



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 46 за 2012 г.



**Боровин Г.К., Лапшин В.В.**

Оптимальное управление  
ориентацией двух шарнирно  
соединенных тел

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Боровин Г.К., Лапшин В.В. Оптимальное управление ориентацией двух шарнирно соединенных тел // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 46. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-46>

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша  
Российской академии наук

Г.К.Боровин, В.В.Лапшин

Оптимальное управление ориентацией двух  
шарнирно соединенных тел

Москва, 2012 г.

*Боровин Г.К., Лапшин В.В. Оптимальное управление ориентацией двух шарнирно соединенных тел.*

Исследовано движение двух шарнирно соединенных тел в фазе полета (невесомости). Решена задача минимизации и максимизации времени разворота из заданного начального в заданное конечное положение. Предполагается, что при этом кинетический момент системы относительно центра масс отличен от нуля. Данная задача является простейшей моделью управления ориентацией прыгающего аппарата в безопорной фазе прыжка.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-01-00712 и гранта Президента РФ № НШ-4748.2012.8 для ведущих научных школ РФ.

Ключевые слова: оптимальное управление движением, прыгающий аппарат.

*Borovin G.K., Lapshin V.V. Optimal control of a two joint bodies.*

Motion of two joint bodies during the flight phase is investigated. The problem of minimization and maximization of the time necessary for their rotation from initial to final position has been solved. Non zero angular momentum of the system relative to the center of mass assumed. It is the simplest model of a hopping vehicle motion control in the supportless phase of hopping.

Work is executed at support of the RFBR grant № 07-01-00286 and the Russian President grant № НШ-4748.2012.8 for leading scientific schools.

Key words: motion optimal control, legged vehicle.

## *1. Введение*

При увеличении скорости движения машин, передвигающихся с помощью ног, энергетически выгодно переходить от статически устойчивых режимов ходьбы к динамическим, а затем к бегу и прыжкам, аналогично тому, как это имеет место у животных [1]. Этим объясняется интерес к исследованию динамики и управления движением прыгающих и бегающих аппаратов, движение которых состоит в чередовании опорных и безопорных фаз движения [1–7].

В безопорной фазе движения центр масс аппарата перемещается по баллистической траектории и его движение не управляемо. Движением же аппарата вокруг центра масс можно управлять за счет изменения движения конечностей или движения одной части корпуса относительно другой [1–8]. Интерес к этой проблеме объясняется как изучением биомеханики движений спортсменов, космонавтов и животных, так и исследованиями динамики и управления движением прыгающих и бегающих аппаратов. Как для прыгающих аппаратов, так и для животных и человека целью управления является обеспечение требуемого (программного) положения в момент приземления. Задача управления движением в фазе полета разбивается на две подзадачи. Алгоритм построения программного движения определяет скорости всех звеньев аппарата в момент отрыва от опорной поверхности, обеспечивающие переход из заданного начального в заданное конечное положение. Алгоритм стабилизации движения обеспечивает реализацию требуемого положения в момент приземления при наличии возмущений и ошибок отработки программных значений координат и скоростей в момент отрыва от опорной поверхности за счет изменения движения ног относительно корпуса [2–3, 7].

Для исследования вопроса о допустимой величине ошибок, которые способен обработать алгоритм стабилизации, представляет интерес задача об определении минимального и максимального времени разворота аппарата в фазе полета из заданного начального в заданное конечное положение при известной (ненулевой) величине кинетического момента аппарата относительно центра масс. В [8] эта задача решена для простейшей модели аппарата, состоящего из двух твердых тел, соединенных линейным сервоприводом. В данной работе рассмотрена модель аппарата, состоящего из двух шарнирно соединенных тел. Эту модель можно рассматривать как упрощенную модель

движения прыгающего аппарата, спортсмена при прыжках в воду или акробата, в предположении, что во время полета используется только тазобедренный шарнир.

## 2. Постановка задачи

Конструктивная схема аппарата приведена на рис. 1. Масса  $i$ -го ( $i = 1, 2$ ) тела равна  $m_i$ , момент инерции относительно центра масс  $C_i$  равен  $J_i$ ,  $l_i = AC_i$ . Точка  $C$  – центр масс аппарата. Положение системы относительно абсолютной неподвижной системы координат  $Oxy$  (ось  $Oy$  направлена вертикально вверх) определяется координатами шарнира  $A$   $x, y$ , углом тангажа первого тела  $\theta$  (углом между горизонтальной осью  $Ox$  и линией  $AC_1$ ) и углом между телами  $\alpha$ , который изменяется с помощью сервопривода.

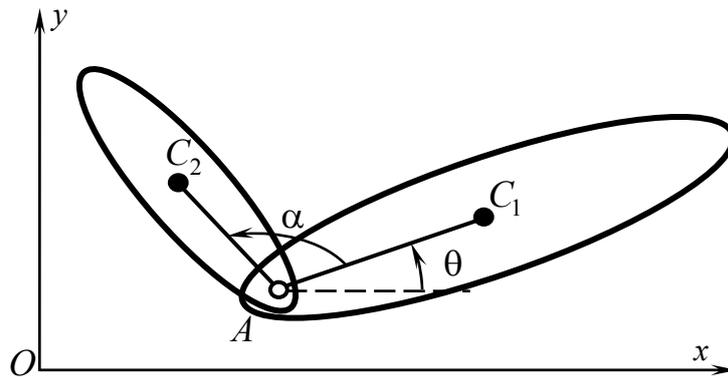


Рис. 1. Конструктивная схема аппарата

В безопорной фазе движения имеет место закон сохранения кинетического момента относительно центра масс (относительно осей Кенига, перемещающихся поступательно вместе с центром масс) [9]. Кинетический момент  $i$ -го тела относительно осей Кенига определим как сумму кинетического момента центра масс этого тела и кинетического момента вращения относительно собственного центра масс [9]

$$\begin{aligned}
K_C &= J_1 \dot{\theta} + J_2 (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) + \sum_{i=1}^2 [m_i (\bar{r}_i - \bar{r}_C) \times (\bar{V}_i - \bar{V}_C)]_z = \\
&= J_1 \dot{\theta} + J_2 (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) + \sum_{i=1}^2 [m_i (\bar{\rho}_i - \bar{\rho}_C) \times (\bar{v}_i - \bar{v}_C)]_z \quad ,
\end{aligned}$$

где  $\bar{r}_i, \bar{r}_C, \bar{V}_i, \bar{V}_C$  – радиус-вектор и скорость центра масс  $i$ -го тела и центра масс аппарата в неподвижной системе координат  $Oxyz$ ,  $\bar{\rho}_i, \bar{\rho}_C, \bar{v}_i, \bar{v}_C$  – радиус-вектор и скорость центра масс  $i$ -го тела и центра масс аппарата в системе координат  $Axyz$ , перемещающейся поступательно вместе с центром масс. Тогда

$$\bar{\rho}_1 = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta \\ l_1 \sin \theta \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{\rho}_2 = \begin{bmatrix} l_2 \cos(\theta + \alpha) \\ l_2 \sin(\theta + \alpha) \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{\rho}_C = \frac{m_1 \bar{\rho}_1 + m_2 \bar{\rho}_2}{m_1 + m_2} \quad ,$$

а  $\bar{v}_i, \bar{v}_C$  определяются дифференцированием этих соотношений.

