпадает с множеством $F(\Gamma_g(D))$ (где $\Gamma_g(D)$ — множество точек из D, лежащих на прямой $e = kd$). Поэтому класс G имеет конечный базис тогда и только тогда, когда множество D имеет конечную g-границу.

Докажем теперь утверждение (2).

Необходимость. Пусть $D \subseteq I$, D — нетривиальное множество, $G = [F(D)]$. Пусть класс G имеет счетный базис. Рассмотрим три случая.

Пусть множество D не имеет n-границы. Тогда в силу утверждения 3.3.4 класс G не имеет базиса, что противоречит условию.

Пусть теперь множество D имеет n-границу и не имеет точной n-границы. Если множество D имеет конечную g-границу, то, как показано выше, класс G имеет конечный базис, что противоречит условию утверждения. Следовательно, множество D не имеет конечной g-границы.

Предположим, что существует функция $g \in F(\Gamma_n(D))$, не лежащая ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$, и такая, что множество $(S(g) \cap (D)) \backslash \Gamma_n(D)$ конечно. Тогда в силу утверждения 3.3.7 класс G не имеет базиса, что противоречит условию. Следовательно, для любой функции g из множества $F(\Gamma_n(D))$ выполняется, по крайней мере, одно из условий: g содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$ или множество $(S(g) \cap D) \backslash \Gamma_n(D)$ счетно. Если каждая функция из множества $F(\Gamma_n(D))$ содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$, то в силу теоремы 3.1 класс $F(\Gamma_n(D))$ имеет базис. Если же существует функция $g \in F(\Gamma_n(D))$, не лежащая ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$, то множество $(S(g) \cap D) \backslash \Gamma_n(D)$ счетно.

Пусть, наконец, множество D имеет точную n-границу. Так как класс G имеет счетный базис, то в силу утверждения 3.3.6 класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет счетный базис.

Достаточность. Пусть $D \subseteq I$, D — нетривиальное множество, $G = [F(D)]$. Рассмотрим два случая.

Пусть множество D не имеет конечной g-границы, имеет n-границу и не имеет точной n-границы. Пусть выполняется одно из условий:

класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет базис или для любой функции $g \in F(\Gamma_n(D))$, не лежащей ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$, множество $(S(g) \cap D) \setminus \Gamma_n(D)$ счетно. Если класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет базис, то в силу теоремы 3.1 каждая функция из множества $F(\Gamma_n(D))$ содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$. Поэтому для любой функции g из множества $F(\Gamma_n(D))$ выполняется, по крайней мере, одно из условий: g содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$ или множество $(S(g) \cap D) \setminus \Gamma_n(D)$ счетно.

Предположим, что G не имеет базиса. Тогда в силу утверждения 3.3.7 существует функция $g \in F(\Gamma_n(D))$, не лежащая ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$, и такая, что множество $(S(g) \cap D) \setminus \Gamma_n(D)$ конечно. Это противоречит установленному выше свойству функций из множества $F(\Gamma_n(D))$. Следовательно, класс G имеет базис.

Поскольку множество D не имеет конечной g-границы, то, как показано в п. (1), класс G не имеет конечного базиса. Таким образом, класс G имеет счетный базис.

Пусть теперь множество D имеет точную n-границу и класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет счетный базис. Тогда в силу утверждения 3.3.6 класс G имеет счетный базис.

Докажем, наконец, утверждение (3).

Необходимость. Пусть $D \subseteq I$, D — нетривиальное множество, $G = [F(D)]$, класс G не имеет базиса. Рассмотрим три случая.

Если множество D не имеет n-границы, то необходимость утверждения (3) очевидна.

Пусть теперь множество D имеет n-границу и не имеет точной n-границы. В силу утверждения 3.3.7 существует функция $g \in F(\Gamma_n(D))$, не лежащая ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$, и такая, что множество $(S(g) \cap D) \setminus \Gamma_n(D)$ конечно.

Пусть, наконец, множество D имеет точную n-границу. Предположим, что класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет счетный базис. Тогда в силу утверждения 3.3.6 класс G имеет счетный базис, что противоречит условию утверждения. Следовательно, класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет конечный базис или не имеет базиса. Кроме того, если $\gamma(D) = 0$, то в силу утверждения 3.3.6 класс G имеет конечный базис. Поэтому $\gamma(D) > 0$.

Достаточность. Пусть $D \subseteq I$, D — нетривиальное множество, $G = [F(D)]$. Рассмотрим три случая.

Пусть множество D не имеет n-границу. В силу утверждения 3.3.4 класс G не имеет базиса.

Пусть теперь множество D имеет n-границу и не имеет точной n-границы и существует функция $g \in F(\Gamma_n(D))$, не лежащая ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $F(\Gamma_n(D))$, такая, что множество $(S(g) \cap D) \setminus \Gamma_n(D)$ конечно. Тогда в силу утверждения 3.3.7 класс G не имеет базиса.

Пусть, наконец, множество D имеет точную n-границу, $\gamma(D) > 0$ и класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет конечный базис или не имеет базиса. В силу утверждения 3.3.6 класс G не имеет конечного базиса. Предположим, что класс G имеет счетный базис. Тогда по утверждению 3.3.6 класс $[F(\Gamma_n(D))]$ имеет счетный базис, что противоречит условию утверждения (3). Следовательно, класс G не имеет базиса.

§ 4. Классы, порожденные функциями со специальными свойствами

В этом параграфе обобщаются некоторые свойства однослойных симметрических функций. Приводится критерий существования базиса для классов, которые порождаются множествами функций, обладающих свойствами $(*)$ и $(**)$. Кроме того, приводятся примеры множеств функций, обладающих этими свойствами, а также пример множества, для которого свойство $(**)$ не выполняется.

4.1. Критерий базируемости для множеств, обладающих свойствами $(*)$ и $(**)$. В этом пункте (см. также [48]) приводится критерий базируемости для замкнутых классов, порождающие системы которых обладают свойствами $(*)$ и $(**)$. Напомним, что множество $\mathrm{A} \subseteq P_k$ обладает свойством $(*)$, если для любого $G \subseteq \mathrm{A}$ выполняется равенство

$$\left(\bigcup_{g\in G}[\{g\}]\right)\bigcap \mathrm{A} = \left[\bigcup_{g\in G}\{g\}\right]\bigcap \mathrm{A}.$$

Множество A обладает свойством $(**)$, если для любых функций $f, g \in \mathrm{A}$ из соотношений $f \trianglelefteq_{\mathrm{A}} g$ (т. е. существует формула Φ над A, реализующая функцию f и содержащая подформулу вида $g(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m)$, где $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ — формулы над A), $g \trianglelefteq_{\mathrm{A}} f$ следует, что $f \sim g$ (т. е. $f \in [\{g\}]$, $g \in [\{f\}]$) и для любых функций $f, g, h \in \mathrm{A}$, таких, что $f \trianglelefteq_{\mathrm{A}} g$, $g \trianglelefteq_{\mathrm{A}} h$, $f \preceq h$ (т. е. $f \in [\{h\}]$), выполняется, по крайней мере, одно из соотношений: $f \preceq g$, $g \preceq h$.

Т е о р е м а 4.1. *Пусть* A — *произвольное множество функций из* P_k, *обладающее свойствами* $(*)$ *и* $(**)$, *а* G — *произвольное множество, состоящее из попарно неэквивалентных функций множества* A, $F = [G]$. *Класс* F *имеет базис тогда и только тогда, когда каждая функция из* G *содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества* G *относительно* $\preceq$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть G — произвольное множество, состоящее из попарно неэквивалентных функций множества A, $F = [G]$, $\mathfrak{A}$ — базис класса F. Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество всех функций из G, которые являются верхними гранями ограниченных максимальных цепей множества G. Для каждой функции $f \in \mathfrak{A}$ зафиксируем некоторую формулу Υ_f над G, реализующую функцию f. Пусть Φ — произвольная формула над $\mathfrak{A}$. Заменим в формуле Φ каждую из функций базиса $\mathfrak{A}$ на соответствующую ей подформулу над G. Полученную формулу над G обозначим через $\pi(\Phi)$. Очевидно, что формулы $\pi(\Phi)$ и Φ эквивалентны.

Пусть $f \in \mathfrak{A}$. Положим $F_f = [\mathfrak{A} \backslash \{f\}]$. Поскольку множество $\mathfrak{A}$ является базисом, то $f \notin F_f$. Легко видеть, что существует функция $g \in \Theta(\Upsilon_f)$, такая, что $g \notin F_f$. Пусть $g \in F$, $g \notin F_f$, Ψ — произвольная формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию g. Очевидно, что $f \in \Theta(\Psi)$.

Рассмотрим функцию $f \in \mathfrak{A}$ и формулу Υ_f над G. Покажем сначала, что если $g_1 \in \Theta(\Upsilon_f) \backslash \mathfrak{B}$, то функция g_1 принадлежит множеству F_f. В самом деле, поскольку $g_1 \notin \mathfrak{B}$, то найдется функция $g_2 \in G$, такая, что $g_1 \prec g_2$. Поэтому $g_1 \trianglelefteq_{\mathrm{A}} g_2$, $g_1 \not\sim g_2$. Покажем, что $g_2 \in F_f$. Предположим, что $g_2 \notin F_f$. Пусть Ψ_2 — некоторая формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию g_2. Тогда $f \in \Theta(\Psi_2)$, а следовательно, $g_1 \in \Theta(\Upsilon_f) \subseteq \Theta(\pi(\Psi_2))$. Поэтому $g_2 \trianglelefteq_{\mathrm{A}} g_1$. Поскольку $g_1 \trianglelefteq_{\mathrm{A}} g_2$, то в силу свойства $(**)$ $g_1 \sim g_2$, что противоречит тому, что $g_1 \not\sim g_2$. Поэтому $g_2 \in F_f$. А значит, $g_1 \in [\{g_2\}] \subseteq F_f$.

Покажем теперь, что существует функция $g \in \mathfrak{B} \cap \Theta(\Upsilon_f)$, такая, что $g \notin F_f$. Предположим, что это не так. Тогда для любой функции $g \in \Theta(\Upsilon_f)$ выполняется, по крайней мере, одно из соотношений:

$g \notin \mathfrak{B}$ или $g \in F_f$. Если $g \notin \mathfrak{B}$, то, как показано выше, $g \in F_f$. Поэтому каждая функция из множества $\Theta(\Upsilon_f)$ принадлежит множеству F_f. Тогда $f \in [\Theta(\Upsilon_f)] \subseteq [F_f] = [\mathfrak{A} \backslash \{f\}]$, что противоречит определению базиса. Поэтому существует функция $g \in \mathfrak{B} \cap \Theta(\Upsilon_f)$, такая, что $g \notin F_f$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Рассмотрим произвольную функцию $h \in G$. Покажем, что h лежит в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G.

Рассмотрим произвольную формулу Ψ над $\mathfrak{A}$, реализующую функцию h. Покажем, что существуют функции $f \in \mathfrak{A}$, $h_1 \in G$, такие, что $h \preceq h_1$, формула Ψ содержит подформулу, имеющую вид $f(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n)$, а формула Υ_f содержит подформулу, имеющую вид $h_1(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p)$, где $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ — формулы над $\mathfrak{A}$, а $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p$ — формулы над G. Рассмотрим формулу $\pi(\Psi)$ над G и множество $\Theta(\pi(\Psi))$. Очевидно, что $h \in [\Theta(\pi(\Psi))] \cap G \subseteq [\Theta(\pi(\Psi))] \cap \mathrm{A}$. Поскольку множество A обладает свойством $(*)$, то $[\Theta(\pi(\Psi))] \cap \mathrm{A} = \big(\cup[\{v\}]\big) \cap \mathrm{A}$, где объединение берется по всем функциям v из множества $\Theta(\pi(\Psi))$. Поэтому найдется функция $h_1 \in \Theta(\pi(\Psi))$, такая, что $h \in [\{h_1\}]$, т. е. $h \preceq h_1$. А значит, существует некоторая подформула формулы $\pi(\Psi)$, которая имеет вид $h_1(\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_p)$, где $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_p$ — формулы над G. Далее, очевидно, что $\Theta(\pi(\Psi)) = \cup\Theta(\Upsilon_w)$, где объединение берется по всем функциям w из множества $\Theta(\Psi)$. Тогда существует функция $f \in \Theta(\Psi)$, такая, что множество $\Theta(\Upsilon_f)$ содержит функцию h_1. Таким образом, функции f и h_1 и есть искомые.

