



Ильин И.С., Сазонов В.В.,
Тучин А.Г.

Построение ограниченных
орбит в окрестности точки
либрации L_2 системы
Солнце – Земля

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. Построение ограниченных орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 65. 28 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-65>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

И.С. Ильин, В.В. Сазонов, А.Г. Тучин

**ПОСТРОЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ОРБИТ
В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ L_2
СИСТЕМЫ СОЛНЦЕ – ЗЕМЛЯ**

Москва – 2012

Аннотация

Предложен способ построения орбит космического аппарата, остающихся длительное время в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля. Орбиты строятся в два этапа. Первый этап состоит в построении орбиты в рамках круговой ограниченной задачи трех тел. На втором этапе эта орбита преобразуется в решение ограниченной задачи четырех тел с учетом реальных движений Солнца, Земли и Луны. На первом этапе задается прототип искомой орбиты в виде комбинации периодического решения Ляпунова, существующего в окрестности точки L_2 и лежащего в плоскости движения больших тел, и решения линейной системы второго порядка, описывающей малые отклонения КА от этой плоскости вдоль периодического решения. Искомая орбита ищется как решение задачи трех тел, наилучшим образом аппроксимирующее прототип в среднем квадратичном. Построенная орбита служит аналогичным прототипом на втором этапе. На обоих этапах аппроксимирующее решение строится методом продолжения по параметру, которым служит длина интервала аппроксимации.

I.S. Ilyin, V.V. Sazonov, A.G. Toochin. Construction of the local orbits near the L_2 libration point of the Sun – Earth system. We describe the way to construct spacecraft orbits, that keep near the L_2 libration point of the Sun – Earth system for a long time. We construct them in two stages. The first stage consists in constructing the orbit as a solution of the restricted three-body problem. On the second stage that orbit is transformed to the solution of the restricted four-body problem with real orbits of the Sun, the Earth, and the Moon. A prototype of the first stage orbit is formed by a Lyapunov periodic solution that exists near the L_2 point and lies in the orbital plane of the large bodies and a second order system solution describing small deviations of the spacecraft from this plane along the periodic solution. The desired orbit is looked for as a solution of the three-body problem, providing the best approximation of the prototype in the least squares sense. That orbit is an analogous prototype for the second stage. In both stages the approximating solutions are constructed by the continuation on the length of the approximation interval.

Сначала построим орбиты указанного типа в рамках круговой ограниченной задачи трех тел (материальных точек). Затем преобразуем эти орбиты в решения ограниченной задачи четырех тел с реальными движениями Солнца, Земли и Луны.

1. Гало-орбиты в окрестности точки L_2 . Рассмотрим движение трех материальных точек с массами m_1 , m_2 и m , притягивающихся по закону Ньютона. Сами точки также будем обозначать буквами m_1 , m_2 и m . Полагаем, что $m_1 > m_2$ и что масса m исчезающе мала по сравнению с m_1 и m_2 , т.е. точка m не влияет на движение точек m_1 и m_2 . Движение двух последних точек считаем круговым.

Радиусы-векторы точек m_1 , m_2 и m в некоторой инерциальной системе отсчета обозначим \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и \mathbf{r} . Уравнения движения точек имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{\gamma m_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{\gamma m_1 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\gamma m_1 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{\gamma m_2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (1)$$

Здесь точка над символом означает дифференцирование по времени t , γ – постоянная тяготения. Положим $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_2$. Вычитая первое уравнение системы (1) из ее второго уравнения, получим уравнение относительно \mathbf{R} :

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\gamma(m_1 + m_2)\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}. \quad (2)$$

Вычтем второе уравнение (1) из последнего уравнения этой системы. Будем иметь

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\gamma m_2 \boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{\rho}|^3} + \gamma m_1 \left(\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} - \frac{\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}}{|\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}|^3} \right). \quad (3)$$

Возьмем произвольное решение $\mathbf{R}(t)$ уравнения (2), не обязательно описывающее круговые орбиты точек m_1 и m_2 . Будем искать частное решение уравнения (3) в виде $\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{R}(t)$, где $x = \text{const}$. Подставим выписанное выражение для $\boldsymbol{\rho}$ в уравнение (3) и учтем, что $\ddot{\boldsymbol{\rho}} = x\ddot{\mathbf{R}}(t) = -\gamma(m_1 + m_2)x\mathbf{R}(t)|\mathbf{R}(t)|^{-3}$. После несложных преобразований получим уравнение, определяющее значения x :

$$-(m_1 + m_2)x = -\frac{m_2}{x^2} + \frac{m_1 x(2 + x)}{(1 + x)^2}. \quad (4)$$

Выписанное уравнение приводится к алгебраическому уравнению пятой степени, которое всегда имеет три действительных корня [1]. Они лежат в интервалах $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ и $(0, +\infty)$. Частные решения уравнения (3), отвечающие этим корням, называются коллинеарными или эйлеровыми точками либрации [1]. Ниже рассматривается корень из интервала $(0, +\infty)$, задающий точку либ-

рации, традиционно обозначаемую L_2 . Исследование проводится для точек m_1 и m_2 , служащих моделью системы Солнце – Земля. При этом под m_2 и \mathbf{r}_2 понимаются масса и радиус-вектор барицентра системы Земля – Луна, решение уравнения (2) – круговая орбита, $R = |\mathbf{R}| = \text{const}$, $R \approx 1.496 \cdot 10^{11}$ м,

$$n_0 = \sqrt{\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{R^3}} \approx 1.991 \cdot 10^{-7} \text{ с.}$$

В дальнейшем удобно использовать параметр $\mu = m_2(m_1 + m_2)^{-1}$. Система Солнце – Земля характеризуется значением $\mu = 3.040424 \cdot 10^{-6}$. Корень уравнения (4), отвечающий точке либрации L_2 , обозначим x_0 . При $\mu \ll 1$ его удобно находить, решая методом простой итерации уравнение

$$x = \sqrt[3]{\frac{\mu(1+x)^2}{3-2\mu+(3-\mu)x+x^2}}.$$

Это уравнение эквивалентно (4); начальное приближение искомого корня следует взять в виде $x = \sqrt[3]{\mu/3}$. В рассматриваемом случае $x_0 = 1.007824 \cdot 10^{-2}$.

Для исследования движения точки m в окрестности точки либрации L_2 уравнение (3) запишем в скалярной форме в декартовой системе координат, которую обозначим $m_2\text{хуз}$. Начало этой системы находится в точке m_2 , орты ее базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ определены соотношениями

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}}{|\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}|}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}. \quad (5)$$

Как нетрудно видеть,

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = n_0\mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = -n_0\mathbf{i}, \quad \mathbf{k} = \text{const}. \quad (6)$$

Ниже в данном пункте компоненты векторов и координаты точек указываются в системе $m_2\text{хуз}$. В частности, $L_2 = (x_0R, 0, 0)$.

Положим $\mathbf{p}/R = (x, y, z)$ и введем безразмерное время $\tau = n_0t$, дифференцирование по которому будем обозначать штрихом. Тогда уравнения (3) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} x'' - 2y' + \left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} - 1 \right) x &= (1-\mu) \left(1 - \frac{1}{r_1^3} \right), \\ y'' + 2x' + \left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} - 1 \right) y &= 0, \quad z'' + \left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} \right) z = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_1 = \sqrt{(1+x)^2 + y^2 + z^2}.$$

Уравнения (7) допускают первый интеграл (интеграл Якоби)

$$H = \frac{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - x^2 - y^2}{2} - (1 - \mu)x - \frac{\mu}{r^3} - \frac{1 - \mu}{r_1^3}$$

и инвариантны относительно преобразования переменных

$$\tau \rightarrow -\tau, \quad y \rightarrow -y. \quad (8)$$

Точке либрации L_2 отвечает положение равновесия (стационарное решение) системы (7) $x = x_0$, $y = z = 0$. Малые колебания точки m в окрестности точки L_2 описываются линеаризованными уравнениями

$$\Delta x'' - 2y' - (2a + 1)\Delta x = 0, \quad y'' + 2\Delta x' + (a - 1)y = 0, \quad z'' + az = 0,$$

$$\Delta x = x - x_0, \quad a = \frac{\mu}{x_0^3} + \frac{1 - \mu}{(1 + x_0)^3} = 3.940522.$$

Общее решение линеаризованных уравнений имеет вид (ср. [1])

$$\begin{aligned} \Delta x &= c_1 \exp \lambda \tau + c_2 \exp(-\lambda \tau) + c_3 \cos \omega \tau + c_4 \sin \omega \tau, \\ y &= k_1 [c_1 \exp \lambda \tau - c_2 \exp(-\lambda \tau)] + k_2 (c_3 \sin \omega \tau - c_4 \cos \omega \tau), \\ z &= c_5 \cos \sqrt{a} \tau + c_6 \sin \sqrt{a} \tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь c_1, \dots, c_6 – произвольные постоянные,

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\frac{\sqrt{9a^2 - 8a} + a - 2}{2}} = 2.484317, \quad \omega = \sqrt{\frac{\sqrt{9a^2 - 8a} - a + 2}{2}} = 2.057014, \\ k_1 &= \frac{\lambda^2 - 2a - 1}{2\lambda} = -\frac{2\lambda}{\lambda^2 + a - 1} = -0.5452636, \\ k_2 &= -\frac{2\omega}{\omega^2 - a + 1} = -\frac{\omega^2 + 2a + 1}{2\omega} = -3.187229. \end{aligned}$$

Поскольку система (7) автономна, обладает первым интегралом и стационарным решением, к ней можно применить теорему Ляпунова о существовании периодических решений, называемых обычно его именем [2]. Согласно этой теореме, в окрестности точки L_2 существуют два семейства периодических решений Ляпунова, которые обозначим I и II. Семейство I имеет период $T \approx 2\pi/\omega$ и близко решениям (9) при $c_1 = c_2 = c_5 = c_6 = 0$. В решениях этого семейства $z \equiv 0$ – точка m не покидает плоскости (x, y) . Семейство II имеет период $T \approx 2\pi/\sqrt{a}$ и близко решениям (9) при $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Условие существования этого семейства – отношение \sqrt{a}/ω не должно быть целым числом. В данном случае это условие выполнено.

Семейства I и II принадлежат так называемому многообразию гало-орбит в окрестности точки L_2 . Это – семейство решений уравнений (7), ограниченных при $\tau \rightarrow \pm\infty$. С практической точки зрения гало-орбитами можно считать решения, остающиеся в окрестности точки L_2 продолжительное время. Они могут быть использованы в качестве рабочих траекторий исследовательских КА. В малой окрестности этой точки гало-орбиты описываются формулами (9) при $c_1 = c_2 = 0$. Решения с $c_1 = 0$ и $c_2 \neq 0$ также представляют практический интерес. При $\tau \rightarrow +\infty$ они стремятся к гало-орбитам, причем некоторые из них прежде проходят вблизи Земли. Такие решения можно использовать для реализации перелета КА на многообразии гало-орбит [3, 4].

Далее будем рассматривать в основном решения семейства I. Это семейство и его продолжение в область конечных амплитуд исчерпывают так называемые плоские гало-орбиты, для которых $z \equiv z' \equiv 0$. Периодические решения автономной системы определены с точностью до сдвига по времени. В силу инвариантности системы (7) относительно преобразования (8) в семействе I этот сдвиг можно выбрать так, чтобы решение с периодом T удовлетворяло соотношениям $x(-\tau) = x(\tau)$, $y(-\tau) = -y(\tau)$ и определялось краевыми условиями

$$x'(0) = y(0) = z'(0) = x'\left(\frac{T}{2}\right) = y\left(\frac{T}{2}\right) = z'\left(\frac{T}{2}\right) = 0. \quad (10)$$

При вычислении решений Ляпунова можно сразу положить в (7), (10) $z \equiv 0$, что несколько упростит расчеты. Однако от решений краевой задачи (7), (10) с $z \equiv 0$ могут ответвляться решения, имеющие $z \neq 0$ и представляющие практический интерес. В произвольном решении этой задачи x и z – четные функции τ , y – четная функция.

Решения краевой задачи (7), (10) удобно представлять графиками зависимости начальных условий $x(0)$, $y'(0)$ и $z(0)$ от периода T . Эти графики изображены на рис. 1а. Здесь представлены два семейства решений. Одно из них имеет $z(0) = 0$, и в его решениях $z \equiv 0$. Кривые на рисунке, задающие начальные условия решений этого семейства, отмечены римской цифрой I, поскольку в окрестности точки $x(0) = x_0$, $y'(0) = z(0) = 0$ оно представляет собой введенное выше семейство I. Для удобства все семейство, имеющее $z(0) = 0$, будем называть ниже семейством I. Указанная точка отвечает левому концу горизонтального луча I на графике начального условия $z(0)$ и точкам с вертикальными касательными к кривым I на графиках начальных условий $x(0)$ и $y'(0)$.

