



Рыков Ю.Г., Лысов В.Г.,
Феодоритова О.Б.

Возникновение
неклассических скачков в
одной модели течения
двухкомпонентной,
двухскоростной сплошной
среды

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Рыков Ю.Г., Лысов В.Г., Феодоритова О.Б. Возникновение неклассических скачков в одной модели течения двухкомпонентной, двухскоростной сплошной среды // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 74. 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-74>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М. В. КЕЛДЫША

Ю. Г. Рыков, В. Г. Лысов, О. Б. Феодоритова

**Возникновение неклассических скачков
в одной модели течения двухкомпонентной,
двухскоростной сплошной среды**

Москва — 2012

Ю. Г. Рыков, В. Г. Лысов, О. Б. Феодоритова. *Возникновение неклассических скачков в одной модели течения двухкомпонентной, двухскоростной сплошной среды*

Аннотация. В препринте формулируется простая модель течения двухкомпонентной, двухскоростной сплошной среды, которая подвергается воздействию мелкомасштабных флуктуаций. Показано, что в этом случае в модели возникают режимы, при которых образуются так называемые неклассические скачки. Эволюция таких скачков не определяется соотношениями Гюгонио. Указанный тип скачков изучается с аналитической, включая метод вязкой регуляризации, и с численной точек зрения.

Ключевые слова: двухкомпонентные течения, соотношения Гюгонио, устойчивость скачка, неклассические скачки

Yu. G. Rykov, V. G. Lysov, O. B. Feodoritova. *The emergence of non-classic shocks in a flow model of two-component, two-velocity medium*

Abstract. In the preprint the simple model of the flow of two-component, two-velocity medium, which flows under the action of small scale fluctuations, is formulated. It is shown that in the case under consideration the specific regimes emerge in the model. In such regimes so called non-classic shocks propagate in the medium. The evolution of such shocks is not described by Hugoniot relations. This type of shocks is studied from the analytic, including the introduction of small viscosity regularization, and numerical points of view.

Key words: two-component flows, Hugoniot relations, shock stability, non-classical shocks

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 11-01-12082-офи_м, № 12-01-00203, № 12-01-33050, № 12-01-00988

Оглавление

Вводные замечания	3
Простейшая модель течения в двухкомпонентной, двухскоростной среде.....	4
Аналитическое исследование решений задачи Римана	7
Численное исследование решений задачи Римана	16
Заключение.....	19
Список литературы	20

Вводные замечания

Настоящая работа посвящена осмысливанию тех особенностей, которые могут возникнуть в математических моделях течений газовых (последующие рассмотрения можно применить не только к газовой среде, а и к любой подвижной сплошной среде, но для определенности будем здесь говорить о газах) сред в предположении их многокомпонентности, а также в предположении, что эти компоненты могут иметь различные газодинамические характеристики. Рассмотрим простейшую модель такой среды, эволюция которой будет описываться только уравнениями сохранения массы и импульса (в настоящий момент представляется, что использование уравнения для сохранения энергии не приведет к появлению существенно новых эффектов). Даже в такой модельной постановке оказывается, что возможны режимы течения, которые не характерны для уравнений типа газовой динамики. А именно, в некотором диапазоне параметров возникают так называемые *неклассические скачки*, распространение которых может не описываться обычными соотношениями Гюгонио. При введении в уравнения регуляризации с помощью исчезающей вязкости функции, соответствующие скачкам, могут иметь ярко выраженный «солитонобразный» характер вместо обычного монотонного (или близкого к монотонному) сглаживания.

Неклассические скачки были обнаружены достаточно давно – в конце 70-х годов прошлого века, однако в течение более десяти лет не привлекали к себе достаточно внимания. Ситуация изменилась, когда было обнаружено, что такого рода скачки могут возникать и в строго гиперболических, сильно нелинейных системах. Единственное ограничение состояло в том, что такие скачки должны иметь достаточно большую интенсивность. Этот результат был опубликован в [1], [2]. В указанных работах было обнаружено, что такого рода необычные скачки возникают таким образом, что на них приходится большее число характеристик, чем это необходимо для устойчивости скачка (см. [3] по поводу формулировок условий устойчивости разрывов). Такие скачки были названы «*пересжатými*» (*overcompressive*). Это означает, что не все условия Гюгонио должны быть выполнены, т.е. соответствующий разрыв не удовлетворяет системе уравнений в слабом смысле. Однако было показано, что такой разрыв является в некотором смысле пределом «вязкой» регуляризации. Тем не менее, попытки построить в каком-либо виде теорию, включающую подобные разрывные решения, успеха не имели.

Поскольку, как известно, вид слабого решения зависит от той формы, в которой записана данная система уравнений, то в [4] было высказано предположение, что неклассические скачки появляются оттого, что уравнения записаны не в правильной форме. К тому же достаточно ясные и естественные физические примеры отсутствовали. Таким образом, проблема была отставлена в сторону.

Отметим, что в литературе известны и так называемые «недосжатые» (undercompressive) скачки, т.е. такие, когда количество характеристик, приходящих на скачок, недостаточно. Тогда, кроме соотношений Гюгонио, необходимо требовать выполнения некоторых дополнительных соотношений, которые называют «кинетическими» и пытаются вывести из некоторых внешних физических соображений. Изложение соответствующей теории можно найти, например, в [5].

В предлагаемом препринте построена некоторая достаточно естественная модель течения в двухкомпонентной среде. При некоторых режимах в модели также достаточно естественным образом возникают неклассические «пересжатые» скачки, но со свойствами, отличными от найденных в [1], [2]. Указанные скачки исследуются с теоретической и численной точек зрения. Осложняющим обстоятельством является то, что полученная в препринте система уравнений не является строго гиперболической, поэтому полное и строгое исследование затруднено. По этой причине препринт имеет иллюстративный характер. Заметим, что, как будет видно из дальнейшего, наличие неклассических скачков у полученной системы уравнений не связано с ее нестрогой гиперболичностью. Основные понятия теории систем законов сохранения можно найти, например, в [6], [7].

