ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 87 за 2012 г.

Огун Дж.О., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж.

О преобразовании пространства начальных данных для задачи Коши с особенностями решения типа взрыва

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Огун Дж.О., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж. О преобразовании пространства начальных данных для задачи Коши с особенностями решения типа взрыва // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 87. 31 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-87

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Ордена Ленина

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ им. М.В. Келдыша

Дж.О. Огун, Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПРОСТРАНСТВА НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОШИ С ОСОБЕННОСТЯМИ РЕШЕНИЯ ТИПА ВЗРЫВА

Москва, 2012

Дж.О. Огун, Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев

О преобразовании пространства начальных данных для задачи Коши с особенностями решения типа взрыва

Изучаются особенности решений задач Коши для эволюционных дифференциальных уравнений. Определены процедуры продолжения решений через особенность. Введена операция продолжения преобразования пространства начальных данных посредством усреднения последовательности аппроксимирующих решений.

J.O. Ogun, Yu.N. Orlov, V. Zh. Sakbaev

On the data space transformation for initial Cauchy problem with blow-up solutions

The peculiarities of Cauchy problem solutions for evolution differential equations are investigated. The procedures of trajectories prolongations through singularities are constructed. The operation of continuation for initial data space transformation has been defined by the averaging of the approximation solution sequence.

1. Введение. Явление вырождения или обращения в бесконечность гессиана некоторой лагражневой (гамильтоновой) системы на подмножестве S конфигурационного или фазового пространства приводит к нарушению корректности начальных и начально-краевых задач для уравнений Эйлера-Лагранжа (Гамильтона-Якоби) (см. [9]). Вопросы о продолжении траектории системы через сингулярное многообразие при определенных условиях удается решить с помощью анализа системы первых интегралов в окрестности сингулярного многообразия (см. [14]). Другой подход основан на аппроксимации траекторий сингулярной системы последовательностями траекторий регуляризованных систем со снятием вырождения (см. [7]) или последовательностями случайных процессов с убывающим влиянием случайных возмущений (см. [3]).

Задача Коши для уравнения Шредингера или для уравнения Фоккера-Планка может проявлять свойства некорректности при вырождении матрицы коэффициентов при старших производных или при сингулярном поведении коэффициентов при младших производных как в случае нелинейного уравнения (см. [4], [37], [45]), так и в случае линейного уравнения (см. [1], [12], [33], [29], [16]). Вопросы о продолжении решения через границу промежутка его существования решаются с помощью аппроксимации траекторий сингулярной системы последовательностями траекторий регуляризованных систем, например, в работах [13], [9], [21].

Целью настоящей работы является демонстрация общности методов анализа особенностей решений дифференциальных уравнений в задачах классической и квантовой механики. Общий подход состоит в аппроксимативном снятии вырождения и нахождении предела последовательности решений аппроксимирующих задач, который можно трактовать как решение исходной задачи.

2. Примеры некорректных задач для ОДУ. Проиллюстрируем применение метода регуляризации на примерах некорректных задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, не имеющих решения, имеющих множество решений или допускающих нарушение существования или единственности решения на конечном промежутке.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(y),\ t \in (0, +\infty);\ y(0) = y_0,\ y_0 > 0, \tag{1}$$

решением которой на промежутке $[0, T)$, $T > 0$ будем называть функцию

$y \in C([0,T)) \bigcap C^1(0,T)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению и начальному условию. Предположим, что функция $f_0 \in C^1$ имеет в банаховом пространстве C^1 конечную норму и $z_0 \in R$. Тогда найдется такое число $\sigma > 0$, что задача Коши (1) имеет единственное решение в линейном пространстве $C^1(R_+)$ при любом $y_0 \in O_\sigma(z_0)$ при любой функции $f \in O_\sigma(f_0)$. Причем если $(y_{0\varepsilon}, f_\varepsilon) \to (z_0, f_0)$ в банаховом пространстве $R \times C^1(R)$ при $\varepsilon \to 0$ и функция y_ε является решением задачи (1) с начальным условием z_0 и функцией f_0 при каждом значении ε, то последовательность $\{y_\varepsilon\}$ сходится к решению y задачи (1) с начальным условием z_0 и функцией f_0 при $\varepsilon \to 0$ равномерно на каждом отрезке $[0,T] \subset [0,+\infty)$.

Пример 2. Пусть $f_0(y) = (y^2)^{\frac{1}{3}} \in C(R)$ и $y_0 \leq 0$. Тогда задача Коши (1) имеет единственное решение на промежутке $[0,T)$ при $T \leq T_* = 3|y_0|^{\frac{1}{3}}$, но для всякого $T > T_*$ она имеет однопараметрическое континуальное семейство решений, причем множеством точек ветвления интегральных кривых решений служит промежуток $\{(t,y) = (t,0);\ t \in [T_*,T)\}$. Момент времени T_* служит моментом разрушения единственности решения задачи Коши. Для задачи Коши (1) на полуоси R_+ множество решений континуально и неограничено в пространстве $C^1(R)$. Однако это свойство задачи Коши не является устойчивым по отношению к малым в пространстве $C^1(R)$ возмущениям функции f_0 из некоторой окрестности функции $f_0 \in C(R)$. Рассмотрим, например, возмущение функции f_0 вдоль кривой $\Gamma = \{f = f_0 + \varepsilon^{2/3},\ \varepsilon \in (-1,1)\}$. Для любой функции $f_\varepsilon \in \Gamma, \varepsilon \neq 0$ уравнение (1) имеет единственное решение $y_\varepsilon \in C([0,+\infty)) \bigcap {}^1(0,+\infty)$, причем функция $y_\varepsilon(x)$, $x \in R$ однозначно определяется равенством: $y_\varepsilon^{\frac{1}{3}} - \varepsilon arctg(\frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}x + C(y_0,\varepsilon)$. Поэтому семейство y_ε сходится к функции u на промежутке $[0,+\infty)$ равномерно на любом отрезке $[0,T]$. Таким образом, функция, сопоставляющая элементу $f \in C^1(R)$ множество решений задачи Коши (1), имеет точку разрыва f_0.

Пример 3. Пусть $f_0(y) = \begin{cases} 1 \ \forall\, y \in (-\infty,0); \\ -1 \ \forall\, y \in [0,+\infty); \end{cases}$ и $y_0 = 0$. Тогда при любом $T > 0$ задача Коши не имеет решения на промежутке $[0,T)$, то есть не существует непрерывной на промежутке $[0,T)$ дифференцируемой на интервале $(0,T)$ функции y, удовлетворяющей на интервале $(0,T)$ равенству $y' = f(y)$ и условию $y(0) = y_0$. Ибо если такое решение существует, то оно в силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано принимает отрицательные значения в некоторой правой полуокрестности начальной точки $t_0 = 0$. Но тогда в силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа значения решения в указанной полуокрестности превосходят начальное значение и являются положительными. Полученное противоречие доказывает отсутствие решения задачи Коши на любой полуокрестности начальной точки. Тем не менее, свойство отсутствия решения задачи Коши (1) не является устойчивым по отношению к сглаживанию функции f_0. Действительно, если семейство функций f_ε, $\varepsilon \in (-1,1)$ получено из функции f_0 посредством усреднения с симметричными гладкими ядрами усреднения ω_ε, $\varepsilon \in (-1,1)$, то при каждом $\varepsilon \neq 0$ задача Коши с начальным условием y_0 и функцией f_ε в правой части имеет единственное решение y_ε, тождественно равное нулю. При этом последовательность функций f_ε, $\varepsilon \in (-1,1)$ сходится к функции f_0 по норме $L_2(R)$; а последовательность решение y_ε, $\varepsilon \in (-1,1)$ сходится равномерно на полупрямой R_+ к функции y, тождественно равной нулю. Предельная функция y претендует на роль обобщенного аппроксимативного решения задачи Коши (1), не имеющей классического решения.

3. Доопределение динамического преобразования по системе первых интегралов. Существуют модели реальных физических явлений, в которых содержится эффект вырождения траекторий динамической системы. В частности, к таковым относятся известные модели слаборелятивистской динамики системы взаимодействующих частиц - электронов или тяготеющих масс, описываемые соответственно лагранжианами Дарвина [32] и Фока-Фихтенгольца [26]. Далее будем предполагать, что лагранжиан $L(q,v)$ является дважды дифференцируемой функцией по своим аргументам в любой области в фазовом пространстве. Чтобы выявить суть возникающей здесь проблемы, рассмотрим модель одномерного релятивистского осциллятора с запаздыванием взаимодействия в приближении первого порядка по отношению $\frac{v^2}{c^2}$ (см. [14], [38]), описываемого лагранжианом

$$L = -mc^2\sqrt{1-(v/c)^2} - \frac{kq^2}{2}(1 + a\frac{v^2}{2c^2}), \tag{2}$$

где m - масса покоя частицы, k - жесткость осцилляторной связи, a - некоторая постоянная (неотрицательное целое число, так называемый ранг взаимодействия [38]), c - скорость света. Уравнение движения (Эйлера-Лагранжа)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\dot{v} = -\frac{\partial}{\partial q}\left(v\frac{\partial L}{\partial v} - L\right)$$

для модели (2) определяет траекторию всюду, кроме множества точек вырождения коэффициента при старшей производной по времени, т.е. динамическая масса системы M должна быть отлична от нуля, где в данном случае

$$M = \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} = \frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} - \frac{kaq^2}{2c^2}.$$

В точках кривой S_D, определяемой уравнением $M = 0$, т.е. в точках

$$S_D = \{(q,v):\; q^2 = \frac{2mc^2/ka}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\}, \tag{3}$$

векторное поле динамической системы не определено.