Закон сохранения кинетического момента системы относительно центра масс имеет вид

$$(I_1 - 2I_0 \cos \alpha) \dot{\theta} + (I_2 - I_0 \cos \alpha) \dot{\alpha} = K_C = \text{const} \quad , \quad (2.1)$$

где

$$I_1 = J_1 + J_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (l_1^2 + l_2^2) \quad , \quad I_2 = J_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l_2^2 \quad , \quad I_0 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l_1 l_2 \quad (2.3)$$

Отметим, что

$$I_1 - 2I_0 = J_1 + J_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (l_1 + l_2)^2 > 0 \quad . \quad (2.4)$$

Обозначим  $\alpha^0, \theta^0$  и  $\alpha^D, \theta^D$  начальное и требуемое конечное положение аппарата относительно центра масс в конечный момент времени. Положим, что  $\alpha^0, \alpha^D \in [0, 2\pi]$ .

Для определенности положим

$$K_C > 0 \quad . \quad (2.5)$$

За управление  $u = \dot{\alpha}$  примем скорость изменения угла в шарнире  $A$  и положим, что оно ограничено по величине максимальной скоростью сервопривода  $|u| \leq u_m$ .

Уравнения движения аппарата относительно центра масс имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = u \\ \dot{\theta} = \frac{K_C}{I_1 - 2I_0 \cos \alpha} - \frac{I_2 - I_0 \cos \alpha}{I_1 - 2I_0 \cos \alpha} u \end{cases} .$$

Введем новые переменные

$$x_1 = \alpha - \pi \quad , \quad x_2 = \theta + \beta(\alpha) - \theta^D - \beta(\alpha^D) \quad , \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \beta(\alpha) &= \int \frac{I_2 - I_0 \cos \alpha}{I_1 - 2I_0 \cos \alpha} d\alpha = \frac{1}{2} \left[ \alpha + (2I_2 - I_1) \int \frac{d\alpha}{I_1 - 2I_0 \cos \alpha} \right] = \\ &= \frac{\alpha}{2} + \frac{2I_2 - I_1}{\sqrt{I_1^2 - 4I_0^2}} \operatorname{Arctg} \left[ \frac{I_1 + 2I_0}{\sqrt{I_1^2 - 4I_0^2}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right] \quad , \end{aligned} \quad (2.7)$$

где для однозначности положим, что  $\operatorname{Arctg} \left[ \frac{I_1 + 2I_0}{\sqrt{I_1^2 - 4I_0^2}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right]$  и  $\frac{\alpha}{2}$  лежат в одной четверти.

Тогда

$$\dot{x}_2 = \dot{\theta} + \frac{d\beta}{d\alpha} \dot{\alpha} = \dot{\theta} + \frac{I_2 - I_0 \cos \alpha}{I_1 - 2I_0 \cos \alpha} \dot{\alpha} \quad .$$

Задача минимизации времени разворота аппарата в безопорной фазе движения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = \omega(x_1) \end{cases} \quad , \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} x_1(0) = x_1^0 \\ x_2(0) = x_2^0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(T) = x_1^D = \alpha^D \\ x_2(T) = 0 \end{cases}, \quad (2.9)$$

$$|u| \leq u_m, \quad (2.10)$$

$$T \rightarrow \min, \quad (2.11)$$

$$x_1^0, x_1^D \in [-\pi, \pi] \quad (2.12)$$

где

$$\omega(x_1) = \frac{K_C}{I_1 + 2I_0 \cos x_1}. \quad (2.13)$$

Отметим, что в силу (2.4)–(2.5)

$$\omega(x_1) > 0 \quad (2.14)$$

при любом значении  $x_1$ . Следовательно, при  $t > T$  система не останется в программном положении, а продолжит свое вращение относительно центра масс.

При  $x_1 \equiv 0$  аппарат распрямлен (момент инерции относительно центра масс максимальный) и вращение происходит с минимальной угловой скоростью  $\dot{x}_2 = \dot{\theta} = \omega_{\min} = \omega(0) = \frac{K_C}{I_1 + 2I_0}$ . При  $x_1 \equiv \pm\pi$  аппарат сложен (момент инерции относительно центра масс минимальный) и вращение происходит с максимальной угловой скоростью  $\dot{x}_2 = \dot{\theta} = \omega_{\max} = \omega(\pm\pi) = \frac{K_C}{I_1 - 2I_0}$ .

### 3. Решение задачи о минимизации времени разворота

Для решения задачи быстродействия (2.8)–(2.13) воспользуемся принципом максимума Понтрягина [10–11]. Гамильтониан  $H$  равен

$$H = -1 + \psi_1 u + \psi_2 \omega(x_1) \quad . \quad (3.1)$$

Сопряженные переменные являются решениями уравнений

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\psi_2 \frac{d\omega}{dx_1} \quad , \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \quad . \quad (3.2)$$

Тогда

$$\psi_2 = \text{const} \quad . \quad (3.3)$$

В соответствии с принципом максимума на оптимальной траектории достигается максимум Гамильтониана по  $u$ . Оптимальное управление  $u^*$

$$u^* = \begin{cases} u_m & \text{при } \psi_1 > 0 \\ \text{не определено} & \text{при } \psi_1 = 0 \\ -u_m & \text{при } \psi_1 < 0 \end{cases} \quad , \quad (3.4)$$

и на оптимальной траектории справедливо условие трансверсальности

$$H = -1 + \psi_1 u + \psi_2 \omega(x_1) \equiv 0 \quad . \quad (3.5)$$

Если  $u = u_m$  ( $\psi_1 > 0$ ), то

$$x_1 = c_1 + u_m t \quad , \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{\omega(x_1)}{u_m} \quad , \quad x_2 = \frac{\varphi(x_1)}{u_m} + c_2 \quad , \quad (3.6)$$

где  $c_1, c_2$  – постоянные интегрирования,

$$\varphi(x_1) = \int \omega(x_1) dx_1 = \frac{2K_C}{\sqrt{I_1 - 2I_0}} \text{Arctg} \frac{I_1 - 2I_0}{\sqrt{I_1^2 - 4I_0^2}} \text{tg} \frac{x_1}{2} \quad , \quad (3.7)$$

и для однозначности положим, что  $\text{Arctg} \frac{I_1 - 2I_0}{\sqrt{I_1^2 - 4I_0^2}} \text{tg} \frac{x_1}{2}$  и  $\frac{x_1}{2}$  лежат в одной четверти. Тогда  $\varphi(x_1)$  – монотонно возрастающая нечетная функция  $x_1$ .