Чтобы пояснить появление семейства решений с $z(0) \neq 0$ (отвечающие ему кривые на рис. 1а обозначены буквами S' и S''), опишем свойства устойчивости в линейном приближении вычисленных периодических решений. Рассмотрим характеристическое уравнение соответствующей системы уравнений в вариациях. Используя инвариантность системы (7) относительно замены (8) и свойства симметрии вычисленных решений, можно доказать что это уравнение – возвратное (возвратность характеристического уравнения обусловлена также

тем обстоятельством, что систему (7) можно привести к гамильтоновой форме). Далее, поскольку система (7) автономна, характеристическое уравнение имеет корень 1, причем в силу указанной возвратности его кратность не ниже 2. С учетом сделанных замечаний это уравнение можно представить в виде

$$(\rho - 1)^2(\rho^2 - A_1\rho + 1)(\rho^2 - A_2\rho + 1) = 0, \quad (11)$$

где A_1 и A_2 – коэффициенты. Если A_1 и A_2 действительны и принадлежат отрезку $[-2, 2]$, то все корни уравнения (11) лежат на окружности $|\rho| = 1$ и выполнены необходимые условия орбитальной устойчивости исследуемого периодического решения. Такое решение называют орбитально устойчивым в первом (линейном) приближении. В противном случае это решение орбитально неустойчиво. Поскольку система (7) автономна, а исследуемые периодические решения образуют однопараметрические семейства с периодом в качестве параметра, эти решения всегда неустойчивы по Ляпунову.

Графики зависимости коэффициентов A_1 и A_2 от периода T приведены на рис. 1б. Каждый из этих графиков выглядит как объединение двух гладких кривых (принято $A_1 \leq A_2$). Кривые, отмеченные цифрой I, отвечают семейству I. Как видно из рисунка, это семейство орбитально неустойчиво. Кривые S отвечают семейству решений задачи (7), (10), ответвляющемуся от семейства I. Ветвление имеет место в точке, где $A_1 = 2$. В этой точке кривые S' и S'' на графике начального условия $z(0)$ имеют вертикальные касательные, а на графиках начальных условий $x(0)$ и $y'(0)$ эта точка отвечает правым концам кривых S' и S'', которыми последние соединяются с кривыми I. Кривые S' и S'' на рис. 1а задают одно семейство решений задачи (7), (10). Чрезмерное на первый взгляд количество представляющих его кривых объясняется следующим образом. Во-первых, краевая задача (7), (10) инвариантна относительно преобразования $z \rightarrow -z$. Если $x_*(\tau)$, $y_*(\tau)$, $z_*(\tau)$ – решение этой задачи, то $x = x_*(\tau)$, $y = y_*(\tau)$, $z = -z_*(\tau)$ – также ее решение. По этой причине одной кривой на графике начального условия $x(0)$ или $y'(0)$ отвечает пара симметричных относительно оси абсцисс кривых на графике начального условия $z(0)$. Эта пара кривых образует одну гладкую кривую, имеющую в точке пересечения с осью абсцисс вертикальную касательную (см. рис. 1а). Решения, отличающиеся знаком z , имеют одно и то же характеристическое уравнение (11).

Во-вторых, если $x_*(\tau)$, $y_*(\tau)$, $z_*(\tau)$ – решение задачи (7), (10), то

$$x(\tau) = x_*\left(\tau + \frac{T}{2}\right), \quad y(\tau) = y_*\left(\tau + \frac{T}{2}\right), \quad z(\tau) = z_*\left(\tau + \frac{T}{2}\right)$$

– также ее решение. Эти два решения могут не совпадать как решения задачи (7), (10), но они задают одно и то же периодическое системы (7) (сдвиг времени в периодических решениях игнорируем). Разумеется, указанным решениям отвечает одно и то же характеристическое уравнение (11). Указанное преобразо-

вание связывает решения, начальные условия которых лежат на кривых S' и S'' , а также на нижних и верхних ветвях кривых I . В силу указанных причин на рис. 1б каждому из вычисленных семейств отвечают только две кривые – одна на графике A_1 , другая на графике A_2 . Подробно указанные свойства задачи трех материальных точек рассмотрены в [5]. Интересный факт: решения, начальные условия которых лежат на кривых S' и S'' , орбитально устойчивы в линейном приближении при некоторых значениях T .

Пример плоского периодического решения семейства I приведен на рис. 2. В левой части этого рисунка изображены графики зависимости от времени координат и компонент скорости точки m в решении задачи (7), (10), продолженном на отрезок $0 \leq \tau \leq 2T$. Графики представлены в размерном виде. Переход к размерным величинам выполнен обращением формул обезразмеривания, использованных при выводе уравнений (7). В правой части рис. 2 изображена траектория движения точки m в плоскости (x, y) . Траектория также представлена в размерном виде. В подписи к рисунку указаны безразмерные ненулевые начальные условия решения и коэффициенты A_1, A_2 в соответствующем уравнении (11).

На рис. 3, 4 приведен пример решения задачи (7), (10), начальные условия которого лежат на кривых S'' . На рис. 3 изображены графики зависимости от времени координат и компонент скорости точки m в решении задачи (7), (10), продолженном на отрезок $0 \leq \tau \leq 2T$. На рис. 4 приведены проекции траектории точки на координатные плоскости (x, y) , (x, z) и (y, z) . Кривые на рисунках представлены в размерном виде. В подписи к рис. 3 указаны ненулевые начальные условия решения и коэффициенты A_1, A_2 в уравнении (11). Это решение орбитально устойчиво в линейном приближении.

В [6] описано применение решений краевой задачи (7), (10) к проекту «Миллиметррон». В частности, Б.Б.Крейсман предложил в качестве варианта рабочей орбиты КА решение этой задачи с начальными условиями, лежащими на кривых S' (рис. 1а).

2. Построение гало-орбит в рамках ограниченной задачи трех тел.

Оправляясь от плоских периодических решений семейства I , можно построить произвольные гало-орбиты, достаточно удаленные от точки L_2 . Построение выполняется следующим образом. Сначала задается легко вычисляемое первое приближение – прототип – гало-орбиты, с использованием которого затем строится близкое ему решение системы (7). Чтобы описать задание прототипа, вернемся к системе уравнений в вариациях для решений задачи (7), (10). В случае решений семейства I система уравнений в вариациях распадается на две независимые подсистемы. Первая подсистема определяет изменение вариаций переменных x, y, x' и y' , вторая – изменение вариаций переменных z и z' . Первая подсистема является системой уравнений в вариациях для системы порядка 4, образованной первым и вторым уравнениями (7) при $z \equiv 0$. Именно эти

уравнения и краевые условия (10) для x' и y задают семейство I. Первая подсистема имеет характеристическое уравнение (ср. (11))

$$(\rho - 1)^2(\rho^2 - A_2\rho + 1) = 0, \quad (12)$$

характеристическое уравнение второй подсистемы

$$\rho^2 - A_1\rho + 1 = 0.$$

Напомним, для решений семейства I при выбранном значении μ и представляющих интерес значениях T имеют место неравенства (см. рис. 1б) $|A_1| < 3$, $A_2 > 100$. Эти неравенства позволяют единственным образом связать коэффициенты A_1 и A_2 в (11) с указанными подсистемами полной системы уравнений в вариациях.

Вторую подсистему представим в виде уравнения второго порядка

$$z'' + F(\tau)z = 0, \quad F = \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1 - \mu}{\sqrt{(1 + x)^2 + y^2}}, \quad (13)$$

где $x = x_*(\tau)$, $y = y_*(\tau)$ – решение семейства I. Произвольное решение уравнения (13) обозначим $z_*(\tau)$. Набор функций $x_*(\tau)$, $y_*(\tau)$, $z_*(\tau)$ зависит от трех параметров: периода T решения семейства I и начальных условий $z_*(0)$, $z'_*(0)$. Вместо периода можно использовать одно из начальных условий $x_*(0)$, $y'_*(0)$. Такие наборы функций, которым отвечают траектории в окрестности точки L_2 , будем использовать в качестве прототипа (первого приближения) гало-орбит.

Согласно формулам (9) многообразие гало-орбит является четырехпараметрическим. В малой окрестности точки L_2 его параметрами могут служить c_3 , c_4 , c_5 и c_6 . В силу автономности системы (7) один из этих параметров можно заменить произвольным сдвигом по времени. При построении гало-орбит сдвиг по времени несуществен, и его можно отбросить. Остается три параметра. В (9) в качестве параметров можно принять c_3 , c_5 и c_6 , положив $c_4 = 0$ (разумеется, и $c_1 = c_2 = 0$). Во введенном выше наборе функций прототипа этим параметрам отвечают начальные значения $x_*(0)$, $z_*(0)$, $z'_*(0)$, причем в малой окрестности точки L_2 $x_*(0) \approx x_0 + c_3$, $z_*(0) \approx c_5$, $z'_*(0) \approx c_6\sqrt{a}$.

Вычисление прототипа $x_*(\tau)$, $y_*(\tau)$, $z_*(\tau)$ состояло в интегрировании системы, образованной первым и вторым уравнениями (7) при $z \equiv 0$ и уравнением (13). Построение гало-орбиты по выбранному прототипу естественно свести к минимизации функционала

$$\int_0^{T_1} \{ [x(\tau) - x_*(\tau)]^2 + [y(\tau) - y_*(\tau)]^2 + [z(\tau) - z_*(\tau)]^2 + [x'(\tau) - x'_*(\tau)]^2 + [y'(\tau) - y'_*(\tau)]^2 + [z'(\tau) - z'_*(\tau)]^2 \} d\tau$$

на решениях системы (7). Здесь $T_1 = 2\pi \div 3\pi$. Но иметь дело с выписанным интегралом неудобно, и вместо него минимизировалась сумма

$$\Phi_N = \sum_{n=0}^N \{ [x(\tau_n) - x_*(\tau_n)]^2 + [y(\tau_n) - y_*(\tau_n)]^2 + [z(\tau_n) - z_*(\tau_n)]^2 + [x'(\tau_n) - x'_*(\tau_n)]^2 + [y'(\tau_n) - y'_*(\tau_n)]^2 + [z'(\tau_n) - z'_*(\tau_n)]^2 \}, \quad (14)$$

где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ – сетка, на которой вычислены функции прототипа.

Минимизация Φ_N выполнялась методом Левенберга – Марквардта (см. п. 5) по начальным условиям решения системы (7). Значения τ_n , $x_*(\tau_n)$, $x'_*(\tau_n)$, \dots , $z'_*(\tau_n)$ насчитывались заранее, хранились в памяти компьютера и использовались при многократных вычислениях Φ_N .

Решения системы (7), лежащие в окрестности прототипа $x_*(\tau)$, $y_*(\tau)$ и $z_*(\tau)$, сильно неустойчивы (см. рис. 1б). По этой причине минимизация Φ_N выполнялась шаг за шагом для последовательности возрастающих значений N . Использовалась последовательность $N_k = k\Delta N$ ($k = 1, 2, \dots$) при $\Delta N = 5 \div 10$. Минимизация Φ_{N_1} начиналась из точки $x(0) = x_*(0)$, $y(0) = y'_*(0) = 0$, $y'(0) = y'_*(0)$, $z(0) = z_*(0)$, $z'(0) = z'_*(0)$. Минимизация Φ_{N_k} при $k > 1$ начиналась из точки, являющейся точкой минимума $\Phi_{N_{k-1}}$. Процесс заканчивался, когда $\tau_{N_k} \approx T_1$.

Найденное описанным способом решение системы (7) принадлежит многообразию гало-орбит (строго говоря, лежит в его малой окрестности) только на отрезке $0 \leq \tau \leq T_1$, причем значение T_1 не должно быть слишком большим. Вне этого отрезка решение быстро удаляется от многообразия.

Далеко не все гало-орбиты представляют практический интерес. В частности, не представляют интереса орбиты, проходящие вблизи прямой $y = z = 0$. Они попадают в тень или полутень Земли. Орбиты, для которых $z'(0) = 0$, а $|y'(0)|$ и $|z(0)|$ не слишком малы, в тень или полутень заведомо не попадают. Удобно сузить класс рассматриваемых гало-орбит и ограничиться орбитами с начальными условиями $x'(0) = y(0) = z'(0) = 0$. Такие орбиты должны строиться по прототипам с $z'_*(0) = 0$ ($x'_*(0) = y_*(0) = 0$ вследствие свойств семейства I). Функционал (14) в этом случае рассматривается на отрезке $0 \leq \tau \leq T_1/2$ и минимизируется по начальным условиям $x(0)$, $y'(0)$ и $z(0)$; остальные начальные условия – нулевые. В силу инвариантности системы (7) относительно преобразования (8) подставляемые в (14) решения этой системы, в том числе и минималь функционала, удовлетворяют соотношениям

$$x(-\tau) = x(\tau), \quad y(-\tau) = -y(\tau), \quad z(-\tau) = z(\tau).$$

Аналогичные соотношения справедливы и для прототипа. Для $x_*(\tau)$ и $y_*(\tau)$ – это свойство семейства I, в случае $z_*(\tau)$ – следствие инвариантности уравнения (12) относительно замены $\tau \rightarrow -\tau$. Таким образом, близость минимали и прототипа на отрезке $-T_1/2 \leq \tau \leq 0$ будет точно такой же, как на отрезке $0 \leq \tau \leq T_1/2$. Описанные орбиты обладают свойствами симметрии и образуют двухпараметрическое подмногообразие многообразия гало-орбит.