Простейшая модель течения в двухкомпонентной, двухскоростной среде

Предположим, что имеется двухкомпонентная, двухскоростная среда, которая может быть описана только законами сохранения массы и импульса и которая, соответственно, обладает плотностями ρ_1 , ρ_2 и скоростями u_1 , u_2 . При этом для общности постановки задачи будем считать, что и давления компонент различаются, обозначим эти давления как P_1 , P_2 . Тогда система уравнений имеет обычный вид системы для двухкомпонентной смеси (два уравнения неразрывности и два уравнения для сохранения импульса)

$$\begin{aligned}\partial_t \rho_1 + \partial_x [\rho_1 u_1] &= 0, \\ \partial_t \rho_2 + \partial_x [\rho_2 u_2] &= 0, \\ \partial_t [\rho_1 u_1] + \partial_x [\rho_1 (u_1)^2] + \partial_x P_1(\rho_1, \rho_2) &= 0, \\ \partial_t [\rho_2 u_2] + \partial_x [\rho_2 (u_2)^2] + \partial_x P_2(\rho_1, \rho_2) &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_1 + \rho_2, \\ \rho U_1 &= \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2.\end{aligned}$$

Складывая попарно уравнения выше, получим

$$\partial_t \rho + \partial_x [\rho U_1] = 0,$$

$$\partial_t [\rho U_1] + \partial_x \left[\rho (U_1)^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} (u_1 - u_2)^2 \right] + \partial_x (P_1 + P_2) = 0.$$

Пусть теперь в среде присутствует некоторый мелкомасштабный флуктуационный механизм, который влияет на концентрацию компонент в среде. Обозначим через $0 \leq c \leq 1$ концентрацию второго компонента, то есть $\rho_2 = c\rho$. Тогда из второго уравнения неразрывности в (1) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t (c\rho) + \partial_x (c\rho u_2) = \partial_t (c\rho) + \partial_x (c\rho U_1) + \partial_x (\rho_2 (u_2 - U_1)) = \\ &= c [\partial_t \rho + \partial_x (\rho U_1)] + \rho [\partial_t c + U_1 \partial_x c] + \partial_x \left[\frac{\rho_2 \rho_1}{\rho} (u_2 - u_1) \right]. \end{aligned}$$

Учитывая полученное выше уравнение неразрывности для смеси со средними параметрами ρ, U_1 , из (1) получим следующую систему уравнений (немного изменив порядок написания):

$$\partial_t \rho + \partial_x [\rho U_1] = 0,$$

$$\partial_t [\rho U_1] + \partial_x \left[\rho (U_1)^2 + P(\rho_1, \rho_2) \right] = -\partial_x \left[\frac{\rho_2 \rho_1}{\rho} (u_2 - u_1)^2 \right],$$

$$\partial_t [c\rho u_2] + \partial_x \left[c\rho (u_2)^2 + P_2(\rho_1, \rho_2) \right] = 0,$$

$$\partial_t c + U_1 \partial_x c = -\frac{1}{\rho} \partial_x \left[\frac{\rho_2 \rho_1}{\rho} (u_2 - u_1) \right],$$

(2)

где $P = P_1 + P_2$.

Будем предполагать (на данном уровне описания проблемы), что скорости u_1, u_2 не сильно отличаются одна от другой. Тогда члены в правой части представляют собой диффузионные процессы, при этом правой частью во втором уравнении можно пренебречь (на следующем уровне детализации это выражение можно заменить на некоторую «эффективную» силу), а диффузию в последнем уравнении (диффузионный поток $j = \rho_1 \rho_2 (u_2 - u_1) / \rho$) описать стандартным образом. А именно, например, в [8] диффузионный поток определяется так:

$$j = -L(\partial_x \mu_1 - \partial_x \mu_2),$$

где L представляет собой кинетический коэффициент, а μ_1, μ_2 – химические потенциалы первой и второй компонент соответственно. Далее, введем в рассмотрение функционал свободной энергии Θ в соответствии со следующей формулой (см. [9]):

$$\Theta = \int \left[\Phi(c) + K(\partial_x c)^2 \right] dV.$$

Здесь указана только существенная сейчас для нас зависимость от концентрации c . Коэффициент K (может зависеть от концентрации) характеризует вклад пространственно-корреляционных эффектов в свободную энергию, $\Phi(c)$ представляет собой плотность свободной энергии однородной смеси состава c , а V – контрольный объем. Тогда разность химических потенциалов можно вычислить с помощью понятия вариационной производной по формуле

$$\mu_1 - \mu_2 = \frac{1}{V} \frac{\delta \Theta}{\delta c} = \partial_c \Phi - 2K \partial_{xx}^2 c - \partial_c K \cdot (\partial_x c)^2. \quad (3)$$

Подставляя в последнее уравнение (2) выражение для диффузионного потока j и используя формулу (3), приходим к следующему уравнению для c

$$\partial_t c + U_1 \partial_x c = \frac{1}{\rho} \partial_x \left[L \cdot \partial_x \left(\partial_c \Phi - 2K \partial_{xx}^2 c - \partial_c K \cdot (\partial_x c)^2 \right) \right].$$

Далее для простоты считаем, что K не зависит от c , тогда получим следующую модельную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x [\rho U_1] &= 0, \\ \partial_t [\rho U_1] + \partial_x \left[\rho (U_1)^2 + P(\rho_1, \rho_2) \right] &= 0, \\ \partial_t [c \rho u_2] + \partial_x \left[c \rho (u_2)^2 + P_2(\rho_1, \rho_2) \right] &= 0, \\ \partial_t c + U_1 \partial_x c &= \frac{1}{\rho} \partial_x \left[L \cdot \partial_x \left(\partial_c \Phi - 2K \partial_{xx}^2 c \right) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Зависимость потенциала Φ и, следовательно, его производной $\partial_c \Phi \equiv F$ от концентрации определяется способом взаимодействия компонент в смеси.

Система (4) представляет собой, вообще говоря, систему уравнений высокого порядка. Поэтому изучим вначале случай, когда концентрация c постоянна, то есть когда на определенных промежутках времени состав смеси мало меняется. Не уменьшая общности, положим $c=1$. Кроме того, предположим, что давления P и P_2 зависят только от общей плотности $\rho > 0$. Тогда приходим к следующей модельной системе уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x [\rho U_1] &= 0, \\ \partial_t [\rho U_1] + \partial_x \left[\rho (U_1)^2 + P(\rho) \right] &= 0, \\ \partial_t [\rho U_2] + \partial_x \left[\rho (U_2)^2 + P_2(\rho) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь для единообразия обозначений u_2 обозначено как U_2 . Для исследования свойств решений получившейся системы (5), которая, как оказывается, является гиперболической системой уравнений, введем обозначения $m_1 \equiv \rho U_1$, $m_2 \equiv \rho U_2$.

Итак, изучим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho + \partial_x m_1 &= 0, \\
\partial_t m_1 + \partial_x \left[m_1^2 / \rho + P(\rho) \right] &= 0, \\
\partial_t m_2 + \partial_x \left[m_2^2 / \rho + P_2(\rho) \right] &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Система (6) является гиперболической системой уравнений (хотя и не строго гиперболической). Она обладает следующими собственными числами:

$$\lambda_1 = U_1 - \sqrt{P'}, \quad \lambda_2 = U_1 + \sqrt{P'}, \quad \lambda_3 = 2U_2 \tag{7}$$

и соответственными правыми собственными векторами

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= \left(1, \quad U_1 - \sqrt{P'}, \quad \frac{U_2^2 - P_2'}{2U_2 - U_1 + \sqrt{P'}} \right), \\
\vec{r}_2 &= \left(1, \quad U_1 + \sqrt{P'}, \quad \frac{U_2^2 - P_2'}{2U_2 - U_1 - \sqrt{P'}} \right), \\
\vec{r}_3 &= (0, \quad 0, \quad 1).
\end{aligned} \tag{8}$$

Отметим, что всегда $\lambda_2 > \lambda_1$ при $\rho > 0$. При этом в фазовом пространстве возникают две поверхности, где имеет место совпадение корней $\Lambda_2 = \left\{ (\lambda_3 = \lambda_2) \Leftrightarrow 2U_2 = U_1 + \sqrt{P'} \right\}$ и $\Lambda_1 = \left\{ (\lambda_3 = \lambda_1) \Leftrightarrow 2U_2 = U_1 - \sqrt{P'} \right\}$.