Энергия системы как первый интеграл формально определена только на траекториях, когда $M \neq 0$, и имеет вид

$$E = v\frac{\partial L}{\partial v} - L = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{kq^2}{2}(1 - a\frac{v^2}{2c^2}). \tag{4}$$

Заметим, однако, что выражение (4) может быть продолжено по непрерывности и на множество S_D, так что функция $E(q,v)$ определена в любой области в фазовом пространстве системы. Движение происходит на изоэнергетической поверхности (в данном случае - линии) $E = E_0 = const$, которая неявно определяет траекторию как совокупность линий $q(v)$, удовлетворяющих (4). Эта фазовая траектория может не пересекаться с сингулярным множеством S_D (невырожденный случай), а может и пересекаться с ним при некоторых значениях координат и скоростей. Из (3) и (4) следует, что пересечение реализуется при таких значениях E_0 , для которых существует вещественное решение относительно v^2/c^2, меньшее единицы, уравнения

$$\frac{aE_0}{mc^2} = \frac{a+1-3v^2/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}. \tag{5}$$

Возникает вопрос: как трактовать части непрерывной траектории, находящиеся по разные стороны от S_D, в терминах движения материальной точки? Ответ на него может быть получен (не как математическая теорема, а именно как физическая трактовка ситуации) из следующих - правда, строго математических - соображений. Поскольку на траектории

$$dE = \frac{\partial E}{\partial q}dq + \frac{\partial E}{\partial v}dv = 0$$

и

$$\frac{\partial E}{\partial v} = v\frac{\partial^2 L}{\partial v^2} = Mv,$$

то на сингулярном множестве, где $M = 0$,

$$\frac{dq}{dv} = -\frac{\partial E/\partial v}{\partial E/\partial q} = -\frac{Mv}{\partial E/\partial q} = 0, \tag{6}$$

если только на этом множестве $\frac{\partial E}{\partial q} \neq 0$. Следовательно, точки локальных экстремумов фазовой траектории либо тривиальны ($v = 0$), либо лежат на сингулярном множестве. При том же условии $\frac{\partial E}{\partial q} \neq 0$ ускорение при стремлении траектории к S_D стремится к бесконечности, так как вне ускорение всюду вне сингулярного множества определено и равно

$$\dot{v} = -\frac{\partial E/\partial q}{M}. \tag{7}$$

Можно убедиться, что при положительности второй производной (локальный минимум) ускорение в (7) стремится к $+\infty$, а при отрицательности (локальный максимум) - к $-\infty$. Тогда возможна следующая трактовка описанной ситуации: достижение сингулярной точки производит эффект взаимодействия с абсолютно жесткой полупроницаемой стенкой, которая отражает точку из положения локального максимума с сохранением энергии, но с изменением направления движения на противоположное.

В рамках такой трактовки траекторию в окрестности локального минимума, лежащего на сингулярном множестве, следует считать виртуальной. Точка покинет эту область за конечное время и в дальнейшем никогда туда не вернется, что следует учитывать при построении, например, равновесной статистической механики для такой динамической системы: не все точки фазового пространства оказываются доступными, хотя энергия может быть формально определена и в недоступной области. Частица не проникает в эту область, а отражается от сингулярной поверхности с сохранением компоненты скорости, нормальной к S_D. Важно подчеркнуть, что вырождение в (3) происходит при любых значениях скорости, в том числе и при нулевых.

Влияние вырождения движения на статистические свойства системы можно трактовать и с другой точки зрения - не как ограниченность фазового пространства, а как ограниченность значений возможной энергии системы. Фактически уравнение (5) представляет собой критерий применимости "слаборелятивистского"приближения, состоящий в том, что это уравнение при определенных значениях энергии E_0 не имеет решений, т.е. движение реализуется во всем фазовом пространстве, но не при всех энергиях.

Такая трактовка, однако, требует введения определенной энергетической меры при построении равновесного распределения, что требует каких-то дополнительных гипотез.

В более общем случае движения в R^n с лагранжианом, зависящим от модулей векторов координаты и скорости $L = L(r, \nu)$, где $r = |\mathbf{q}|$, $\nu = |\mathbf{v}|$, уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}\dot{v}^j = -\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}v^j - L\delta^{ij}\right). \tag{8}$$

Здесь по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до n. Динамическая масса $\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}$ является тензором

$$M_{ij} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial L}{\partial \nu}\Delta^{\perp}_{ij} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial E}{\partial \nu}\Delta_{ij}, \tag{9}$$

где $E = v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L$ - энергия системы, а Δ_{ij} и $\Delta^{\perp}_{ij}$ - взаимно-ортогональные проекторы на направление вектора скорости:

$$\Delta_{ij} = e_i e_j, \quad \Delta^{\perp}_{ij} = \delta_{ij} - \Delta_{ij}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{v}/\nu.$$

Определитель матрицы M_{ij} легко вычисляется, поскольку $\frac{1}{\nu}\frac{\partial E}{\partial \nu}$ - ее собственное значение кратности 1, а $\frac{1}{\nu}\frac{\partial L}{\partial \nu}$ - собственное значение кратности $n-1$, так что

$$\det M_{ij} = \left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial L}{\partial \nu}\right)^{n-1}\frac{1}{\nu}\frac{\partial E}{\partial \nu}, \quad (M^{-1})_{ij} = \left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial L}{\partial \nu}\right)^{-1}\Delta^{\perp}_{ij} + \left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial E}{\partial \nu}\right)^{-1}\Delta_{ij}. \tag{10}$$

Отсюда следует, что особыми точками являются нетривиальные (с ненулевым значением скорости) стационарные точки энергии и лагранжиана, причем последние существуют только в пространстве размерности больше 1. При этом сингулярное множество S_D разбивается в прямую сумму двух множеств: сингулярного множества S^1_D первого типа, отвечающего разрыву компоненты ускорения, направленной вдоль скорости, и сингулярного множества S^2_D второго типа, отвечающего разрыву компоненты ускорения, ортогональной скорости. Разрешая формально уравнения Эйлера-Лагранжа с помощью (10) относительно ускорений, получаем

$$\dot{v}_i = \left(\frac{\partial L/\partial q}{\partial L/\partial v}\Delta^{\perp}_{ij} - \frac{\partial E/\partial q}{\partial E/\partial v}\Delta_{ij}\right)\nu n_j, \quad \mathbf{n} = \mathbf{q}/r. \tag{11}$$

Отсюда следует, что в окрестности сингулярного множества ускорение стремится в бесконечность, если в этих точках $\partial L/\partial q \neq 0$, $\partial E/\partial q \neq$

0. В частности, в той области фазового пространства, где $\frac{\partial E/\partial q}{\partial E/\partial v} > 0$, в окрестности S_D^1 ускорение имеет направление, противоположное движению (знак "минус"при проекторе Δ_{ij}), а в окрестности S_D^2 - ортогонально скорости. Как и в примере выше, здесь на самом множестве S_D векторное поле динамической системы не определено, но первые интегралы - в частности, энергия системы - могут быть продолжены на него по непрерывности. Тогда достижимость системой своего сингулярного множества зависит от того, имеет ли S_D общие точки с изоэнергетической поверхностью $E = const$. Поэтому может возникнуть такая ситуация, что, хотя динамическая система и имеет сингулярное множество S_D, оно недостижимо в силу имеющихся законов сохранения.

Обобщением рассмотренной ситуации является следующее предложение (см. [14]) (напомним, что мы называем точку траектории (точку поворота) нетривиальной, если в ней $v = \dot{q} \neq 0$).

Теорема 1. Пусть динамическая система с лагранжианом $L(q, v)$ имеет сингулярное множество S_D, на котором вырождается преобразование Лежандра. Если она обладает независимыми непрерывно дифференцируемыми в фазовом пространстве инвариантами движения $I_j,\ j = 1, 2, ..., j_m$, и $S_{I_j} = S_D \bigcap I_j$ - множество общих точек S_D и I_j, то S_D достижимо тогда и только тогда, когда $\bigcap S_{I_j} \neq \oslash$. Доступная область фазового пространства системы ограничена поверхностями вырождения якобиана $\det M_{ij}$, в окрестности которых нормальная составляющая ускорения направлена против движения. Точками отражения от S_D являются нетривиальные решения системы уравнений $\partial q_i/\partial v_j = 0$, где траектория, задаваемая системой уравнений $I_j(q, v) = I_j^0$, имеет локальный максимум.

Имеет место следующая теорема о стационарных точках траектории динамической системы [14, 41].

Теорема 2. Пусть $L(q, v)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Тогда множество нетривиальных стационарных точек траектории, определяемых условиями $\partial q_i/\partial v_j = 0,\ |\mathbf{v}| > 0$, является подмножеством сингулярного множества, определяемого как множество точек, где $\det\left(\partial^2 L/\partial v_i \partial v_j\right) = 0$.