Чтобы от отрезка $-T_1/2 \leq \tau \leq T_1/2$ перейти к более удобному в вычислениях отрезку $0 \leq \tau \leq T_1$, надо взять решение системы (7), связанное с минималью соотношениями $\tilde{x}(\tau) = x(\tau - T_1/2)$, $\tilde{y}(\tau) = y(\tau - T_1/2)$, $\tilde{z}(\tau) = z(\tau - T_1/2)$. Это решение будем называть симметричным продолжением минимали на отрезок удвоенной длины.

Пример прототипа $x_*(\tau)$, $y_*(\tau)$, $z_*(\tau)$ и минимали функционала (14) приведен на рис. 5. В качестве функций $x_*(\tau)$, $y_*(\tau)$ использовано решение семейства I, приведенное на рис. 2; функция $z_*(\tau)$ – решение уравнения (13) с начальными условиями $z(0) = 0.003$, $z'(0) = 0$. Минималь построена посредством минимизации функционала по начальным условиям $x(0)$, $y'(0)$ и $z(0)$ при $x'(0) = y(0) = z'(0) = 0$. На рис. 6 приведены графики координат и компонент скорости в симметричном продолжении минимали на отрезок удвоенной длины. Это – графики введенных выше функций $\tilde{x}(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$, $\tilde{z}(\tau)$ и их производных на отрезке $0 \leq \tau \leq T_1$. Графики на рисунках представлены в размерном виде. На рис. 7 приведены проекции траектории точки $[\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{z}(\tau)]$ на координатные плоскости (x, y) , (x, z) и (y, z) . Маркером в виде прямоугольника обозначена начальная точка, отвечающая моменту $\tau = 0$. Левая кривая на рис. 7 показывает, что в окрестности точек $\tau = 0$ и $\tau = T_1$ найденное решение $\tilde{x}(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$, $\tilde{z}(\tau)$ несколько отклоняется от многообразия гало-орбит.

3. Построение гало-орбит в рамках ограниченной задачи четырех тел (материальных точек). Рассмотрим движение системы четырех точек. Их массы и сами точки будем обозначать буквами m_S , m_E , m_M и m . Эти точки служат соответственно моделями Солнца, Земли, Луны и КА. Движение первых трех точек будем считать заданным и описывать с помощью теории движения указанных небесных тел DE403, разработанной в JPL. Массы этих точек имеют известные числовые значения, по сравнению с которыми массу КА считаем исчезающе малой.

Чтобы записать уравнения движения КА относительно Земли, запишем сначала уравнения движения КА и Земли в некоторой инерциальной системе отсчета. Радиусы-векторы точек m_S , m_E , m_M и m в этой системе обозначим \mathbf{r}_S , \mathbf{r}_E , \mathbf{r}_M и \mathbf{r}_{sp} . Уравнения движения точек m и m_E имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_{sp} = -\frac{\gamma m_S (\mathbf{r}_{sp} - \mathbf{r}_S)}{|\mathbf{r}_{sp} - \mathbf{r}_S|^3} - \frac{\gamma m_E (\mathbf{r}_{sp} - \mathbf{r}_E)}{|\mathbf{r}_{sp} - \mathbf{r}_E|^3} - \frac{\gamma m_M (\mathbf{r}_{sp} - \mathbf{r}_M)}{|\mathbf{r}_{sp} - \mathbf{r}_M|^3}, \quad (15)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_E = -\frac{\gamma m_S (\mathbf{r}_E - \mathbf{r}_S)}{|\mathbf{r}_E - \mathbf{r}_S|^3} - \frac{\gamma m_M (\mathbf{r}_E - \mathbf{r}_M)}{|\mathbf{r}_E - \mathbf{r}_M|^3}.$$

Введем векторы $\mathbf{R} = \mathbf{r}_E - \mathbf{r}_S$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_E$, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_{sp} - \mathbf{r}_E$. Вычитая второе уравнение (15) из первого уравнения, получим

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\gamma m_E \boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{\rho}|^3} + \gamma m_S \left(\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} - \frac{\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}}{|\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}|^3} \right) + \gamma m_M \left(\frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^3} - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right). \quad (16)$$

Уравнение (16) в скалярной форме записывалось во второй геоэквиаториальной системе координат стандартной эпохи J2000. Ее оси X и Z направлены в соответствующие точку весеннего равноденствия и северный полюс мира. Ось Y дополняет систему до правой. Функции $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ рассчитывались согласно теории DE403. Эта теория позволяет для произвольного момента времени t найти компоненты векторов \mathbf{r} , $\mathbf{r}_B = \mathbf{R} + \varepsilon \mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}$ и $\dot{\mathbf{r}}_B$ в системе J2000. Здесь $\varepsilon = m_M (m_E + m_M)^{-1}$, \mathbf{r}_B – гелиоцентрический радиус-вектор барицентра системы Земля – Луна. Согласно приведенным формулам, $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}_B(t) - \varepsilon \mathbf{r}(t)$. При численном интегрировании уравнения (16) единицами измерения времени и длины служили 10^7 с и 10^{11} м. В этих единицах земной год равен 3.156 ($\approx \pi$), единица измерения скорости – 10 км/с. Числовые значения параметров уравнения (16) взяты в соответствии с теорией DE403.

Хотя уравнение (3) и система (7) являются огрубленной версией уравнения (16) и его скалярной формы, более точно их решения описывают величину $\boldsymbol{\rho}_B = \boldsymbol{\rho} - \varepsilon \mathbf{r}$, представляющую собой радиус-вектор КА относительно барицентра системы Земля – Луна. Чтобы соотнести решения системы (7) с решениями уравнения (15), введем орбитальную систему координат, связанную с этим барицентром. Орты базиса этой системы

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{r}_B}{r_B}, \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{r}_B \times \dot{\mathbf{r}}_B}{|\mathbf{r}_B \times \dot{\mathbf{r}}_B|}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}, \quad r_B = |\mathbf{r}_B|.$$

Производные по времени введенных ортов выражаются приближенными формулами

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \omega_0 \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = -\omega_0 \mathbf{i}, \quad \dot{\mathbf{k}} = 0, \quad \omega_0 = \frac{|\mathbf{r}_B \times \dot{\mathbf{r}}_B|}{r_B^2}.$$

В соответствии с выписанными соотношениями угловая скорость орбитальной системы равна $\omega_0 \mathbf{k}$. Это – также приближенное выражение. Оно учитывает эллиптичность орбиты Земли, но не в полной мере учитывает эволюцию этой орбиты.

Пусть $x(\tau)$, $y(\tau)$, $z(\tau)$ – представляющее интерес решение системы (7). Введем функции

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\text{ref}}(t) &= r_B(t)[x(\tau)\mathbf{i}(t) + y(\tau)\mathbf{j}(t) + z(\tau)\mathbf{k}(t)] + \varepsilon\mathbf{r}(t), \\ \mathbf{v}_{\text{ref}}(t) &= \{r_B(t)[n_0x'(\tau) - \omega_0(t)y(\tau)] + \dot{r}_B(t)x(\tau)\}\mathbf{i}(t) + \\ &\quad + \{r_B(t)[n_0y'(\tau) + \omega_0(t)x(\tau)] + \dot{r}_B(t)y(\tau)\}\mathbf{j}(t) + \\ &\quad + [r_B(t)n_0z'(\tau) + \dot{r}_B(t)z(\tau)]\mathbf{k}(t) + \varepsilon\dot{\mathbf{r}}(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $\tau = n_0(t - t_0)$, t_0 – некоторый фиксированный момент времени. Формулы (17) построены на основе формул введения координат Нехвилла в ограниченной эллиптической задаче трех тел [1, 2]. Функции $\mathbf{p}_{\text{ref}}(t)$, $\mathbf{v}_{\text{ref}}(t)$ будем рассматривать как прототип (первое приближение) решения уравнения (16), соответствующего выбранному решению системы (7). Поиск самого решения естественно свести к минимизации на решениях уравнения (16) функционала

$$\int_{t_0}^{t_0+T_2} [|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_{\text{ref}}(t)|^2 + w|\dot{\mathbf{p}}(t) - \mathbf{v}_{\text{ref}}(t)|^2] dt.$$

Здесь $w = 10^{14} \text{ с}^2$ (в единицах численного интегрирования уравнения (16) $w = 1$). Иметь дело с выписанным интегралом не удобно, и вместо него минимизировалась сумма

$$\Psi_N = \sum_{n=0}^N [|\mathbf{p}(t_n) - \mathbf{p}_{\text{ref}}(t_n)|^2 + w|\dot{\mathbf{p}}(t_n) - \mathbf{v}_{\text{ref}}(t_n)|^2]. \quad (18)$$

Здесь $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ – сетка, на которой вычислен прототип. Она получена пересчетом сетки, на которой вычислено решение систем (7), из переменной τ в переменную t . Минимизация Ψ_N выполнялась по той же схеме, что использовалась при минимизации Φ_N .

Пример построенной таким образом гало-орбиты приведен на рис. 8 – 11. Прототип этой орбиты задан с использованием решения системы (3), представленного на рис. 6, 7; момент $t_0 = 61700 \text{ с UTC } 20.07.2015$. Функции $\mathbf{p}_{\text{ref}}(t)$, $\mathbf{v}_{\text{ref}}(t)$ приведены на рис. 8 вместе с построенным на их основе решением уравнения (16) $\mathbf{p}(t)$, $\dot{\mathbf{p}}(t)$. Компоненты перечисленных векторов указаны в системе J2000. Графики на рисунке почти совпадают, т. е. на достаточно продолжительном отрезке времени выполнены соотношения $\mathbf{p}(t) \approx \mathbf{p}_{\text{ref}}(t)$, $\dot{\mathbf{p}}(t) \approx \mathbf{v}_{\text{ref}}(t)$. Графики компонент отклонений $\Delta\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_{\text{ref}}(t)$, $\Delta\dot{\mathbf{p}}(t) = \dot{\mathbf{p}}(t) - \mathbf{v}_{\text{ref}}(t)$ в системе J2000 представлены на рис. 9. Рис. 10, 11 иллюстрируют результат пересчета построенного решения уравнения (16) в орбитальную систему координат барицентра системы Земля – Луна. Пересчет выполнен по формулам, полученным обращением формул (17). Маркером обозначена начальная точка, отвечающая моменту $t = t_0$. Рис. 9, 10 выглядят похоже на рис. 6, 7, но, если присмотреться, количественное различие между этими парами рисунков достаточно велико.

4. Коррекция гало-орбиты. Описанный способ построения гало-орбит можно использовать для расчета корректирующих импульсов при удержании КА на орбитах такого рода в течение продолжительного времени. Предположим, что выполнение коррекции планируется на момент времени t_0 . Фазовый вектор уравнения (16) на этот момент обозначим $\mathbf{p}_1(t_0)$, $\dot{\mathbf{p}}_1(t_0)$. Коррекция состоит в изменении требуемым образом скорости $\dot{\mathbf{p}}_1(t_0)$. Радиус-вектор $\mathbf{p}_1(t_0)$ при этом остается неизменным. Нужное изменение скорости можно найти так. Подставим t_0 , $\mathbf{p}_1(t_0)$ и $\dot{\mathbf{p}}_1(t_0)$ в формулы (17) вместо t , $\mathbf{p}_{\text{ref}}(t)$ и $\mathbf{v}_{\text{ref}}(t)$. Полученные соотношения разрешим относительно $x(0)$, $y(0)$, $z(0)$, $x'(0)$, $y'(0)$, $z'(0)$, обозначив результат q_1, q_2, \dots, q_6 соответственно. Заметим, что q_1 , q_2 и q_3 зависят только от $\mathbf{p}_1(t_0)$; от $\dot{\mathbf{p}}_1(t_0)$ они не зависят.