Поверхность Λ_2 всегда лежит выше поверхности Λ_1 относительно переменной U_2 , пересекаются эти поверхности только при $\rho = 0$. При этом вырождения базиса собственных векторов не происходит, собственные вектора всегда образуют полную систему.

Итак, для изучения свойств решений системы (6) рассмотрим классическую задачу Римана – теоретически и численно.

Аналитическое исследование решений задачи Римана

Задачей Римана для гиперболических систем называется задача Коши (т.е. задача, при которой задаются только начальные условия, без краевых условий) с начальными данными в виде ступеньки. То есть в начальный момент времени, например, для системы (6), при $x < 0$ неизвестные функции ρ, m_1, m_2 принимают некоторые постоянные значения ρ^-, m_1^-, m_2^- , а при $x > 0$ эти же функции принимают, вообще говоря, другие, но также постоянные значения ρ^+, m_1^+, m_2^+ .

Согласно стандартной теории решения задачи Римана выражаются функциями, зависящими только от отношения $\frac{x}{t}$, которые должны быть

составлены из волн разрежения и ударных волн. (По-видимому, первое общее изложение указанной теории приведено в [3], более подробное изложение можно найти, например, в книгах [6], [7].) Рассмотрим эту конструкцию для конкретного случая системы (6).

- Волны разрежения

Волны разрежения бывают трех семейств и определяются следующим образом:

$$(\dot{\rho} \quad \dot{m}_1 \quad \dot{m}_2)_i \square r_i; \lambda_i = x/t; i=1, 2, 3. \quad (9)$$

Учитывая выражения (8), получим

$$\begin{aligned} i=1: \quad \frac{dm_1}{d\rho} &= \frac{m_1}{\rho} - \sqrt{P'}; \quad \frac{dm_2}{d\rho} = \frac{(m_2/\rho)^2 - P_2'}{2(m_2/\rho) - m_1/\rho + \sqrt{P'}}; \quad \frac{x}{t} = \lambda_1 \equiv \frac{m_1}{\rho} - \sqrt{P'}; \\ i=2: \quad \frac{dm_1}{d\rho} &= \frac{m_1}{\rho} + \sqrt{P'}; \quad \frac{dm_2}{d\rho} = \frac{(m_2/\rho)^2 - P_2'}{2(m_2/\rho) - m_1/\rho - \sqrt{P'}}; \quad \frac{x}{t} = \lambda_2 \equiv \frac{m_1}{\rho} + \sqrt{P'}; \quad (10) \\ i=3: \quad \dot{m}_2 &= 1; \quad \frac{x}{t} = \lambda_3 \equiv 2\frac{m_2}{\rho}. \end{aligned}$$

Интегрируя первые уравнения (10) и помня о том, что соответствующее собственное число должно возрастать при росте x/t , получим

$$\begin{aligned} i=1: \quad \frac{m_1}{\rho} + R(\rho) &= const_1; \quad \frac{dm_2}{d\rho} = \frac{(m_2/\rho)^2 - P_2'}{2(m_2/\rho) - const_1 + R(\rho) + \sqrt{P'}}; \\ \frac{x}{t} &= const_1 - R(\rho) - \sqrt{P'}; \quad \rho \text{ убывает}; \\ i=2: \quad \frac{m_1}{\rho} - R(\rho) &= const_2; \quad \frac{dm_2}{d\rho} = \frac{(m_2/\rho)^2 - P_2'}{2(m_2/\rho) - const_2 - R(\rho) - \sqrt{P'}}; \quad (11) \\ \frac{x}{t} &= \lambda_2 \equiv const_2 + R(\rho) + \sqrt{P'}; \quad \rho \text{ возрастает}; \\ i=3: \quad \rho &= const_3; \quad m_1 = const_4; \quad \frac{x}{t} = 2\frac{m_2}{\rho}; \quad m_2 \text{ возрастает}, \end{aligned}$$

где $R(\rho) \equiv \int_0^\rho \frac{\sqrt{P'(s)}}{s} ds$.

Вид волн разрежения окончательно не выписывается в аналитической форме, поэтому поведение траекторий в фазовом пространстве будет проиллюстрировано ниже с помощью численного расчета.

- *Ударные волны*

Ударные волны также образуют три семейства, которым в фазовом пространстве соответствуют три криволинейные траектории, проходящие через одну точку, по крайней мере, при разрывах умеренной силы (вообще говоря, для сильных скачков возможны несвязные компоненты). Эти три семейства получаются из соотношений Гюгонио

$$\begin{aligned}\dot{x}(\rho^+ - \rho^-) &= \rho^+ U_1^+ - \rho^- U_1^-; \\ \dot{x}(\rho^+ U_1^+ - \rho^- U_1^-) &= \rho^+ (U_1^+)^2 - \rho^- (U_1^-)^2 + P^+ - P^-; \\ \dot{x}(\rho^+ U_2^+ - \rho^- U_2^-) &= \rho^+ (U_2^+)^2 - \rho^- (U_2^-)^2 + P_2^+ - P_2^-.\end{aligned}\quad (12)$$

где \dot{x} представляет собой скорость разрыва, а знаки ‘+’ и ‘-’ обозначают значения справа ($x > 0$) и слева ($x < 0$) от линии разрыва. Траектории различных семейств различаются по значениям \dot{x} в точке (ρ^-, U_1^-, U_2^-) и условиям устойчивости, а именно

$$\begin{aligned}\text{первое семейство: } \dot{x}(\rho^-, U_1^-, U_2^-) &= \lambda_1^-, \\ \dot{x} &< \lambda_1^- < \lambda_2^- < \lambda_3^-, \\ \lambda_1^+ &< \dot{x} < \lambda_2^+ < \lambda_3^+; \\ \text{второе семейство: } \dot{x}(\rho^-, U_1^-, U_2^-) &= \lambda_2^-, \\ \lambda_1^- &< \dot{x} < \lambda_2^- < \lambda_3^-, \\ \lambda_1^+ &< \lambda_2^+ < \dot{x} < \lambda_3^+; \\ \text{третье семейство: } \dot{x}(\rho^-, U_1^-, U_2^-) &= \lambda_3^-, \\ \lambda_1^- &< \lambda_2^- < \dot{x} < \lambda_3^-, \\ \lambda_1^+ &< \lambda_2^+ < \lambda_3^+ < \dot{x}.\end{aligned}\quad (13)$$

Отметим, что, вообще говоря, траектории какого-либо семейства, полученные из системы (12), могут содержать в себе несвязные компоненты, которые не проходят через начальную точку.