Как показано выше, для функции f существует функция $g \in \mathfrak{B}$, такая, что $g \notin F_f$ и $g \in \Theta(\Upsilon_f)$, т. е. формула Υ_f содержит подформулу, имеющую вид $g(\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_m)$, где $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_m$ — формулы над G. Пусть Φ — некоторая формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию g. Так как $g \notin F_f$, то выполняется соотношение $f \in \Theta(\Phi)$. Поскольку формула Ψ, реализующая функцию h, содержит подформулу, имеющую вид $f(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n)$, а формула Υ_f содержит подформулу, имеющую вид $g(\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_m)$, то выполняются соотношения $g \in \Theta(\Upsilon_f)$, $\Theta(\Upsilon_f) \subseteq \cup\Theta(\Upsilon_w) = \Theta(\pi(\Psi))$, где объединение берется по всем функциям w из множества $\Theta(\Psi)$. Поэтому $g \in \Theta(\pi(\Psi))$, т. е. $h \trianglelefteq_{\mathrm{A}} g$. Кроме того, поскольку $f \in \Theta(\Phi)$, то $\Theta(\Upsilon_f) \subseteq \cup\Theta(\Upsilon_w) = \Theta(\pi(\Phi))$, где объединение берется по всем функциям w из множества $\Theta(\Phi)$. А значит, так как $h_1 \in \Theta(\Upsilon_f)$, то $h_1 \in \Theta(\pi(\Phi))$. Поэтому $g \trianglelefteq_{\mathrm{A}} h_1$. Поскольку $h \preceq h_1$, то в силу свойства $(**)$ получаем, что выполняется, по крайней мере, одно из неравенств: $h \preceq g$, $g \preceq h_1$. Если $h \preceq g$, то функция h содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G, у которой функция g является верхней гранью. Если же $g \preceq h_1$, то в силу того, что функция g является верхней гранью ограниченной максимальной цепи множества G, получаем соотношение $h_1 \sim g$. Так как множество G состоит из неэквивалентных функций, то $h_1 = g$. Поэтому и в этом случае функция h содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G, у которой функция g является верхней гранью. Следовательно, любая функция из G содержится в какой-нибудь ограниченной максимальной цепи множества G.

Достаточность. Пусть G — произвольное множество, состоящее из попарно неэквивалентных функций множества A, $F = [G]$, и каждая функция из G содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G. Пусть $\mathfrak{B}$ — множество всех верхних граней ограниченных максимальных цепей множества G. По определению $\mathfrak{B} \subseteq G$, а значит $[\mathfrak{B}] \subseteq [G]$. Поскольку каждая функция из G содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G, то $G \subseteq [\mathfrak{B}]$. Следовательно, $F = [G] = [\mathfrak{B}]$. Покажем, что для любой функции $g \in \mathfrak{B}$ выполняется соотношение $g \notin [\mathfrak{B} \backslash \{g\}]$. Предположим противное. Пусть существует функция $g \in \mathfrak{B}$, такая, что $g \in [\mathfrak{B} \backslash \{g\}]$. По условию теоремы множество A обладает свойством $(*)$. Поскольку $\mathfrak{B} \subseteq \mathrm{A}$, то выполняется соотношение

$$[\mathfrak{B} \backslash \{g\}] \cap \mathrm{A} = \left(\bigcup_{\substack{f \in \mathfrak{B} \\ f \neq g}} [\{f\}] \right) \cap \mathrm{A}.$$

Поэтому из соотношения $g \in [\mathfrak{B} \backslash \{g\}]$ следует, что существует функция $f \in \mathfrak{B} \backslash \{g\}$, такая, что $g \in [\{f\}]$, т. е. $g \preceq f$. В силу того, что множество g состоит из неэквивалентных функций, выполняется соотношение $g \not\sim f$. Поэтому $g \prec f$. Полученное соотношение противоречит тому, что g является верхней гранью ограниченной максимальной цепи множества G. Поэтому $g \notin [\mathfrak{B} \backslash \{g\}]$. Таким образом, множество $\mathfrak{B}$ является базисом класса F.

Следствие 4.1.1. *Пусть* A *— произвольное множество функций из* P_k*, обладающее свойствами* $(*)$ *и* $(**)$*,* G *— произвольное множество, состоящее из попарно неэквивалентных функций множества* A*,* $\mathfrak{B}$ *— множество всех верхних граней ограниченных максимальных цепей множества* G*,* $F = [G]$ *и пусть класс* F *имеет базис. Тогда множество* $\mathfrak{B}$ *является базисом класса* F*.*

4.2. Примеры классов, обладающих свойствами $(*)$ и $(**)$. В этом пункте приводятся примеры множеств функций, которые обладают свойствами $(*)$ и $(**)$, и рассматриваются замкнутые классы, порожденные этими функциями. Отметим, что каждое из приведенных множеств включает множество NS^1 симметрических однослойных функций. Также приводится пример множества, не обладающего свойством $(**)$.

4.2.1. Классы, порожденные функциями из множества NS^m. Ниже рассматриваются отношения $\preceq$ и $\trianglelefteq_{\mathrm{NS}^m}$ на множестве NS^m. Приводится критерий базируемости и конечной порожденности классов, порождающие системы которых содержатся в NS^m (см. также [47]).

Утверждение 4.2.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{NS}^m$, $g(x_1, \ldots, x_t) \in \mathrm{S}^m$, $N_f = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathscr{L}(e_i, d_i)$, $0 \leqslant e_i < n$, $0 < d_i \leqslant n$, *для всех* $i = 1, \ldots, m$, $e_1 < \ldots < e_m$, $N_g = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \mathscr{L}(a_j, b_j)$, $0 \leqslant a_i < t$, $0 < b_i \leqslant t$, *для всех* $i = 1, \ldots, m$, $a_1 < \ldots < a_m$, *и пусть* $f \trianglelefteq_{\mathrm{S}} g$*. Тогда существует* $k \in \mathbb{N}$*, такое, что выполняются соотношения* $ke_i \leqslant a_i$, $kd_i = b_i$, *для всех* $i = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{NS}^m$, $g(x_1, \ldots, x_t) \in \mathrm{S}^m$,

$$N_f = \bigcup_{i=1}^{m} \mathscr{L}(e_i, d_i); \quad e_i + d_i = n,\ i = 1, \ldots, m; \quad 0 \leqslant e_1 < \ldots < e_m < n;$$

$$N_g = \bigcup_{j=1}^{m} \mathscr{L}(a_j, b_j); \quad a_i + b_i = t,\ i = 1, \ldots, m; \quad 0 \leqslant a_1 < \ldots < a_m < t;$$

и пусть $f \trianglelefteq_{\mathrm{S}} g$. Тогда существует формула Φ над S, реализующая функцию f и содержащая подформулу вида $g(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_t)$, где $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_t$ — формулы над S. В силу утверждения 1.2.3 среди формул $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_t$ встречаются символы переменных из $\{x_1, \ldots, x_n\}$, причем существует число $k \in \mathbb{N}$, такое, что символ каждой переменной из $\{x_1, \ldots, x_n\}$ встречается k раз. Рассмотрим два случая.

Пусть все формулы $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_t$ тривиальны. Тогда формула $g(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_t)$ простая. Поэтому выполняются соотношения $ke_i = a_i$, $kd_i = b_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Пусть теперь среди $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_t$ есть хотя бы одна нетривиальная формула. Без ограничения общности будем считать, что $\mathscr{B}_1$ — нетривиальная подформула. В силу следствия 1.2.2 для любого набора $\widetilde{\alpha} \in N_f$ выполняется равенство $\mathscr{B}_1(\widetilde{\alpha}) = 1$. Следовательно, выполняются соотношения $ke_i < a_i$, $kd_i = b_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Таким образом, выполняются соотношения $ke_i \leqslant a_i$, $kd_i = b_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Теорема 4.2. *Пусть G — произвольное множество попарно неконгруэнтных функций из* NS^m, $m \in \mathbb{N}$, $F = [G]$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) *Класс F имеет базис тогда и только тогда, когда каждая функция из G содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G относительно $\preceq$.*

(2) *Класс F имеет конечный базис тогда и только тогда, когда множество G конечно.*

Доказательство. Пусть G — произвольное множество попарно неконгруэнтных функций из NS^m, $m \in \mathbb{N}$, $F = [G]$. Покажем, что множество NS^m обладает свойствами $(*)$ и $(**)$.

Покажем сначала, что множество NS^m обладает свойством $(*)$. Пусть H — подмножество множества NS^m. Положим

$$\mathrm{A} = \left(\bigcup_{f \in H} [\{f\}]\right) \bigcap \mathrm{NS}^m; \quad \mathrm{B} = \left[\bigcup_{f \in H} \{f\}\right] \bigcap \mathrm{NS}^m.$$

Для того, чтобы множество NS^m обладало свойством $(*)$, достаточно показать, что выполняется равенство $\mathrm{A} = \mathrm{B}$. Очевидно, что $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$. Покажем, что выполняется обратное включение.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{B}$, Φ — некоторая формула над H, реализующая функцию f. Пусть $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$ — некоторая простая подформула формулы Φ, $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда по утверждению 1.2.4 выполняется соотношение $f \preceq_{\mathrm{S}^m} g$. В силу утверждения 1.2.5 выполняется соотношение $f \in [\{g\}]$. Следовательно, $f \in \mathrm{A}$. Поэтому $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$. Таким образом, выполняется равенство $\mathrm{A} = \mathrm{B}$. Таким образом, множество NS^m обладает свойством $(*)$.

Покажем теперь, что множество NS^m обладает свойством $(**)$. А именно, для любых функций $f, g \in \mathrm{NS}^m$ из соотношений $f \trianglelefteq_{\mathrm{NS}^m} g$ и $g \trianglelefteq_{\mathrm{NS}^m} f$ следует, что $f \sim g$, и для любых функций $f, g, h \in \mathrm{NS}^m$, таких, что $f \trianglelefteq_{\mathrm{NS}^m} g$, $g \trianglelefteq_{\mathrm{NS}^m} h$, $f \preceq h$, выполняется, по крайней мере, одно из соотношений: $f \preceq g$, $g \preceq h$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{NS}^m$, $f \trianglelefteq_{\mathrm{NS}^m} g$ и $g \trianglelefteq_{\mathrm{NS}^m} f$. Покажем, что выполняется соотношение $f \sim g$. Пусть

$$N_f = \bigcup_{i=1}^{m} \mathscr{L}(e_i, d_i); \quad e_i + d_i = n, \ i = 1, \ldots, m; \quad 0 \leqslant e_1 < \ldots < e_m < n;$$

$$N_g = \bigcup_{j=1}^{m} \mathscr{L}(a_j, b_j); \quad a_j + b_j = p, \ j = 1, \ldots, m; \quad 0 \leqslant a_1 < \ldots < a_m < p.$$

Из соотношений $f \trianglelefteq_{\mathrm{NS}^m} g$ и $g \trianglelefteq_{\mathrm{NS}^m} f$ в силу включения $\mathrm{NS}^m \subseteq \mathrm{S}^m$, следует, что $f \trianglelefteq_{\mathrm{S}^m} g$ и $g \trianglelefteq_{\mathrm{S}^m} f$. Поэтому в силу утверждения 4.2.1 существуют числа $k, l \in \mathbb{N}$, такие что $ke_i \leqslant a_i$, $kd_i = b_i$, $la_i \leqslant e_i$, $lb_i = d_i$, $i = 1, \ldots, m$. Поскольку $k, l, b_i, d_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots m$, то $k = l = 1$. Поэтому $a_i = e_i$, $b_i = d_i$, $i = 1, \ldots, m$. А значит, $N_f = N_g$. Отсюда получаем, что $f \cong g$. Следовательно, $f \sim g$.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n), g(x_1,\ldots,x_p), h(x_1,\ldots,x_q)\in \mathrm{NS}^m$, $f\trianglelefteq_{\mathrm{NS}^m} g\trianglelefteq_{\mathrm{NS}^m} h$, $f\preceq h$. Покажем, что выполняются соотношения $f\preceq g\preceq h$. Пусть

$$N_f=\bigcup_{i=1}^m \mathscr{L}(e_i,d_i);\quad e_i+d_i=n,\ i=1,\ldots,m;\quad 0\leqslant e_1<\ldots<e_m<n;$$

$$N_g=\bigcup_{j=1}^m \mathscr{L}(a_j,b_j);\quad a_j+b_j=p,\ j=1,\ldots,m;\quad 0\leqslant a_1<\ldots<a_m<p;$$

$$N_h=\bigcup_{t=1}^m \mathscr{L}(u_t,v_t);\quad u_t+v_t=q,\ t=1,\ldots,m;\quad 0\leqslant u_1<\ldots<u_m<q.$$