Выберем решение семейства I $\tilde{x}(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$ таким образом, чтобы при некотором $\tilde{\tau}$ выполнялись равенства $\tilde{x}(\tilde{\tau}) = q_1$, $\tilde{y}(\tilde{\tau}) = q_2$, т. е. так, чтобы траектория выбранного решения в плоскости (x, y) прошла через точку (q_1, q_2) . Положим $x_*(\tau) = \tilde{x}(\tau + \tilde{\tau})$, $y_*(\tau) = \tilde{y}(\tau + \tilde{\tau})$, а в качестве $z_*(\tau)$ возьмем решение уравнения (13) для построенных $x_*(\tau)$, $y_*(\tau)$ с начальными условиями $z(0) = q_3$, $z'(0) = q_6$. Полученные в результате функции $x_*(\tau)$, $y_*(\tau)$, $z_*(\tau)$ будем использовать в качестве прототипа при построении решения системы (7) посредством минимизации функционала (14). Функционал будем минимизировать по начальным условиям $x'(0)$, $y'(0)$ и $z'(0)$, остальные начальные условия фиксированы: $x(0) = x_*(0) = q_1$, $y(0) = y_*(0) = q_2$, $z(0) = z_*(0) = q_3$.

Найденное решение пересчитаем в функции (17), взяв прежнее значение t_0 . При этом $\mathbf{p}_{\text{ref}}(t_0) = \mathbf{p}_1(t_0)$. Функционал (18) для полученного таким образом прототипа будем минимизировать только по $\dot{\mathbf{p}}(t_0)$; начальное значение $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_1(t_0)$ фиксировано. Полученное в результате решение обозначим $\mathbf{p}_2(t)$, $\dot{\mathbf{p}}_2(t)$. Это решение является гало-орбитой и по построению удовлетворяет условию $\mathbf{p}_2(t_0) = \mathbf{p}_1(t_0)$. Величина $\Delta\dot{\mathbf{p}}(t_0) = \dot{\mathbf{p}}_2(t_0) - \dot{\mathbf{p}}_1(t_0)$ – требуемый корректирующий импульс.

5. Реализация метода Левенберга – Марквардта. Для минимизации гладких функций вида

$$\Phi(x) = f^T(x)f(x),$$

где $x \in R^n$, $f(x) \in R^N$, $n \ll N$ и $f(x_*) \approx 0$ в точке минимума x_* , обычно используют метод Гаусса – Ньютона и его модификации [7]. В этом методе отыскание минимума $\Phi(x)$ сводится к решению уравнения $\Phi_x(x) = 0$ методом Ньютона, причем матрица $\Phi_{xx}(x)$ вычисляется по приближенной формуле

$$\Phi_{xx}(x) \approx f_x^T(x)f_x(x).$$

Эта формула справедлива в окрестности точки x_* . Поправка Δx к имеющемуся приближенному значению x_0 точки минимума находится из так называемой системы нормальных уравнений

$$\left[f_x^T(x_0) f_x(x_0) \right] \Delta x = -f_x^T(x_0) f(x_0). \quad (19)$$

После того как поправка найдена, величина $x_0 + \Delta x$ принимается за x_0 , и вычисления повторяются. Они продолжаются до тех пор, пока норма поправки превышает заданный предел.

В методе Левенберга – Марквардта система нормальных уравнений имеет вид

$$\left[f_x^T(x_0) f_x(x_0) + \lambda E_n \right] \Delta x = -f_x^T(x_0) f(x_0). \quad (20)$$

Здесь λ – положительный параметр, E_n – единичная матрица порядка n . Введение дополнительного слагаемого в матрицу системы нормальных уравнений улучшает ее обусловленность. Кроме того, выбирая подходящим образом λ на каждой итерации обновления x_0 , можно повысить эффективность процесса минимизации [7].

Обычно для численного решения систем (19) и (20) применяют метод Холесского. Однако в последнее время используются и другие методы. Опишем часто применяемую модификацию подходов Гаусса – Ньютона и Левенберга – Марквардта (ср. [7]). Система (19) может быть получена из условия минимума функции

$$\Psi(\Delta x) = \| f_x(x_0) \Delta x + f(x_0) \|_N^2,$$

где $\| \cdot \|_m$ – евклидова норма в R^m . Система (20) может быть получена из условия минимума функции

$$\Psi_\lambda(\Delta x) = \| f_x(x_0) \Delta x + f(x_0) \|_n^2 + \lambda \| \Delta x \|^2.$$

Запишем сингулярное разложение матрицы $f_x(x_0)$: $f_x(x_0) = USV^T$. Здесь U – матрица размером $N \times n$ с ортонормированными столбцами: $U^T U = E_n$, V – ортогональная матрица порядка n , $S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)$ и все $s_k \geq 0$. Пусть все s_k положительны. Обозначим $z = V^T \Delta x = (z_1, \dots, z_n)^T$, $b = -U^T f(x_0) = (b_1, \dots, b_n)^T$. Тогда

$$f_x(x_0) \Delta x + f(x_0) = U(Sz - b) + f(x_0) + b,$$

$$\Psi = \| Sz - b \|_n^2 + \| f(x_0) \|_N^2 - \| b \|_n^2, \quad \Psi_\lambda = \Psi + \lambda \| z \|_n^2.$$

Минимум Ψ достигается при

$$z_k = \frac{b_k}{s_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

минимум Ψ_λ – при

$$z_k = \frac{b_k}{s_k + \lambda s_k^{-1}} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Искомая поправка $\Delta x = Vz$.

Решение нормальных уравнений описанным способом оправдано при большом отношении $\kappa = \max s_k / \min s_k$. В описываемых расчетах встречается $\kappa > 10^{14}$. Фактически в этом способе решаются не системы (19), (20), а соответственно переопределенные системы

$$f_x(x_0)\Delta x \approx -f(x_0) \quad \text{и} \quad f_x(x_0)\Delta x \approx -f(x_0), \quad \sqrt{\lambda}\Delta x \approx 0. \quad (21)$$

Для сравнения укажем, что решения систем (19), (20) в терминах сингулярного разложения матрицы $f_x(x_0)$ выражаются формулами

$$z_k = \frac{s_k b_k}{s_k^2}, \quad z_k = \frac{s_k b_k}{s_k^2 + \lambda},$$

в которых реально вычисляются не s_k и b_k , а числители и знаменатели. Собственные числа матриц систем (19) и (20) – это соответственно s_k^2 и $s_k^2 + \lambda$ ($k = 1, 2, \dots, n$). В случае очень большого κ метод Холесского при решении этих систем, как правило, дает заметную погрешность.

Использование метода Левенберга – Марквардта, т.е. системы (20) или второй системы (21), требует принятия какого-то правила изменения λ от итерации к итерации. Простое правило такое. Пусть Δx – решение одной из этих систем. Если $\Phi(x_0 + \Delta x) < \Phi(x_0)$, то $x_0 + \Delta x$ принимается в качестве нового x_0 . В противном случае λ увеличивается в 10 раз, и расчет Δx повторяется. Если первое же значение Δx оказалось удачным, то на следующей итерации λ уменьшается в 10 раз. Процесс минимизации заканчивается, когда либо λ превысит заданный предел, либо норма Δx окажется малой. Второе окончание можно считать успешным, а первое типично для достижения дна «оврага». При минимизации функционалов основного текста достижение дна «оврага», как правило, уже дает приемлемый результат, и продолжать процесс дальше не имеет смысла. В этом случае имеет смысл положить $\lambda = \alpha^2$ и изменять α описанным выше способом.

Данный препринт – первая часть работы, посвященной построению траекторий перелета с низкой околоземной орбиты на многообразии ограниченных орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля. Собственно траектории перелета описаны во второй части – препринте [8]. Построение таких траекторий приводит к задаче минимизации $\Phi(x)$ с учетом ограничения $g(x) = 0$ ($\dim g < n$, $\text{rank } g_x = \dim g$). Эта задача решается следующим образом. Предположим, что имеющееся приближенное значение точки минимума удовлетворяет этому ограничению: $g(x_0) = 0$. К нужной системе (21) добавляем

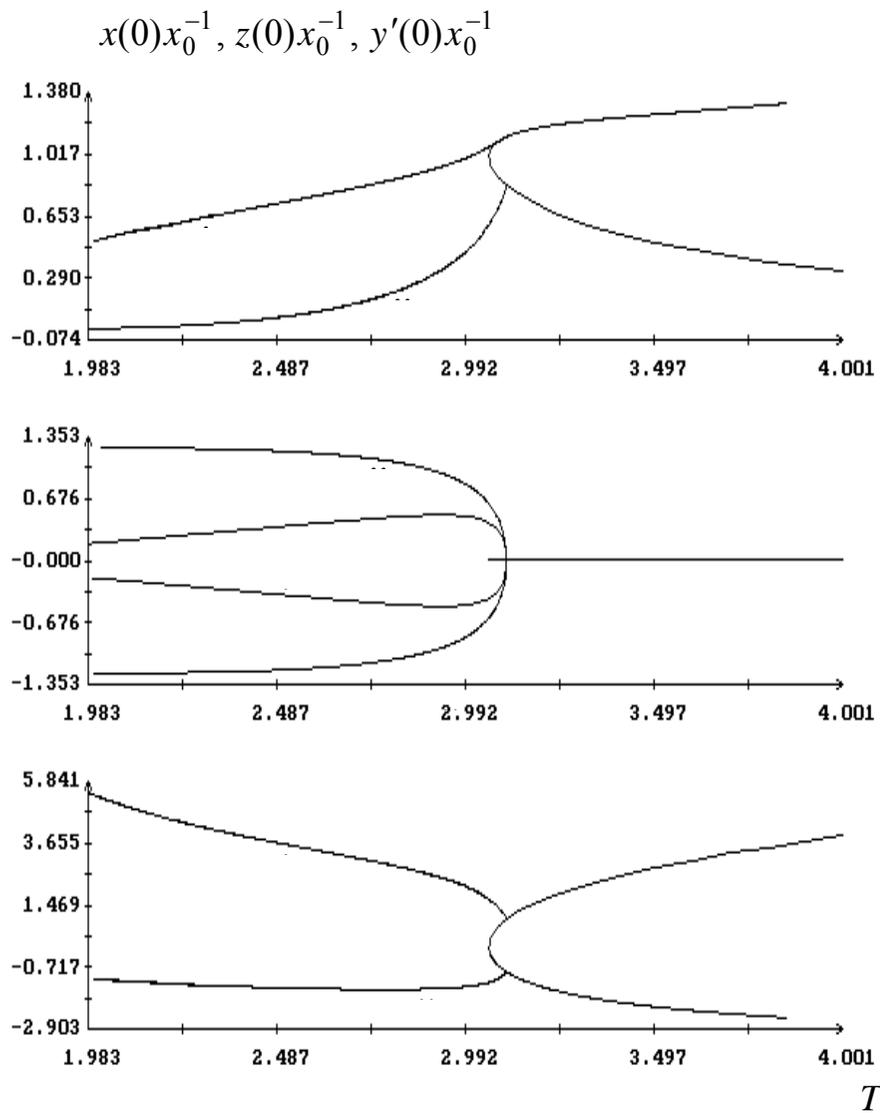
уравнение $\mu g_x(x_0)\Delta x \approx 0$, где μ – достаточно большое по модулю число, и решаем ее методом сингулярного разложения. Новая оценка точки минимума $x_1 = x_0 + \Delta x$ уже не будет точно удовлетворять ограничению, и ее необходимо подправить. Скорректированное значение x_1 ищем в виде $x_1 + g_x^T(x_1)y$. Для определения y в рамках метода Ньютона получаем уравнение