Отметим, что неоднозначность движения возникает и в других задачах механики, и всегда она связана с тем или иным вырождением. Например, при столкновении двух точечных тел, взаимодействие между которыми носит сингулярный характер в виде дельта-функции от расстояния между ними, законы сохранения импульса и энергии не позволяют однозначно определить движение после столкновения. Пусть массы сталкивающихся тел равны M и m , а импульсы до столкновения равны соответственно $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. По законам сохранения импульса и энергии находим импульсы частиц после столкновения $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{q}'$:

$$\mathbf{p}' = \frac{\mathbf{p}+\mathbf{q}}{2}(1+\delta) + |\mathbf{u}|\mu\mathbf{n}, \quad \mathbf{q}' = \frac{\mathbf{p}+\mathbf{q}}{2}(1-\delta) - |\mathbf{u}|\mu\mathbf{n},$$

$$\delta = \frac{M-m}{M+m},\ \mathbf{n} \in R^d,\ |\mathbf{n}| = 1.$$

Здесь $u = \frac{\mathbf{p}}{M} - \frac{\mathbf{q}}{m}$ - относительная скорость, $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ - приведенная масса, а $\mathbf{n}$ - произвольно направленный единичный вектор в d-мерном пространстве импульсов. Это означает, что в системе центра масс импульсы тел после столкновения могут быть направлены произвольно. В то же время, как известно из курса классической механики, при рассеянии на дальнодействующем потенциале траектория материальной точки определяется однозначно. Таким образом, сингулярность потенциала порождает особенность динамического преобразования пространства начальных состояний системы, проявляющуюся как неоднозначность траектории.

Похожая ситуация и с движением тела в случае вырождения лагранжиана. Как мы видели в примере (10-11), при движении в пространстве размерности $d > 1$ существует возможность вырождения на сингулярном множестве S_D^2 второго типа, отвечающего разрыву компоненты ускорения, ортогональной скорости. В этом случае движение после достижения сингулярного множества не определено однозначно даже при условии непрерывного продолжения законов сохранения на сингулярное множество: как и в случае столкновения двух точечных тел, здесь направление ортогональной к скорости компоненты ускорения может быть любым. Этот эффект может трактоваться как хаотизация движения [41].

4. Поведение квантовой системы в окрестности сингулярного множества. Рассмотрим пример квантования динамической системы, имеющей нетривиальные точки поворота, т.е. непустое сингулярное множество первого типа. Пусть имеется одномерный ангармонический осциллятор с лагранжианом, похожим на рассмотренный выше в примере (1), но нерелятивистским:

$$L = -\frac{q^2}{2} + \frac{v^2}{2}(1-q^2) \tag{12}$$

Импульс такой динамической системы равен $p = \frac{\partial L}{\partial v} = v(1-q^2)$ а энергия дается выражением $E = \frac{q^2}{2} + \frac{v^2}{2}(1-q^2)$. Классическая область движения (где импульс сонаправлен скорости) - это интервал $(-1,1)$. Граничные точки $q_s = \pm 1$ трактуются в соответствии с (11) как точки отражения. В регулярной области фазового пространства имеем выражения для скорости и энергии через координату и импульс:

$$v = \frac{p}{1-q^2},\ H = \frac{q^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{p^2}{1-q^2}. \qquad (13)$$

Оператор Гамильтона при квантовании (13) по правилу Вейля, где постоянная Планка положена равной единице, имеет вид

$$\hat{H} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-x^2)^2} + \frac{4x^2}{(1-x^2)^3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{x}{(1-x^2)^2}\frac{\partial}{\partial x}\right). \quad (14)$$

Найдем волновую функцию такой системы, удовлетворяющую уравнению $\hat{H}\psi = E\Psi$ при некотором собственном значении $E \in R$, в окрестности особой точки $x_s = \pm 1$. Для простоты рассмотрим единообразно поведение волновой функции Ψ в окрестностях точек ± 1, для чего будем считать, что Ψ – четная функция (точно также можно изучить поведение функции Ψ в окрестности каждой из особых точек в отдельности, не делая допущений о четности).

Для поставленной цели сделаем в (14) замену переменных $z = 1 - x^2$ и рассмотрим решение уравнения Шредингера $\hat{H}\Psi = E\Psi$ при $z \to +0$. Имеем из (14)

$$4z^2(1-z)\Psi_{zz} - 2z\Psi_z - \left(z^3(1-2E-z) + (4-3z)/2\right)\Psi = 0. \qquad (15)$$

Изучим асимптотическое поведение решения уравнения (15) при $z \to +0$, для чего оставим в коэффициентах при Ψ только главные члены (см. [27], [2]), т.е. рассмотрим "укороченное"уравнение

$$2z^2\Psi_{zz} - z\Psi_z - \Psi = 0. \qquad (16)$$

Это - уравнение Эйлера, общее решение которого имеет вид

$$\Psi = C_1 z^{\lambda_1} + C_2 z^{\lambda_2},\ \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4} \qquad (17)$$

где $C_{1,2}$ - произвольные постоянные. Если потребовать ограниченности волновой функции, то в (17) следует положить $C_2 = 0$. Легко проверить, что для оставшегося решения выполняются равенства

$$\lim_{z\to 0}|\Psi(z)|^2 = 0,\ \lim_{z\to 0}\bar{\Psi}(z)\Psi'(z) = 0.$$

Этот результат иллюстрирует вывод о том, что особые точки преобразования Лежандра могут быть интерпретированы как точки классического отражения, которым в квантовом случае отвечают абсолютно непроницаемые точки поворота.

Решение (17) при $C_2 \neq 0$ не имеет квазиклассического смысла (см. [27], [14]) и такой случай в настоящей статье рассматриваться не будет.

5. О возникновении особенностей решений уравнений в частных производных с синулярными коэффициентами. При переходе к квантовому описанию сингулярных систем в ряде случаев задача Коши для уравнения Шредингера, гамильтониан которой является в том или ином смысле сингулярным линейным (псевдо)дифференциальным оператором. Наличие сингулярности оператора Шредингера также приводит к нарушению корректности задачи Коши для линейного уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{L}u(t) = div(G\nabla u) + \frac{i}{2}((\mathbf{a}, \nabla u) + div(\mathbf{a}u)) + Vu; \quad u(+0) = u_0; \quad (18)$$

или линейного уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{L}u(t) = div(G\nabla u) + \frac{1}{2}((\mathbf{a}, \nabla u) + div(\mathbf{a}u)) + Vu; \quad u(+0) = u_0.$$

Здесь начальная функция u_0 является элементом гильбертова или банахова пространства X, а заданный дифференциальным выражением второго порядка оператор $\mathbf{L}$ является плотно определенным замкнутым оператором в пространстве X. Коэффициенты дифференциального выражения являются измеримыми вещественнозначными функциями аргумента $x \in R^d$ в случае линейного уравнения и измеримыми вещественнозначными функциями аргументов $(x, u) \in R^d \times \mathbf{C}$ в случае нелинейного уравнения.

Для нелинейного уравнения теплопроводности или нелинейного уравнения Шредингера достаточно распространенной особенностью являются такие нарушения корректности задачи Коши, как разрушение решения за конечное время, неединственность решения и неустойчивость решения по отношению к малым изменениям начальных и граничных условий. Тем не менее, и линейная задача Коши (18) проявляет свойства нарушения корректности в пространстве $H = L_2(R^d)$ для уравнения Шредингера и в пространстве $L_1(R^d)$ либо в пространстве борелевских мер $M(R^d)$ для уравнения Фоккера-Планка.

I) *Сингулярность потенциала или источника* V. Так, в работе [29] было установлено, что если G – единична матрица, $\mathbf{a}$ – нулевое векторное поле, а $V(x) = \frac{c}{|x|^2}$, $x \in R^d \backslash \theta$, то задача Коши для уравнений Фоккера-Планка и Шредингера однозначно разрешима на полуоси $t > 0$ и корректна тогда и только тогда, когда $c \in [0, C_H]$, где $C_H = (\frac{d-2}{2})^2$, $d \in \mathbf{N}$ – константа Харди. Если же $c > C_H$, то задача Коши для уравнения теплопроводности не имеет решения при любом ненулевом начальном условии. Причиной столь существенного качественного изменения свойств задачи Коши от коэффициента при потенциале является знакоопределенность функционала энергии

$$E(u) = \int_{R^d} (|\nabla u(x)|^2 - \frac{c}{|x|^2}|u(x)|^2)dx,$$

который положительно определен при $c \leq C_H$ согласно неравенству Харди (см. [11]), но при $c > C_H$ не ограничен ни сверху, ни снизу.

Этот результат был установлен авторами двумя способами – с помощью аппроскимации сингулярного потенциала последовательностью регулярных $V_n(x) = \min(n, V(x))$ и с помощью представления решения задачи Коши интегралом по мере Фейнмана-Каца. Было установлено, что если u_0 – ненулевая неотрицательная функция, то в любой момент времени $t > 0$ и в любой точке $x \in R^d$ функция u обращается в бесконечность, ибо для последовательности решений задач Коши с регуляризованным потенциалом доказано существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t,x) = +\infty$, а интеграл по мере Фйнмана-Каца, зависящий от параметров $(t,x) \in R_+ \times R^d$, расходится при любом выборе значений параметров (t,x). В случае же уравнения Шредингера решение u_n любой задачи с регуляризованным потенциалом имеет не зависящую от параметров $n \in \mathbf{N}$ и $t > 0$ норму $\|u_n(t)\|_H$ но, если $c > C_H$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|\nabla u_n(t)\|_{L_2(R^d)} = +\infty$ при любом $t > 0$. Если же $c \in [0, C_H]$, то последовательность $\{u_n\}$ сходится к решению задачи Коши с сингулярным потенциалом по норме пространства H равномерно на любом отрезке $[0, T]$.