Поскольку $f\trianglelefteq_{\mathrm{NS}^m} g$, $g\trianglelefteq_{\mathrm{NS}^m} h$ и $\mathrm{NS}^m\subseteq \mathrm{S}^m$, то $f\trianglelefteq_{\mathrm{S}^m} g$ и $g\trianglelefteq_{\mathrm{S}^m} h$. Поэтому в силу утверждения 4.2.1 существуют числа $k,l\in\mathbb{N}$, такие, что $ke_i\leqslant a_i$, $kd_i=b_i$, $la_i\leqslant u_i$, $lb_i=v_i$, $i=1,\ldots,m$. Так как $f,h\in \mathrm{NS}^m\subseteq \mathrm{S}^m$ и $f\preceq h$, то в силу утверждения 1.2.5 выполняется соотношение $f\preceq_{\mathrm{S}^m} h$. Поэтому в силу замечания 1.1.4 для некоторого $s\in\mathbb{N}$ выполняются равенства $u_i=se_i$, $v_i=sd_i$, $i=1,\ldots,m$. Следовательно, $sd_i=v_i=lb_i=lkd_i$. А значит, $s=lk$. Поэтому выполняются равенства $a_i=ke_i$, $b_i=kd_i$, $u_i=la_i$, $v_i=lb_i$, $i=1,\ldots,m$. Следовательно,

$$f(x_1,\ldots,x_n)=g(x_1^k,\ldots,x_n^k);\quad g(x_1,\ldots,x_p)=h(x_1^l,\ldots,x_m^l).$$

А значит, $f\in[\{g\}]$, $g\in[\{h\}]$, т. е. $f\preceq g\preceq h$.

Таким образом, множество NS^m обладает свойством $(**)$.

Покажем теперь, что для любых функций $f,g\in \mathrm{NS}^m$ из соотношения $f\not\cong g$ следует, что $f\not\sim g$. Предположим, что это не так. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n), g(x_1,\ldots,x_p)\in \mathrm{NS}^m$, $f\not\cong g$ и $f\sim g$. Пусть

$$N_f=\bigcup_{i=1}^m \mathscr{L}(e_i,d_i);\quad e_i+d_i=n,\ i=1,\ldots,m;\quad 0\leqslant e_1<\ldots<e_m<n;$$

$$N_g=\bigcup_{j=1}^m \mathscr{L}(a_j,b_j);\quad a_j+b_j=p,\ j=1,\ldots,m;\quad 0\leqslant a_1<\ldots<a_m<p.$$

Поскольку $f\sim g$, то $f\preceq g$. Так как $f,g\in \mathrm{NS}^m\subseteq \mathrm{S}^m$, то в силу утверждения 1.2.5 выполняется соотношение $f\preceq_{\mathrm{S}^m} g$. В силу замечания 1.1.4 для некоторого $s\in\mathbb{N}$ выполняются равенства $a_i=se_i$, $b_i=sd_i$, $i=1,\ldots,m$. Так как $g\preceq f$, то аналогичным образом получаем, что для некоторого $t\in\mathbb{N}$ выполняются равенства $e_i=ta_i$, $d_i=tb_i$, $i=1,\ldots,m$. Следовательно, $a_i=e_i$, $b_i=d_i$, $i=1,\ldots,m$. А значит, $f\cong g$. Получили противоречие. Поэтому из соотношения $f\not\cong g$ следует, что $f\not\sim g$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Справедливость утверждения (1) следует из теоремы 4.1. А именно, поскольку множество NS^m обладает свойствами $(*)$ и $(**)$, то класс F имеет базис тогда и только тогда, когда каждая функция из G содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G относительно $\preceq$.

Докажем теперь утверждение (2). Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть класс F имеет конечный базис. Тогда существует конечный базис $\mathfrak{A}$ класса F, такой, что $\mathfrak{A}\subseteq G$. Пусть $\mathfrak{A}=\{f_1(x_1,\ldots,x_{n_1}),\ldots,f_s(x_1,\ldots,x_{n_s})\}$. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in G$, Φ — формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию f, Φ_1 — некоторая подформула формулы Φ, имеющая вид $f_i(\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_{n_i})$, где $1\leqslant i\leqslant s$, $\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_m$ — формулы над $\mathfrak{A}$. В силу утверждения 1.2.3 среди $\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_m$ встречается каждая переменная из множества $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Тогда выполняется неравенство $n\leqslant n_i$. Таким образом, для любой функции $f(x_1,\ldots,x_n)\in G$ выполняется неравенство $n\leqslant \max(n_i)$, где максимум берется по всем $i=1,\ldots,s$. Следовательно, множество G конечно (так как оно состоит из попарно неконгруэнтных функций).

4.2.2. Классы, порожденные симметрическими функциями с согласованными типами. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{NS}^k$, $g(x_1,\ldots,x_m)\in \mathrm{NS}^t$, $k,t\in\mathbb{N}$; $N_f=\bigcup\limits_{i=1}^{k}\mathscr{L}(e_i,d_i)$, $e_i+d_i=n$, $i=1,\ldots,k$, $0\leqslant e_1<\ldots<e_k<n$; $N_g=\bigcup\limits_{j=1}^{t}\mathscr{L}(a_j,b_j)$, где $a_j+b_j=m$, $j=1,\ldots,t$, $0\leqslant a_1<\ldots$ $\ldots<a_t<m$. Будем говорить, что типы функций f и g согласованы, если выполняется, по крайней мере, одно из условий:

(1) $k=t$;

(2) $\dfrac{e_1}{d_1}>\dfrac{a_1}{b_1}$, $\quad\dfrac{e_k}{d_k}>\dfrac{a_t}{b_t}$;

(3) $\dfrac{e_1}{d_1}<\dfrac{a_1}{b_1}$, $\quad\dfrac{e_k}{d_k}<\dfrac{a_t}{b_t}$.

Пусть $\mathrm{C}\subseteq\mathrm{NS}$. Будем говорить, что C является множеством симметрических функций с согласованными типами, если типы любых двух функций $f,g\in\mathrm{C}$ согласованы.

Утверждение 4.2.2. *Пусть* $k,t\in\mathbb{N}$, $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{NS}^k$, $g(x_1,\ldots,x_m)\in\mathrm{NS}^t$, $N_f=\bigcup\limits_{i=1}^{k}\mathscr{L}(e_i,d_i)$, $e_i+d_i=n$, $i=1,\ldots,k$, $0\leqslant e_1<\ldots<e_k<n$; $N_g=\bigcup\limits_{j=1}^{t}\mathscr{L}(a_j,b_j)$, $a_j+b_j=m$, $j=1,\ldots,t$, $0\leqslant a_1<\ldots<a_s<m$, $f\trianglelefteq_{\mathrm{S}}g$. *Тогда*

(1) $k\leqslant t$;

(2) $\dfrac{e_k}{d_k}\leqslant\dfrac{a_t}{b_t}$;

(3) *при этом если существует формула* Φ, *реализующая функцию* f *и содержащая простую подформулу, имеющую вид* $g(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$, $x_{i_1},\ldots,x_{i_m}\in\{x_1,\ldots,x_n\}$, *то* $\dfrac{e_1}{d_1}\geqslant\dfrac{a_1}{b_1}$.

Доказательство. Пусть $k,t\in\mathbb{N}$, $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{NS}^k$, $g(x_1,\ldots,x_m)\in\mathrm{NS}^t$,

$$N_f=\bigcup_{i=1}^{k}\mathscr{L}(e_i,d_i),\quad e_i+d_i=n,\ i=1,\ldots,k,\quad 0\leqslant e_1<\ldots<e_k<n;$$

$$N_g=\bigcup_{j=1}^{t}\mathscr{L}(a_j,b_j),\quad a_j+b_j=m,\ j=1,\ldots,t,\quad 0\leqslant a_1<\ldots<a_t<m.$$

По условию выполняется соотношение $f\trianglelefteq_{\mathrm{S}}g$, поэтому существует формула Φ над S, реализующая функцию f и содержащая подформулу Φ_1, имеющую вид $g(\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_m)$, где $\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_m$ — формулы над S. Пусть среди формул $\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_m$ символы переменных $x_1,\ldots,x_n$ встречаются $q_1,\ldots,q_n$ раз соответственно, а формулы, не являющиеся символами переменных, — r раз, $r\geqslant 0$. Без ограничения общности будем считать, что $q_1\geqslant q_2\geqslant\ldots\geqslant q_n\geqslant 0$.

Рассмотрим наборы $\widetilde{\alpha}_1 = (1^{e_1}, 2^{d_1})$, $\ldots$, $\widetilde{\alpha}_k = (1^{e_k}, 2^{d_k})$. Поскольку $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_k \in N_f$, то $f(\widetilde{\alpha}_1) = \ldots = f(\widetilde{\alpha}_k) = 1$. Тогда по следствию 1.2.2 выполняются равенства $\Phi_1(\widetilde{\alpha}_1) = \ldots = \Phi_1(\widetilde{\alpha}_k) = 1$. Следовательно, $(1^{u_i}, 2^{v_i}) \in N_g$, где $u_i = r + q_1 + \ldots + q_{e_i}$, $v_i = q_{e_i+1} + \ldots + q_n$, $i = 1, \ldots, k$.

Покажем, что $0 \leqslant u_1 < \ldots < u_k$. Поскольку $u_i - u_{i-1} = q_{e_{i-1}+1} + \ldots + q_{e_i}$, то для этого достаточно показать, что $q_{e_i} > 0$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Поскольку $0 \leqslant e_1 < \ldots < e_k$ и $q_1 \geqslant \ldots \geqslant q_n \geqslant 0$, то достаточно показать, что $q_{e_k} > 0$. Покажем, что $q_{e_k+1} > 0$. Предположим, что $q_{e_k+1} = 0$. Тогда для всех $i = e_k + 1, \ldots, n$ выполняется равенство $q_i = 0$. Положим $\widetilde{\alpha} = (1^{e_k}, 2^{d_k})$. Поскольку $\widetilde{\alpha} \in \mathscr{L}(e_k, d_k) \subseteq N_f$, то $f(\widetilde{\alpha}) = 1$. По следствию 1.2.2 имеет место равенство $\Phi_1(\widetilde{\alpha}) = 1$. Кроме того, $g(\widetilde{\beta}) = \Phi_1(\widetilde{\alpha}) = 1$, где $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, $\beta_i = \mathscr{B}_i(\widetilde{\alpha})$, $i = 1, \ldots, m$. Поскольку $q_{e_k+1} = \ldots = q_n = 0$, то для каждого $i = 1, \ldots, m$ формула $\mathscr{B}_i$ является либо символом переменной x_j, $1 \leqslant j \leqslant e_k$, либо нетривиальной формулой. Если $\mathscr{B}_i$ является нетривиальной формулой, то в силу следствия 1.2.2 выполняется равенство $\mathscr{B}_i(\widetilde{\alpha}) = 1$. Поэтому $\mathscr{B}_i(\widetilde{\alpha}) = \beta_i = 1$, $i = 1, \ldots, m$. Так как $g \in R$, то $g(\widetilde{\beta}) = 0$, что противоречит равенству $g(\widetilde{\beta}) = 1$. Следовательно, $q_{e_k+1} > 0$.

Таким образом, $0 \leqslant u_1 < \ldots < u_k$, т. е. числа $u_1, \ldots, u_k$ — различные. Так как $(1^{u_i}, 2^{v_i}) \in N_g = \bigcup\limits_{j=1}^{t} \mathscr{L}(a_j, b_j)$, $i = 1, \ldots, k$, то $k \leqslant t$. То есть соотношение (1) утверждения доказано.