$$\left[g_x(x_1)g_x^T(x_1) \right] y = -g(x_1).$$

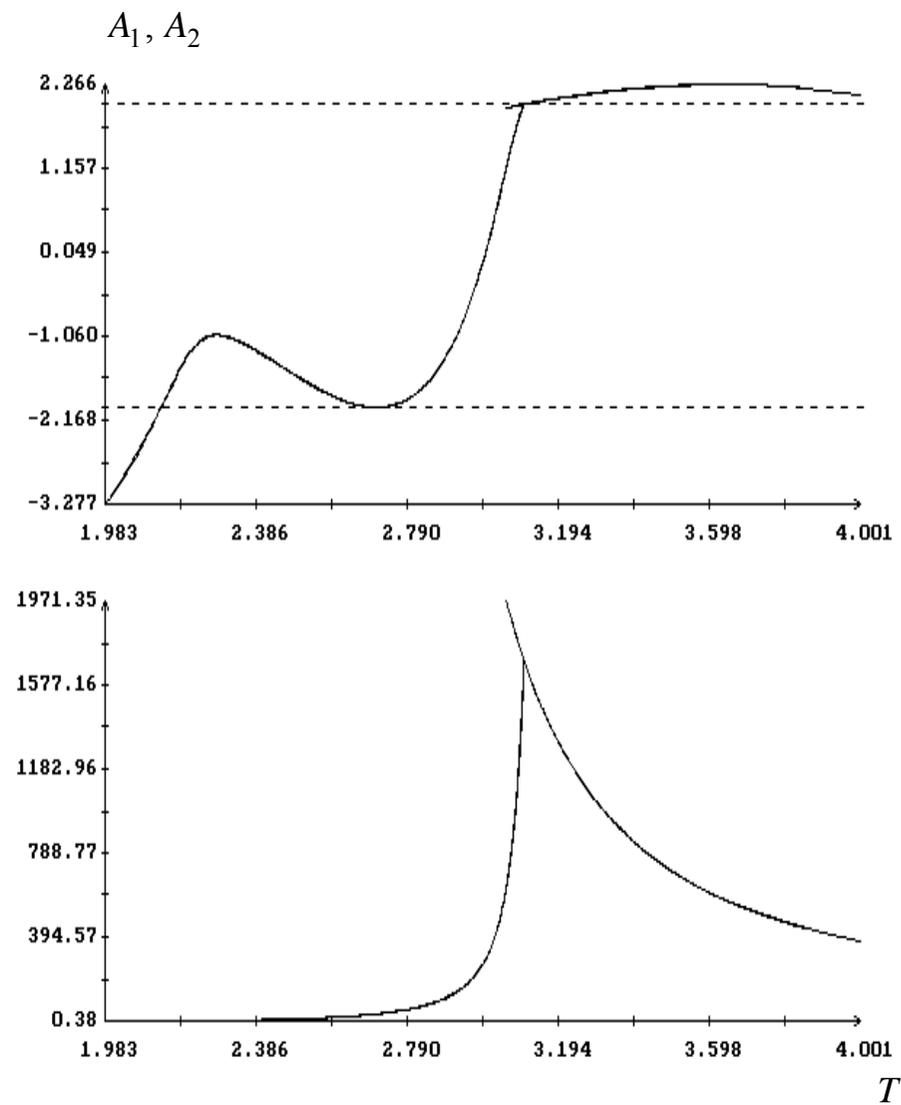
Уточнение x_1 повторяется несколько раз, пока поправка не станет достаточно малой. Полученное значение x_1 принимается в качестве новой оценки x_0 и т.д. Описанный способ уточнения x_1 можно интерпретировать как минимизацию величины $\|\Delta\tilde{x}\|_n^2$ при условии $g(x_1) + g_x(x_1)\Delta\tilde{x} = 0$. Для последовательных поправок Δx и $\Delta\tilde{x}$ имеет место соотношение $\|\Delta\tilde{x}\|_n \ll \|\Delta x\|_n$, и сходимость процесса минимизации $\Phi(x)$ не ухудшается по сравнению с параметризацией x меньшим числом независимых параметров. Тем не менее, расчет каждого столбца матрицы f_x требует интегрирования одного экземпляра системы уравнений в вариациях для уравнений движения. По этой причине указанная параметризация всегда полезна.

Литература

1. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М, «Наука», 1978.
2. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М, «Наука», 1964.
3. Боярский М.Н., Шейхет А.И. Об одноимпульсном переходе с орбиты ИСЗ на условно-периодическую траекторию вокруг коллинеарной точки либрации системы Солнце – Земля // Космические исследования, 1987, т. 25, № 1, с. 152-154.
4. Лидов М.Л., Ляхова В.А., Тесленко Н.М. Одноимпульсный перелет на условно-периодическую орбиту в окрестности точки L_2 системы Земля – Солнце // Космические исследования, 1987, т. 25, № 2, с. 163-185.
5. Себехей В. Теория орбит. М., «Наука», 1982.
6. Крейсман Б.Б. Устойчивые пространственные орбиты «вокруг» коллинеарных точек либрации // Космические исследования, 2011, т. 48, № 3, с. 271-278.
7. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М., Мир, 1985.
8. Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. Траектории перелета с низкой околоземной орбиты на многообразии ограниченных орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 66. 25 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-66>



(a)



(б)

Рис. 1. Симметричные периодические решения в окрестности точки L_2 : (а) начальные условия решений краевой задачи (7), (10); (б) коэффициенты характеристического уравнения (11), вверху график A_1 , внизу график A_2

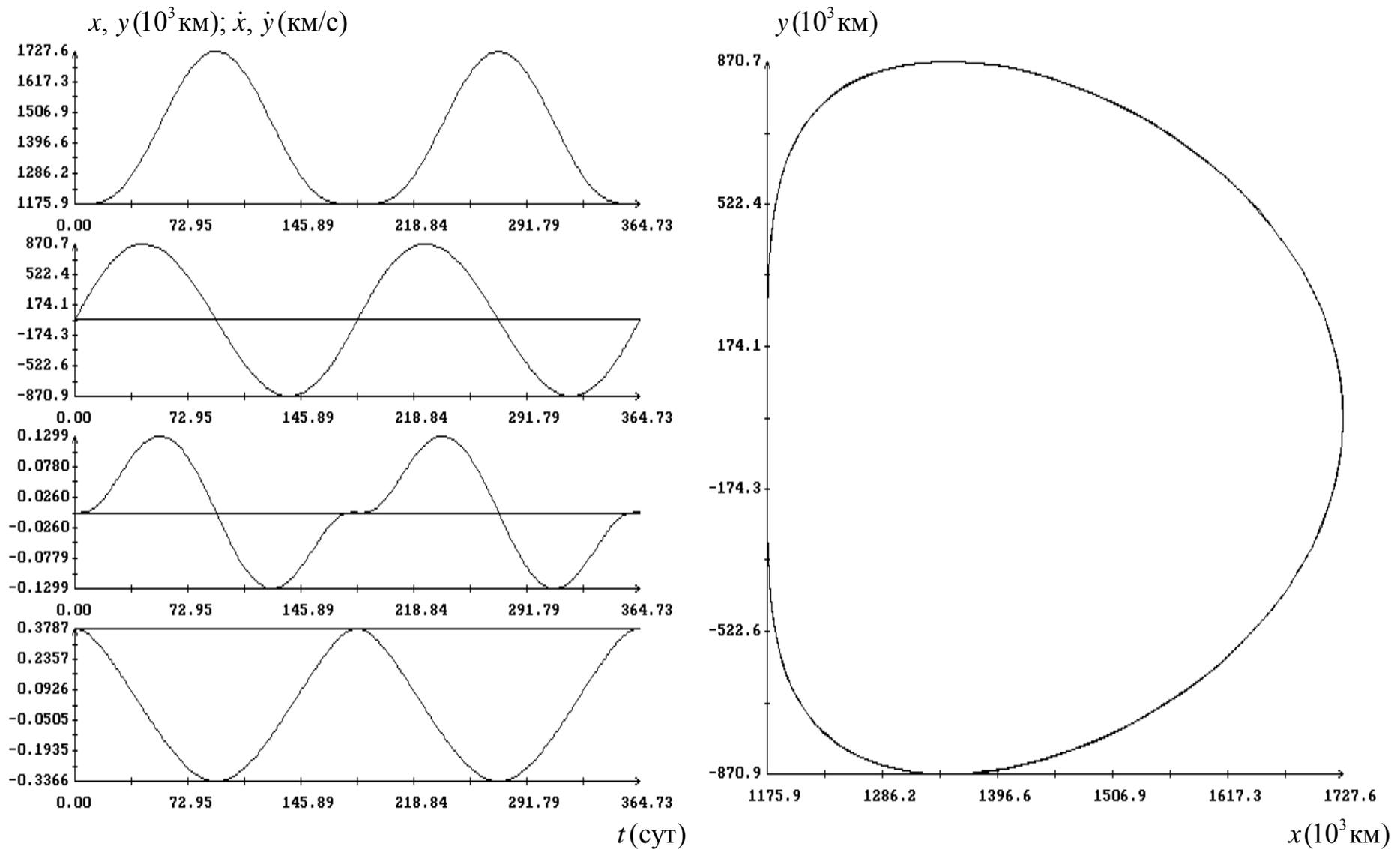


Рис. 2. Плоское симметричное периодическое решение: $x(0) = 7.860652850196e-3$, $y'(0) = 1.279320861345e-2$,
 $T/2 = 1.568573966531$, $A_1 = 2.03227$, $A_2 = 1.52905e+3$

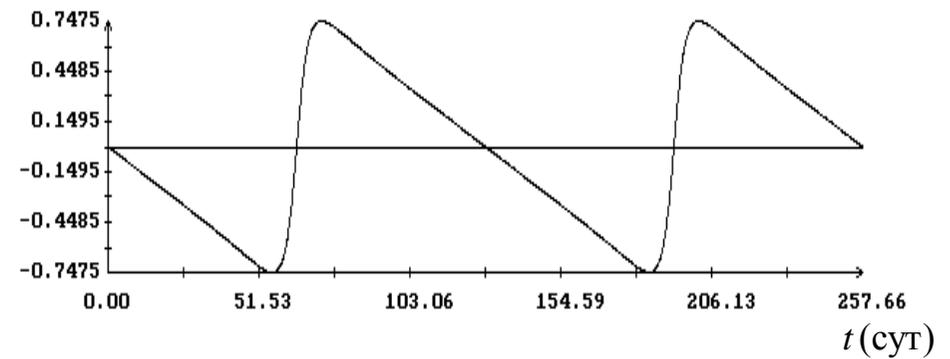
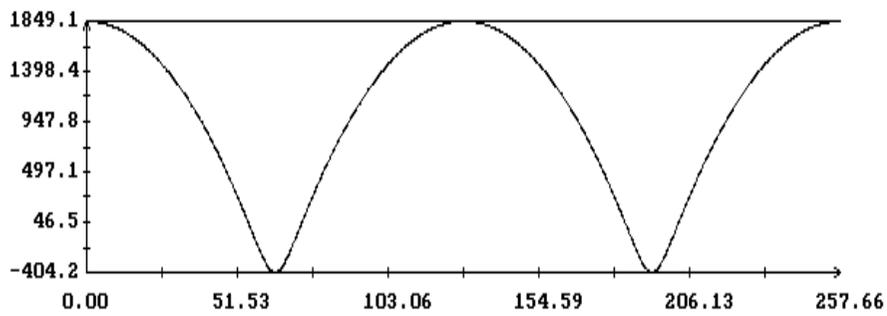
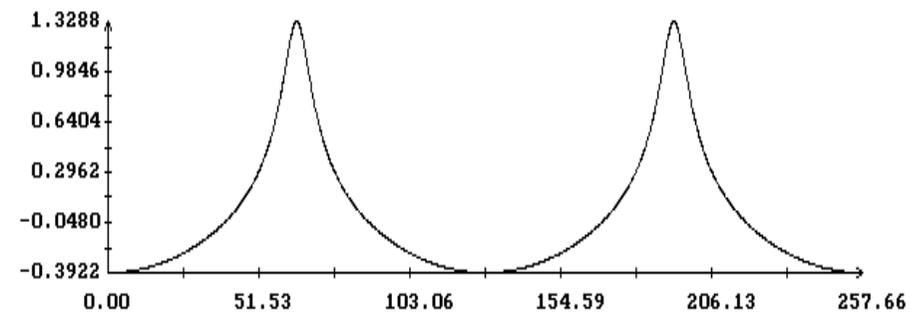
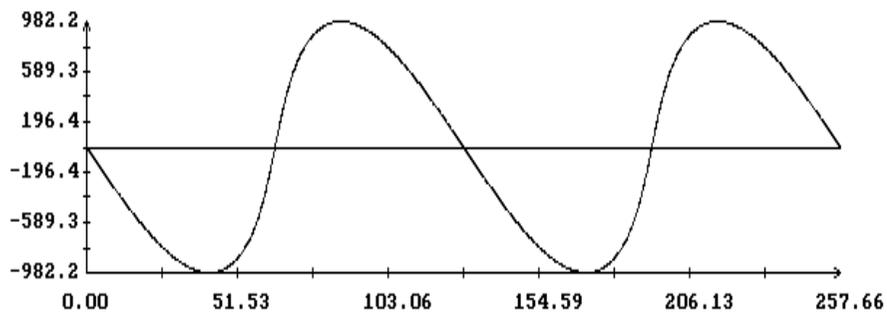
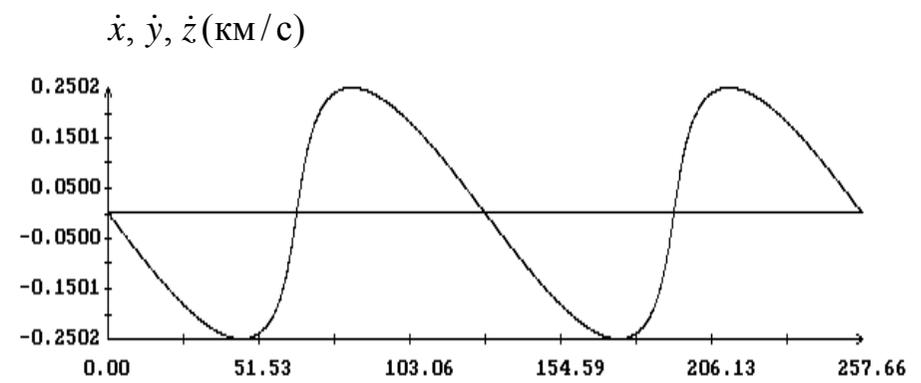
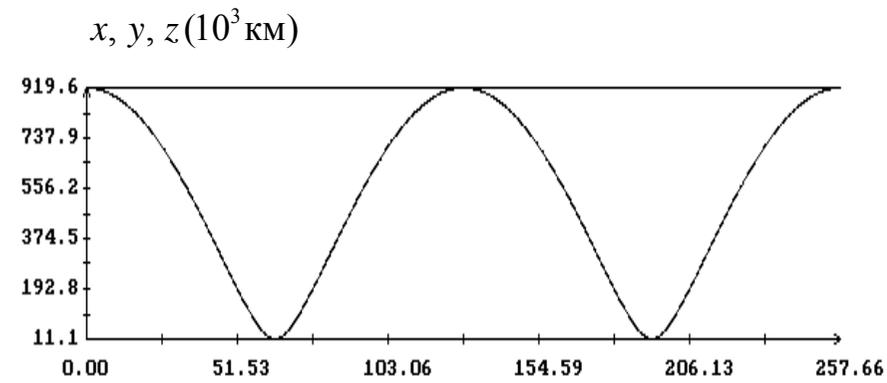