Если  $u = -u_m$  ( $\psi_1 < 0$ ), то

$$x_1 = d_1 - u_m t, \quad x_2 = -\frac{\varphi(x_1)}{u_m} + d_2, \quad (3.8)$$

где  $d_1, d_2$  – постоянные интегрирования.

В вырожденном случае  $\psi_1 \equiv 0$  в течение некоторого интервала времени и  $\dot{\psi}_1 \equiv 0$ . Из (3.2) следует  $\frac{d\omega}{dx_1} \equiv 0$ , а тогда  $\sin x_1 \equiv 0$ , и в силу (2.8) вырожденные фазовые траектории соответствуют управлению  $u \equiv 0$  и

$$x_1 \equiv n\pi, \quad u \equiv 0, \quad \dot{x}_2 = \frac{K_C}{I_1 - (-1)^n 2I_0} = \text{const} > 0, \quad \text{где } n \in \{-1; 0; 1\}.$$

Для задачи быстрогодействия в силу принципа оптимальности подходят только траектории, соответствующие сложенному положению аппарата:

$$x_1 \equiv \pm\pi, \quad u \equiv 0, \quad \dot{x}_2 = \omega_{\max} = \frac{K_C}{I_1 - 2I_0} = \text{const} > 0. \quad (3.9)$$

Через программное конечное положение проходят две фазовые траектории (рис. 2). Одна из них  $\Gamma_+$  соответствует управлению  $u = u_m$ :

$$\Gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_1^D)}{u_m}, \quad x_1 < x_1^D \right\},$$

а вторая  $\Gamma_-$  – управлению  $u = -u_m$ :

$$\Gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 = \frac{\varphi(x_1^D) - \varphi(x_1)}{u_m}, \quad x_1 > x_1^D \right\}.$$

Эти кривые вместе с  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , соответствующими вырожденному случаю  $u \equiv 0$ , кривыми  $\tilde{\Gamma}_-, \tilde{\Gamma}_+$

$$\Gamma_1 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\pi, \quad x_2 < \frac{\varphi(-\pi) - \varphi(x_1^D)}{u_m} \right\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = \pi, \quad x_2 < \frac{\varphi(x_1^D) - \varphi(\pi)}{u_m} \right\},$$

$$\tilde{\Gamma}_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 = \frac{-\varphi(x_1^D) - \varphi(x_1)}{u_m}, \quad x_1 < -x_1^D \right\},$$

$$\tilde{\Gamma}_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 = \frac{\varphi(x_1^D) + \varphi(x_1)}{u_m}, \quad x_1 > -x_1^D \right\}$$

и прямая  $x_1 = -x_1^D$  делят часть фазовой плоскости, в которой лежат начальное и конечное положение аппарата (т.е. часть фазой плоскости, удовлетворяющей условию  $-\pi \leq x_1 \leq \pi$ ), на пять областей  $R_0, R_1, R_2, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2$  (рис. 2).

**Утверждение 1.** Если система находится в области  $R_0$ , то ее невозможно перевести в требуемое конечное положение.

При заданном положительном значении кинетического момента системы  $K_C > 0$  невозможно перевести систему из произвольного начального в заданное конечное положение, т.е. система является неуправляемой.

Доказательство этого утверждения очевидно. Ни одна из фазовых траекторий (3.6), (3.8), (3.9), начинающаяся в области  $R_0$ , не проходит через программное конечное положение.

**Утверждение 2.** Если в начальный момент времени система не лежит в области  $R_0$ , то оптимальный закон управления имеет вид

$$u^* = \begin{cases} -u_m & \text{при } (x_1, x_2) \in R_1 \cup \tilde{R}_1 \cup \Gamma_- \cup \tilde{\Gamma}_- \\ +u_m & \text{при } (x_1, x_2) \in R_2 \cup \tilde{R}_2 \cup \Gamma_+ \cup \tilde{\Gamma}_+ \\ 0 & \text{при } (x_1, x_2) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \end{cases}.$$

Если система находится в области  $R_1$ , то оптимальная управляющая последовательность  $\{-u_m, u_m\}$ ; в области  $R_2$  —  $\{u_m, -u_m\}$ ; в области  $\tilde{R}_1$  —  $\{-u_m, 0, u_m\}$ ; в области  $\tilde{R}_2$  —  $\{u_m, 0, -u_m\}$ .

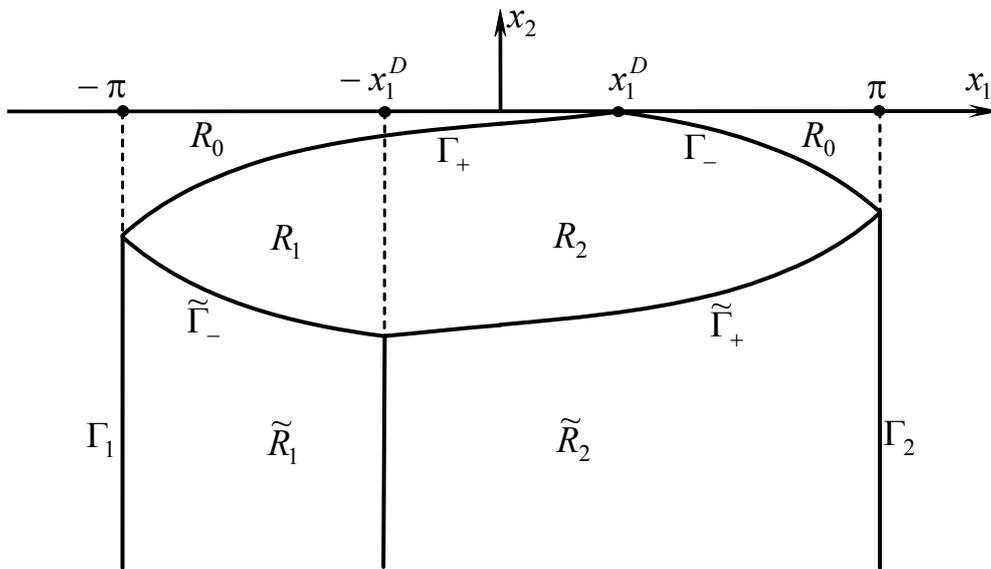


Рис. 2. Линии переключения и области, соответствующие различным оптимальным управляющим последовательностям