Как мы уже говорили, несмотря на видимую простоту, решения задачи Римана для системы (6) не удастся получить в аналитической форме, поэтому приведем общий вид волн разрежения и ударных волн на основе расчетов в системе MATLAB.

Причем, заметим, что в формулах (7) и (8) выражений для собственных чисел и собственных векторов величина давления P_2 не играет особой роли на качественном уровне. Поэтому для расчета положим $P_2 \equiv 0$ и $P = \text{const} \cdot \rho$ (т.е., фактически, рассмотрим изотермический случай). Тем не менее, этот относительно простой случай сохраняет все качественные особенности общей ситуации. Фазовая конфигурация решений задачи Римана приведена на рис. 1.

На этом рисунке представлена конфигурация для системы уравнений с такими параметрами, чтобы была обеспечена наибольшая иллюстративность. На следующем рисунке будет приведена конфигурация, для которой проводились расчеты, описанные ниже.

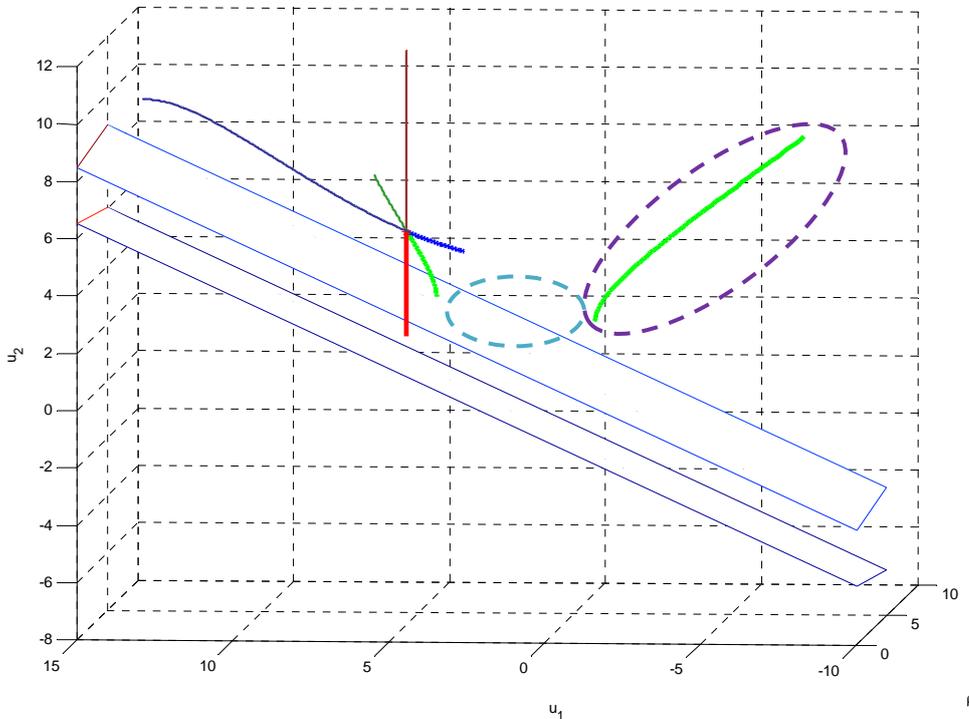


Рис. 1. Расположение траекторий волн различных семейств в фазовом пространстве

На рис. 1 показаны кривые для волн разрежения и устойчивых в смысле соотношений (13) ударных волн. При этом траектории первого семейства выделены синим цветом, траектории второго – зеленым, траектории третьего – красным. Жирные яркие линии соответствуют точкам в фазовом пространстве, в которые можно попасть из начальной точки с помощью ударных волн различных семейств. Тонкие блеклые линии соответствуют точкам, в которые можно попасть по волнам разрежения различных семейств. Также показаны две поверхности Λ_1 и Λ_2 , на которых совпадают два из трех собственных чисел изучаемой системы уравнений.

Отметим особенности строения изображенных на рис. 1 семейств траекторий. Волна разрежения первого семейства имеет регулярную траекторию и продолжается, как решение обыкновенного дифференциального уравнения, до границ расчетной области. Ударная волна первого семейства всюду устойчива и ведет себя классическим образом, она прерывается только по причине ограничения изображаемой области. Для ударной волны второго семейства существует несвязная компонента (на рисунке обведена сиреневой пунктирной линией). Кроме того, эта волна прерывается, благодаря тому, что условия устойчивости нарушаются. Поэтому образуется область (на рисунке условно обозначена голубой пунктирной линией), в которую нельзя попасть с

помощью классических решений задачи Римана – как оказывается, там формируется так называемый *неклассический скачок*. Волна разрежения второго семейства ведет себя регулярным образом, опять же она прерывается только по причине ограничения изображаемой области. Волна третьего семейства представляет собой просто ось U_2 . Хотя здесь также нарушаются формальные условия устойчивости при величинах U_2 , меньших некоторого порога, это не вызывает никаких особенностей в решениях (численные расчеты подтвердили это наблюдение).

Теперь приведем другой рис. 2, где изображены траектории подобные траекториям из рис. 1, но уже для системы, для которой проводились численные расчеты. На этом рисунке имеются дополнительные, по сравнению с рис. 1, особенности.