Рис. 3. Решение краевой задачи (7), (10), $x(0) = 6.147383664478e-3$, $z(0) = 1.236039880718e-2$, $y'(0) = -1.324990102747e-2$, $T/2 = 1.108086299980$, $A_1 = -1.224200$, $A_2 = 6.547415e-1$

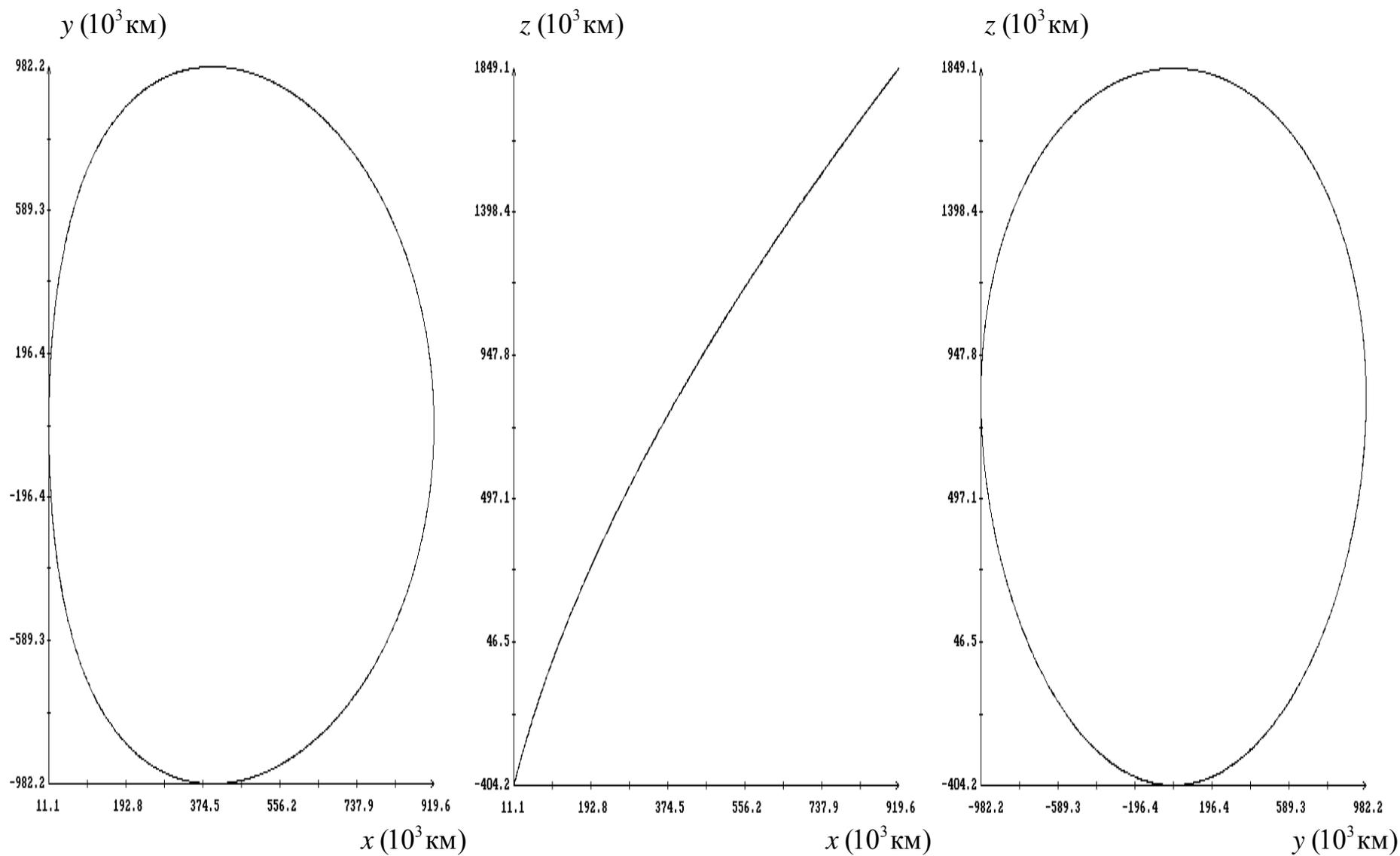


Рис. 4. Решение краевой задачи (7), (10) (см. рис. 3) в проекциях на координатные плоскости (x, y) , (x, z) и (y, z)

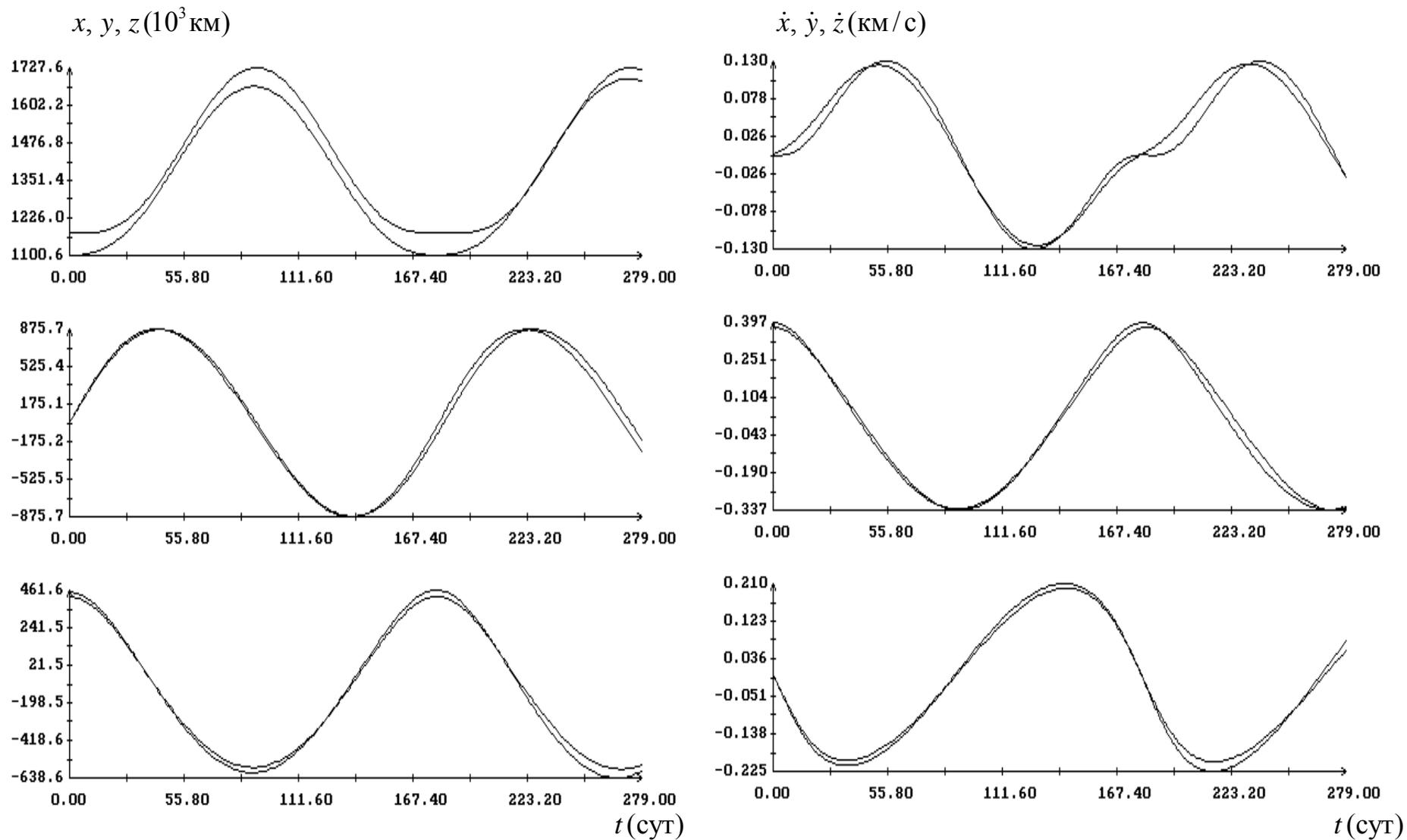


Рис. 5. Слева графики функций прототипа и координат в минимали функционала (14); справа графики производных функций прототипа и компонент скорости в минимали. Ненулевые начальные условия минимали $x(0) = 7.357240783768e-3$, $z(0) = 2.818476435122e-3$, $y'(0) = 1.342175139126e-2$

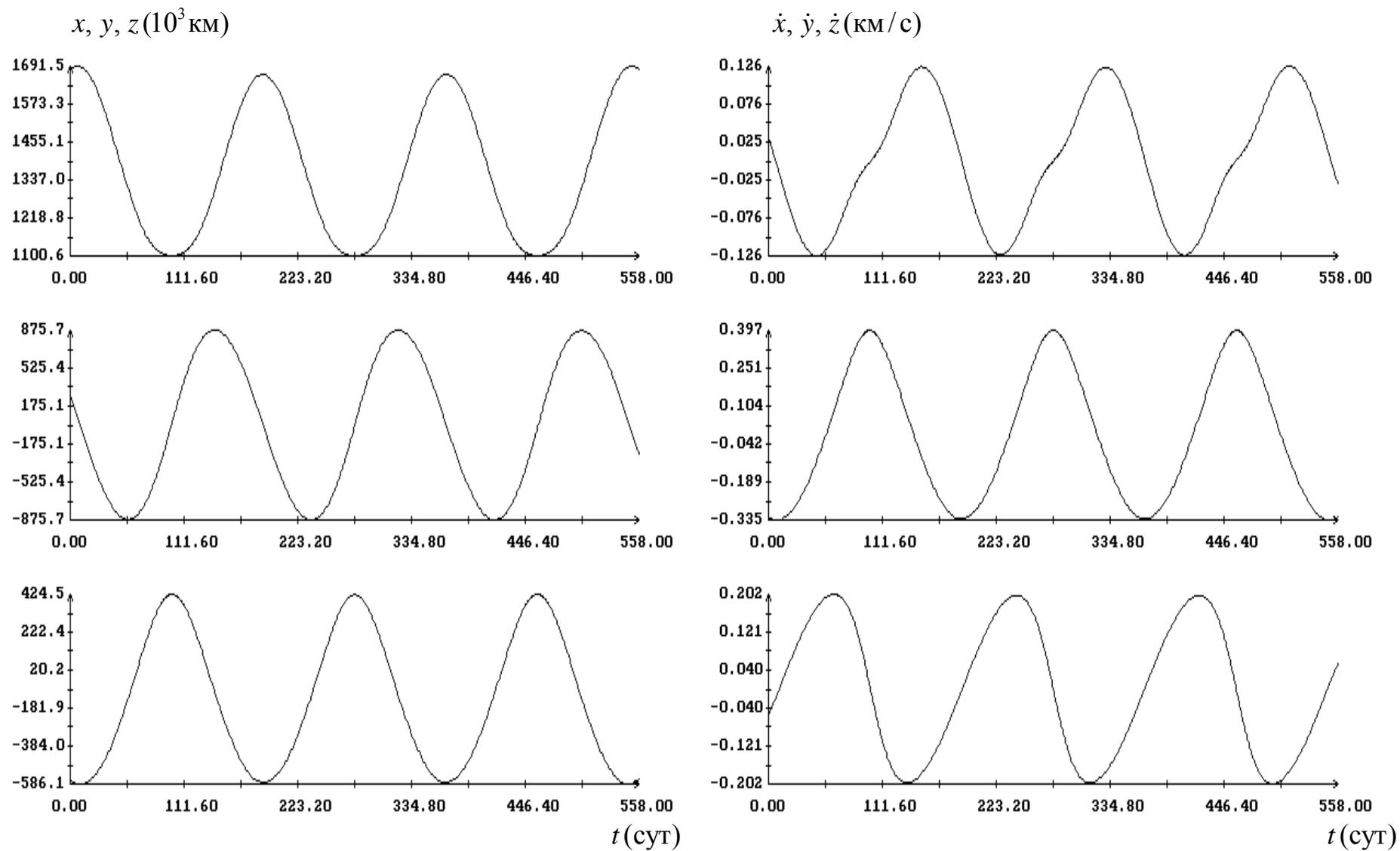


Рис. 6. Графики координат и компонент скорости в симметричном продолжении минимали функционала (14) на отрезок удвоенной длины