Поскольку $(1^{u_k}, 2^{v_k}) \in N_g$, то $u_k \leqslant a_t$, $v_k \geqslant b_t$. Кроме того, $q_1 \geqslant \ldots \geqslant q_n \geqslant 0$, $q_{e_k+1} > 0$. Поэтому

$$\frac{e_k}{d_k} \leqslant \frac{q_{e_k}}{q_{e_k+1}} \cdot \frac{e_k}{d_k} \leqslant \frac{q_1 + \ldots + q_{e_k}}{q_{e_k+1} + \ldots + q_n} \leqslant \frac{u_k}{v_k} \leqslant \frac{a_t}{b_t}.$$

Таким образом, соотношение (2) утверждения доказано.

Докажем теперь соотношение (3). Пусть Φ_1 — простая подформула формулы Φ, имеющая вид $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$. Рассмотрим набор $\widetilde{\beta} = (2^{d_1}, 1^{e_1})$. Поскольку $\widetilde{\beta} \in N_f$, то $f(\widetilde{\beta}) = 1$. В силу следствия 1.2.2 выполняется равенство $\Phi_1(\widetilde{\beta}) = 1$. Следовательно, $(2^u, 1^v) \in N_g$, где $u = q_1 + \ldots + q_{d_1}$, $v = q_{d_1+1} + \ldots + q_n$. Так как $0 \leqslant a_1 < \ldots < a_t$, то $v \geqslant a_1$ и $u \leqslant b_1$. Если $q_{d_1} = 0$, то $q_{d_1+1} = \ldots = q_n = 0$. А значит, $a_1 = v = 0$. Тогда $\frac{e_1}{d_1} \geqslant 0 = \frac{a_1}{b_1}$. Пусть теперь $q_{d_1} > 0$. Поскольку $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_n \geqslant 0$ и $e_1 + d_1 = n$, то выполняются соотношения

$$\frac{e_1}{d_1} \geqslant \frac{e_1}{d_1} \cdot \frac{q_{d_1+1}}{q_{d_1}} \geqslant \frac{q_{d_1+1} + \ldots + q_n}{q_1 + \ldots + q_{d_1}} = \frac{v}{u} \geqslant \frac{a_1}{b_1}.$$

Таким образом, соотношение (3) доказано.

Утверждение 4.2.3. *Пусть $k, t \in \mathbb{N}$, C — множество симметрических функций с согласованными типами, $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{NS}^k \cap \mathrm{C}$, Φ — формула над C, реализующая функцию f, Φ_1 — простая подформула формулы Φ, имеющая вид $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$, где $g(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{NS}^t \cap \mathrm{C}$, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$; $N_f = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathscr{L}(e_i, d_i)$, $e_i + d_i = n$, $i = 1, \ldots, k$, $0 \leqslant e_1 < \ldots < e_k < n$; $N_g = \bigcup\limits_{j=1}^{t} \mathscr{L}(a_j, b_j)$, $a_j + b_j = m$, $j = 1, \ldots, t$, $0 \leqslant a_1 < \ldots < a_s < m$. Тогда $k = t$, $f \preceq g$ и существует такое число $r \in \mathbb{N}$, что $re_i = a_i$, $rd_i = b_i$, $i = 1, \ldots, k$.*

Доказательство. Пусть $k, t \in \mathbb{N}$, C — множество симметрических функций с согласованными типами, $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{NS}^k \cap \mathrm{C}$, Φ — формула над C, реализующая функцию f, Φ_1 — простая подформула формулы Φ, имеющая вид $g(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$, где $g(x_1,\ldots,x_m)\in \mathrm{NS}^t \cap \mathrm{C}$, $x_{i_1},\ldots,x_{i_m}\in\{x_1,\ldots,x_n\}$,

$$N_f=\bigcup_{i=1}^{k}\mathscr{L}(e_i,d_i),\quad e_i+d_i=n,\ i=1,\ldots,k,\quad 0\leqslant e_1<\ldots<e_k<n;$$

$$N_g=\bigcup_{j=1}^{t}\mathscr{L}(a_j,b_j),\quad a_j+b_j=m,\ j=1,\ldots,t,\quad 0\leqslant a_1<\ldots<a_t<m.$$

Согласно утверждению 4.2.2 выполняются неравенства $\frac{e_k}{d_k}\leqslant\frac{a_t}{b_t}$, $\frac{e_1}{d_1}\geqslant\frac{a_1}{b_1}$. Поэтому из условий (1)–(3) в определении функций согласованного типа может выполняться только равенство (1) $k=t$. А значит, $f,g\in \mathrm{NS}^k$. В силу утверждения 1.2.4 выполняется соотношение $f\preceq_{\mathrm{S}^k} g$. В силу замечания 1.1.4 для некоторого $r\in\mathbb{N}$ выполняются равенства $a_i=re_i$, $b_i=rd_i$, $i=1,\ldots,k$. Следовательно, $f(x_1,\ldots,x_n)=g(x_1^r,\ldots,x_n^r)$. А значит, $f\preceq g$.

Т е о р е м а 4.3. *Пусть* $\mathrm{C}\subseteq \mathrm{NS}$, C — *произвольное множество симметрических функций с согласованными типами, а* G — *произвольное множество попарно неконгруэнтных функций из* C, $F=[G]$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) *Класс* F *имеет базис тогда и только тогда, когда каждая функция из* G *содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества* G *относительно* $\preceq$.

(2) *Класс* F *имеет конечный базис тогда и только тогда, когда множество* G *конечно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathrm{C}\subseteq\mathrm{NS}$, C — произвольное множество симметрических функций с согласованными типами, а G — произвольное множество попарно неконгруэнтных функций из C, $F=[G]$. Покажем, что множество C обладает свойствами $(*)$ и $(**)$.

Покажем сначала, что множество C обладает свойством $(*)$. Пусть H — подмножество множества C. Положим

$$\mathrm{A}=\Big(\bigcup_{f\in H}[\{f\}]\Big)\bigcap \mathrm{C};\quad \mathrm{B}=\Big[\bigcup_{f\in H}\{f\}\Big]\bigcap \mathrm{C}.$$

Для того, чтобы множество C обладало свойством $(*)$, достаточно показать, что выполняется равенство $\mathrm{A}=\mathrm{B}$. Очевидно, что $\mathrm{A}\subseteq\mathrm{B}$. Покажем, что выполняется обратное включение.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{B}$. Пусть Φ — некоторая формула над H, реализующая функцию f, Φ_1 — простая подформула формулы Φ, имеющая вид $g(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$, где $g\in H$. Поскольку $f,g\in H\subseteq\mathrm{NS}$, то существуют $k,l\in\mathbb{N}$, такие, что $f\in\mathrm{NS}^k$, $g\in\mathrm{NS}^l$. Тогда по утверждению 4.2.3 выполняется соотношение $f\preceq g$. Следовательно $f\in[\{g\}]\subseteq\mathrm{A}$. Поэтому $\mathrm{B}\subseteq\mathrm{A}$. А значит, выполняется равенство $\mathrm{A}=\mathrm{B}$. Таким образом, множество C обладает свойством $(*)$.

Покажем теперь, что множество C обладает свойством $(**)$. А именно, покажем, что для любых функций $f,g\in\mathrm{C}$, таких, что $f\trianglelefteq_{\mathrm{C}} g$ и $g\trianglelefteq_{\mathrm{C}} f$, выполняется соотношение $f\sim g$, и для любых функций $f,g,h\in\mathrm{C}$, таких, что $f\trianglelefteq_{\mathrm{C}} g$, $g\trianglelefteq_{\mathrm{C}} h$, $f\preceq h$, выполняется, по крайней мере, одно из соотношений: $f\preceq g$, $g\preceq h$.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n), g(x_1,\ldots,x_p)\in \mathrm{C}$, $f\trianglelefteq_{\mathrm{C}} g$ и $g\trianglelefteq_{\mathrm{C}} f$. Покажем, что выполняется соотношение $f\sim g$. Пусть $f\in \mathrm{NS}^k$, $g\in\mathrm{NS}^l$, $k,l\in\mathbb{N}$ и

$$N_f=\bigcup_{i=1}^{k}\mathscr{L}(e_i,d_i);\quad e_i+d_i=n,\ i=1,\ldots,k;\quad 0\leqslant e_1<\ldots<e_k<n;$$

$$N_g=\bigcup_{j=1}^{l}\mathscr{L}(a_j,b_j);\quad a_j+b_j=p,\ j=1,\ldots,l;\quad 0\leqslant a_1<\ldots<a_l<p.$$

Так как $f\trianglelefteq_{\mathrm{C}} g$ и $g\trianglelefteq_{\mathrm{C}} f$ и $C\subseteq \mathrm{S}$, то $f\trianglelefteq_{\mathrm{S}} g$ и $g\trianglelefteq_{\mathrm{S}} f$. Из утверждения 4.2.2 следует, что $k\leqslant l$ и $l\leqslant k$. Поэтому $k=l$, т. е. $f,g\in\mathrm{NS}^k$. В силу утверждения 4.2.1 для некоторых $p,q\in\mathbb{N}$ выполняются соотношения $pe_i\leqslant a_i$, $pd_i=b_i$, $qa_i\leqslant e_i$, $qb_i=d_i$, $i=1,\ldots,k$. Поэтому $q=p=1$ и $e_i=a_i$, $d_i=b_i$, $i=1,\ldots,k$. Следовательно, $f\cong g$. А значит, $f\sim g$.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n), g(x_1,\ldots,x_p), h(x_1,\ldots,x_q)\in\mathrm{C}$, $f\trianglelefteq_{\mathrm{C}} g\trianglelefteq_{\mathrm{C}} h$, $f\preceq h$. Покажем, что выполняются соотношения $f\preceq g\preceq h$. Пусть $f\in\mathrm{NS}^k$, $g\in\mathrm{NS}^l$, $h\in\mathrm{NS}^m$, $k,l,m\in\mathbb{N}$ и

$$N_f=\bigcup_{i=1}^{k}\mathscr{L}(e_i,d_i);\quad e_i+d_i=n,\ i=1,\ldots,k;\quad 0\leqslant e_1<\ldots<e_k<n;$$

$$N_g=\bigcup_{j=1}^{l}\mathscr{L}(a_j,b_j);\quad a_j+b_j=p,\ j=1,\ldots,l;\quad 0\leqslant a_1<\ldots<a_l<p;$$

$$N_h=\bigcup_{t=1}^{m}\mathscr{L}(u_t,v_t);\quad u_t+v_t=q,\ t=1,\ldots,m;\quad 0\leqslant u_1<\ldots<u_m<q.$$

Поскольку $f\trianglelefteq_{\mathrm{C}} g\trianglelefteq_{\mathrm{C}} h$, и $\mathrm{C}\subseteq S$, то $f\trianglelefteq_{\mathrm{S}} g\trianglelefteq_{\mathrm{S}} h$. Поэтому в силу утверждения 4.2.2 выполняются неравенства $k\leqslant l\leqslant m$. Так как $f\preceq h$, то из утверждения 4.2.3 следует, что выполняется равенство $k=m$ и существует число $r\in\mathbb{N}$, такое, что $re_i=u_i$, $rd_i=v_i$, $i=1,\ldots,k$. Следовательно, $k=l=m$. Так как $f\trianglelefteq_{\mathrm{S}} g\trianglelefteq_{\mathrm{S}} h$, то в силу утверждения 4.2.1 существуют числа $c_1,c_2\in\mathbb{N}$, такие, что $c_1e_i\leqslant a_i$, $c_1d_i=b_i$, $c_2a_i\leqslant u_i$, $c_2b_i=v_i$, $i=1,\ldots,k$. Из этих соотношений нетрудно получить следующие равенства: $r=c_1c_2$, $c_1e_i=a_i$, $c_1d_i=b_i$, $c_2a_i=u_i$, $c_2b_i=v_i$, $i=1,\ldots,k$. Следовательно, выполняются равенства

$$f(x_1,\ldots,x_n)=g(x_1^{c_1},\ldots,x_n^{c_1});\quad g(x_1,\ldots,x_p)=h(x_1^{c_2},\ldots,x_p^{c_2}).$$

Поэтому выполняются соотношения $f\in[\{g\}]$, $g\in[\{h\}]$. А значит, $f\preceq g\preceq h$.