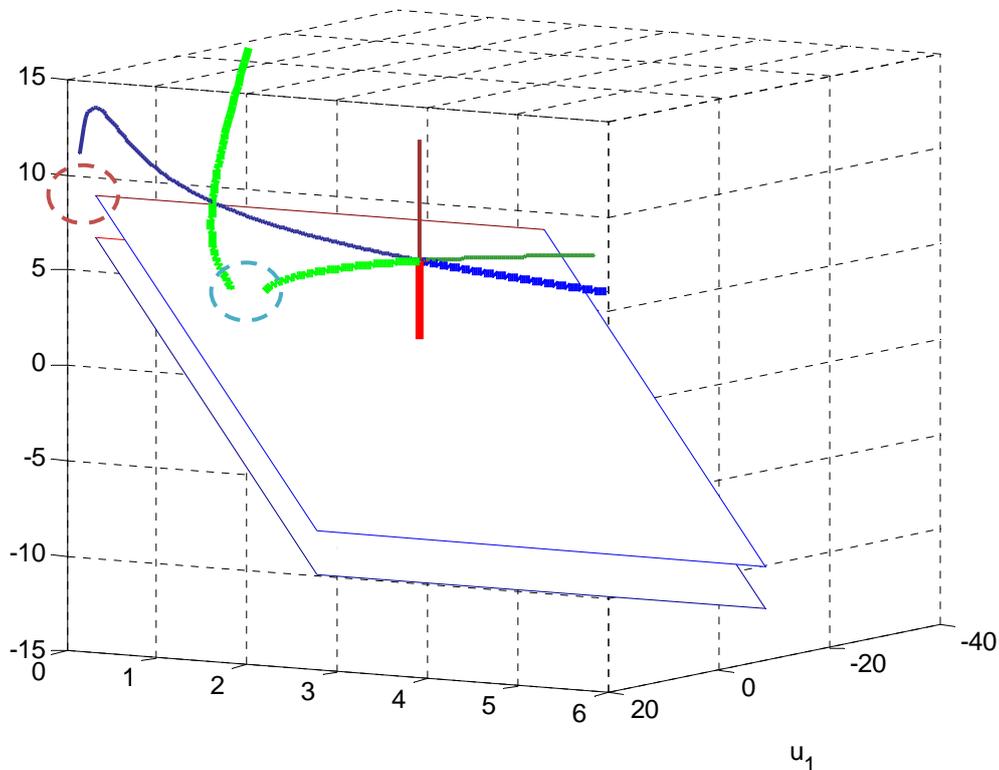
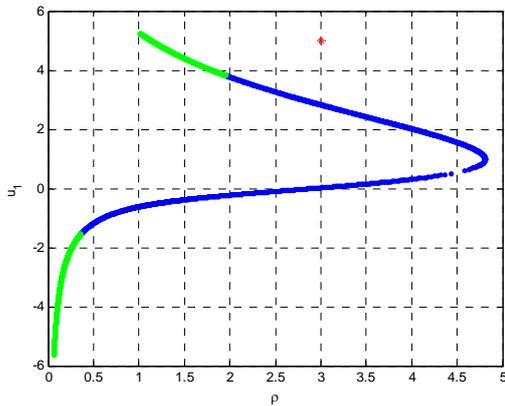


Рис. 2. Расположение траекторий волн различных семейств в фазовом пространстве для расчетной системы уравнений

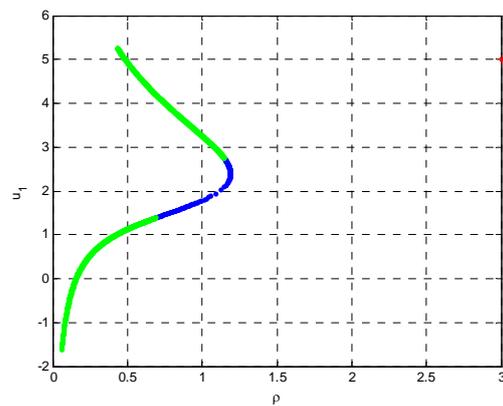
В дополнение к области, где появляется неклассический скачок подобно рис. 1 (схематически отмечено пунктирной голубой линией), появляется еще одна особенность. А именно, волна разрежения первого семейства на самом деле пересекает поверхность Λ_2 , и образуется некоторая область (символически отмечена темно-красным пунктиром; ввиду наличия особенности при обращении плотности ρ в нуль красиво нарисовать графики с четким выделением этой области не удалось), где стандартный способ

построения решения задачи Римана также неприменим. Вид решений в указанных областях получен численно ниже.

Наконец на рис. 3 приведем проекцию на плоскость (ρ, U_1) областей недостижимости (т.е. областей появления неклассических скачков) с участием скачков второго семейства (зоны, обведенные голубым пунктиром), отмеченных на рис. 1 и рис. 2.



Конфигурация рис. 1



Конфигурация рис. 2

Рис. 3. Области появления неклассического скачка, отмеченные голубым пунктиром на предыдущих рисунках

На рис. 3 изображена проекция (цилиндрической) области, в которую невозможно попасть из начальной точки (обозначена красной снежинкой) по классическому решению в связи с тем, что нарушаются условия устойчивости (13). Граница проекции этой области состоит из точек, в которых неравенства в условиях устойчивости обращаются в равенства. Синяя кривая соответствует состояниям, в которые можно попасть двумя скачками – сначала первого, а затем второго семейства; зеленая соответствует решению типа сначала волна разрежения первого семейства, затем ударная волна второго семейства.

Начальная точка, из которой исходят траектории на приведенных выше рисунках (значения с верхним индексом '-'), взята в области $\lambda_3 = 2U_2 > \lambda_2 = U_1 + \sqrt{P'}$. Это соответствует случаю естественного упорядочения собственных чисел.

Один из способов изучения гиперболических систем состоит в регуляризации задачи путем добавления малой вязкости. Не претендуя на полное исследование, попытаемся наметить лишь некоторые возможные подходы в этом направлении.

Следуя работе [10], добавим к уравнениям (6) вязкий член следующим образом:

$$W_t + F(W)_x = \varepsilon t W_{xx}.$$

Здесь $W = (\rho, m_1, m_2)^T$ - вектор искомых функций, а $F := \left(m_1, \frac{m_1^2}{\rho} + k\rho, \frac{m_2^2}{\rho} \right)^T$ - вектор потоков, для которого мы ввели дополнительные упрощающие предположения: $P_2(\rho) \equiv 0, P(\rho) = k\rho, k = const$. Имея в виду изучение задачи Римана, рассмотрим следующие начальные условия:

$$W(0, x) = \begin{cases} W^- := (\rho^-, m_1^-, m_2^-)^T, & x < 0; \\ W^+ := (\rho^+, m_1^+, m_2^+)^T, & x > 0. \end{cases}$$

Будем искать решение такой задачи в виде функции от автомодельной переменной $\xi = x/t$. Тогда $W(\xi)$ является решением краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{W} &= (A(W) - \xi I) \dot{W}, \\ W(-\infty) &= W^-, W(+\infty) = W^+, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\dot{W} = dW/d\xi$ и $A = F'_W$.

Предположим теперь, что граничные значения ρ^-, m_1^- и ρ^+, m_1^+ удовлетворяют следующим соотношениям Гюгио (см. (12)):

$$s(\rho^+ - \rho^-) = m_1^+ - m_1^-, \quad s(m_1^+ - m_1^-) = \left(\frac{m_1^2}{\rho} \right)^+ - \left(\frac{m_1^2}{\rho} \right)^- + k(\rho^+ - \rho^-). \quad (15)$$

В этом случае в окрестности точки $\xi = s$ функции ρ, m_1 равномерно ограничены по ε , а их производные не ограничены при $\varepsilon \rightarrow 0+$ (подробнее см. [11]). При этом характерный размер окрестности точки $\xi = s$, в которой происходит основное изменение ρ и m_1 , имеет порядок ε , положим $\tau = \frac{\xi - s}{\varepsilon}$.

