



Афендииков А.Л., Луцкий А.Е.,
Пленкин А.В.

Применение вейвлет
анализа для локализации
структур в расчетах по
идеальной и вязкой
моделям и для адаптации
сеток

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Афендииков А.Л., Луцкий А.Е., Пленкин А.В. Применение вейвлет анализа для локализации структур в расчетах по идеальной и вязкой моделям и для адаптации сеток // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 45. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-45>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

А.Л. Афендиков, А.Е. Луцкий, А.В. Плёнкин

**Применение вейвлет анализа
для локализации структур
в расчетах по идеальной и вязкой
моделям и для адаптации сеток**

Москва — 2012

А.Л. Афендиков, А.Е. Луцкий, А.В. Плёнкин.

Применение вейвлет анализа для локализации структур в расчетах по идеальной и вязкой моделям и для адаптации сеток.

Работа посвящена сравнительному анализу особенностей, выделенных с помощью вейвлетного алгоритма по результатам двумерных расчетов с использованием методов сквозного счета, проведенных по модели Эйлера и уравнениям Рейнольдса с $k-\varepsilon$ моделью турбулентности. Установлено, что в вязкой среде при числах Рейнольдса $R \sim 10^6$ четко проявляются структуры, соответствующие ударным волнам в идеальной среде, при этом на них с высокой точностью выполняются соотношения Гюгонио. Кроме того, в вязкой среде выделяются дополнительные структуры, соответствующие вихрям, пограничному слою и слоям смешения. Также представлены результаты локализации разрывов в трехмерном расчете, выполненном по вязкой модели. Продемонстрирована эффективность использования вейвлетного алгоритма локализации особенностей для адаптации расчета к положению разрывов.

Ключевые слова: вейвлеты, локализация сингулярностей, газовая динамика.

A.L. Afendikov, A.E. Lutsky, A.V. Plenkin.

Wavelet analysis application for the localization of structures in the calculations for ideal and viscous models and for the grids adaptation.

Localized structures were singled out with the use of wavelet algorithm from the shock capturing two-dimensional calculations for the inviscid Euler model and Reynolds equations with $k-\varepsilon$ turbulence model and analyzed. It is demonstrated that in the viscous model with Reynolds's numbers $R \sim 10^6$ localized structures corresponding to the shock waves in Euler model are found with high accuracy. In the viscous model additional structures corresponding to vortices, to the boundary and mixing layers are found. The results of shock waves localization in the three-dimensional calculation for viscous model are also presented. Efficiency of wavelet based algorithm of singularities localization for calculation adaptation to singularities position is presented.

Key word: wavelets, singularity detection, gas dynamic.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 11-01-00390-а, 11-08-00269-а и программы 3 ОМН РАН.

Введение

Для расчета газодинамических течений широко используются методы сквозного счета. Их универсальность находится вне конкуренции, поскольку эти методы не требуют учета информации о положении разрывов. Однако такой подход приводит к размазыванию разрывов, что может негативно сказываться на качестве расчета. Кроме того, часто именно положение ударных волн в течении представляет специальный интерес. Отсюда возникает обратная задача - локализовать и классифицировать разрывы в поле, полученном в расчете. До последнего времени эта задача решалась в «ручном» режиме после завершения расчета. В настоящее время возникает необходимость проводить алгоритмическую локализацию непосредственно во время расчета для построения адаптивных сеток и повышения качества расчета. Эффективность применения адаптивных сеток при расчете газодинамических течений ярко продемонстрирована в работах [1, 2, 3]. Использование адаптивных сеток, сгущающихся в областях высоких градиентов, позволило сократить число расчетных узлов в 30 раз по сравнению с равномерной сеткой без ухудшения качества расчета. Используемые в этих целях алгоритмы должны быть универсальны (применимы к любым данным, получаемым в результате расчета) и не должны требовать для каждого класса течений индивидуальной настройки.

Большой интерес представляет локализация структур в вязких течениях. Часть этих структур имеет аналоги в расчетах, выполненных по уравнениям Эйлера (ударные волны), другие имеют исключительно вязкую природу (пограничный слой). При этом важно сравнить структуры, которые имеют аналоги в расчетах по обеим моделям, и исследовать их свойства. В частности, интересно выяснить: с какой точностью выполняются соотношения Гюгонио на «разрывах» в вязкой среде.