Покажем теперь, что для любых функций $f,g\in\mathrm{C}$ из соотношения $f\ncong g$ следует, что $f\nsim g$. Предположим, что это не так. Пусть $f,g\in\mathrm{C}$, $f\ncong g$ и $f\sim g$. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{NS}^k$, $g(x_1,\ldots,x_m)\in\mathrm{NS}^l$, $k,l\in\mathbb{N}$ и

$$N_f=\bigcup_{i=1}^{k}\mathscr{L}(e_i,d_i);\quad e_i+d_i=n,\ i=1,\ldots,k;\quad 0\leqslant e_1<\ldots<e_k<n;$$

$$N_g=\bigcup_{j=1}^{l}\mathscr{L}(a_j,b_j);\quad a_j+b_j=p,\ j=1,\ldots,l;\quad 0\leqslant a_1<\ldots<a_l<p.$$

Поскольку $f\sim g$, то $f\preceq g$ и $g\preceq f$. Так как $f,g\in\mathrm{C}\subseteq\mathrm{NS}$, то в силу утверждения 4.2.2 выполняются неравенства $k\leqslant l$, $l\leqslant k$. А значит, $k=l$ и $f,g\in\mathrm{NS}^k\subseteq\mathrm{S}^k$. Поэтому в силу утверждения 1.2.5 выполняются соотношения $f\preceq_{\mathrm{S}^k} g$, $g\preceq_{\mathrm{S}^k} f$. В силу замечания 1.1.4 для некоторых $s,t\in\mathbb{N}$ выполняются равенства $a_i=se_i$, $b_i=sd_i$, $e_i=ta_i$, $d_i=tb_i$, $i=1,\ldots,k$. Следовательно, $s=t=1$ и $a_i=e_i$, $b_i=d_i$, $i=1,\ldots,k$. А значит, $f\cong g$. Получили противоречие. Поэтому из соотношения $f\ncong g$ следует, что $f\nsim g$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Справедливость утверждения (1) следует из теоремы 4.1. А именно, поскольку множество C обладает свойствами (∗) и (∗∗), то класс F имеет базис тогда и только тогда, когда каждая функция из G содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G относительно $\preceq$.

Докажем теперь утверждение (2). Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть класс F имеет конечный базис. Тогда существует конечный базис $\mathfrak{A}$ класса F, такой, что $\mathfrak{A} \subseteq G$. Пусть $\mathfrak{A} = \{f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_{n_s})\}$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in G$, Φ — формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию f, Φ_1 — некоторая подформула формулы Φ, имеющая вид $f_i(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_{n_i})$, где $1 \leqslant i \leqslant s$, $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ — формулы над $\mathfrak{A}$. В силу утверждения 1.2.3 среди $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ встречается каждая переменная из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда выполняется неравенство $n \leqslant n_i$. Таким образом, для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in G$ выполняется неравенство $n \leqslant \max(n_i)$, где максимум берется по всем $i = 1, \ldots, s$. Следовательно, множество G конечно (так как оно состоит из попарно неконгруэнтных функций).

4.2.3. Классы, порожденные функциями из множества NS_k^1. Рассматриваются симметрические однослойные функции из множества R_k всех функций k-значной логики ($k \geqslant 3$), принимающих значения только из множества $\{0, 1\}$ и равных нулю на всех наборах, содержащих хотя бы одну нулевую компоненту и на всех наборах, все компоненты которых совпадают (см. также [51]). Множество всех таких функций обозначается через NS_k^1.

Утверждение 4.2.4. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{NS}_k^1$, $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ *— формула над* NS_k^1, *реализующая функцию* f, *а* Φ_1 *— подформула формулы* Φ, *имеющая вид* $g(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m)$, *где* $g \in \mathrm{NS}_k^1$, *а* $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ *— формулы над* NS_k^1. *Тогда среди формул* $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ *есть символы переменных, причем символ каждой переменной из множества* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *встречается одинаковое число раз.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{NS}_k^1$, $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ — формула над NS_k^1, реализующая функцию f, а Φ_1 — подформула формулы Φ, имеющая вид $g(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m)$, где $g \in \mathrm{NS}_k^1$, а $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ — формулы над NS_k^1. Поскольку функция f принимает значение 1 на наборах, содержащих, по крайней мере, две различные компоненты, то $n \geqslant 2$. Пусть среди формул $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ символы переменных $x_1, \ldots, x_n$ встречаются $q_1, \ldots, q_n$ раз соответственно, а нетривиальные формулы — r раз, $r, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Z}^+$.

Покажем, что среди формул $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ встречаются символы переменных. Предположим, что это не так. Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha} \in N_f$. Поскольку $\Phi(\widetilde{\alpha}) = 1$, то в силу следствия 1.2.2 выполняется равенство $\Phi_1(\widetilde{\alpha}) = 1$. Кроме того, $g(\widetilde{\beta}) = \Phi_1(\widetilde{\alpha}) = 1$, где $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, $\beta_i = \mathscr{B}_i(\widetilde{\alpha})$, $i = 1, \ldots, m$. Поскольку $\mathscr{B}_i$ является нетривиальной формулой над R_k, то в силу следствия 1.2.2 выполняются равенства $\mathscr{B}_i(\widetilde{\alpha}) = \beta_i = 1$, $i = 1, \ldots, m$. В силу того, что $g \in R_k$, выполняется равенство $g(\widetilde{\beta}) = 0$, что противоречит равенству $g(\widetilde{\beta}) = 1$. Следовательно, среди формул $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ встречаются символы переменных.

Покажем, что $q_1 = \ldots = q_n$. Предположим, что существуют числа q_i, q_j, такие, что $q_i \neq q_j$. Без ограничения общности будем считать, что $q_1 \neq q_2$. Пусть $N_f = \mathscr{L}(e, d_1, \ldots, d_{k-2})$, $N_g = \mathscr{L}(a, b_1, \ldots, b_{k-2})$. Поскольку множество N_f содержит набор, в котором имеются, по крайней мере, две различные компоненты, то без ограничения общности будем считать, что $e > 0$ и $d_1 > 0$. Рассмотрим наборы $\widetilde{\xi}_1 = (1, 2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$, $\widetilde{\xi}_2 = (2, 1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ из N_f.

В силу следствия 1.2.2 выполняются равенства $\Phi_1(\widetilde{\xi}_1)=\Phi_1(\widetilde{\xi}_2)=1$. Обозначим $(\mathscr{B}_1(\widetilde{\xi}_1),\ldots,\mathscr{B}_m(\widetilde{\xi}_2))$ через $\widetilde{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_m)$, а $(\mathscr{B}_1(\widetilde{\xi}_2),\ldots,\mathscr{B}_m(\widetilde{\xi}_2))$ — через $\widetilde{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$. Так как $g(\widetilde{\beta})=\Phi_1(\widetilde{\xi}_1)=1$ и $g(\widetilde{\gamma})=\Phi_1(\widetilde{\xi}_2)=1$, то $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}\in N_g$. Заметим, что в силу следствия 1.2.2 выполняются равенства $\mathscr{B}_{j_1}(\widetilde{\xi}_1)=\ldots=\mathscr{B}_{j_r}(\widetilde{\xi}_1)=1$ и $\mathscr{B}_{j_1}(\widetilde{\xi}_2)=\ldots=\mathscr{B}_{j_r}(\widetilde{\xi}_2)=1$, где $\mathscr{B}_{j_1},\ldots,\mathscr{B}_{j_r}$ — все нетривиальные формулы из $\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_m$. Так как $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}\in N_g$, то $|\widetilde{\beta}|=|\widetilde{\gamma}|$. С другой стороны, выполняются равенства

$$|\widetilde{\beta}|=r+q_1+\sum_{\substack{3\leqslant t\leqslant n\\ \alpha_t=1}}q_t;\quad |\widetilde{\gamma}|=r+q_2+\sum_{\substack{3\leqslant t\leqslant n\\ \alpha_t=1}}q_t.$$

Так как по предположению $q_1\neq q_2$, то получаем, что $|\widetilde{\beta}|\neq|\widetilde{\gamma}|$, что противоречит равенству $|\widetilde{\beta}|=|\widetilde{\gamma}|$. Таким образом, $q_1=\ldots=q_n$.

Следствие 4.2.5. *Пусть $f(x_1,\ldots,x_n),\ g(x_1,\ldots,x_m)\in\mathrm{NS}^1_k$, $f\trianglelefteq_{\mathrm{NS}^1_k}g$. Тогда $n\leqslant m$.*

Теорема 4.4. *Пусть G — произвольное множество, состоящее из попарно неконгруэнтных функций множества NS^1_k, $F=[G]$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) *Класс F имеет базис тогда и только тогда, когда каждая функция из G содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G относительно $\preceq$.*

(2) *Класс F имеет конечный базис тогда и только тогда, когда множество G конечно.*

Доказательство. Пусть G — множество, состоящее из попарно неконгруэнтных функций множества NS^1_k, $F=[G]$. Покажем, что множество NS^1_k обладает свойствами $(*)$ и $(**)$.

Покажем сначала, что множество NS^1_k обладает свойством $(*)$. Пусть H — подмножество множества NS^1_k. Положим

$$\mathrm{A}=\Bigl(\bigcup_{f\in H}[\{f\}]\Bigr)\bigcap\mathrm{NS}^1_k;\quad \mathrm{B}=\Bigl[\bigcup_{f\in H}\{f\}\Bigr]\bigcap\mathrm{NS}^1_k.$$

Для того, чтобы множество NS^1_k обладало свойством $(*)$, достаточно показать, что выполняется равенство $\mathrm{A}=\mathrm{B}$. Очевидно, что $\mathrm{A}\subseteq\mathrm{B}$. Покажем, что выполняется обратное включение.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{B}$, Φ — некоторая формула над H, реализующая функцию f. Пусть Φ_1 — простая подформула формулы Φ, имеющая вид $g(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$, $g\in H$. Пусть $N_f=\mathscr{L}(e,d_1,\ldots,d_{k-2})$, $N_g=\mathscr{L}(a,b_1,\ldots,b_{k-2})$. Покажем, что $f\in[\{g\}]$.

В силу утверждения 4.2.4 существует число $t\in\mathbb{N}$, такое, что среди $x_{i_1},\ldots,x_{i_m}$ каждая переменная из множества $\{x_1,\ldots,x_n\}$ встречается t раз. Пусть $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in N_f$. В силу следствия 1.2.2 выполняется равенство $\Phi_1(\widetilde{\alpha})=1$. Кроме того, в силу равенств $g(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_m})=\Phi_1(\widetilde{\alpha})=1$, выполняется соотношение $(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_m})\in N_g$. Следовательно, $a=te$, $b_i=td_i$, $i=1,\ldots,k-2$. Тогда очевидно, что $f(x_1,\ldots,x_n)=g(x_1^t,\ldots x_n^t)$, т. е. $f\in[\{g\}]$. А значит, $f\in\mathrm{A}$. Поэтому $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

Покажем теперь, что множество NS^1_k обладает свойством $(**)$. А именно, для любых функций $f,g\in\mathrm{NS}^1_k$, таких, что $f\trianglelefteq_{\mathrm{NS}^1_k}g$ и $g\trianglelefteq_{\mathrm{NS}^1_k}f$, выполняется соотношение $f\sim g$ и для любых функций $f,g,h\in\mathrm{NS}^1_k$, таких, что $f \trianglelefteq_{\mathrm{NS}_k^1} g$, $g \trianglelefteq_{\mathrm{NS}_k^1} h$, $f \preceq h$, выполняется, по крайней мере, одно из соотношений: $f \preceq g$, $g \preceq h$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{NS}_k^1$, $f \trianglelefteq_{\mathrm{NS}_k^1} g$ и $g \trianglelefteq_{\mathrm{NS}_k^1} f$. Покажем, что выполняется соотношение $f \sim g$.