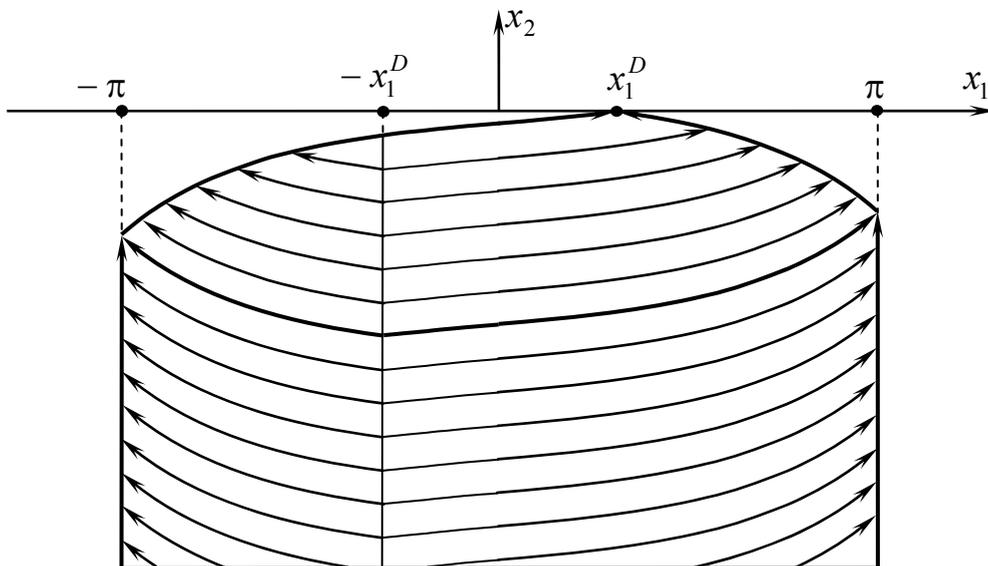


Рис. 3. Оптимальные фазовые траектории в задаче минимизации времени разворота

Соответствующие оптимальные фазовые траектории при различных начальных условиях показаны на рис. 3.

**Замечание 1.** Механический смысл оптимального решения очевиден. При уменьшении момента инерции связки двух тел относительно их общего центра масс увеличивается угловая скорость вращения в силу закона сохранения кинетического момента. На оптимальной траектории необходимо с максимально возможной скоростью сложить аппарат (двузвенник) и тем самым уменьшать момент инерции аппарата относительно общего центра масс. Затем привести аппарат в требуемое конечное положение по углу  $\alpha$ .

**Замечание 2.** Если  $x_1^0, x_1^D \in [-\pi, \pi]$ , то на оптимальном решении  $x_1 \in [-\pi, \pi]$  или  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . Это ограничение является естественным для прыгающего аппарата. Тело 2 не может совершать относительно тела 1 несколько оборотов. Для человека вообще  $\alpha \in [0, \pi]$ .

Доказательство утверждения 2 сводится к доказательству лемм 1–5.

**Лемма 1.** Возможны только оптимальные управляющие последовательности, перечисленные в утверждении 2, и  $x_1 \in [-\pi, \pi]$ .

**Доказательство.** Если  $u = u_m$  ( $\psi_1 > 0$ ), то  $\dot{x}_1 = u_m > 0$ . Отсюда  $dt = \frac{dx_1}{u_m}$ ,

и в силу (3.2)–(3.3)  $\frac{d\psi_1}{dx_1} = -\frac{\psi_2}{u_m} \frac{d\omega}{dx_1}$ ,  $\psi_1 = -\frac{\psi_2}{u_m} \omega(x_1) + c$ . Подставляя  $\psi_1$  в условие трансверсальности (3.5), получаем значение постоянной интегрирования  $c = 1/u_m$ . В результате

$$\psi_1 = \frac{1}{u_m} [1 - \psi_2 \omega(x_1)] \quad . \quad (3.10)$$

Аналогично, если  $u = -u_m$  ( $\psi_1 < 0$ ), то  $\dot{x}_1 = -u_m < 0$

$$\psi_1 = -\frac{1}{u_m} [1 - \psi_2 \omega(x_1)] \quad . \quad (3.11)$$

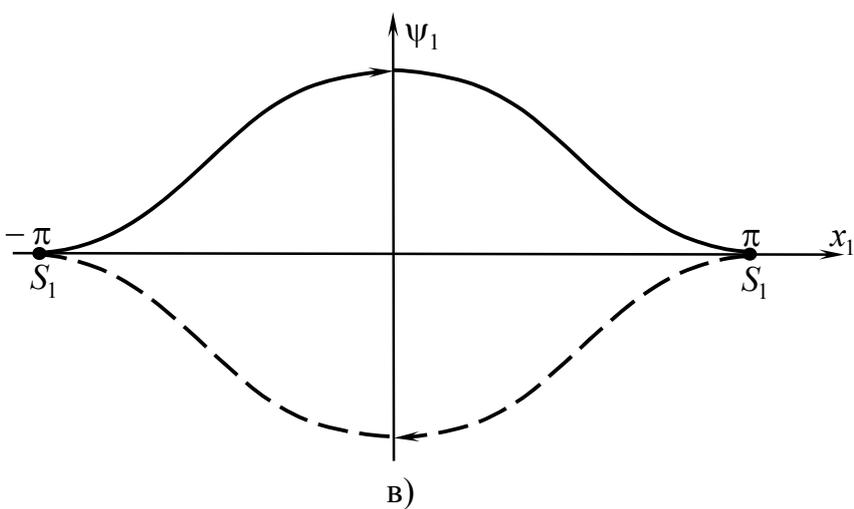
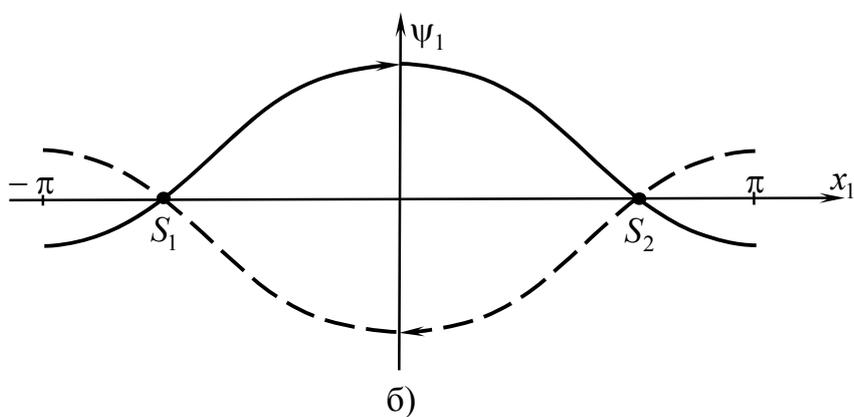
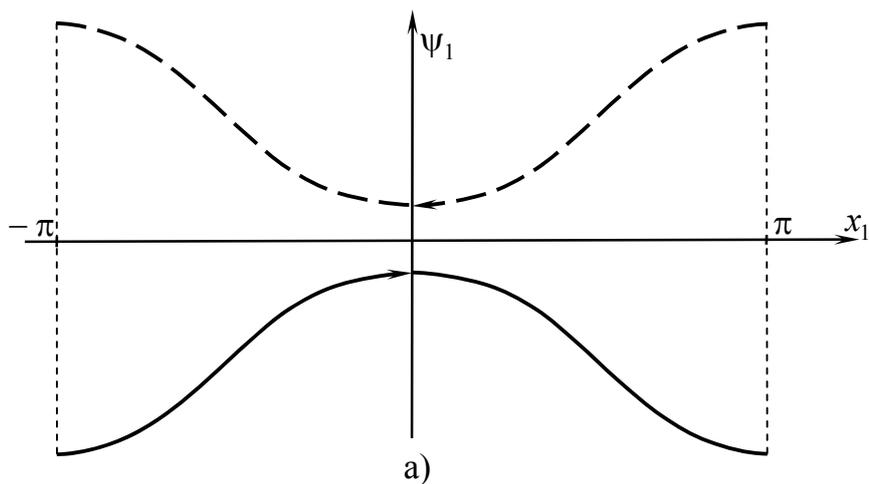