II) *Сингулярность тензора массы (гессиана) или тензора коэффициентов диффузии* G. В работе [16] было установлено, что если $d = 1$, $G(x)$ – функция Хевисайда, $\mathbf{a}(x)$ – ступенчатая вектор-функция, принимающая постоянные значения на двух полуосях $R_- = \{x \in R : x < 0\}$ и $R_+ = \{x \in R : x > 0\}$, а $V \equiv 0$, то задача Коши для уравнения Шредингера имеет решение на некотором зависящем от начального условия u_0 промежутке $[0, T_*(u_0))$ и не имеет решения на промежутке $[0, T)$ при любом $T > T_*(u_0)$. Тот же эфект имеет место и для уравнения теплопроводности (см. [19]). В работе [18] исследовано поведение последовательности решений регуляризованных задач с равномерно эллиптическим гамильтонианом $\mathbf{L}_\varepsilon = \mathbf{L} + \varepsilon\Delta$, $\varepsilon \in (0,1)$, и установлено, что последовательность регуляризованных решений $\{u_\varepsilon(t),\ t > 0\}$ сходится по норме пространства H при каждом $t \in [0, T_*(u_0))$ равномерно на любом компакте из промежутка сходимости, но не содержит сходящихся по норме подпоследовательностей при любом $t > T_*(u_0)$.

Кроме того, вырождение символа оператора на некотором подмножестве координатного пространства также может привести к некорректности задачи (18): например, если $G \equiv 0$, $V \equiv 0$, $d = 1$, но векторное поле $\mathbf{a}(x)$, $x \in R$, имеет конечное число точек разрыва первого рода, то оператор $\mathbf{L}$ может иметь конечные индексы дефекта, а задача (18) – разрешимой только на конечном промежутке $[0, T_*(u_0))$.

III) *Сингулярность векторного потенциала или коэффициента сноса* $\mathbf{a}$. В работе [1] исследовано влияние на корректность задачи Коши для уравнения Фоккера-Планка векторного потенциала $\mathbf{a}$ и установлено, что если $d \geq 2$, G – единичная матрица, $V \equiv 0$, но векторное поле не слишком медленно растет при $|x| \to +\infty$ (настолько, чтобы время ухода на бесконечность со скоростью $\mathbf{a}$ было конечно), то задача Коши допускает неединственность решения (см. [1]).

IV) *Разрушение решений нелинейных дифференциальных уравнений.* Задача Коши для нелинейного уравнения Фоккера-Планка описывает явления распространения тепла (или диффузии вещества) в средах с зависимостью источников и динамики переноса от распределения температуры (концентрации вещества). В монографии [4] получены условия глобального существования решения и условия стремления решения к бесконечности за конечное время (условия режима с обострением). Задача Коши для нелинейного уравнения Шредингера описывает распространение электромагнитных волн в среде, оптические показатели которой зависят от электромагнитного поля, в котором находится среда. В работе [6] получены условия глобального существования солитоноподобного решения, а в работах [37], [45] – условия обращения L_2-нормы градиента решения в бесконечность за конечное время (градиентная катастрофа). Явление режима с обострением в нелинейном уравнении теплопроводности впервые было обнаружено в 1966 г. в работе [34], а для нелинейного уравнения Шредингера – в 1977 г. в работе [37]. В работе [10] получен критерий возникновения режима с обострением решения задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений в определенном задачей Коши функциональном пространстве. Условие наличия или отсутствия решения задачи Коши, допускающего возникновение особенности за конечное время, сформулировано в терминах нелинейной емкости оператора задачи Коши, действующего в соответствующих задаче функциональных пространствах.

Наличие сингулярностей (вырождения, неограниченности, разрывов) у коэффициентов линейного уравнения Шредингера (18) приводит к разрушению решения или его неединственности (и малое по норме пространства H возмущение начального условия может привести к существенному именению промежутка существования решения). Возникает гипотеза, что причиной нарушения корректности начально-краевой задачи для нелинейного уравнения (18) является такое локальное поведение нелинейных коэффициентов $G, \mathbf{a}$ или V, при котором в момент нарушения корректности возникает хотя бы одна из трех описанных выше особенностей.

Моментом разрушения решения начально-краевой задачи будем называть точную верхнюю грань правых границ промежутков существования ее решения.

Замечание. Заметим, что причиной нарушения корректности задачи Коши (18) для уравнения теплопроводности или Шредингера является такое спектральное свойство оператора $\mathbf{L}$ как неограниченность функционала энергии ни снизу, ни сверху. Это же свойство функционала энергии приводит к разрушению градиента решения нелинейного уравнения Шредингера и к разрушению за конечное время решения уравнения Шредингера с вырожденным гамильтонианом. Приведенное замечание указывает правило выбора регуляризованных систем как таких, функционал энергии которых полуограничен, причем на каждом компакте в фазовом пространстве последовательность регуляризованных функционалов энергии сходится равномерно к функционалу энергии с особенностями.

О продолжении решений дифференциальных уравнений, допускающих возникновение сингулярностей. Разрушение решения задачи Коши может, как показывают примеры задач Коши для уравнений с частными производными первого порядка (см. [13], [9]) и задач Коши с вырожденными гамильтонианами [20], не сопровождаться стремлением его нормы к бесконечности. Кроме того, уход решения на бесконечность в ряде случаев происходит в достаточно сильной норме – $W_2^1(R^d)$, $L_\infty(R^d)$, но при этом норма решения в более широком банаховом пространстве с более слабой нормой остается ограниченной равномерно на всем промежутке существования решения. Так, в случае уравнения Шредингера (нелинейного (см. [45]) или линейного (см. [29])) в момент градиентной катастрофы T_* выполняется условие $\lim\limits_{t\to T_*-0}\|u(t)\|_{W_2^1(R^d)} = +\infty$, но, тем не менее, $\|u(t)\|_{L_2(R^d)} = \|u_0\|_{L_2(R^d)}$ при всех $t \in [0,T_*)$. В работах [40] моментом разрушения решения считается величина $T_* = sup\{t > 0 : \{x \in R^d : \exists\{x_n\} \to x, \{t_n\} \to t-0 : \lim\limits_{n\to\infty} u(t_n,x_n) = \infty\} = \oslash\}$. Поэтому возникает предположение, что задача Коши описывает эволюцию системы и на интервале времени $t > T_*$: для уравнений с градиентным обострением – в пространстве L_2, для уравнений с обращением решения в бесконечность на области координатного пространства – в дополнении области.

В исследованиях работ [13], [9], [14], [36], [40], [22], ставится задача о продолжении решения на интервал, содержащий момент разрушения, а также об описании динамики системы при условии обращения в решения в бесконечность на части пространственно-временного циллиндра $(0,+\infty)\times\Omega$ (см. [36], [40]), либо при обращении в бесконечность L_2-нормы градиента решения, при возможном разрушении полугруппового свойства динамических преобразований множества состояний системы (см. [22]).

Успехи в расширении понятия решения задачи Коши для эволюионного уравнения с целью однозначного продолжения за границы интервала существования классического решения были достигнуты в работах О.А. Олейник при описании процессов газодинамики (см. [9]).

В ряде задач для уравнений гидродинамики, для уравнений Гамильтона-Якоби было установлено, что последовательность вязкостных аппроксимаций сходится к пределу, который не зависит от выбора вязкостной аппроксимации и называется вязкостным решением задачи. Полученные условия независимости от выбора аппроксимации являются достаточными. В ряде ситуаций их нарушения приводят к зависимости предела от выбора аппроксимации (см. [8], [5], [20]). В некоторых случаях применения метода исчезающей вязкости к начально-краевой задаче удается описать множество всех предельных точек последовательности вязкостных решений по некоторому классу вязкостных аппроксимаций (см. [5], [20]).

Изучению особенностей решения задач Коши с конечным временем существования методами гамильтоновой динамики а также анализу диссипаивных и дисперсных аппроксимаций задач с градиентной катастрофой посвященыл работы [31] и [28].

Разрушение решения линейного уравнения Шредингера с вырождением. Одной из задач настоящей статьи является изучение задачи Коши для линейного уравнения Шредингера с вырождающимся гамильтонианом на промежутке, содержащем мометн разрушения решения. Исследуется конечность времени существования решения и максимальный промежуток существования решения в зависимости от начального условия. Вместе с некорректной задачей Коши рассматривается ее окрестность в пространстве операторов, представляющих задачи Коши, или последовательность задач Коши с равномерно эллиптическими операторами, аппроксимирующими вырождающийся гамильтониан.

Изучается асимптотическое поведение последовательности решений задач Коши, аппроксимирующих исходную. В случае сходимости последовательности регуляризованнах решений ее предел задает динамику системы с сингулярным гамильтонианом. Однако в ряде случаев имеет место не сходимость, а компактность последовательности решений регуляризованных задач с нетривиальным множеством предельных точек (см. [5], [20], [42]). В этом случае каждый из частичных пределов последовательности может рассматриваться как одна из возможных реализаций динамики, порожденной сингулярным гамильтонианом. Следовательно, задаваемая сингулярным гамильтонианом динамика неоднозначна и может рассматриваться как случайный процесс в том случае, если снабдить множество регуляризованных задач структурой измеримого пространства с мерой, сосредоточенной в произвольной проколотой окрестности предельной задачи. Существуют также примеры, когда в банаховом пространстве задачи Коши нет места компактности множества значений последовательности регуляризованных решений, но эта последовательность компактна в более слабых топологиях в пространствах, включающих себя банахово пространство задачи Коши в качестве подмногообразия. В этом случае задача Коши с вырожденным гамильтонианом задает многозначную динамику или случайный процесс в расширенном линейном топологическом пространстве.