Задача локализации разрывов в поле, заданном на дискретном множестве точек, в общем случае не разрешима, но, учитывая специфику рассматриваемых задач, в частности то, что разрывы функций газодинамических величин представляются в виде набора кусочно-гладких кривых (поверхностей), можно надеяться получить результат с достаточной для приложений точностью. Так, в данной работе предполагается, что функции газодинамических величин могут быть представлены в виде разложения по базису вейвлетов. При этом дискретизация функции отождествляется с коэффициентами ее вейвлет разложения. Исследованию данной проблемы посвящено не так уж много работ. Среди них, в частности, следует специально отметить [4, 5]. Однако предлагаемые в них алгоритмы часто требуют большого объема вычислений или имеют существенные ограничения (применимы только для анализа двумерных задач или требуют особую структуру расчетной сетки), что ограничивает их использование для указанных выше целей.

В то же время широко известна задача о «выделении краев» (edge detection), возникающая при обработке и распознавании изображений. Эта за-

дача очень близка к задаче локализации разрывов течения, и для ее решения существует ряд конкурирующих методов. В [6] представлен метод повышения контрастности рентгеновских снимков на основе симметричных комплексных вейвлетов Добеши. Изложенные в [6] и [7] идеи были использованы в [8] при разработке метода локализации сингулярностей газодинамических полей для случая конформных прямоугольных сеток (то есть таких, что вершина одного прямоугольника не может лежать на ребре другого), что является существенным ограничением для задачи построения адаптивных сеток, где условие конформности часто нарушается.

В работе рассматривается алгоритм, в принципе свободный от указанных ограничений. В качестве входных данных представленный алгоритм получает поля физических величин плотности и давления, заданных в узлах расчетной сетки. В результате работы алгоритма каждому узлу сетки сопоставляется натуральное число, характеризующее течение в окрестности этого узла. Особенностью метода является то, что он не требует тонкой настройки (одни и те же пороги чувствительности и наборы фильтров могут быть эффективно использованы для множества различных задач), что позволяет использовать его в автоматическом режиме. В то же время возможность тонкой настройки также заложена в алгоритм, что позволяет получить более качественные результаты в постобработке [9].

Для сравнения структуры разрывов в вязкой и идеальной среде была выбрана осесимметричная задача о сверхзвуковом обтекании тела. Расчеты выполнялись с помощью пакета NSC2KE на треугольной сетке, в области с криволинейными границами. Для анализа этих расчетов предложенный в [8] метод обобщается на произвольные расчетные сетки. Также был разработан набор фильтров, позволяющих избавиться от большей части артефактов и повышающих качество локализации. Метод излагается со всеми существенными для реализации и распараллеливания деталями, но без обоснования, которое достаточно подробно представлено в [8].

В результате применения алгоритма обработки удалось выделить характерные структуры в расчетах для вязкой и идеальной среды, убедиться, что для структур, локализованных в расчете по уравнениям Рейнольдса с $k-\varepsilon$ [10, 11] моделью турбулентности и соответствующих ударным волнам в идеальной среде, условия Гюгонио выполняются с высокой точностью. Также был установлен критерий, позволяющий выделить структуры, имеющие исключительно вязкую природу.

Алгоритм оказался эффективным и при обработке трехмерных данных. Он был апробирован как на модельных трехмерных данных, так и на расчете задачи о сверхзвуковом обтекании тела под углом атаки шесть градусов. Детектор продемонстрировал высокую точность локализации разрывов. Кроме того, оказалось, что он может быть использован для выделения тонких структур и разрывов слабой интенсивности, обнаружить которые другими средствами достаточно трудоемко.

В заключение представлен и апробирован простейший способ применения детектора для адаптации расчета к положению разрывов. Использование адаптивного метода позволило повысить качество расчета за счет уменьшения зон размазывания разрывов.

Алгоритм

В качестве исходных данных используются результаты расчета полей плотности и давления, заданных в узлах или центрах ячеек расчетной сетки. Сетка состоит из ячеек (треугольники, четырехугольники тетраэдры и т.д.), которые задаются координатами узлов, являющихся их вершинами, и гранями (ребра или поверхности). В трехмерном случае для ячейки дополнительно задаются ребра её граней. Для повышения качества локализации и удобства обработки вместо исходной расчетной сетки при локализации может быть использована другая сетка с тем же набором узлов.