Рис. 4. К доказательству леммы 1. Возможные оптимальные управляющие последовательности в случае: а)  $\{-u_m\}$  и  $\{u_m\}$ ; б)  $\{-u_m, u_m\}$  и  $\{u_m, -u_m\}$ ; в)  $\{-u_m, 0, u_m\}$  и  $\{u_m, 0, -u_m\}$

Функции (3.10) и (3.11) отличаются только знаком. Графики этих функций симметричны относительно оси  $x_1$ . В силу непрерывности  $\psi_1(x_1)$  кривые (3.10), (3.11) должны пересекаться в точке переключения  $x_1^S$ , причем в силу (3.4)

$$\psi_1(x_1^S) = 0 \quad .$$

Если имеется вырожденный участок оптимальной траектории с управлением  $u \equiv 0$ , то в силу (3.9)

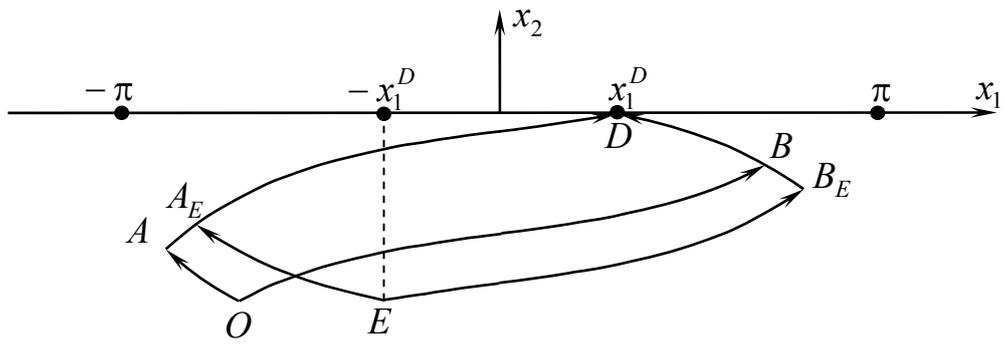
$$x_1^S = \pm\pi \quad .$$

В силу (2.11), (3.3), (3.10)–(3.11)

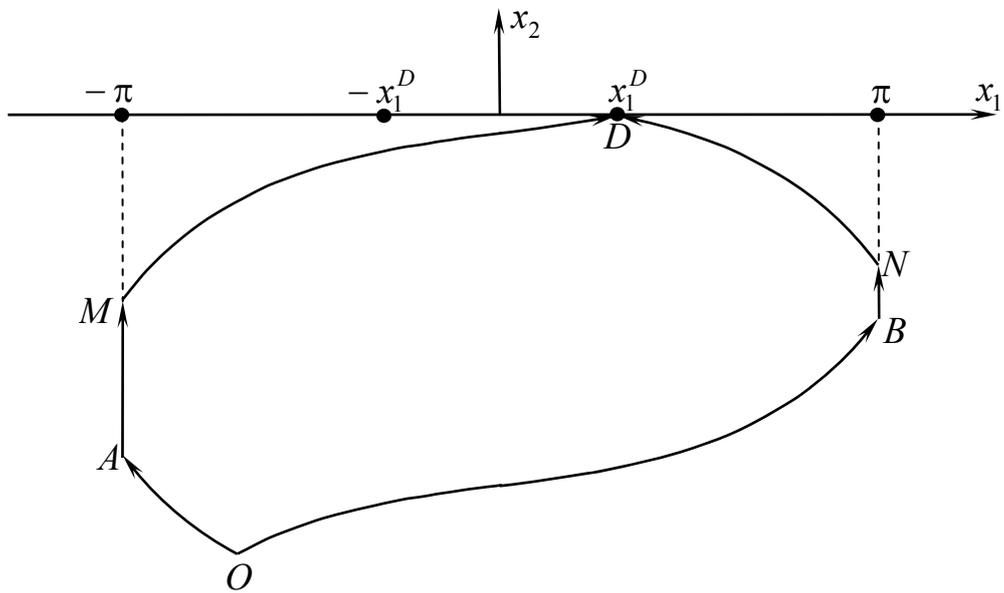
$$\psi_2 = const = \psi_2(x_1^S) = \frac{1}{\omega(x_1^S)} > 0 \quad .$$

На рис. 4 показаны графики кривых (3.10), (3.11), направления движения по ним при изменении времени и возможное взаиморасположение этих кривых. Кривая (3.10), соответствующая  $u = u_m$ , нарисована сплошной линией, а кривая (3.11), соответствующая  $u = -u_m$ , – пунктирной линией.

Рис. 4а соответствует тривиальному случаю, когда начальное положение находится на одной из линий переключения  $\Gamma_+$  или  $\Gamma_-$ . Оптимальное управление в течение всего движения либо равно  $u_m$ , либо  $-u_m$ . Рис. 4б соответствует движению с одним переключением. На рис. 4в показан вырожденный случай, когда на оптимальной траектории имеется вырожденный участок с  $u \equiv 0$  (ему на рисунке соответствуют точки  $S_1, S_2$ ). При этом в силу принципа оптимальности (часть оптимальной траектории является оптимальной траекторией) возможно только однократное прохождение через одну из точек  $S_1, S_2$  (рис. 4б–4в). Тогда возможны только управляющие последовательности, перечисленные в утверждении 2, и  $x_1 \in [S_1, S_2] \subset [-\pi, \pi]$ .



a)



б)

Рис. 5. Траектории типа  $A$  и  $B$ : а) невырожденный и б) вырожденный случаи

При  $(x_1^0, x_2^0) \in R_1 \cup R_2 \cup \tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$  начальному положению системы соответствует два типа экстремальных решений (рис. 5). Решение типа  $A$  – траектория  $OAD$  (управляющая последовательность  $\{-u_m, u_m\}$ ) или  $OAMD$  (управляющая последовательность  $\{-u_m, 0, u_m\}$ ). Решения типа  $B$  – траектория  $OBD$  (управляющая последовательность  $\{u_m, -u_m\}$ ) или  $OBND$  (управляющая последовательность  $\{-u_m, 0, u_m\}$ ). Возможно любое сочетание вырожденных и невырожденных траекторий типа  $A$  и  $B$ .