Так как $f \trianglelefteq_{\mathrm{NS}_k^1} g$ и $g \trianglelefteq_{\mathrm{NS}_k^1} f$, то в силу следствия 4.2.5 выполняются неравенства $n \leqslant p$ и $p \leqslant n$. Поэтому $n = p$. Поскольку $f \trianglelefteq_{\mathrm{NS}_k^1} g$, то существуют формула Φ над NS_k^1, реализующая функцию f, и подформула Φ_1 формулы Φ, имеющая вид $g(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_n)$, где $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_n$ — формулы над NS_k^1. В силу утверждения 4.2.4 каждая переменная из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ встречается среди $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_n$. Поэтому Φ_1 является простой подформулой формулы Φ. Без ограничения общности можем считать, что Φ_1 имеет вид $g(x_1, \ldots, x_n)$.

Для каждого набора $\widetilde{\alpha}$ из N_f в силу следствия 1.2.2 выполняется равенство $\Phi_1(\widetilde{\alpha}) = 1$, т. е. $g(\widetilde{\alpha}) = 1$, поэтому $\widetilde{\alpha} \in N_g$. Таким образом, $N_f \subseteq N_g$. Аналогичным образом можно показать, что из соотношения $g \trianglelefteq_{\mathrm{NS}_k^1} f$ следует включение $N_g \subseteq N_f$. Поэтому $N_f = N_g$. А значит, $f \cong g$ и, следовательно, $f \sim g$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_p), h(x_1, \ldots, x_q) \in \mathrm{NS}_k^1$, $f \trianglelefteq_{\mathrm{NS}_k^1} g \trianglelefteq_{\mathrm{NS}_k^1} h$, $f \preceq h$. Покажем, что выполняются соотношения $f \preceq g \preceq h$. Пусть

$$\begin{aligned}
N_f &= \mathscr{L}(e, d_1, \ldots, d_{k-2}),\\
&\qquad e + d_1 + \ldots + d_{k-2} = n, \quad 0 \leqslant e < n,\ 0 \leqslant d_i < n,\ i = 1, \ldots, k-2;\\
N_g &= \mathscr{L}(a, b_1, \ldots, b_{k-2}),\\
&\qquad a + b_1 + \ldots + b_{k-2} = p, \quad 0 \leqslant a < p,\ 0 \leqslant b_i < p,\ i = 1, \ldots, k-2;\\
N_h &= \mathscr{L}(u, v_1, \ldots, v_{k-2}),\\
&\qquad u + v_1 + \ldots + v_{k-2} = q, \quad 0 \leqslant u < q,\ 0 \leqslant v_i < q,\ i = 1, \ldots, k-2.
\end{aligned}$$

Поскольку $f \trianglelefteq_{\mathrm{NS}_k^1} g$, то существуют формула Φ над NS_k^1, реализующая функцию f, и подформула Φ_1 формулы Φ, имеющая вид $g(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p)$, где $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p$ — формулы над NS_k^1. В силу утверждения 4.2.4 существует число $l \in \mathbb{N}$, такое, что среди $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p$ каждая переменная из $x_1, \ldots, x_n$ встречается l раз. Поэтому выполняются соотношения $a \geqslant le$, $b_i = ld_i$, $i = 1, \ldots, k-2$. Так как $g \trianglelefteq_{\mathrm{NS}_k^1} h$, то аналогично можно показать, что существует число $w \in \mathbb{N}$, такое, что $u \geqslant wa$, $v_i = wb_i$, $i = 1, \ldots, k-2$. Кроме того, так как $f \preceq h$, то существуют формула Ψ над $\{h\}$, реализующая функцию f, и простая подформула формулы Ψ, имеющая вид $h(x_{i_1}, \ldots, x_{i_q})$. В силу утверждения 4.2.4 существует $c \in \mathbb{N}$, такое, что каждая переменная из $x_1, \ldots, x_n$ встречается среди $x_{i_1}, \ldots, x_{i_q}$ c раз. В силу следствия 1.2.2 для любого набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из N_f выполняются равенства $h(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_q}) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$. А значит, $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_q}) \in N_h$. Поэтому $u = ce$, $v_i = cd_i$, $i = 1, \ldots, k-2$. Следовательно, выполняются равенства $c = wl$ и $a = le$, $b_i = ld_i$, $u = wa$, $v_i = wb_i$, $i = 1, \ldots, k-2$. А значит,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1^l, \ldots, x_n^l); \quad g(x_1, \ldots, x_p) = h(x_1^w, \ldots, x_p^w).$$

Поэтому выполняются соотношения $f \in [\{g\}]$, $g \in [\{h\}]$. Следовательно, $f \preceq g \preceq h$.

Таким образом, множество NS_k^1 обладает свойством $(**)$.

Покажем теперь, что для любых функций $f, g \in \mathrm{NS}_k^1$ из соотношения $f \not\cong g$ следует $f \not\sim g$. Предположим, что это не так. Пусть $f, g \in \mathrm{NS}_k^1$,

$f \not\cong g$ и $f \sim g$. Пусть

$$N_f = \mathscr{L}(e, d_1, \ldots, d_{k-2}),$$
$$e + d_1 + \ldots + d_{k-2} = n, \quad 0 \leqslant e < n,\ 0 \leqslant d_i < n,\ i = 1, \ldots, k-2;$$
$$N_g = \mathscr{L}(a, b_1, \ldots, b_{k-2}),$$
$$a + b_1 + \ldots + b_{k-2} = p, \quad 0 \leqslant a < p,\ 0 \leqslant b_i < p,\ i = 1, \ldots, k-2.$$

Поскольку $f \sim g$, то $f \preceq g$. Поэтому существуют формула Ψ над $\{g\}$, реализующая функцию f, и простая подформула формулы Ψ, имеющая вид $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})$. В силу утверждения 4.2.4 существует число $c \in \mathbb{N}$, такое, что каждая переменная из $x_1, \ldots, x_n$ встречается среди $x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}$ c раз. В силу следствия 1.2.2 для каждого набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из N_f, выполняются равенства $g(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_p}) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$, т. е. $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_p}) \in N_g$. Поэтому выполняются равенства $a = ce$, $b_i = cd_i$, $i = 1, \ldots, k-2$. Аналогичным образом можно показать, что в силу соотношения $g \preceq f$ найдется такое число $t \in \mathbb{N}$, что выполняются равенства $e = ta$, $d_i = tb_i$, $i = 1, \ldots, k-2$. Следовательно, $c = t = 1$ и $a = e$, $b_i = d_i$, $i = 1, \ldots, k-2$, т. е. $N_f = N_g$. А значит, $f \cong g$. Получили противоречие. Поэтому из соотношения $f \not\cong g$ следует $f \not\sim g$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Справедливость утверждения (1) следует из теоремы 4.1. А именно, поскольку множество NS_k^1 обладает свойствами $(*)$ и $(**)$, то класс F имеет базис тогда и только тогда, когда каждая функция из G содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G относительно $\preceq$.

Докажем теперь утверждение (2). Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть класс F имеет конечный базис. Тогда существует конечный базис $\mathfrak{A}$ класса F, такой, что $\mathfrak{A} \subseteq G$. Пусть $\mathfrak{A} = \{f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_{n_s})\}$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in G$, Φ — формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию f, Φ_1 — некоторая подформула формулы Φ, имеющая вид $f_i(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_{n_i})$, где $1 \leqslant i \leqslant s$, $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ — формулы над $\mathfrak{A}$. В силу утверждения 1.2.3 среди $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ встречается каждая переменная из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда выполняется неравенство $n \leqslant n_i$. Таким образом, для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in G$ выполняется неравенство $n \leqslant \max(n_i)$, где максимум берется по всем $i = 1, \ldots, s$. Следовательно, множество G конечно (так как оно состоит из попарно неконгруэнтных функций).

4.2.4. Классы, порожденные функциями из множества MS. Ниже приводится пример множества функций, не обладающего свойством $(**)$.

Утверждение 4.2.6. *Множество монотонных функций* MS *не обладает свойством* $(**)$.

Доказательство. Рассмотрим функции $f(x_1, \ldots, x_5)$, $g(x_1, \ldots, x_4)$, $h(x_1, \ldots, x_6) \in \mathrm{MS}$, такие, что $e_f = 1$, $d_f = 4$, $e_g = 1$, $d_g = 3$, $e_h = 2$, $d_h = 4$. Покажем, что выполняются соотношения $f \preceq h$, $f \trianglelefteq_{\mathrm{MS}} g \trianglelefteq_{\mathrm{MS}} h$ и не выполняется ни одно из соотношений $f \preceq g$, $g \preceq h$.

Действительно, поскольку $\dfrac{e_h}{e_f} = 2 > 1 = \left]\dfrac{d_h}{d_f}\right[$, то в силу утверждения 3.1.4 выполняется соотношение $f \preceq h$.

Рассмотрим такие функции $f_1(x_1, \ldots, x_6), g_1(x_1, \ldots, x_9)$ из множества MS, что $e_{f_1} = 2$, $d_{f_1} = 4$, $e_{g_1} = 3$, $d_{g_1} = 6$. Очевидно, что выполняются равенства

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f_1(g(x_1, x_2, x_3, x_4), x_1, x_2, x_3, x_4, x_5);$$
$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = g_1(h(x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3), x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, x_4, x_4).$$

Поэтому $f \trianglelefteq_{\mathrm{MS}} g \trianglelefteq_{\mathrm{MS}} h$.

Покажем теперь, что $f \not\preceq g$. Предположим, что $f \preceq g$. Поскольку $f \not\cong g$, то $f \prec g$. Поэтому в силу следствия 3.2.3 выполняется соотношение $e_f < e_g$, что противоречит равенствам $e_f = e_g = 1$. Следовательно, $f \not\preceq g$.

Покажем, наконец, что $g \not\preceq h$. Предположим, что $g \preceq h$. Поскольку $g \not\cong h$, то $g \prec h$. Поэтому в силу следствия 3.2.3 выполняется, по крайней мере, одно из соотношений:

$$\frac{e_h}{e_g} > \left]\frac{d_h}{d_g}\right[, \quad e_h > e_g(e_g+1), \quad \frac{e_h}{e_g}d_g - d_h < \frac{e_h}{e_g}.$$

Это противоречит следующим соотношениям: $\frac{e_h}{e_g} = 2 = \left]\frac{4}{3}\right[= \left]\frac{d_h}{d_g}\right[$, $e_h = 2 = 1(1+1) = e_g(e_g+1)$ и $\frac{e_h}{e_g}d_g - d_h = \frac{2}{1}\cdot 3 - 4 = \frac{2}{1} = \frac{e_h}{e_g}$. Следовательно, $g \not\preceq h$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева О.В., Голунков Ю.В. Программно-замкнутые классы функций алгебры логики и предикатов // Кибернетика. — 1981. — № 5. — С. 133.
2. Байрамов Р.А. Об одной серии предполных классов в k-значной логике // Кибернетика. — 1967. — № 1. — С. 7–9.
3. Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: Наука, 1984.
4. Блохина Г.Н. О предикатном описании класссов Поста // Дискретный анализ. — 1970. — Вып. 16. — С. 16–29.
5. Буевич В.А. Вариант доказательства критерия полноты для функций k-значной логики // Дискретная математика. — 1996. — Т. 8, вып. 4. — С. 11–36.
6. Бурле Г.А. Классы k-значной логики, содержащие все функции одной переменной // Дискретный анализ. — 1967. — Вып. 10. — С. 3–7.
7. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2004.
8. Голунков Ю.В. Полнота систем функций в операторных алгоритмах, реализующих функции k-значной логики // Вероятностные методы и кибернетика. — 1980. — Вып. 17. — С. 23–24.
9. Данильченко А.Ф. О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 4. — С. 397–416.
10. Дудакова О.С. Об одном семействе предполных классов функций k-значной логики, не имеющих конечного базиса // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 2006. — № 2. — С. 29–33.
11. Дудакова О.С. О классах k-значной логики, монотонных относительно множеств ширины два // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 2008. — № 1. — С. 31–37.
12. Дудакова О.С. О конечной порожденности предполных классов монотонных функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. — М.: Физматлит, 2008. — Вып. 17. — С. 13–104.
13. Захарова Е.Ю. Об одном достаточном условии полноты в P_k // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1966. — Вып. 16. — С. 239–244.
14. Захарова Е.Ю. Критерий полноты системы функций из P_k // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1967. — Вып. 18. — С. 5–10.
15. Захарова Е.Ю., Кудрявцев В.Б., Яблонский С.В. О предполных классах в k-значных логиках // Доклады АН СССР. — 1969. — Т. 186, № 3. — С. 509–512.
16. Кудрявцев В.Б. О покрытиях предполных классов k-значной логики // Дискретный анализ. — 1970. — Вып. 17. — С. 32–44.
17. Кудрявцев В.Б. Относительно S-систем функций k-значной логики // Доклады АН СССР. — 1971. — Т. 199, № 1. — С. 20–22.
18. Кудрявцев В.Б. О свойствах S-систем функций k-значной логики // Дискретный анализ. — 1971. — Вып. 19. — С. 15–47.
19. Кудрявцев В.Б. О свойствах S-систем функций k-значной логики // Akademie-Verlag Berlin. EIK. — 1973. — V. 9, № 1/2. — С. 81–105.
20. Кудрявцев В.Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во МГУ, 1982.
21. Кузнецов А.В. О проблемых тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. — М.: Изд-во АН СССР. — 1956. — Т. 2. — С. 145–146.