Структура сетки, с которой работает алгоритм локализации, определяется тем, что для качества локализации важно, чтобы сетку можно было разбить на достаточно регулярные ломаные, не обрывающиеся внутри области. Этого часто трудно достичь на неконформных или неструктурированных сетках, поэтому иногда имеет смысл перейти от произвольной, к примеру, прямоугольной неконформной сетки к треугольной конформной, полученной из исходной, например, с помощью триангуляции Делоне [12, 13]. Такой переход приводит к увеличению объёма вычислений, но позволяет получить более качественный результат (уменьшается число артефактов и уточняется локализация разрывов). Кроме того, поскольку от любой сетки можно перейти к треугольной, с алгоритмической точки зрения формат, в котором данные задаются на треугольной сетке, является наиболее универсальным.

В результате обработки расчета каждому узлу сетки необходимо сопоставить число, которое характеризует течение в окрестности узла (нет разрывов, ударная волна, контактный разрыв, волна разрежения и т.д.).

Обработку расчета можно условно разделить на четыре этапа:

- 1) разделение расчетной сетки на ломаные,
- 2) обработка ломаных с помощью вейвлетов и выделение особенностей,
- 3) объединение результатов обработки ломаных,
- 4) фильтрация артефактов и классификация особенностей.

Первый этап заключается в том, чтобы свести многомерную задачу к набору одномерных задач. Из сетки выбирается произвольное ребро. Затем из его соседей выбираются те ребра, которые образуют минимальный угол с этим ребром, причем угол должен быть меньше заданной величины, которая определяет гладкость строящейся ломаной. Если подходящего ребра нет, ломаная на этом конце обрывается, иначе это ребро добавляется в ломаную и на его свободном конце повторяется аналогичная процедура. Чтобы избежать закливания, каждое ребро может быть добавлено в ломаную только один раз. После того как на обоих концах ломаной не удалось подобрать подходящих ребер, на-

чинается построение следующей ломаной. Ее построение начинается с ребра, не входящего ни в одну ломаную, но ребра других ломаных могут быть в нее добавлены. Это делается для того, чтобы ломаные, по возможности, не обрывались внутри области, поскольку обработка границ ломаных может приводить к появлению артефактов или пропуску разрывов. Первый этап завершается, если каждое ребро включено в некоторую ломаную.

На втором этапе производится независимая обработка ломаных. Обрабатываются только ломаные, у которых число узлов N больше 6, это число определяется количеством ненулевых элементов в фильтрах вейвлетов, используемых при обработке. Массивы плотности d_k и давления p_k , где $0 \leq k < N$, заданные в узлах ломаной, также обрабатываются независимо. Для каждого из массивов вычисляется два преобразования $m(x)$ и $c(x)$:

$$m_k = \sum_n \eta_{n-2k} \sum_i \xi_{n-2i} x_i, \quad c_k = \sum_n \varsigma_{n-2k} \sum_i \xi_{n-2i} x_i, \quad \text{для } 0 \leq k < N.$$

При этом x_i – элементы массивов плотности или давления, продолженных на границах ломаных из соображений симметрии, ξ_i и η_i – вещественная и мнимая компоненты низкочастотного фильтра симметричного комплексного вейвлета Добеши 6 (dcoms6), ς_i – вещественный фильтр классического вейвлета Добеши 6 (daub). Цифра 6 обозначает, что фильтры имеют 6 ненулевых элементов [8]. Указанные преобразования соответствуют двум введенным в [8] детекторам, которые используются совместно для повышения точности локализации разрывов (основной детектор более точен и выдает меньше артефактов, а корректор помогает уточнить локализацию и избавиться от дополнительных артефактов за счет введения порога чувствительности). В каждом из четырех полученных массивов выделяются два типа узлов:

1) ‘нули’ – если значения массива в двух соседних узлах имеют разный знак или только одно из значений нулевое, то выделяется узел с минимальным по модулю значением. Два первых и два последних узла не выделяются;

2) ‘локальные экстремумы модуля’ – узел выделяется, если модуль значения поля в нем больше заданного порога чувствительности α , он не меньше модулей значений четырех его левых и правых соседей и строго больше модуля значения хотя бы одного из ближайших соседей. Три первых и три последних узла не выделяются.

Из множества нулей исключаются точки, соответствующие осцилляциям. Считается, что точка соответствует осцилляциям, если слева и справа от нее в радиусе трех точек есть выделенные нули.