Пусть  $T_A$  – время движения по траектории типа  $A$ , а  $\tau_A$  – время движения по участку  $OA$ , а в вырожденном случае  $\tau_M$  – время движения по участку  $AM$  (рис. 5).

В невырожденном случае для траектории  $OAD$  на участке  $OA$   $u = -u_m$  справедливы соотношения (3.8). Постоянные интегрирования  $d_1, d_2$  в (3.8) определим из условия, что (3.8) справедливо для точки  $O$ . Тогда

$$x_1^A = x_1^0 - u_m \tau_A, \quad x_2^A = x_2^0 - \frac{\varphi(x_1^A) - \varphi(x_1^0)}{u_m}.$$

На участке  $AD$   $u = u_m$  справедливы соотношения (3.6). Постоянные интегрирования  $c_1, c_2$  в (3.6) определим из условия, что (3.6) справедливо для точки  $D$ . Тогда

$$x_1^D = x_1^A + u_m (T_A - \tau_A), \quad x_2^A = \frac{\varphi(x_1^A) - \varphi(x_1^D)}{u_m}.$$

Отсюда

$$T_A = \frac{x_1^D + x_1^0 - 2x_1^A}{u_m}, \quad (3.12)$$

$$\varphi(x_1^A) = \frac{x_2^0 u_m}{2} + \frac{\varphi(x_1^D) + \varphi(x_1^0)}{2}, \quad (3.13)$$

$$x_2^A = \frac{x_2^0}{2} - \frac{\varphi(x_1^D) - \varphi(x_1^0)}{2u_m}. \quad (3.14)$$

Аналогично для траектории типа  $OBD$

$$T_B = -\frac{x_1^D + x_1^0 - 2x_1^B}{u_m}, \quad (3.15)$$

$$\varphi(x_1^B) = -\frac{x_2^0 u_m}{2} + \frac{\varphi(x_1^D) + \varphi(x_1^0)}{2}, \quad (3.16)$$

$$x_2^B = \frac{x_2^0}{2} + \frac{\varphi(x_1^D) - \varphi(x_1^0)}{2u_m}. \quad (3.17)$$

В вырожденном случае для траектории  $OAMD$   $x_1^A = x_1^M = -\pi$ , учитывая что  $\varphi(-\pi) = -\varphi(\pi)$  в силу нечетности функции  $\varphi$ , аналогично получаем

$$x_1^A = -\pi = x_1^0 - u_m \tau_A, \quad x_2^A = x_2^0 + \frac{\varphi(\pi) + \varphi(x_1^0)}{u_m}$$

$$x_1^D = -\pi + u_m (T_A - \tau_M - \tau_A), \quad x_2^M = -\frac{\varphi(\pi) + \varphi(x_1^D)}{u_m}.$$

На участке  $AM$  из (3.9) следует

$$x_2^M - x_2^A = \omega_{\max} \tau_M.$$

Отсюда

$$T_A = \frac{x_1^D + x_1^0 + 2\pi}{u_m} - \frac{2\varphi(\pi) + \varphi(x_1^0) + \varphi(x_1^D)}{u_m \omega_{\max}} - \frac{x_2^0}{\omega_{\max}}. \quad (3.18)$$

Аналогично для вырожденной траектории  $OBND$

$$T_B = \frac{-x_1^D - x_1^0 + 2\pi}{u_m} - \frac{2\varphi(\pi) + \varphi(x_1^0) + \varphi(x_1^D)}{u_m \omega_{\max}} - \frac{x_2^0}{\omega_{\max}}. \quad (3.19)$$

**Лемма 2.** Если  $(x_1^0, x_2^0) \in R_1 \cup R_2 \cup \tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$  и  $x_1^0 = -x_1^D$ , то  $x_1^B = -x_1^A$  и  $T_A = T_B$ , или время движения по траекториям типа  $A$  и  $B$  одинаково.

**Доказательство.** Действительно, в силу (3.7)  $\varphi(x_1)$  – взаимнооднозначная нечетная функция, и из условия  $x_1^0 = -x_1^D$  следует  $\varphi(x_1^D) + \varphi(x_1^0) = 0$ .

Отсюда, если траектории типа  $A$  невырожденная, то и траектория типа  $B$  невырожденная. В силу (3.13), (3.16)  $\varphi(x_1^B) = -\varphi(x_1^A) \Rightarrow x_1^B = -x_1^A$ . Подставляя эти соотношения в (3.12), (3.15), имеем

$$T_A = T_B = -\frac{2x_1^A}{u_m} = \frac{2x_1^B}{u_m}.$$

Если траектория типа  $A$  вырожденная, то и траектория типа  $B$  вырожденная, и  $x_1^B = -x_1^A = \pi$ ,  $T_A = T_B = \frac{2\pi}{u_m} + \frac{2\varphi(\pi)}{u_m \omega_{\max}} - \frac{x_2^0}{\omega_{\max}}$  в силу (3.18)–(3.19).

**Лемма 3.** Если в начальный момент времени система находится на линиях переключения в точке  $H \in \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ , то время движения по траектории типа  $A$  и  $B$  одинаково  $T_A^H = T_B^H$ .

**Доказательство.** Действительно, в этом случае имеет место режим без переключений. Траектории типа  $A$  и  $B$  совпадают и являются траекторией  $HD$  вдоль линии переключения. Если  $H \in \Gamma_+$ , то  $O = A = H$  и  $B = D$ . Если  $H \in \Gamma_-$ , то  $O = B = H$  и  $A = D$ . В силу совпадения этих траекторией одинаково и время движения по ним.

**Лемма 4.** Если  $(x_1^0, x_2^0) \in R_1 \cup \tilde{R}_1$  или  $x_1^0 < -x_1^D$ , то  $T_A < T_B$  (оптимальной является траектория типа  $A$ ).

**Доказательство.** Пусть точка  $O$  лежит в области  $R_1 \cup \tilde{R}_1$ , а точка  $H \in \Gamma_+ \cup \Gamma_-$  и  $x_1^H = x_1^0 = \text{const}$ . Будем изменять положение точки  $O$  при фиксированном значении  $x_1^0$  (положении точки  $H$ ).