Что касается функции m_2 , то она, вообще говоря, может быть неограниченной (случай неклассического скачка) и может иметь свой характерный масштаб, пусть $\eta = \frac{\xi - s}{\varepsilon^q}$. Следуя подходу, предложенному в [1], [2], подставим в уравнение (14) функцию вида:

$$\tilde{W}(\xi) = \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \left(\frac{\xi - s}{\varepsilon} \right) \\ \tilde{m}_1 \left(\frac{\xi - s}{\varepsilon} \right) \\ \varepsilon^{-r} \tilde{m}_2 \left(\frac{\xi - s}{\varepsilon^q} \right) \end{pmatrix}.$$

Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \tilde{\rho}''(\tau) = -\xi\tilde{\rho}'(\tau) + \tilde{m}_1\tilde{m}_1'(\tau), \\ \tilde{m}_1''(\tau) = \left(-\frac{\tilde{m}_1^2}{\tilde{\rho}^2} + k\right)\tilde{\rho}'(\tau) + \left(\frac{2\tilde{m}_1}{\tilde{\rho}} - \xi\right)\tilde{m}_1'(\tau), \\ \varepsilon^{1-2q}\tilde{m}_2''(\eta) = -\varepsilon^{-1-r}\frac{\tilde{m}_2^2}{\tilde{\rho}^2}\tilde{\rho}'(\tau) + \varepsilon^{-q-r}\left(\frac{2\tilde{m}_2}{\tilde{\rho}} - \varepsilon^r\xi\right)\tilde{m}_2'(\eta). \end{cases}$$

Для получения нетривиальных решений в последнем уравнении положим равными показатели ε у главных членов разложения по ε и приравняем эти члены. Возможны три случая.

1) $q = 1, r = 0$. В этом случае имеем $\tilde{m}_2''(\tau) = \left(\frac{\tilde{m}_2^2}{\tilde{\rho}}\right)' - s\tilde{m}_2'(\tau)$. Таким образом

\tilde{m}_2 является решением уравнения Риккати: $\tilde{m}_2' = \frac{\tilde{m}_2^2}{\tilde{\rho}} - s\tilde{m}_2 + C$. Этот случай соответствует устойчивой ударной волне.

2) $q = 1, r > 0$. Имеем $\frac{\tilde{m}_2^2}{\tilde{\rho}} = C$. Для того чтобы $m_2(\xi)$ удовлетворяла граничным условиям в бесконечности, для функции $\tilde{m}_2(\tau)$ должно выполняться $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \tilde{m}_2(\tau) = 0$. Отсюда следует, что $\tilde{m}_2 \equiv 0$ и данное решение не представляет интереса.

3) $q = 1 + r, r > 0$. В этом случае главный член разложения по ε последнего уравнения имеет вид: $\tilde{m}_2'' = \frac{2\tilde{m}_2\tilde{m}_2'}{\tilde{\rho}(0)}$. Интегрируя по переменной η ,

получим $\tilde{m}_2' = \frac{\tilde{m}_2^2}{\tilde{\rho}(0)} + C$. В зависимости от знака постоянной C данное уравнение имеет следующие решения:

$$\tilde{m}_2(\eta) = \begin{cases} \sqrt{C\tilde{\rho}(0)} \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{C}{\tilde{\rho}(0)}}(\eta - \eta_0)\right), & C > 0; \\ \sqrt{-C\tilde{\rho}(0)} \frac{1 + \exp\left(2(\eta - \eta_0)\sqrt{\frac{-C}{\tilde{\rho}(0)}}\right)}{1 - \exp\left(2(\eta - \eta_0)\sqrt{\frac{-C}{\tilde{\rho}(0)}}\right)}, & C < 0; \\ \frac{-\tilde{\rho}(0)}{\eta - \eta_0}, & C = 0. \end{cases}$$

Все эти решения являются неограниченными.

Таким образом, данный подход не позволяет достоверно определить вид особых решений для рассматриваемой системы уравнений. Необходимо проведение дальнейших исследований.

Приведем еще одно соображение, которое может оказаться полезным при исследовании решений системы (14). Уравнение на m_2 имеет вид:

$$\varepsilon \dot{m}_2(\xi) = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{m_2^2}{\rho} \right) - \xi \dot{m}_2(\xi).$$

Проинтегрируем левую и правую части этого уравнения, воспользовавшись формулой интегрирования по частям, получим:

$$\varepsilon \dot{M}_2 - M_2 = \frac{m_2^2}{\rho} - \xi m_2, \quad \dot{M}_2 = m_2.$$

Заменим краевую задачу на вещественной оси на краевую задачу на достаточно большом, но конечном интервале $[a, b]$: $m_2(a) = m_2^-, m_2(b) = m_2^+$. Можно получить следующее интегральное уравнение на m_2 :

$$m_2(\xi) = m_2^- g^-(\xi) + m_2^+ g^+(\xi) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_a^\xi g^-(\xi) \operatorname{ch} \frac{\tau - a}{\sqrt{\varepsilon}} - \int_\xi^b g^+(\xi) \operatorname{ch} \frac{b - \tau}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \left(\frac{m_2^2}{\rho}(\tau) - \tau m_2(\tau) \right) d\tau,$$

$$\text{где } g^-(\xi) = \operatorname{sh} \frac{b - \xi}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\operatorname{sh} \frac{b - a}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^{-1}, \quad g^+(\xi) = \operatorname{sh} \frac{\xi - a}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\operatorname{sh} \frac{b - a}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^{-1}.$$

Данное интегральное уравнение может быть полезно как при численном так и при асимптотическом анализе системы.

Численное исследование решений задачи Римана

В основу вычислительной схемы положена классическая конечно-объемная схема Годунова [12]. Значения искомым сеточных функций

$$W = (w_1, w_2, w_3) = (\rho, \rho U_1, \rho \chi U_2)$$

предполагаются заданными в узлах равномерной сетки с шагом h , введенной на расчетном отрезке $x \in [x_0, x_1]$: $\omega_h = \{x_m : x_m = mh, m = 0, \dots, M_h\}$.

Самая трудоемкая часть метода Годунова – задача о распаде разрыва – находится в линеаризованной постановке.