22. Кузнецов А.В. Структуры с замыканием и критерии функциональной полноты // Успехи математических наук. — 1961. — Т. 16 (98). — С. 201–202.
23. Кузнецов А.В. О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости // Логический вывод. — М.: Наука, 1979. — С. 5–33.
24. Мальцев А.И. Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. — 1966. — Т. 5, № 3. — С. 5–24.
25. Мальцев А.И. Об одном усилении теорем Слупецкого и Яблонского // Алгебра и логика. — 1967. — Т. 6, № 3. — С. 61–74.
26. Мальцев И.А. Некоторые свойства клеточных подалгебр Поста и их основных клеток // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 5. — С. 571–587.
27. Мальцев И.А. Некоторые свойства клеток алгебр Поста // Дискретный анализ. — 1973. — Вып. 23. — С. 24–31.
28. Мальцев А.И. Итеративные алгебры Поста. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1976.
29. Мартынюк В.В. Исследование некоторых классов в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1960. — Вып. 3. — С. 49–60.
30. Марченков С.С. О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1979. — Вып 36. — С. 5–22.
31. Марченков С.С., Деметрович Я., Ханнак Л. О замкнутых классах самодвойственных функций в P_3 // Методы дискретного анализа и решение комбинаторных задач. — 1980. — Вып. 34. — С. 38–73.
32. Марченков С.С. О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики II // Проблемы кибернетики. — 1983. — Вып 40. — С. 261–266.
33. Марченков С.С., Угольников А.Б. Замкнутые классы булевых функций. — М.: Изд-во ИПМ им. М. В. Келдыша, 1990.
34. Марченков С.С. Основные отношения S-классификации функций многозначной логики // Дискретная математика. — 1996. — Т. 8, вып. 1. — С. 99–128.
35. Марченков С.С. Предполнота замкнутых классов в P_k: предикатный подход // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. — М.: Наука. Физматлит, 1996. — С. 117–133.
36. Марченков С.С. S-классификация идемпотентных алгебр с конечными носителями // Доклады РАН. — 1996. — Т. 348, № 5. — С. 587–589.
37. Марченков С.С. G-предполные классы многозначной логики // Дискретный анализ и исследование операций. — 1996. — Т. 3, № 3. — С. 47–70.
38. Марченков С.С. S-классификация функций многозначной логики // Дискретная математика. — 1997. — Т. 9, вып. 3. — С. 125–152.
39. Марченков С.С. A-классификация конечных инъективных функций // Дискретный анализ и исследование операций. — 1997. — Т.4, № 2. — С. 15–42.
40. Марченков С.С. A-замкнуты классы идемпотентных функций многозначной логики, определяемые двуместными отношениями // Дискретный анализ и исследование операций. — 1998. — Т.5, № 1. — С. 32–59.
41. Марченков С.С. A-классификация функций многозначной логики // Доклады РАН. — 1999. — Т. 366, № 4. — С. 455–457.
42. Марченков С.С. Замкнутые классы булевых функций. — М.: Физматлит, 2000.
43. Марченков С.С. S-классификация функций трехзначной логики. — М.: Физматлит, 2001.
44. Математика в СССР за 40 лет. — М., 1959. — Т. 1. — С. 102–108.
45. Михайлович А.В. О некоторых свойствах симметрических функций трехзначной логики // Материалы IX междунар. семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 18–23 июня 2007 г.). — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. — С. 165–167.
46. Михайлович А.В. О замкнутых классах в P_3, порожденных монотонными симметрическими функциями // Тезисы докладов XV междунар. конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 2–7 июня 2008 г.). — Казань, 2008.
47. Михайлович А.В. О замкнутых классах трехзначной логики, порожденных симметрическими функциями // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 2008. — № 4. — С. 54–57.
48. Михайлович А.В. О замкнутых классах многозначной логики, порожденных функциями со специальными свойствами // Материалы XVII междунар. школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Новосибирск, 27 октября–1 ноября 2008 г.). — Новосибирск: Изд-во Института математики, 2008. — С. 117–122.
49. Михайлович А.В. О классах функций трехзначной логики, порожденных монотонными симметрическими функциями // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 2009. — № 1. — С. 33–37.
50. Михайлович А.В. О свойствах классов трехзначной логики, порожденных симметрическими функциями // Материалы междунар. конференции «Современные проблемы

математики, механики и их приложений» (Москва, МГУ, 30 марта–2 апреля 2009 г.). — М.: Университетская книга, 2009. — С. 396.
51. Михайлович А.В. О некоторых классах, порожденных однослойными симметрическими функциями многозначной логики // Материалы VII молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 18 – 23 мая 2009 г.). Часть II. — М., 2009. — С. 21 – 26.
52. Михайлович А.В. О свойствах замкнутых классов трехзначной логики, порожденных монотонными симметрическими функциями // Труды VIII междунар. конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 6 – 9 апреля 2009 г.). — М.: МАКС Пресс, 2009. — С. 223 – 225.
53. Михеева Е.А. Классификация нижних окрестностей замкнутых классов из решетки $\mathfrak{L}_k$ // Дискретная математика. — 1991. — Т. 3, вып. 4. — С. 3–15.
54. Михеева Е.А. Построение в P_k максимальных классов, не имеющих конечных базисов // Дискретная математика. — 1998. — Т. 10, вып. 2. — С. 137–159.
55. Нгуен Ван Хоа. Об L-эквивалентности систем функций в многозначной логике // Алгебра и логика. — 1988. — Т. 27, № 1. — С. 37–47.
56. Нгуен Ван Хоа. О структурных свойствах семейства G-полных замкнутых классов k-значной логики // Доклады АН Беларуси. — 1989. — Т. 33, № 11. — С. 969–971.
57. Нгуен Ван Хоа. О G-полных замкнутых классах k-значной логики // J. Inform. Process Cybern. EIK. — 1990. — Т. 26, 5/6. — С. 301–313.
58. Нгуен Ван Хоа. К описанию семейства G-полных замкнутых классов k-значной логики // Кибернетика. — 1990. — № 5. — С. 9–12.
59. Нгуен Ван Хоа. О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики в P_3 // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4, вып. 4. — С. 82–95.
60. Нгуен Ван Хоа. О структуре самодвойственных замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми внутренними автоморфизмами // Дискретная математика. — 1993. — Т. 5, вып. 4. — С. 87–108.
61. Нгуен Ван Хоа. Описание замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Доклады АН Беларуси. — 1994. — Т. 38, № 3. — С. 16–19.
62. Нгуен Ван Хоа. Структура симметрических замкнутых классов k-значной логики. Докт. дисс. — Минск, 1995.
63. Посыпкин М.А. О замкнутых классах, содержащих предполные классы всех одноместных функций // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 1997. — № 4. — С. 58–59.
64. Соловьев В.Д. Замкнутые классы в k-значной логике с операцией разветвления по предикатам // Дискретная математика. — 1990. — Т. 2, вып. 4. — С. 18–25.
65. Тайманов В.А. Функциональные системы с операциями замыкания программного типа. Канд. дисс. — 1983.
66. Тайманов В.А. О функциональных системах k-значной логики операциями программного типа // Доклады АН СССР. — 1983. — Т. 268, № 6. — С. 1307–1310.
67. Тарасова О.С. Классы k-значной логики, замкнутые относительно расширенной операции суперпозиции // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 2001. — № 6. — С. 54–57.
68. Тарасова О.С. Классы функций k-значной логики, замкнутые относительно операции суперпозиции и перестановки // Математические вопросы кибернетики. Вып. 13.— 2004. — С. 59–112.
69. Тарасова О.С. Классы функций трехзначной логики, замкнутые относительно операции суперпозиции и перестановки // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 2004. — № 1. — С. 25–29.
70. Угольников А.Б. О замкнутых классах Поста // Изв. вузов. Сер. Матем. — 1988. — № 7. — С. 79–88.
71. Угольников А.Б. Классы Поста. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008.
72. Холл М. Комбинаторика. — М.: Мир, 1970.
73. Яблонский С.В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // Доклады АН СССР. — 1954. — Т. 95, № 6. — С. 1152–1156.
74. Яблонский С.В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды матем. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.
75. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.
76. Яблонский С.В. Строение верхней окрестности для предикатно-описуемых классов в P_k // Доклады АН СССР. — 1974. — Т. 218, № 2. — С. 304–307.
77. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Набебин А.А. Предполные классы в многозначных логиках. — М.: Изд-во МЭИ, 1997.
78. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2008.

79. Я н о в Ю.И., М у ч н и к А.А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С.44–46.
80. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики / Под ред. С.В. Я б л о н с к о г о и О.Б. Л у п а н о в а. — М.: Наука, 1974.
81. Конспект лекций О.Б. Л у п а н о в а по курсу «Введение в математическую логику» / Отв. ред. А.Б. Угольников. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007.
82. B a g y i n s z k i J., D e m e t r o v i c s J. Lineáris osztályok szerkezete primszám értékü logikában // MTA SZTAKI. — 1976. — V. 16. — P.25–52.
83. B a g y i n s z k i J., D e m e t r o v i c s J. The lattice of linear classes in prime-valued logics // Banach Center Publications (Warszawa). — 1982. — V. 7. — P.105–123.
84. B a r r i s S., W i l l a r s R. Finitely many primitive positive clones // Proc. of the American Mathematical Society. — 1987. — V. 101, № 3. — P.427–430.
85. B u l a t o v A.A., L a u D., S t r a u c h B. The cardinalities of sublattices of depth 2 in the lattices of clones on a 3-elementary set. Preprint Univ. Rostock. — 1996.
86. B u l a t o v A.A., K r o k h i n A., S a f i n K., S u k h a n o v E. On the structure of clone lattices // General Algebra and Discrete Mathematics. Heldermann-Verlag, Berlin. — 1995. — P.27–34.
87. B u l a t o v A.A. Polynomial reducts of modules I. Rough classification // Mult.-Valued Log. — 1998. — V. 3, № 2. — P.135–154.
88. B u l a t o v A.A. Polynomial reducts of modules II. Algebras of primitive and nilpotent functions // Mult.-Valued Log. — 1998. — V. 3, № 3. — P.173–193.
89. B u l a t o v A.A., K r o k h i n A., S a f i n K., S e m i g r o d s k i k h A., S u k h a n o v E. On the structure of clone lattices II // Mult.-Valued Log. — 2001. — V. 7, № 5/6. — P.379–389.
90. B u l a t o v A.A. Conditions satisfied by clone lattices // Algebra Universalis. — 2001. — V. 45, № 1/2. — P.237–241.
91. B u r o s c h G. Über die Ordnung der prëvollständigen Klassen in Algebren von Prädikaten. Preprint, WPU Rostock. — 1973.
92. B u r o s c h G. Über Algebren von Prädikaten. Preprint Univ. Rostock. — 1974.
93. B u r o s c h G., D a s s o w J., H a r n a w W., L a u D. Über Algebren von Prädikaten. Preprint, WPU Rostock. — 1979.
94. B u r o s c h G., D a s s o w J., H a r n a w W., L a u D. On subalgebras of an algebra of predicates // J. Inform. Process Cybern. EIK. — 1985. — V. 21, № 1/2. — P.9–22.
95. C s á k a n y B. Three-element groupoids with minimal clones // Acta Sci. Math. — 1983. — V. 45. — P.111–117.
96. C s á k a n y B. All minimal clones on the three-element set // Acta Cybernetica. — 1983. — V. 6, № 3. — P.227–238.
97. C z é d l i G., H a l a s R., K e a r n e s K.A., P á l f y P.P., S z e n d r e i Á. The join of two minimals clones and the meet of two maximal clones // Algebra Universalis. — 2001. — V. 45, № 2/3. — P.161–178.
98. D e m e t r o v i c s J., H a n n á k L. The cardinality of closed sets in precomplete classes in k-valued logics // Acta Cybernetica. — 1979. — V. 4, № 3. — P.273–277.
99. D e m e t r o v i c s J., H a n n á k L. On the cardinality of self-dual closed classes in k-valued logics // MTA SZTAKI Közlemenyek. — 1979. — V. 23. — P.7–16.
100. D e m e t r o v i c s J., H a n n á k L., M a r c h e n k o v, S.S. Some remarks on the structure of P_3 // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. — 1980. — V. 2. — P.215–219.
101. D e m e t r o v i c s J., H a n n á k L. The number of reduct of a preprimal algebra // Algebra Universalis. — 1983. — V. 16, № 1. — P.178–185.
102. D e m e t r o v i c s J., H a n n á k L., R ó n y a i L. On algebraic properties of monotone clones // Order. — 1986. — V. 3. — P.219–225.
103. D e m e t r o v i c s J., H a n n á k L., R ó n y a i L. On monotone clones // MTA SZTAKI Tanulmanyok. — 1987. — V. 202. — P.39–62.
104. D e m e t r o v i c s J., H a n n á k L. Construction of large sets of clones // Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen. d. Math. — 1987. — V. 33. — P.127—133.
105. G r ü n w a l d N. Bestimmung sämtlicher abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion F_8^n ist // Rostock, Math. Kolloq. — 1983. — V. 23. — P.5–26.
106. G r ü n w a l d N. Beschreibung aller abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion F_8^n ist, mit Hilfe von Relationen // Rostock, Math. Kolloq. — 1983. — V. 23. — P.27–34.
107. G r ü n w a l d N. Strukturaussagen über den Verband der abgeschlossenen Mengen von $P_{k,2}$, insbesondere von $P_{3,2}$. Dissertation A, Universität Rostock. — 1984.
108. H a d d a d L., R o s e n b e r g I.G. An interval of finite clones isomorphic to $(P(N), \subseteq)$ // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada (6). — 1986. — V. 8. — P.375–379.