Если траектории типа  $A$  и  $B$  невырожденные, то, дифференцируя (3.7) и (3.13), имеем  $\frac{d\varphi(x_1^A)}{dx_1^A} \frac{dx_1^A}{dx_2^0} = \frac{d\varphi(x_1^A)}{dx_2^0} = \frac{u_m}{2}$  и  $\frac{d\varphi(x_1^A)}{dx_1^A} = \omega(x_1^A)$ . Отсюда

$\frac{dx_1^A}{dx_2^0} = \frac{u_m}{2\omega(x_1^A)}$ . Дифференцируя (3.12), получаем

$$\frac{dT_A}{dx_2^0} = -\frac{2}{u_m} \frac{dx_1^A}{dx_2^0} = -\frac{1}{\omega(x_1^A)} < -\frac{1}{\omega_{\max}} < 0 \quad . \quad (3.20)$$

Аналогично получим

$$\frac{dT_B}{dx_2^0} = -\frac{2}{u_m} \frac{dx_1^A}{dx_2^0} = -\frac{1}{\omega(x_1^B)} < -\frac{1}{\omega_{\max}} < 0 \quad . \quad (3.21)$$

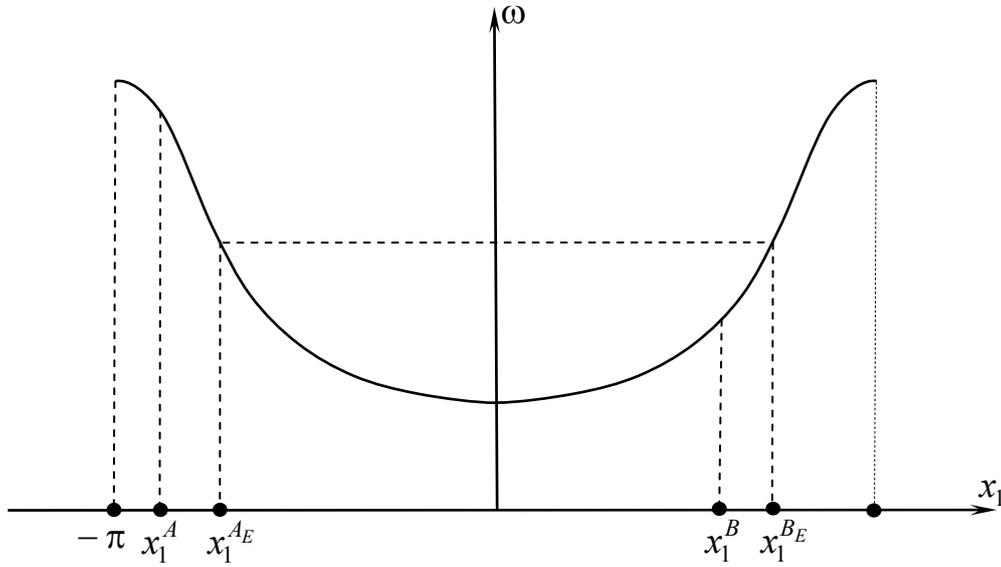


Рис. 6. К доказательству леммы 4

Пусть начальное положение  $O$  (рис. 5а) лежит в области  $R_1$ , т.е.  $x_1^0 < -x_1^D$ . Точка  $E$  соответствует начальному положению  $x_1^E = -x_1^D$ ,  $x_2^E = x_2^0$ . В силу леммы 2  $x_1^{A_E} = -x_1^{B_E}$  и  $x_1^A < x_1^{A_E} < x_1^B < x_1^{B_E}$ . Функция  $\omega(x_1)$  определяется соотношением (3.7), является четной и монотонно убывающей на множестве  $x_1 \in [0, \pi]$  (рис. 6). Отсюда  $\omega(x_1^{A_E}) = \omega(x_1^{B_E})$ ,  $0 < \omega(x_1^A) < \omega(x_1^{A_E}) = \omega(x_1^{B_E}) < \omega(x_1^B)$ , и в силу (3.20)–(3.21)

$$\frac{dT_B}{dx_2^0} < \frac{dT_A}{dx_2^0} < -\frac{1}{\omega_{\max}} < 0 \quad , \quad x_2^0 < x_2^H \quad . \quad (3.22)$$

Для вырожденных траекторий типа  $A$  и  $B$ , дифференцируя (3.18), (3.19), имеем

$$\frac{dT_A}{dx_2^0} = \frac{dT_B}{dx_2^0} = -\frac{1}{\omega_{\max}} < 0 \quad . \quad (3.23)$$

В силу леммы 3  $T_A = T_B$  при  $x_2^0 = x_2^H$ . Тогда при  $x_2^0 < x_2^H$  (изменении начального положения  $O$  вдоль линии  $HO$ ) из (3.22)-(3.23) следует, что  $T_A < T_B$ , т.е. оптимальной является траектория типа  $A$ .

Аналогично доказывается лемма 5.

**Лемма 5.** Если  $(x_1^0, x_2^0) \in R_2 \cup \tilde{R}_2$  или  $x_1^0 > -x_1^D$ , то  $T_A > T_B$  (оптимальной является траектория типа  $B$ ).

#### 4. Задача максимизации времени разворота

Решение задачи (2.8)–(2.10), (2.12) о максимальном времени разворота или с критерием

$$T \rightarrow \max$$

осуществляется аналогично предыдущему разделу. Гамильтониан  $H$  равен

$$H = 1 + \psi_1 u + \psi_2 \omega(x_1) \quad . \quad (4.1)$$

Оптимальное управление

$$u = \begin{cases} u_m & \text{при } \psi_1 > 0 \\ \text{не определено} & \text{при } \psi_1 = 0 \\ -u_m & \text{при } \psi_1 < 0 \end{cases} \quad . \quad (4.2)$$

Условие трансверсальности

$$H = 1 + \psi_1 u + \psi_2 \omega(x_1) \equiv 0 \quad . \quad (4.3)$$

Если  $u = u_m$  ( $\psi_1 > 0$ ), то  $x_1, x_2$  определяются формулами (3.6)–(3.7), и

$$\psi_1 = -\frac{1}{u_m} [1 + \psi_2 \omega(x_1)] \quad . \quad (4.4)$$

Если  $u = -u_m$  ( $\psi_1 < 0$ ), то  $x_1, x_2$  определяются формулами (3.7)–(3.8), и

$$\psi_1 = \frac{1}{u_m} [1 + \psi_2 \omega(x_1)] \quad . \quad (4.5)$$

В вырожденном случае  $\psi_1 \equiv 0$  в течение некоторого интервала времени и  $\dot{\psi}_1 \equiv 0$ . Из (3.2) следует  $\frac{d\omega}{dx_1} \equiv 0$ , а тогда  $\sin x_1 \equiv 0$  и в силу (2.8) вырожденные фазовые траектории соответствуют управлению  $u \equiv 0$  и

$$x_1 \equiv n\pi \quad , \quad u \equiv 0 \quad , \quad \dot{x}_2 = \frac{K_C}{I_1 - (-1)^n 2I_0} = \text{const} > 0 \quad , \quad \text{где } n \in \{-1; 0; 1\} \quad .$$

Для задачи максимизации времени разворота в силу принципа оптимальности подходят только траектории, соответствующие распрямленному положению аппарата и  $x_1 \equiv 0$ .

Тогда в вырожденном случае

$$x_1 \equiv 0 \quad , \quad u \equiv 0 \quad , \quad \dot{x}_2 = \omega_{\min} = \frac{K_C}{I_1 + 2I_0} = \text{const} > 0 \quad .$$

Задача максимизации времени разворота решается аналогично задаче быстрогодействия. Она даже заметно проще, так как при каждом начальном положении существует единственная экстремальная траектория. Нет проблем с выбором типа траектории  $A$  или  $B$ , как в задаче быстрогодействия.