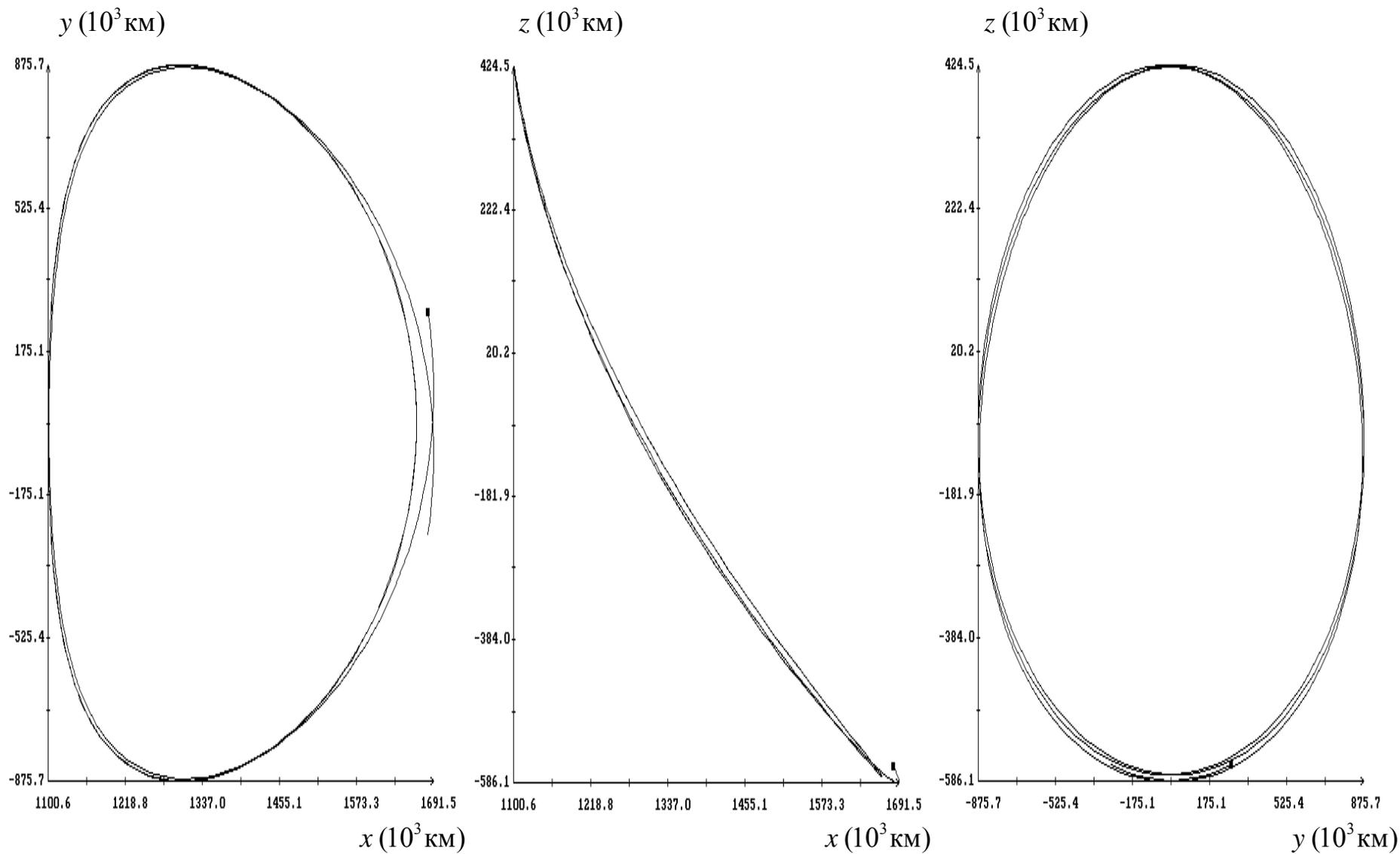


Рис. 7. Симметричное продолжение минимали функционала (14) на отрезок удвоенной длины (см. рис. 6) в проекциях на координатные плоскости (x, y) , (x, z) и (y, z)

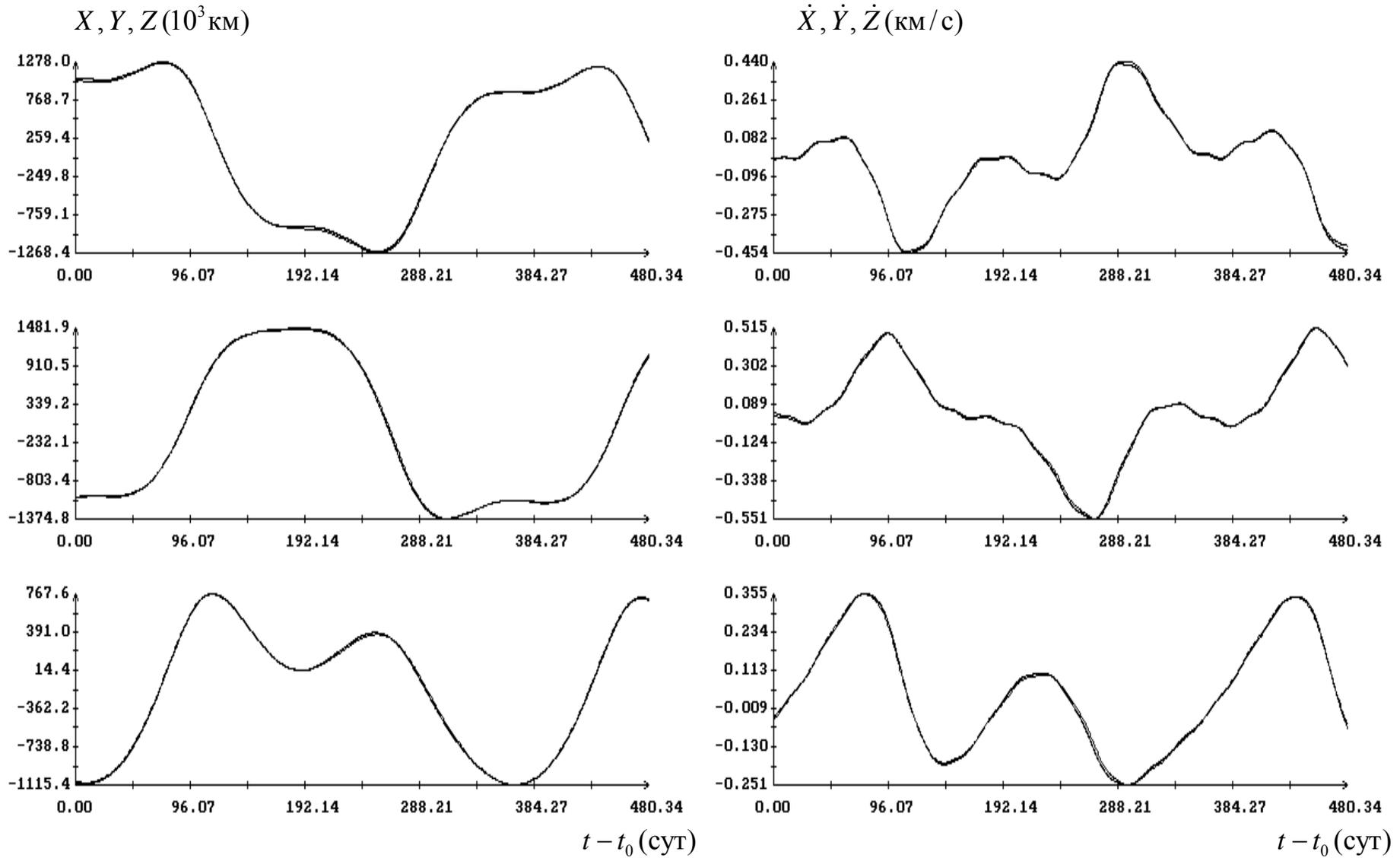


Рис. 8. Слева графики функций прототипа и координат в минимали функционала (18); справа графики производных функций прототипа и компонент скорости в минимали; $t_0 = 61700$ с UTC 20.07.2015