Вырожденные гамильтонианы. Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения Шредингера, гамильтониан которого испытывает вырождение на множестве положительной меры. Мы покажем, что указанное свойство гамильтониана может привести к ограниченности зависящего от начального условия промежутка существования решения задачи Коши. Подобные эффекты конечности времени существования решения возникают также при решении уравнений гидродинамики, уравнений Гамильтона-Якоби и других уравнений с частными производными первого порядка, причем как в случае нелинейных (см.

[9]), так и в случае линейных (см. [30]) дифференциальных уравнений.

Предлагаемая задача Коши изучается на компактном одномерном координатном пространстве $[-l, l]$ и имеет вид

$$i\frac{d}{dt}u = \mathbf{L}u,\ t > 0, \tag{19}$$

$$u|_{t=0} = u_0,\ u_0 \in H = L_2([-l, l]), \tag{20}$$

где оператор $\mathbf{L}$ есть максимальный симметричный оператор, заданный дифференциальным выражением

$$\mathbf{L}u = \frac{\partial}{\partial x}[g\frac{\partial}{\partial x}u] + \frac{i}{2}(a\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial x}(au)) \tag{21}$$

на линейном многообразии $D(\mathbf{L}) = \{u \in W_2^1(-l, l) : u|_{[-l,0]} \in W_2^2(-l, 0),\ u'(-0) = \frac{i}{2}a(+0)u(0);\ u(-l) = 0\}$. Предположим, что коэффициенты дифференциального выражения удовлетворяют следующим условиям: функция g кусочно постоянна: $g(x) = \chi_{[-l,0]}(x),\ x \in [-l, l]$, функция a непрерывна на отрезке $[0, l]$, обращается в нуль на промежутке $[-l, 0)$, имеет единственную точку разрыва первого рода $x_0 = 0$ и удовлетворяет условиям $a(x) = 0,\ x \in [-l, 0)$; $a(x) > 0,\ x \in [0, l)$, $\int\limits_0^l a^{-1}(x)dx = +\infty$.

Тогда нетрудно проверить, что для любого $u \in D(\mathbf{L})$ каждое из двух слагаемых $\frac{i}{2}a\frac{\partial}{\partial x}u$ и $\frac{\partial}{\partial x}[g\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{i}{2}au]$ из дифференциального выражения (21) принадлежит пространству $L_2(-l, l)$. И что, кроме того, оператор $\mathbf{L}$ плотно определен и симметричен, а его сопряженный имеет более широкую область определения, содержащую линейное многообразие $D^* = \{u \in L_2(-l, l) : u|_{[-l,0]} \in W_2^2(-l, 0),\ u|_{[0,l]} \in W_1^2(0, l),\ u'(-0) + \frac{i}{2}a(+0)u(-0) = ia(+0)u(+0);\ u(-l) = 0\}$.

Оба оператора замыкаемы ибо оба плотно определены.

Линейное многообразие $\mathcal{L} = \{\{u, \mathbf{L}u\},\ u \in D(\mathbf{L})\} \oplus \{\{-\mathbf{L}^*v, v\},\ v \in D^*\}$ плотно в пространстве $\mathcal{H} = H \times H$, ибо если $\{f, h\} \in H \times H$ и при этом выполняется система равенств

$$\begin{cases} (f, u) + (g, \mathbf{L}u) = 0 \\ (f, \mathbf{L}^*v) - (g, v) = 0 \end{cases}$$

то $f \in D(\bar{\mathbf{L}})$ и $g = \bar{\mathbf{L}}f$. Следовательно, $(\bar{\mathbf{L}}f, \mathbf{L}u) + (f, u) = 0$ для любого $u \in D(\mathbf{L})$. Так как оператор $\mathbf{L}$ замыкаем, то найдется такая последовательность $\{u_k\}$ со значениями в $D(\mathbf{L})$, что последовательность $\{\{u_k, \mathbf{L}u_k\}\}$ сходится к элементу $\{f, \bar{\mathbf{L}}f\}$ в пространстве $\mathcal{H}$. Следовательно, $(\bar{\mathbf{L}}f, \bar{\mathbf{L}}f) + (f, f) = 0$, $f = \theta$ и $g = \theta$.

Поэтому оператор $\mathbf{L}^*$ является замыканием своего сужения на область определения D^*. Замыкание оператора $\mathbf{L}$ будем далее обозначать тем же символом.

Индексы дефекта $n_\pm$ оператора $\mathbf{L}$ определяются как размерности ядер следующих подпространств $K_\pm = \mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* \pm i\mathbf{I})$. Тогда непосредственное исследование множества решений дифференциальных уравнений

$$\mathbf{L}^*u \pm iu = 0,\ u \in D(\mathbf{L}^*),$$

показывает, что в зависимости от знака параметра $\alpha \in R$ индексы дефекта принимают значения

$$\begin{cases} (n_-, n_+) = (1, 0)\ if\ \alpha < 0; \\ (n_-, n_+) = (0, 0)\ if\ \alpha = 0; \\ (n_-, n_+) = (0, 1)\ if\ \alpha > 0. \end{cases}$$

Тогда согласно теореме 4.10 [8] а также согласно результатам работ [17], [19], [20]) справедливо утверждение:

Теорема 3. *При $a \leq 0$ оператор $-i\mathbf{L}$ является генератором изометрической полугруппы $\mathbf{U_L}(t) = e^{-i\mathbf{L}t}$, $t > 0$, в пространстве H и задача Коши имеет единственное решение $\mathbf{U_L}(t)u_0$. Если же $a > 0$, то оператор $i\mathbf{L}$ генерирует изометрическую полугруппу $\mathbf{U_{-L}}(t) = e^{i\mathbf{L}t}$, $t > 0$, в пространстве H, сопряженная к которой является сжимающей полугруппой $(\mathbf{U_{-L}}(t))^* = e^{-i\mathbf{L}^*t}$, $t > 0$, с генератором $-i\mathbf{L}^*$. Задача Коши в этом случае некорректна – имеет решение тогда и только тогда, когда вектор начальных данных u_0 лежит в подпространстве $H_0 = \overline{\bigcap\limits_{t>0} \mathrm{Im}(\mathbf{U_{-L}}(t))}$. В этом случае решение единственно и $u(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t)u_0$.*

Наряду с некорректной задачей Коши с вырожденным гамильтонианом рассматривается последовательность корректных задач Коши для уравнений

$$i\frac{d}{dt}u(t) = \mathbf{L}_\epsilon u(t),\ t > 0,\ \epsilon \in E,\ \epsilon \to 0, \tag{22}$$

с начальным условием (20) и с равномерно эллиптическими гамильтонианами $\mathbf{L}_\varepsilon$, $D(\mathbf{L}_\varepsilon)$, области определения которых задаются равенствами $D(\mathbf{L}_\varepsilon) = \{u \in W_2^1(-l, l) : u|_{[-l,0]} \in W_2^2(-l, 0),\ u|_{[0,l]} \in W_2^2(0, l),\ u'(-0) = \frac{i}{2}a(+0)u(0) + \varepsilon u'(+0);\ u(-l) = 0,\ u(l) = 0\}$. Множество параметров регуляризации $E \subset R$ имеет предельную точку 0. Изучается сходимость последовательности решений регуляризованных задач и последовательности регуляризованных операторов плотности при $\varepsilon \to 0$.

Примером регуляризации оператора $\mathbf{L}$ задачи Коши (19)– (21) является последовательность операторов $\{\mathbf{L}_\varepsilon,\ \varepsilon \in E\}$, задаваемых в пространстве $H = L_2(-l,l)$ дифференциальным выражением

$$\mathbf{L}_\varepsilon u(x) = \frac{\partial}{\partial x}(g_\varepsilon(x)\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{i}{2}a(x)u) + \frac{i}{2}a(x)\frac{\partial}{\partial x}u \tag{23}$$

на максимальной области определения

$$D(\mathbf{L}_\varepsilon) = \{u \in W_2^1(-l,l) :\ u|_{(-l,0)} \in W_2^2(-l,0)),\ u|_{(0,l)} \in W_2^2(0,-l)),$$

$$g_\varepsilon(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i}{2}a(x)u \in W_2^1(-l,l)\}. \qquad (24).$$

Здесь $g(x) = g(x) + \varepsilon, \varepsilon \in E$. Нетрудно проверить, что обобщенная последовательность операторов $\{\mathbf{L}_\varepsilon, \varepsilon \in E, \varepsilon \to 0\}$ является самосопряженной регуляризацией для оператора $\mathbf{L}$ проядка $q = 3$ (см. [20]). Тогда согласно теореме 3 работы [20] справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Если оператор* $\mathbf{L}$ *является максимальным симметрическим оператором, то последовательность* $\{u_\varepsilon(t)\}$ *решений регуляризованных задач (20), (22), (23) сходится в пространстве* H *равномерно на любом отрезке* $[0,T], T > 0$, *тогда и только тогда, когда задача* Коши (19), (20) *для вырожденного оператора имеет решение* $u(t)$, *причем решение задачи Коши* (19), (20) *является пределом последовательности решений вырожденных задач, т.е.* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sup\limits_{t\in[0,T]} \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_H = 0$ *для любого* $T > 0$.