109. Harnau W. Die Definitions der Vertauschbarkeitmengen in der k-wertigen Logik und das Maximalitätsproblem // Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen. d. Math. — 1974. — V. 20. — P. 339–352.
110. Harnau W. Die vertauschbaren Funktionen der k-wertigen Logik und ein Basisproblem // Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen. d. Math. — 1974. — V. 20. — P. 453–463.
111. Kearnes K.A., Szendrei Á. The classification of commutative minimal clones // Discuss. Math., Algebra Stoch. Methods. — 1999. — V. 19, № 1. — P. 147–178.
112. Kuntzman J. Algebra de Boole. — Paris: Dunod, 1965.
113. Lau D. Prävollständige Klassen von $P_{k,l}$ // Elektron. Informationsverarb. Kybernet. EIK — 1975. — V. 11, № 10–12. — P. 624–626.
114. Lau D. Eigenschaften gewisser abgeschlossener Klassen in Postschen Algebren. Dissertation A, Universität Rostock. — 1977.
115. Lau D. Kungruenzen auf gewissen Teilklassen von $P_{k,l}$ // Rostock, Math. Kolloq. — 1977. — V. 3. — P. 37–43.
116. Lau D. Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k-wertigen Logik // Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen. d. Math. — 1978. — V. 24. — P. 79–96.
117. Lau D. Über die Anzahl von abgeschlossenen Mengen linearer Funktionen der n-wertigen Logik // Elektron. Informationsverarb. Kybernet. EIK. — 1978. — V. 14, № 11. — P. 561–563.
118. Lau D. Submaximale Klassen von P_3 // J. Inform. Process Cybern. EIK. — 1982. — V. 18, № 4/5. — P. 227–243.
119. Lau D. Die maximalen Klassen von $Pol_k(0)$ // Rostock, Math. Kolloq. — 1982. — V. 19. — P. 29–47.
120. Lau D. Funktionenalgebren über endlichen Mengen. Dissertation B, Unversität Rostock. — 1984.
121. Lau D. Die maximalen Klassen von $Pol_k\{x, x+1\,mod\,k)|x \in E_k\}$ // Rostock, Math. Kolloq. — 1984. — V. 25. — P. 23–30.
122. Lau D. Ein Kriterium für den Nachweis der Abzählbarkeit gewisser Teilverbände des Verbandes der abgeschlossenen Mengen von Funktionen der k-wertigen Logik // Rostock, Math. Kolloq. — 1986. — V. 30. — P. 11–18.
123. Lau D. Über abgeschlossene Mengen linearer Funktionene in mehrwertigen Logiken // J. Inform. Process Cybern. EIK. — 1988. — V. 24, № 7/8. — P. 367–381.
124. Lau D. Über abgeschlossene Teilmengen von $P_{k,2}$ // J. Inform. Process Cybern. EIK. — 1988. — V. 24, № 10. — P. 395–513.
125. Lau D. Über abgeschlossene Teilmengen von $P_{3,2}$ // J. Inform. Process Cybern. EIK. — 1988. — V. 24, № 11/12. — P. 561–572.
126. Lau D., Schröder B. On the number of closed subsets of linear functions in the 6-valued logic // Beiträge zur Algebra und Geometrie. — 1990. — V. 31. — P. 19–32.
127. Lau D. On closed subsets of Boolean functions (A new proof for Post's theorem) // J. Inform. Process Cybern. EIK. — 1991. — V. 23, № 3. — P. 167–178.
128. Lau D. Die maximalen Klassen von $\cap_{a\in Q} Pol_k\{a\}$ für $\mathbb{Q} \subseteq E_k$ (Ein Kriterium für endliche semi-primale Algebren mit nur trivialen Unteralgebren) // Rostock, Math. Kolloq. — 1995. — V. 48. — P. 27–46.
129. Lau D. Die maximalen Klassen von $\cap_{\varrho\in Q} Pol_3\varrho$ für $\mathbb{Q} \subseteq \mathfrak{B}(\{0,1,2\})$, Teil I // Rostock, Math. Kolloq. — 1997. — V. 51. — P. 111–126.
130. Lau D. Die maximalen Klassen von $\cap_{\varrho\in Q} Pol_3\varrho$ für $\mathbb{Q} \subseteq \mathfrak{B}(\{0,1,2\})$, Teil II // Rostock, Math. Kolloq. — 1999. — V. 52. — P. 85–105.
131. Lau D. Die maximalen Klassen von $\cap_{\varrho\in Q} Pol_3\varrho$ für $\mathbb{Q} \subseteq \mathfrak{B}(\{0,1,2\})$, Teil III // Rostock, Math. Kolloq. — 1999. — V. 53. — P. 3–22.
132. Lau D. Function Algebras on Finite Sets. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.
133. Lévai L., Pálfy P.P. On binary minimal clones // Acta Cybernetica. — 1996. — V. 12, № 3. — P. 279–294.
134. Lo Czu Kai Precompleteness of a set and rings of linear functions // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. — 1963. — V. 2.
135. Lo Czu Kai On the precompleteness of the classes of functions preserving a partition // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. — 1963. — V. 2.
136. Lo Czu Kai, Lju Sjui Hua Precomplete classes defined by binary relations in many-valued logics // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. — 1963. — V. 4.
137. Lo Czu Kai Precomplete classes defined by normal k-ary relations in k-valued logics // Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis. — 1964. — № 3. — P. 39–50.
138. Machida H. On closed sets of three-valued monotone logical functions // Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 28, Finite Algebra and multiplevalued logic; Szeged (Hungary). — 1979. — P. 441–467.

139. Palfy P.P. The arity of minimal clones // Acta Sci. Math. — 1986. — V. 50. — P. 331–333.
140. Pippinger N. Theories of Computability. Cambridge: Cambridge Univ. Press. — 1997.
141. Pöschel R., Kaluznin L.A. Funktionen- und Relationenalgebren. Berlin. — 1979.
142. Post E.L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. — 1921. — V. 43, № 3. — P. 163–185.
143. Post E.L. The two-valued iterative systems of mathematical logic. Annals of Math. Studies. Princeton Univ. Press. — 1941. — V. 5.
144. Solvability, provability, definability: the collected works of Emil L. Post / Martin Davis, editor. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser. — 1994.
145. Quackenbush R.W. A new proof of Rosenberg's primal algebra chacterization theorem // Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 28, Finite Algebra and multiplevalued logic; Szeged (Hungary). — 1981. — P. 603–604.
146. Quackenbush R.W. A survey of minimal clones // Aequationes Math. — 1995. — V. 50, № 1-2. — P. 3–16.
147. Reschke M., Denecke K. Ein neuer Beweis für die Ergebnisse von E.L. Post über abgeschlossene Klassen Boolescher Funktionen // J. Inform. Process Cybern. EIK. — 1989. — V. 25, № 7. — P. 361–380.
148. Rosenberg I.G. La structure des functions de plusieurs variables sur un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. Paris, Group 5. — 1965. — V. 260. — P. 3817–3819.
149. Rosenberg I.G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpr. ČSAV Řada Mat. Přiv. Věd., Praha. — 1970. — V. 80. — P. 3–93.
150. Rosenberg I.G. Completeness, closed classes and relations in multiplevaued logics // Proc. Internat. Sympos. on multiple-valued logics, Morgantown, — 1974. — P. 1–26.
151. Rosenberg I.G., Szendrei Á. Submaximal clones with a prime order automorphism // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1985. — V. 49. — P. 29–48.
152. Rosenberg I.G. Minimal clones I: The five types. Lectures in Universal Algebra (L. Szabo, Á. Szendrei eds.) // Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 43, North Holland. — 1986. — P. 405–427.
153. Rosenberg I.G., Machida H. Gigantic pairs of minimal clones — characterization and existence // Mult.-Values Log. — 2001. — V. 7, № 1/2. — P. 129–148.
154. Salomaa A. Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain I // Ann. Univ. Turkuensis, Ser. AI. — 1962. — № 53.
155. Salomaa A. Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain II // Ann. Univ. Turkuensis, Ser. AI. — 1963. — № 63.
156. Salomaa A. On infinitely generated sets of operations in finite algebras // Ann. Univ. Turkuensis, Ser. AI. — 1964. — № 74.
157. Salomaa A. On the heights of closed sets of operations in finite algebras // Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. AI. — 1965. — № 363.
158. Salomaa A. On some algebraic notions in the theory of truth-functions // Acta Philos. Fennicae. — 1965. — V. 18. — P. 193–201.
159. Słupecki J. Kriterium pełnosci wielowartosciowych systemow logiki zdań // C. R. Séanc. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III. — 1939. — V. 32. — P. 102–109.
160. Szabó L. On minimal and maximal clones // Acta Cybernetica. — 1992. — V. 10, № 4. — P. 323–327.
161. Szendrei Á. Idempotent reducts of abelian groups // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1976. — V. 38. — P. 171–182.
162. Szendrei Á. On closed classes of linear operations over a finite set of squarefree cardinality // Elektron. Informationsverarb. Kybernet. EIK. — 1978. — V. 14, № 11. — P. 547–559.
163. Szendrei Á. On closed classes of quasilinear functions // Czechoslovak Math. J. — 1980. — V. 80. — P. 498–509.
164. Szendrei Á. On the idempotent reducts of modules I // Universal algebra, Proc. Colloq., Esztergom/Hung, 1977. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 29. — 1982. — P. 753–767.
165. Szendrei Á. On the idempotent reducts of modules II // Universal algebra, Proc. Colloq., Esztergom/Hung, 1977. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 29. — 1982. — P. 769–780.
166. Tardos G. A not finitely generated maximal clone of monotone operations // Order. — 1986. — V. 3. — P. 211–218.
167. Waldhauser T. Minimal clones generated by majority operations // Algebra Universalis. — 2000. — V. 44, № 1/2. — P. 15–26.

Поступило в редакцию: первый вариант 10.IX.2009,
окончательный вариант 20.XI.2013.