Значения на нижнем и верхнем временных слоях (W_m^n и W_m^{n+1} соответственно) связаны формулами

$$\frac{W_m^{n+1} - W_m^n}{\tau} + \frac{F(W_{m+1/2}) - F(W_{m-1/2})}{h} = 0, \quad m = 2, \dots, M_h.$$

При этом величины $W_{m\pm 1/2}$ являются результатом приближенного решения задачи о распаде произвольного разрыва, возникающего на границах ячеек с кусочно-постоянными данными

$$W(t, x) = \begin{cases} W_m \equiv W_L, & x \in [x_{m-1/2}, x_{m+1/2}]; \\ W_{m+1} \equiv W_R, & x \in [x_{m+1/2}, x_{m+3/2}]. \end{cases}$$

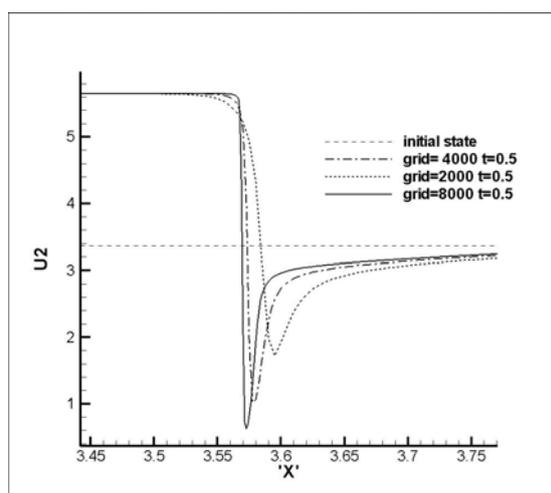
Существуют различные модификации схемы Годунова, которые используют приближенное решение задачи Римана. Мы воспользуемся одной из версий конечно-разностной схемы Куранта-Изаксона-Риса (КИР) [13]. Устойчивость схемы обеспечивается при известном ограничении на шаг по времени τ

$$\tau = \zeta \min_{m=1, \dots, M_h} (\tau_m), \quad \tau_m = \min_{i=1, 2, 3} \left(\frac{h}{|\lambda_i|} \right), \quad 0 < \zeta < 1.$$

В соответствии с приведенной выше численной схемой были проведены расчеты решений задачи Римана для тех начальных данных, где обычного решения в слабом смысле (при предположении об автомодельности решений) не существует. На последующих рисунках приведены численные решения задачи Римана в случае, когда правое (верхний индекс '+') значение в начальных данных для задачи Римана лежит в областях, очерченных голубым и темно-красным пунктиром на рис. 2.

На рис. 4 приведены расчеты для функции U_2 (для функций ρ и U_1 графики выглядят обычным образом и здесь не приводятся) для двух наборов правых значений на разных сетках. Заметно наличие сходимости по сеткам. Видно, что формируется солитонообразное решение, что не характерно для систем гиперболических уравнений. Образование такого рода солитонов может привести к тому, что скачок будет распространяться не в соответствии с соотношениями Гюгонио, т.е. он будет неклассическим.

$$\begin{aligned} \rho^- &= 3 & \rho^+ &= 0.9015 \\ U_1^- &= 5 & U_1^+ &= 2.009 \\ U_2^- &= 5.7 & U_2^+ &= 3.365 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \rho^- &= 3 & \rho^+ &= 0.1702 \\ U_1^- &= 5 & U_1^+ &= -3.854 \\ U_2^- &= 5.7 & U_2^+ &= 7.712 \end{aligned}$$

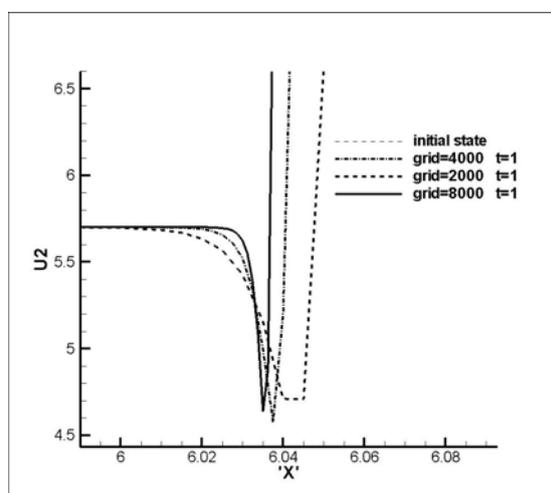


Рис. 4. Неклассический скачок в зоне, отмеченной голубым пунктиром

На рис. 5 видно формирование сложной волновой структуры. Ее возникновение связано, по всей видимости, со сложной топологией фазовых кривых в указанной ситуации.

$$\begin{aligned} \rho^- &= 3 & \rho^+ &= 1.366 \\ U_1^- &= 5 & U_1^+ &= 22.495 \\ U_2^- &= 5.7 & U_2^+ &= 12.845 \end{aligned}$$

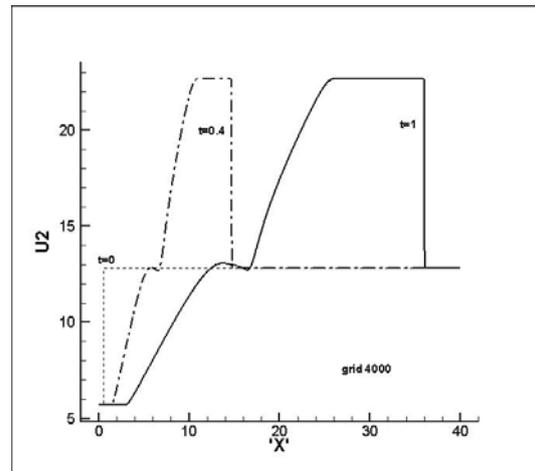
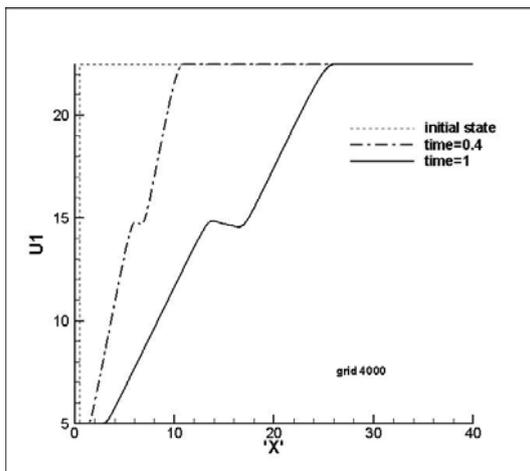
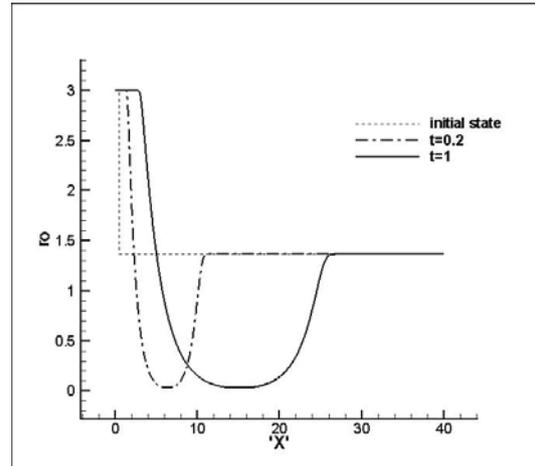


Рис. 5. Неклассическое поведение решения в зоне, отмеченной темно-красным пунктиром

Наконец, приведем небольшую подборку графиков (особо ее не конкретизируя), которая демонстрирует возникновение неклассического поведения функции U_2 при решении задачи Римана.