В случае отсутствия решения задачи Коши (19), (20) *последовательность* $\{u_\varepsilon(t)\}$ *решений регуляризованных задач сходится слабо в пространстве* H *равномерно на любом отрезке* $[0,T], T > 0$, *к вектор-функции* $u^*(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t)u_0$, *которая является решением задачи Коши для уравнения Шредингера с сопряженным оператором* $\mathbf{L}^*$ *и начальным условием (20), т.е. для любых* $T > 0$ *и* $\varphi \in H$ *выполняется равенство* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sup\limits_{t\in[0,T]} |(u_\varepsilon(t) - u^*(t), \varphi)_H| = 0$. *Последовательности векторов* $\{u_\varepsilon(t)\}$ *пространства* H *сходится к своему слабому пределу* $u^*(t)$ *по норме пространства* H *тогда и только тогда, когда* $u_0 \in H_0(t) \equiv \mathrm{Im}(e^{i\mathbf{L}t})$.

Для каждого $u_0 \in H$ определим неотрицательную величину $T_*(u_0) = \sup\{t \geq 0 :\ u_0 \in H_0(T)\}$. Из теоремы 4 вытекает следующее свойство последовательности решений регуляризованных задач.

Обозначим символом $C_{00}^{\infty}(-l,l)$ линейное пространство бесконечно дифференцируемых функций на интервале $(-l,l)$, носитель каждой из которых принадлежит множеству $(-l,l)\backslash\{0\}$. Будем говорить, что последовательность $\{u_\varepsilon,\, \varepsilon \in (0,1)\}$ такая, что $u_\varepsilon \in D(\mathbf{L}_\varepsilon)\,\forall\,\varepsilon \in (0,1)$ сходится к элементу $u \in D(\mathbf{L})$ при $\varepsilon \to 0$ в сильной топологии графиков операторов, если выполняется условие $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\|u_\varepsilon - u\|_H^2 + \|\mathbf{L}_\varepsilon u_\varepsilon - \mathbf{L}u\|_H^2) = 0$.

Теорема 5. *Пусть $u_0 \in C_{00}^{\infty}(-l,l)$. Тогда решение задачи Коши* (19), (20) *существует на интервале $(0, T_*(u_0))$ и непродолжимо ни на какой больший интервал в том смысле, что при любом $\delta > 0$ выполняется неравенство*

$$\inf_{u\in\mathcal{D}_{u_0}} \int\limits_0^{T+\delta} \|\frac{d}{dt}u(t) - \mathbf{L}u(t)\|^2 dt > 0, \tag{25}$$

где $\mathcal{D}_{u_0} = \{u \in C([0,T+\delta], D(\mathbf{L}))\cap C^1((0,T+\delta),H) : u(0) = u_0\}$. Последовательность решений регуляризованных задач $\{u_\varepsilon(t)\}$ сходится равномерно на всяком отрезке $[0,T]$ из промежутка $[0,T_*(u_0))$ в сильной топологии графиков операторов. Но для любого $t > T_*$ справедливо равенство $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon(t)\|_{W_2^1(-l,l)} = +\infty$ и последовательность $\{u_\varepsilon(t)\}$ расходится в сильной топологии графиков операторов.

Доказательство. Существование единственного решения на промежутке $[0,T_*)$ следует из теоремы 3, а из теоремы 4 следует сходимость к нему последовательности регуляризованных решений на любом отрезке $[0,T] \subset [0,T_*)$. Кроме того, так как $\mathbf{L}u_0 \in C_{00}^{\infty}(-l,l)$ и $\|\mathbf{L}_\varepsilon u_0 - \mathbf{L}u_0\|_H \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то легко проверить, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{L}_\varepsilon u_\varepsilon(t) - \mathbf{L}u(t)\|_H = 0 \ \forall T \in (0,T_*). \tag{26}$$

Действительно, $\|\mathbf{L}_\varepsilon e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon}u_0 - \mathbf{L}e^{-it\mathbf{L}}u_0\|_H = \|e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon}\mathbf{L}_\varepsilon u_0 - e^{-it\mathbf{L}}\mathbf{L}u_0\|_H \leq \|e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon}(\mathbf{L}_\varepsilon u_0 - \mathbf{L}u_0)\|_H + \|(e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon} - e^{-it\mathbf{L}})\mathbf{L}u_0\|_H$ для любого $t > 0$, откуда следует (26). Тем самым доказана сходимость последовательности решений регуляризованных задач $\{u_\varepsilon(t)\}$ в сильной топологии графиков операторов к своей предельной функции $u(t)$, $t \in [0,T_*)$ равномерная на любом отрезке $[0,T] \subset [0,T_*)$. Отсутствие решения на промежутке $[0,T+\delta)$ и неравенство (25) следуют из теоремы 4 работы [15].

Для доказательства наличия градиентной катастрофы при $t > T_*$ предположим противное, что найдется последовательность параметров регуляризации $\{\varepsilon_k\}$ и число $t > T^*$ такие, что $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, но $\sup\limits_{k\in\mathbf{N}}\|u_{\varepsilon_k}(t)\|_{W_2^1(-l,l)} < \infty$. Тогда из компактности вложения пространства

$W_2^1(-l,l)$ в пространство H следует существование сходящейся по норме пространства H подпоследовательности $\{u_{\varepsilon_{k_j}}(t)\}$. Но поскольку $t > T_*$, то $u_0 \notin H_0(t)$, поэтому в силу теоремы 4 подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_{k_j}}(t)\}$ не является сходящейся в пространстве H. Полученное противоречие доказывает, что $t > T_*$ выполняется равенство $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon(t)\|_{W_2^1(-l,l)} = +\infty$.

Если предположить существование такого вектора $u_0 \in C_{00}^\infty(-l,l)$, что последовательность решений регуляризованных задач $\{u_\varepsilon(t)\}$ сходится в сильной топологии графиков операторов при любом $t \in [0,T] \subset [0,T^*)$, то мы получим сходимость последовательности полугрупп $\{e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon}\}$ в сильной операторной топологии на отрезке $[0,T] \subset [0,T^*)$. А это противоречит последнему утверждению теоремы 4 поскольку для любого $T \in (0,T_*)$ найдутся векторы $u_0 \in (H_0(T))^\perp$ (см. [15]). Теорема 3 доказана.

Аппроксимативные свойства задачи Коши, отраженные в теоремах 4 и 5, для линейного уравнения Шредингера является общим с аналогичным свойством задачи Коши для уравнений гидродинамики, исследуемым в работах [28] и [31]. В каждой из двух указанных работ изучается проблема конечности промежутка $[0,T_*(u_0))$ существования решения задачи Коши для уравнения гидродинамики и проанализировано поведение последовательности вязкостных решений, аппроксимирующих решение уравнений гидродинамики. В каждой их этих двух работ установлено, что на промежутке существования решения исследуемой задачи Коши имеет место сходимость последовательности решений $\{u_\varepsilon,\, \varepsilon \in (0,1),\, \varepsilon \to 0,\}$ вязкостных аппроксимаций уравнеия динамики без давления последовательностью уравнений типа Бюргерса к решению $u(t,x),\ (t,x) \in (0,T_*) \times R$, предельной задачи Коши для уравнения газодинамики. В работе [28] исследована задача Коши для описывающего динамику газа без давления уравнения Бюргерса и доказано, что существует такая точка $x_* \in R$ координатного пространства, что $u_\varepsilon(T_*,x_*) \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$, но при этом для всех $x \neq x_*$ существуют конечные пределы $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u(T_*,x)$. В работе [28] получены степенные оценки по параметру $\frac{1}{\varepsilon}$ стремления к бесконечности величины $u_\varepsilon(T_*,x_*)$.

В работе [31] получены аналогичные результаты об образовании точечных сингулярностей для поточечных пределов последовательности $u_\varepsilon(T_*,x)$ при $\varepsilon \to 0$ как в случае вязкостных аппроксимаций уравнениями типа Бюргерса, так и в случае дисперсионных аппроксимаций уравнениями третьего порядка типа Кортевега-де-Фриза с малым параметром ε при старшей производной. В работе [31] получены, во-первых степенные оценки по параметру $\frac{1}{\varepsilon}$ стремления к бесконечности величины $u_\varepsilon(T_*,x_*)$ и, во-вторых, оценки скорости стремления к бесконечности величины $u_\infty(T_*, x) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(T_*, x)$, $x \neq x_*$, при $x \to x_*$ по сравнению со степенями величины $(x - x_*)^{-1}$. Отметим, что в работе [31], также, как и в работах [35], [36], [40], предельный переход для последовательности регуляризованных решений $\{u_\varepsilon(t)\}$, $t > 0$, $\varepsilon \to 0$, используется для определения динамического преобразования, задаваемого задачей Коши для предельного уравнения, $[T_*, +\infty)$.

В указанных работах не проводилась оценка роста величины $\|u_\varepsilon(t)\|_{W_p^l}$ при $\varepsilon \to 0$ и $l > 0$, $p \geq 1$, или оценка нормы $\|u_\infty(T_*)\|_{W_q^l}$ при различных $q \geq 1$, $l > 0$. Теорема 5 настоящей работы устанавливает неограниченный рост при $\varepsilon \to 0$ величины $\|u_\varepsilon(t)\|_{W_2^1}$ при любом $t \geq T_*$, не детализируя при этом пространственное распределение особенностей.