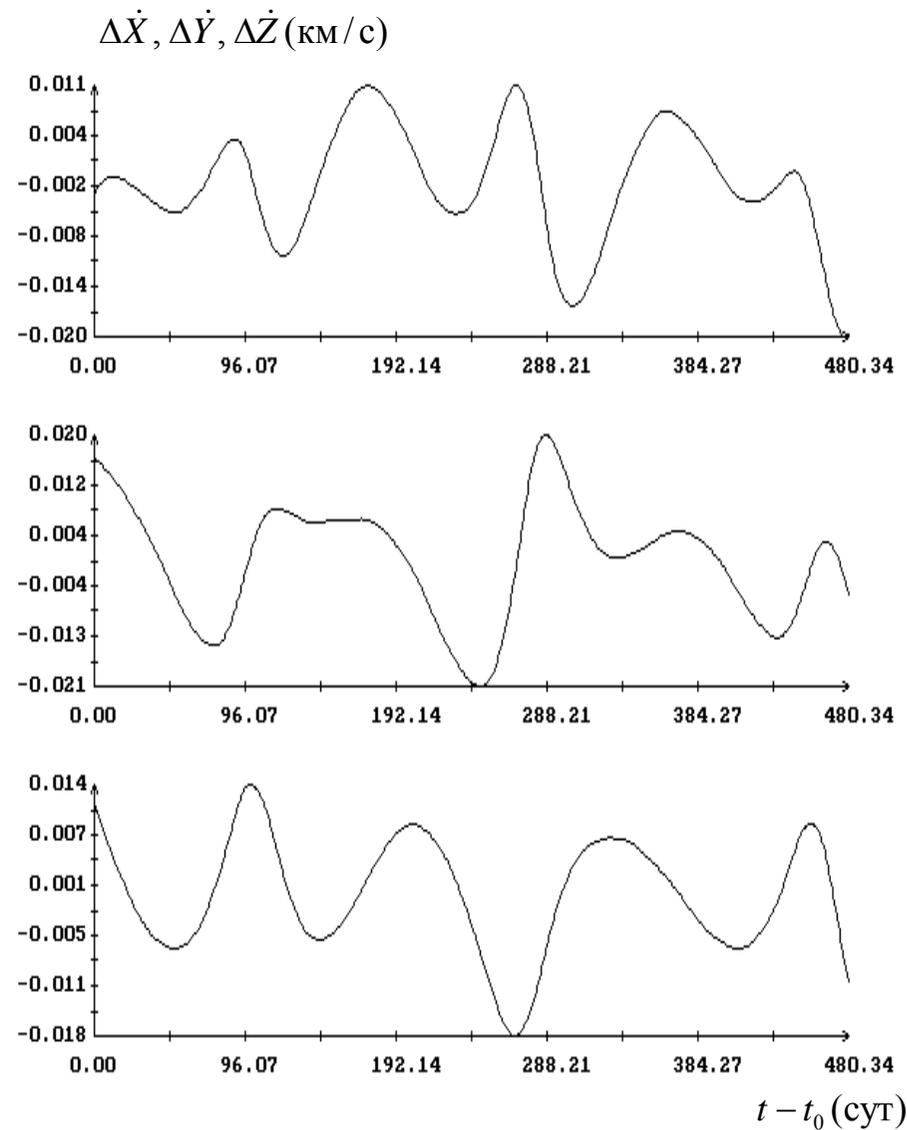
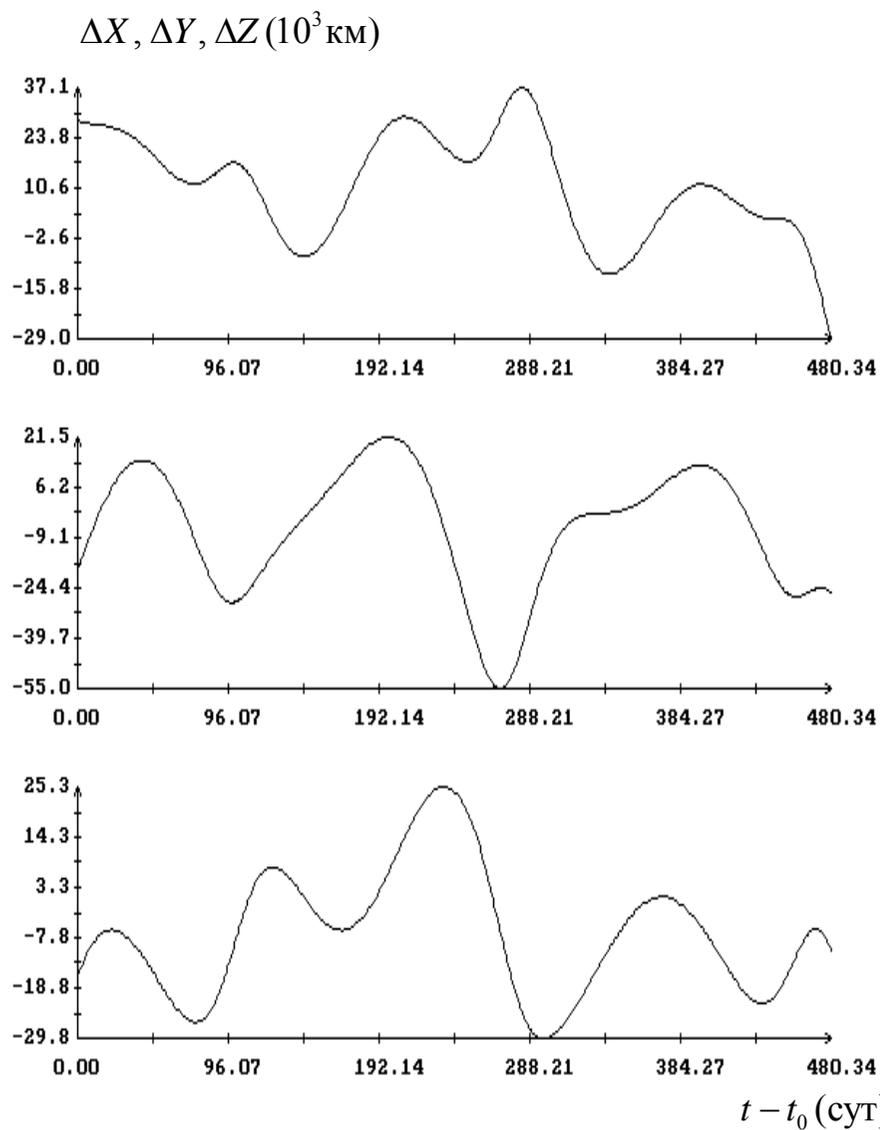
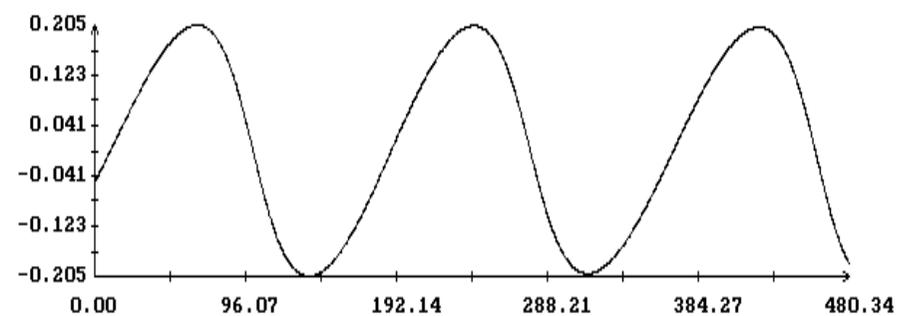
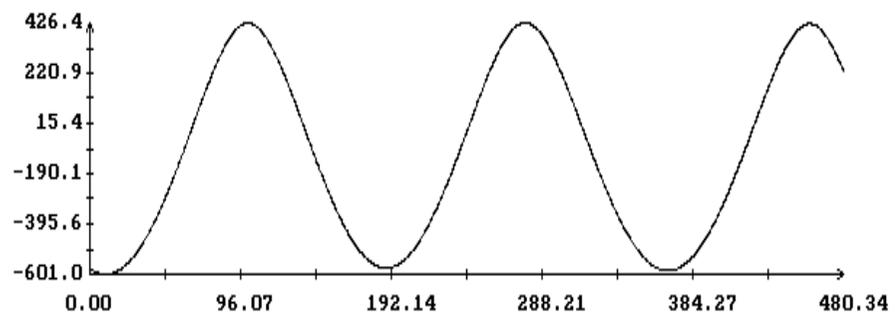
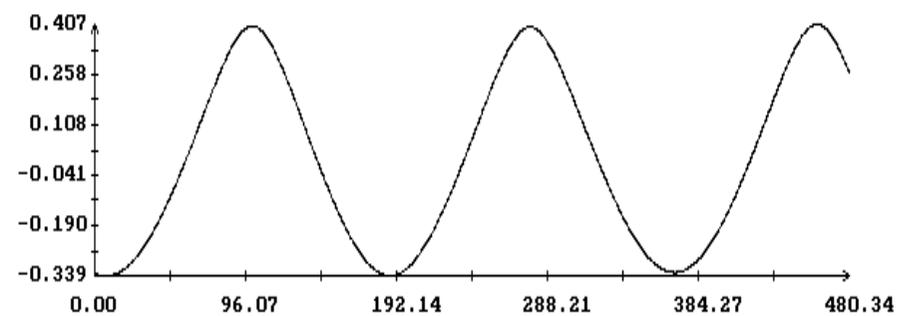
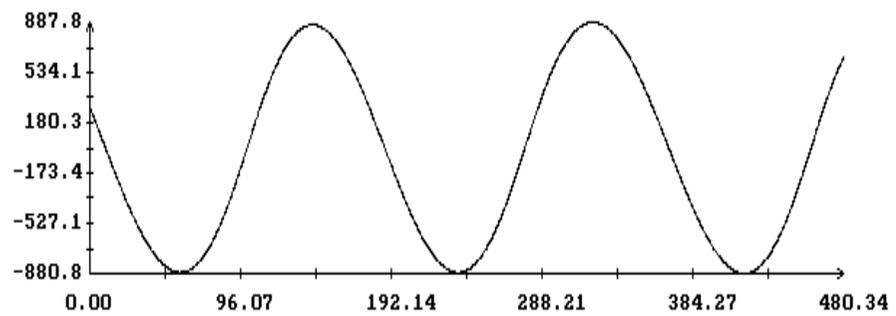
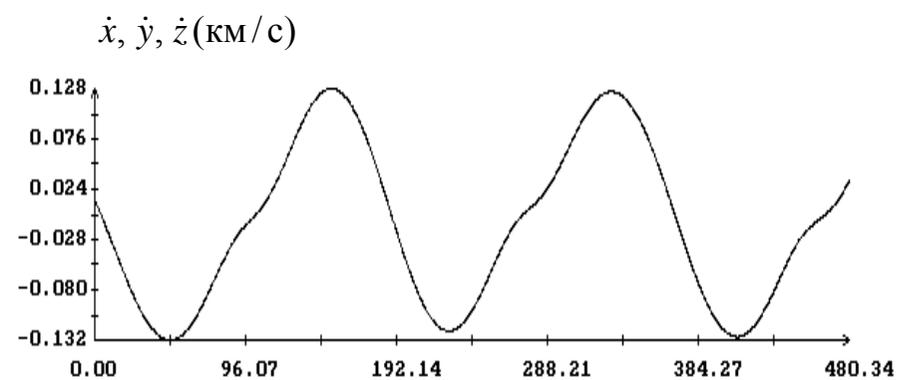
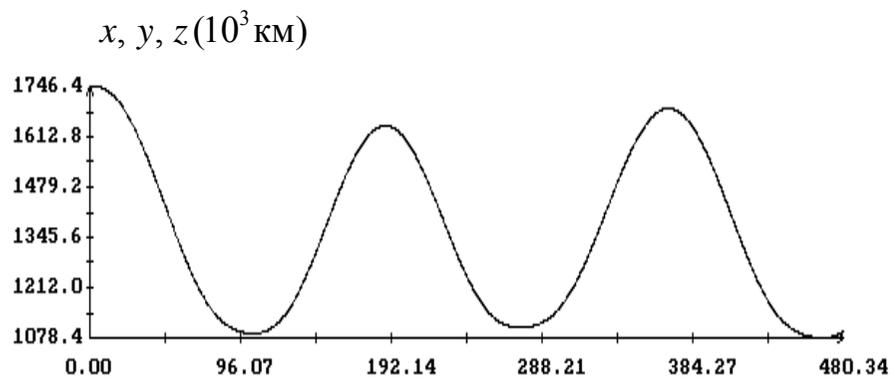


Рис. 9. Отклонения координат и компонент скорости в минимали функционала (18) (рис. 8) от соответствующих функций прототипа и их производных



$t - t_0$ (сут)

$t - t_0$ (сут)

Рис.10. Графики координат и компонент скорости в минимали функционала (18) (рис. 8) в орбитальной системе координат барицентра системы Земля – Луна

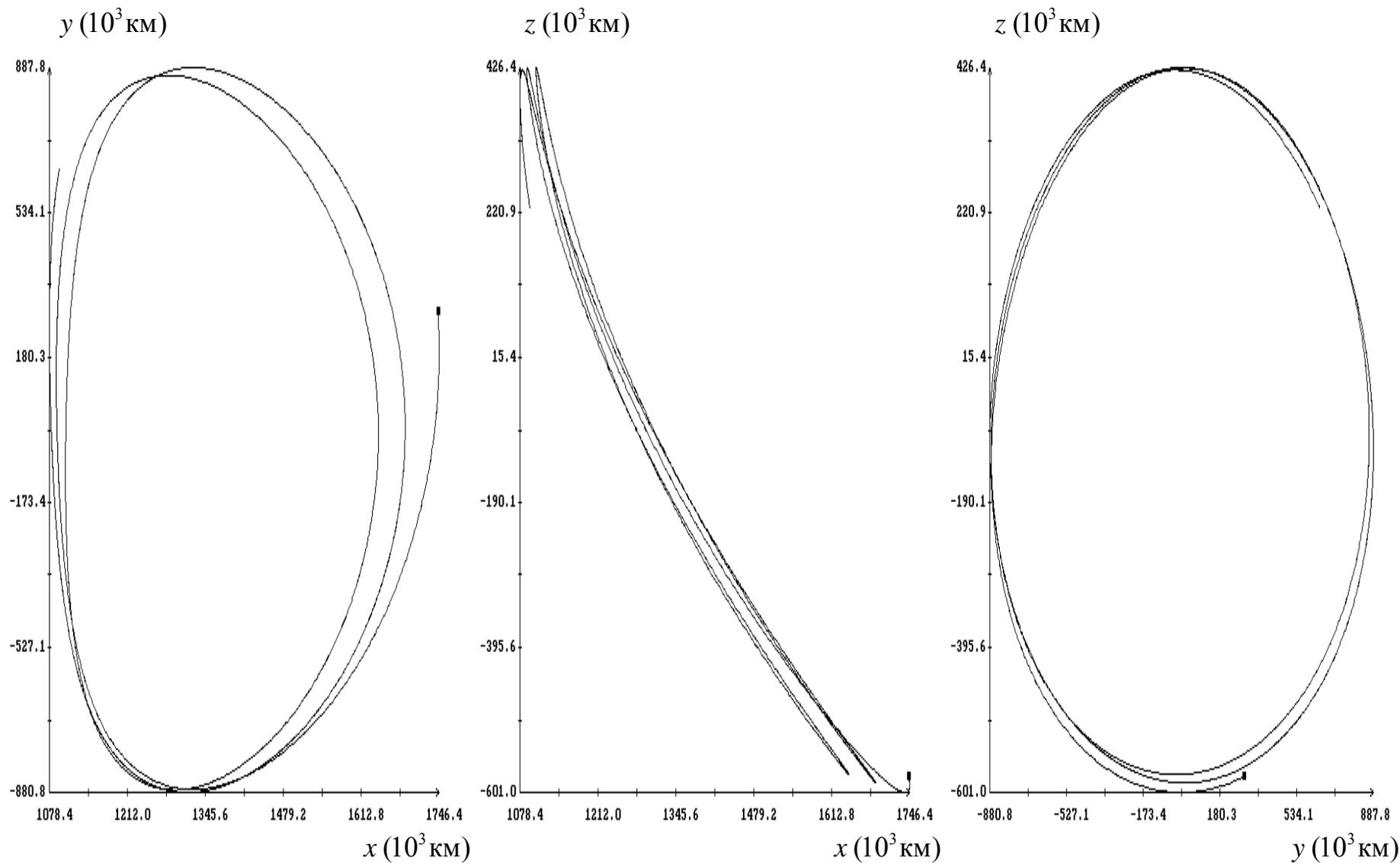


Рис. 11. Минималь функционала (18) (см. рис. 8, 10) в проекциях на плоскости (x, y) , (x, z) и (y, z) орбитальной системы координат барицентра системы Земля – Луна