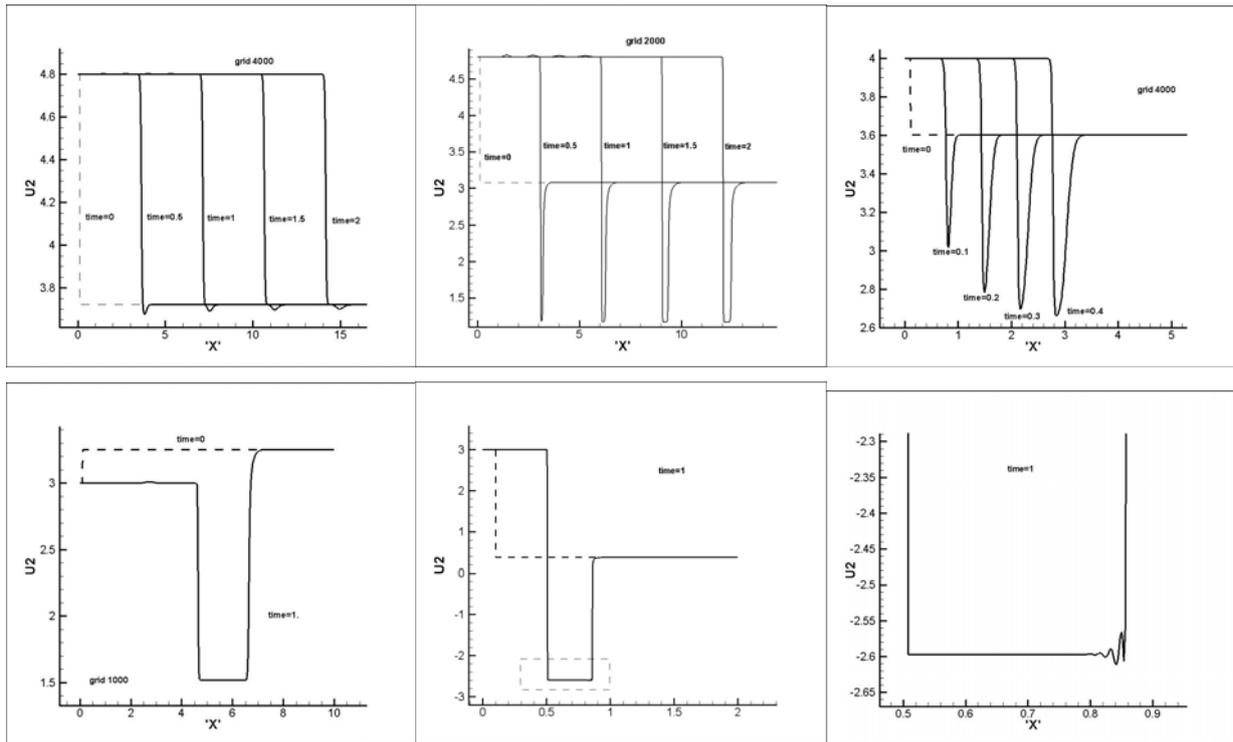


Рис. 6. Сопоставление конфигураций неклассических волн

Очень интересным моментом является спонтанное образование осциллирующего режима, на самой правой нижней картинке показан этот эффект в увеличенном масштабе. Численные расчеты, проведенные на наборе все более мелких сеток, показали, что указанная осцилляция не является эффектом, порожденным разностной аппроксимацией. Природа этого явления пока не ясна.

Заключение

В работе построена естественная и простая модель течения двухкомпонентной, двухскоростной среды, подверженной воздействию мелкомасштабных флуктуаций. Показано, что при постоянстве флуктуационного режима течение может быть описано гиперболической квазилинейной системой уравнений. Эта система демонстрирует возникновение неклассических скачков, природа которых остается неясной, хотя это явление в теории систем гиперболических уравнений обнаружено достаточно давно. Интерес представляет тот факт, что указанная система уравнений возникает как прямое обобщение уравнений изоэнтропической газовой динамики, которые записаны в обычной форме (ср. с [4]).

Несмотря на простоту записи, полученная система уравнений оказывается достаточно сложной для детального исследования, кроме того, она оказывается не строго гиперболической. Авторам представляется, что изучение подобной системы уравнений, которая к тому же имеет достаточно четкий физический

смысл, может привести к уточнению и переформулировке понятия обобщенного решения для гиперболических квазилинейных систем уравнений.

Авторы выражают благодарность Е. В. Радкевичу за многочисленные плодотворные обсуждения.

Список литературы

1. B. L. Keyfitz, H. C. Kranzer, *A viscous approximation to a system of conservation laws with no classical Riemann solution*, in C. Carasso et al., (eds), *Nonlinear Hyperbolic problems*, pp. 185-197, Springer, Lecture Notes in Math., 1402, Berlin 1989.
2. H. C. Kranzer, B. L. Keyfitz, *A strictly hyperbolic system of conservation laws admitting singular shocks*, IMA Preprint series # 602, 1990.
3. P. D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws II*. *Comm. Pure Appl. Math.*, v.10, pp. 537-566, 1957.
4. B. L. Keyfitz, *Conservation laws, delta shocks and singular shocks*, in *Nonlinear Theory of Generalized Functions*, G. Hormann, M. M. Kunzinger, M. Oberguggenberger (Editors), *Research Notes in Mathematics*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, pp. 99-111, 1999.
5. P. G. LeFloch, *Hyperbolic systems of conservation laws. The theory of classical and non-classical shock waves*. *Lectures in Mathematics ETH Zurich*, Birkhauser, Basel, 2002.
6. J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, 2nd ed., *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, v. 258, Springer, New York, 1994.
7. D. Serre, *Systems of conservation laws*, 2 vols. Cambridge University Press, Cambridge, 1999, 2000.
8. В. И. Скрипов, А. В. Скрипов, *Спинодальный распад*, УФН, т.128, вып. 2, с. 193-231, 1979.
9. J. W. Cahn, J. E. Hilliard, *Free energy of a non-uniform system I: Interfacial free energy*, *J. Chemical Physics*, v.28, No. 2, pp. 258-267, 1958.
10. C. M. Dafermos, *Solutions of the Riemann problem for a class of hyperbolic systems of conservation laws by the viscosity method*, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **52**:1 (1973), 1–9.
11. M. Slemrod, A. E. Tzavaras, *A limiting viscosity approach for the Riemann problem in isentropic gas dynamics*, *Indiana Univ. Math. J.*, **38** (1989), 1047–1074.
12. А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов, *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*, Физматлит, 2001.
13. А. С. Холодов, *О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа*, *ЖВМ*, т.18, № 6, с. 1476-1492, 1978.