Подобный эффект возникает и при изучении уравнени Фоккера-Планка $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = -\mathbf{\Delta} u(t,x) + V u(t,x)$, $t > 0$, $x \in R^d$, или уравнения Шредингера $i\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = -\mathbf{\Delta} u(t,x) + V u(t,x)$, $t > 0$, $x \in R^d$, с сингулярным потенциалом $V(x) = \frac{c}{|x|^2}$, $x \in R^d$. В работе [29] установлено, что если константа c превосходит константу Харди $C_H = (\frac{d-2}{2})^2$, то для любого ненулевого начального условия u_0 время существования решения T_* равно нулю. Поскольку причиной отсутствия решения задачи Коши является сингулярность потенциала, то для исследования задачи вместе с ней рассматривается семейство задач Коши с регуляризованными потенциалами $V_\varepsilon = \min(V, \frac{1}{\varepsilon})$, $\varepsilon \in (0,1)$, каждая из которых имеет решение $u_\varepsilon(t)$, $t \geq 0$. В работе установлено, что последовательность решений задач Коши для регуляризованного уравнения Фоккера-Планка стремится к бесконечности в том смысле, что $\forall\, t > 0, \forall\, x \in R^d \quad \lim_{\varepsilon\to +0} u_\varepsilon(t,x) = +\infty$. В той же ситуации последовательность значений $u_\varepsilon(t)$ решений задач Коши для регуляризованного уравнения Шредингера в произвольный момент времени $t > 0$ является равномерно ограниченной в пространстве $L_2(R^d)$ нормой начального условия $\|u_0\|_{L_2(R^d)}$. Тем не менее, как и в примере из теоремы 5, имеет место следующая градиентная катастрофа последовательности регуляризованных решений: для любого $t > T_* = 0$ выполняется равенство $\lim_{\varepsilon\to 0} \||\nabla u_\varepsilon(t)|\|_{L_2(R^d)} = +\infty$.

Теорема 4 дает описание динамики предельной задачи Коши на промежутке $[T^*, +\infty)$ с точки зрения функционалов на пространстве начальных данных H, задающих слабую топологию пространства H. В топологии нормы пространства H, задаваемой всеми непрерывными на H функционалами, имеет место расходимость последовательности регуляризованных динамических преобразований. В промежуточной топологии, задаваемой всеми непрерывными линейными и квадратичыми функционалами на пространстве H, установлено отсутствие секвенциальной компактности последовательности регуляризованных решений (см. работу [42]). Но установлена компактность топологическая и дано параметрическое описание множества предельных точек последовательности посредством конечно-аддитивных мер на множестве параметров регуляризации (см. [22]).

Энергетический подход к определению регуляризации нелинейноо уравнения Шредингера. Отметим, что как в задачах с сингулярным потенциалом, так и в задачах с вырождением проблема ограниченности промежутка существования решения связана с неограниченностью функционала энергии как сверху, так и снизу. Как показывают рассмотренные выше примеры, необходимым условием существования режима с обострением для задачи Коши является отсутствие полуограниченности функционала энергии на множестве начальных данных задачи Коши, иными словами, отсутствие компактности уровня постоянной энергии в пространстве начальных данных задачи Коши. Это делает возможным во-первых, блуждание траектории решения задачи Коши по энергетической поверхности и, во-вторых, уход траектории за конечное время на бесконечность пространства начальных данных задачи Коши.

Поэтому в качестве регуляризации режимов с обострением расматриваются такие последовательности задач Коши, для которых выполняются следующие условия:

1) Функционал энергии полуограничен и поверхности постоянной энергии компактны в пространстве начальных данных задачи Коши.

2) На каждом компакте в пространстве начальных данных задачи Коши имеет место сходимость последовательности регуляризованных функционалов энергии к функционалу энергии задачи с сингулярностью.

Действительно, в задаче с сингулярным потенциалом срезание сингулярности потенциала приводит к полуограниченности функционала энергии $E_\varepsilon(u) = \int\limits_{R^d}(|gradu(x)|^2 + V_\varepsilon(x)|u(x)|^2)dx$ таким образом, что выполняются требования 1), 2). Поведение последовательности решений регуляризованных задач исследовано в работах [35], [36], [40]. В задачах с вырожденным оператором равномерно эллиптическая самосопряженная регуляризация также делает полуограниченным снизу функционал энергии

$E_\varepsilon(u) = (u, \mathbf{L}_\varepsilon u)$, $u \in D(\mathbf{L}_\varepsilon)$, а поведение последовательности решений регуляризованных задач исследовано в работах [20], [42], [22].

В работе [24] исследована регуляризация задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера

$$i\frac{d}{dt}u = \mathbf{\Delta} u + c|u|^p u,\ t > 0,\ x \in B_1(R^d) \equiv \{x \in R^d :\ |x| < 1\}; \tag{27}$$

$$u|_{\partial B_1} = 0; \tag{28}$$

$$u(+0) = u_0,\ u_0 \in H = L_2(B_1(R^d)), \tag{29}$$

для решений которой имеет место явление градиентой катастрофы за конечное время ([45], [37]) и, как следствие, решение которой определено лишь на конечном временном промежутке $[0, T_*)$.

Поскольку причиной явления градиентной катастрофы является неораниченность поверхностей уровня функционала энергии в пространстве Соболева $W_2^1(B_1(R^d))$

$$E(u) = \int\limits_{B_1(R^d)} [\frac{c}{p+2}|u|^{p+2} - \frac{1}{2}|\nabla u|^2]dx, \tag{30}$$

(неограниченность поверхности уровня функционала энергии приводит к тому, что неограниченный рост L_2-нормы градиента решения при $t \to T_* - 0$ компенсируется неограниченным ростом при $t \to T_* - 0$ потенциальной энергии $c\|u\|_{L_{p+2}}^{p+2}$ при условии постоянства энергии E), то в качестве регуляризующих аппроксимаций рассмотрим регуляризацию нелинейного уравнения Шредингера четвертого порядка, то есть последовательность нелинейных уравнений Шредингера

$$i\frac{d}{dt}u = \mathbf{L}_\varepsilon u \equiv \mathbf{\Delta} u + c|u|^p u + \varepsilon^2 \mathbf{\Delta}^2 u,\ t > 0, \quad \varepsilon \in (0,1), \tag{31}$$

$$D(\mathbf{L}_\varepsilon) = \{u \in W_2^4(B_1) :\ u|_{\partial B_1} = 0;\ \Delta u|_{\partial B_1} = 0\}, \tag{32}$$

где $\varepsilon \in (0,1)$ – параметр регуляризации. Тогда регуляризованный функционал энергии

$$E_\varepsilon(u) = \int\limits_{R^d} [\frac{c}{p+2}|u|^{p+2} - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}|\mathbf{\Delta} u|^2]dx,\ \varepsilon \in (0,1), \tag{33}$$

при каждом $\varepsilon \in (0,1)$ полуограничен снизу, что, как показано ниже, приводит к компактности поверхностей уровней регуляризованного функционала энергии E_ε в пространстве H.

Действительно, при каждом $\varepsilon \in (0,1)$ справедливо равенство $E_\varepsilon(u) = \int\limits_{B_1(R^d)} [\frac{c}{p+2}|u|^{p+2} - \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}|u|^2 + \frac{1}{2}|\varepsilon^{-1}u + \varepsilon\Delta u|^2]dx$, согласно которому $E_\varepsilon(u) \geq -\varepsilon^2\|u\|_H^2$. На основании полуограниченности снизу функционала энергии получаем ограниченность его поверхностей уровня в пространстве Соболева $W_2^4(\Omega)$ и, следовательно, их компактность в пространстве H. В работе [24] установлено следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть $d \leq 3$. Тогда для любого $u_0 \in \dot{W}_2^2(B_1(R^d))$ задача Коши (31), (32), (29) имеет единственное решение на произвольном отрезке $[0,T]$, $T > 0$. Последовательности решений регуляризованных $\{u_\varepsilon\}$ задач сходится при $\varepsilon \to 0$ к решению задачи Коши (27)-(29) по норме пространства H равномерно на любом отрезке $[0,T] \subset [0,T_*)$. Последовательность $\{u_\varepsilon\}$ не содержит подпоследовательности, сходящейся в пространстве $C([0,T],H)$ при $T \geq T_*$.*

Локальное существование решения доказывается с помощью принципа сжимающих отображений и с использованием теоремы Соболева о вложении пространства $W_2^2(B_1(R^d))$ в пространство $C(B_1(R^d))$ при $d \leq 3$, а продолжимость решения на произвольный отрезок следует из постоянства значения функционала энергии на решении и его полуограниченности на пространстве $W_2^2(B_1(R^d))$. Сходимость последовательности $\{u_\varepsilon\}$ доказывается методами, близкими к доказательству теоремы 2. Из работы [39] следует отсутствие подпоследовательностей, сходящихся в пространстве $C([0,T],H)$ при $T \geq T_*$.

Несмотря на отсутствие подпоследовательностей, сходящихся в пространстве $C([0,T],H)$ при $T \geq T_*$, последовательность регуляризованных решений $\{u_\varepsilon\}$ определена на любом отрезке $[0,T]$, $T > T_*$ и является равномерно по $\varepsilon \in (0,1)$ ограниченной в пространстве $C([0,T],H)$. Поэтому множество ее предельных точек в слабой топологии, также, как и множество предельных точек последовательности регуляризованных операторов плотности, соответствующих векторам $u_\varepsilon(t)$ пространства H, не пусты и могут быть описаны методами работ [21], [22].