При  $0 < x_1^D < \pi$  возможны оптимальные управляющие последовательности  $\{u_m\}$ ,  $\{-u_m, u_m\}$ ,  $\{-u_m, 0, u_m\}$  и  $\{u_m, 0, u_m\}$ . Результаты синтеза оптимальных траекторий приведены на рис. 7а.

При  $-\pi < x_1^D < 0$  возможны оптимальные управляющие последовательности  $\{-u_m\}$ ,  $\{u_m, -u_m\}$ ,  $\{u_m, 0, u_m\}$  и  $\{-u_m, 0, u_m\}$ . Результаты синтеза оптимальных траекторий приведены на рис. 7б.

В вырожденном случае, когда есть участок с  $u \equiv 0$ , аппарат сначала полностью распрямляется (в этом положении угловая скорость его вращения минимальна), некоторое время сохраняет это положение, а затем складывается в требуемое конечное положение. В невырожденном случае аппарат не успевает полностью распрямиться.

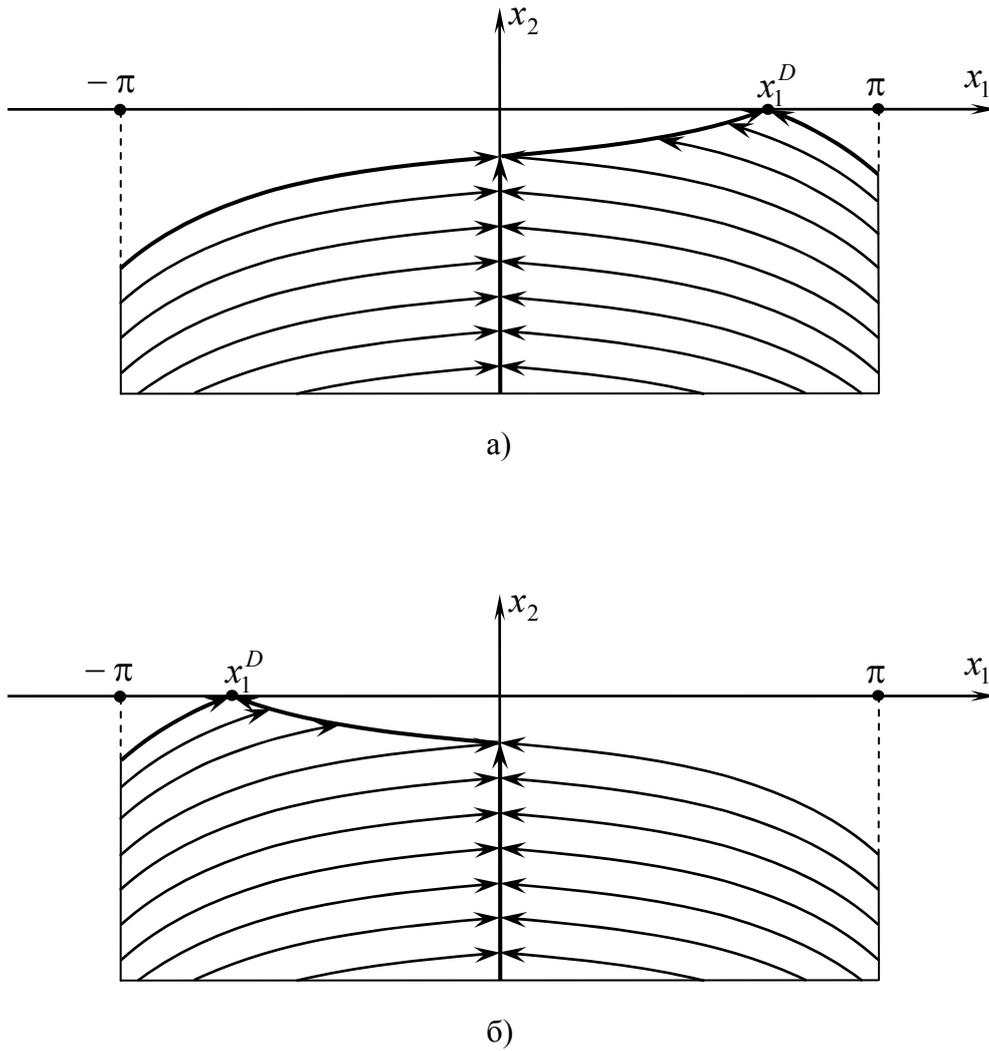


Рис. 7. Оптимальные фазовые траектории в задаче максимизации времени разворота: а) при  $0 < x_1^D < \pi$ , б) при  $-\pi < x_1^D < 0$

В заключение отметим, что если при движении аппарата реальное время полета  $T$  (определяемое из уравнений движения центра масс) удовлетворяет условию  $T_{\min} < T < T_{\max}$ , то аппарат в движении вокруг центра масс можно перевести из заданного начального в заданное конечное положение за время  $T$ . Решение можно искать в виде кусочно-постоянных управляющих последовательностей  $\{\pm u_m, 0, \pm u_m\}$ . При этом возможно любое сочетание знаков управления на первом и третьем этапе и возможна нулевая продолжительность любого этапа постоянного значения управления.

## *Литература*

1. Okhotsimsky D.E., et al. Walking machines. *Advances in mechanics*, 1992, №1–2, p. 39–70.
2. Лапшин В.В. Динамика и управление движением прыгающего аппарата. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, 1983, № 5, с. 42–51.
3. Лапшин В.В. Управление движением прыгающего аппарата в фазе полета. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, 1984, № 1, с. 159–165.
4. Hemami J., Zheng Y. Dynamics and control of motion on the ground and in the air with application to biped robot. *Journal of robotics systems*, 1984, № 1, p. 101–116.
5. Hodgins J., Raibert M.H. Biped gymnastics. *Robotics research: The fourth international symposium*. Cambridge, Massachusetts: MIT press, 1987, p. 5–14.
6. Raibert M.H. Legged robots that balance. Cambridge, Massachusetts: MIT press, 1986, 233 p.
7. Lapshin V.V. Motion control of a legged machine in the supportless phase of hopping. *The international journal of robotics research*, 1991, №4, p. 327–337.
8. Лапшин В.В., Колесникова Г.П. Оптимальное по времени управление движением связки двух тел вокруг центра масс. Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Естественные науки, 2007, № 4.
9. Аппель П. Теоретическая механика. М., Физматгиз, 1960, т. I –515 с.; т. II – 487 с.
10. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961, 391 с.
11. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М., Машиностроение, 1968, 764 с.

## *Оглавление*

1. Введение .....	3
2. Постановка задачи.....	4
3. Решение задачи о минимизации времени разворота .....	8
4. Задача максимизации времени разворота .....	20
Литература .....	23