Заключительные замечания. Рассмотренные примеры задач Коши для эволюционных уравнений с конечным временем существованием решения позволяют предположить, что для описания динамики системы на большем промежутке времени требуется рассмотрение окрестности динамической системы, задаваемой задачей Коши, и обобщение понятия решения задачи. Факт разрушения решения в некоторый момент времени означает отсутствие однозначной определенности динамики системы. В этом случае естественно расширить понятие решения до многозначных отображений с заданным распределением вероятности по множеству значений, т.е. до случайных процессов. Следовательно, при таком подходе нарушение корректности задачи Коши есть проявление свойств случайности в динамике системы.

Каждая задача Коши порождает семейство динамических преобразований пространства начальных данных задачи Коши X (которое является однопараметрической полугруппой в банаховом пространстве X в случае корректной задачи Коши с независящим от времени оператором $\mathbf{L}$). Каждой корректной задачей Коши может быть сопоставлена мера ν на пространстве Y, в котором ищутся решения задачи Коши – банаховом пространстве Y отображение временного промежутка $[0, T)$ в пространство X начальных данных задачи Коши. Для корректной задачи Коши мера ν – атомарная мера, носитель которой сосредоточен на решении задачи Коши. Кроме того, согласно результатам работ [25], [24], [44] задание полугруппы динамических преобразований для класса задач Коши равносильно заданию меры μ на пространстве отображений временного промежутка $[0, T)$ в координатное пространство Ω, функциями на котором являются начальные данные задачи Коши – элементы пространства X. Тогда решение задачи Коши определяется как среднее значение функционала на множестве отображений временного промежутка в координатное пространство по указанной мере μ.

Предложенный переход от решений к соответствующим им мерам позволяет свести изучение предельных переходов в пространстве решений задачи Коши к исследованию предельных переходов в пространстве мер. Тогда каждой задаче Коши может быть сопоставлена предельная мера, возникающая как предельная точка последовательности мер, порождаемых регуляризованными корректными задачами Коши. Такой объект и может служить расширением понятия решения на случай задачи Коши, допускающей возникновение особенностей. Следует отметить, что

1. Компактность последовательности аппроксимирующих мер следует из теоремы Прохорова;

2. Предельная мера на множестве отображений временного промежутка в пространство начальных данных задачи Коши Y может представлять собой не атомарную меру, а некоторое распределение вероятности на пространстве решений задачи Коши;

3. Предельная мера на множестве отображений временного промежутка

в координатное пространство может, в отличие от соответствующих коррекным задачам Коши мер, не порождать полугруппу посредством процедуры вычисления средних значений по предельной мере функционалов на пространстве таких отображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богачев В.И., Крылов Н.В., Рекнер М., Эллиптические и параболиеские уравнения для мер// УМН. 2009. Т. 64, № 6. С. 5-116.
2. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Нука. Физматлит. 1998.
3. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
4. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Режимы с обострением. М.: Наука, 1987.
5. Жиков В.В. К проблеме предельного перехода в дивергентных неравномерно эллиптических уравнениях// Функ. ан. и его прил. 2001. Т. 35, № 1. С. 23-39.
6. Захаров В.Е., Шабат А.Б. ЖЭТФ, 1972. Т. 34. С. 62-69.
7. Козлов В.В. Динамика систем с неинтегрируемыми связями// Вестник МГУ, сер. 1. 1982. 1. № 3. С. 92–100.
8. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1967.
9. Кружков С.Н. Лекции по уравнениям с частными производными. М.: МГУ, 1970.
10. Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных// Тр. МИАН. 2001. Т. 234.
11. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
12. Олейник О.А. О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой.// Матем. Сб. 1966. Т. 69(111), № 1. С. 111-140.

13. Олейник О.А., Радкевич Е.В., Уравнения с неотрицательной характеристической формой, Москва-Ижевск, Современная Математика, 2002.

14. Орлов Ю.Н. Основы квантования вырожденных динамических систем. М: МФТИ, 2004. - 236 с.

15. Сакбаев В.Ж. Аппроксимационные и вариационные методы регуляризации некорректных задач// Доклады РАН. 2008. Т. 419, № 2. С. 174-178.

16. Сакбаев В.Ж. О постановке задачи Коши для уравнения Шредингера, вырождающегося на полупространстве// Журнал Выч. Мат. и Матем. Физ. 2002. Т. 42, № 11. С. 1700-1711.

17. Сакбаев В.Ж. О функционалах на решениях задачи Коши для уравнения Шредингера с вырождением на полупрямой// Журнал Выч. Мат. и Матем. Физ. 2004. Т. 44, № 9. С. 1654-1673.

18. Сакбаев В.Ж. О многозначных отображениях, задаваемых регуляризацией уравнения Шредингера с вырождением// Журнал Выч. Мат. и Матем. Физ. 2006. Т. 46, № 4. С. 682-698.

19. Сакбаев В.Ж. О задаче Коши для уравнения Шредингера с генератором переменного типа// Дифф. Уравнения. 2007. Т. 43, № 8. С. 1127-1143.

20. Сакбаев В.Ж. О спектральных аспектах регуляризации задачи Коши для вырожденного уравнения// Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 261. С. 258-267.

21. Сакбаев В.Ж. О динамике вырожденной квантовой системы в пространстве функций. интегрируемых по конечно-аддитивной мере// Труды МФТИ. 2009. Т. 1, № 4. С. 126-147. (www.mipt.ru/nauka/trudy/N4.html)

22. Сакбаев В.Ж. Об усреднении квантовых динамических полугрупп// ТМФ. 2010. Т. 164. N 3. С. 455-463.

23. Сакбаев В.Ж. Разрушение решений задачи Коши для линейного и нелинейного уравнений Шрединера// Вестник СамГТУ. Направлено в редакцию.

24. Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Диффузия и квантовая динамика частицы с массой, зависящей от координаты// Доклады РАН. 2012. Т. 445, № 1, стр. 20-24.

25. Смолянов О.Г., Шавгудидзе Е.Т. Континуальные интегралы. М.: Наука, 1990.

26. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ГИФМЛ, 1961.

27. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука. 1976.

28. Albeverio S., Rozanova O. The non-viscous Burgers equations associated with random position in coordinate space: a threshold for blow up behaviour// Math. Models and Methods in Applied Sciences. 2009. V. 19, N 5. P. 1-19.

29. Baras P., Goldstein J. The heat equation with a singular potential// Trans. of Amer. Math. Soc. 1984. V. 284, N 1. P. 121-139.

30. Di Perna R., Lions P. Ordinary differential equation, transport theory and Sobolev spaces// Invent. Math. 1989. V. 98. P. 511-547.

31. Dubrovin B. Hamiltonian PDEs: deformation, integrability, solutions// J. Phys. A, Math. Theor. 2010. V. 43. P. 434-453.

32. Darwin C.G. Phil. Mag. 1920. V.39. P.357.

33. Fichera G. On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order// Boundary problems in differential equations, The University of Wisconsin Press, Madison, 1960, P. 97-120.

34. Fujita H. J. Fac. Sci. Univ. Proc. Tokio, Sec. 1A. 1966. V. 13. 109-124.

35. Galaktionov V.A., Vazquez J. Necessary and sufficient conditions for complete blow-up and extinction for one-dimensional quasilinear heat equation// Arch. Rat. Mech. Anal. 1995. V. 129. P. 225-244.

36. Galaktionov V.A., Kamotski I.V. On nonexistance of Baras-Goldstein type for higher-order parabolic eqations with singular potential. Trans. AMS. 2010. V. 362. N 8. P. 4117-4136.

37. Glassey R.T. On the blowing up of solution to the Cauchy Problem for nonlinear Schrodinger equations. J. Math. Phys. 1977. V. 18:9. P. 1794-1797.

38. Kennedy F.J. Approximately Relativistic Interactions.// AJP. 1972. V.40. P.63-74.

39. Merle F., Tsutsumi Y. L_2 convergence of blow-up solutions for nonlinear Schrodinger equation with critical power nonlinearity// J. of Differ. Equat. 1990. V. 84. P. 205-214.

40. Mizoguchi N., Quiros F., Vazquez J.L. Multiply blow-up solution for a porous medium equation with reaction. Math. Ann. 2007.

41. Pavlotsky I.P., Strianese M., Toscano R. Prolongation of the integral curve on the singular set via the first integral.// J. of Interdisciplinary Math. 1999. V.2. N. 2-3. P.101-119.

42. Sakbaev V.Zh. Stochastic properties of degenerated quantum systems, Infinitely dimensional analysis and quantum probabilities. 2010. V. 13 N. 1 P. 65-85.

43. Sakbaev V.Zh. On the variational description of the trajectories of averaging quantum dynamical maps, P-adic numbers, ultrametric analysis and appl. 2012. V. 4. N. 2. P. 120-134.

44. Smolyanov O.G., Shamarov N.N. Feynman-Kac and Feynman formulae for semigroups of operators// Functional Analysis and Other Mathematics. – Berlin, New-York: Springer. 2012. P. 1-12.

45. Zhidkov P.E. Korteweg-de Vries and Nonlinear Schrodinger Eqations: Qualitative Theory. Lecture Notes in Math. V. 1756. Springer. 2001.