Таким образом, каждый узел ломаной получает некоторый набор из 8 возможных меток: mzd, sed, mzp, ser, med, czd, ter, czp. Символ ‘m’ означает, что метка относится к основному детектору, ‘с’ – к корректору, ‘d’ означает, что метка характеризует поле плотности, а ‘р’ – давления. Символы ‘z’ и ‘e’ определяют, какие структуры были выделены в детекторе: ‘z’ соответствует *переходам через ноль*, а ‘e’ – *локальным экстремумам модуля*. При этом первые четыре метки соответствуют сильным разрывам, а последние – слабым разрывам

[8].

В общем случае через узел проходит более одной ломаной, и наборы меток, которые получает узел на втором этапе, при обработке каждой из них могут отличаться (так, например, разрыв не будет выделен при обработке расположенной вдоль него ломаной, но будет выделен при обработке пересекающей его ломаной).

На третьем этапе определяется окончательный набор меток, которыми обладают узлы сетки. Набор меток, которые получает узел, определяется как объединение всех меток, которые он получил при обработке каждой из содержащих его ломаных.

Из первых трех этапов наиболее вычислительно затратным является второй, однако, поскольку каждая ломаная обрабатывается независимо, этот этап допускает легкое распараллеливание. Первый же этап тривиален для широкого класса сеток. По сути, при реализации алгоритма на многопроцессорной машине, первый этап служит для распределения данных по процессорам, а третий – для слияния результатов.

Алгоритм обработки данных на первых этапах не зависит от структуры сетки и размерности задачи, однако на этапе удаления артефактов и классификации особенностей эти факторы начинают оказывать существенное влияние. Далее приводится описание алгоритмов фильтрации для случая двумерных сеток.

Предварительно необходимо ввести ряд *определений*.

Узлы называются соседними, если они являются вершинами одной и той же ячейки сетки (треугольника, четырехугольника, тетраэдра и т.д.). Например, противоположные вершины четырехугольника являются соседними.

Путь – ломаная, состоящая из отрезков, соединяющих соседние узлы.

Расстояние между узлами – минимальное число ребер в пути, соединяющем эти узлы.

Дискретный набор точек называется связанным, если для любой пары точек набора существует путь, соединяющий эти точки и состоящий только из ребер, вершинами которых являются точки из данного набора.

Для удаления артефактов разработан набор из следующих фильтров:

1) Узел помещается в список кандидатов на удаление метки, если его соседи с такой же меткой образуют связное множество и их число не больше половины общего числа соседей. Данная проверка проводится для всех узлов. Из списка кандидатов удаляются точки, исключение которых привело к тому, что их соседи с данной меткой перестали быть связными. Наконец, все кандидаты теряют рассматриваемую метку. Фильтр позволяет удалять неровности на линиях разрывов.

2) Первый фильтр применяется M раз. Если какой-либо связанный набор точек, имеющих заданную метку, не был полностью удален, то все его точки возвращают исходные метки. В отличие от первого фильтра, второй служит для удаления крупных артефактов.

3) Точка с меткой A получает дополнительную метку B , если существует путь длины не больше заданного параметра K , соединяющий эту точку, с точкой, имеющей метку B . Фильтр убирает несоответствия, вызванные неточностью локализации.

4) Точка с меткой A теряет её, если расстояние от нее до любой из точек, имеющих метку B , больше заданного параметра K . Фильтр служит для уточнения данных одного детектора с помощью данных другого.

5) Точка получает метку, если она входит в путь, состоящий из 2 или 3 ребер, соединяющий несвязанные узлы, имеющие ту же метку. Фильтр служит для восстановления целостности разрывов.

Двухмерность сетки существенна только для фильтров 1, 2. Фильтры 3 – 5, очевидно, применимы и к трехмерным задачам.

Порядок и параметры фильтров, вообще говоря, индивидуальны для каждой задачи и расчетного метода. Фильтр 4 используется для модификации данных основного детектора с помощью корректора, а фильтр 3 позволяет различить разрывы, на которых рвется только плотность, от тех, на которых рвется и давление, тем самым отличая контактные разрывы от ударных волн.

Численное моделирование

Рассматривается осесимметричная задача о сверхзвуковом обтекании тела. Были проведены расчеты, соответствующие уравнениям Эйлера (рисунок 1) и Рейнольдса с $k-\varepsilon$ моделью турбулентности (рисунок 2). Параметры набегающего потока в обоих случаях одинаковы и соответствуют числу Маха 1.5. Число Рейнольдса для вязкой среды приближенно равно 3 000 000.

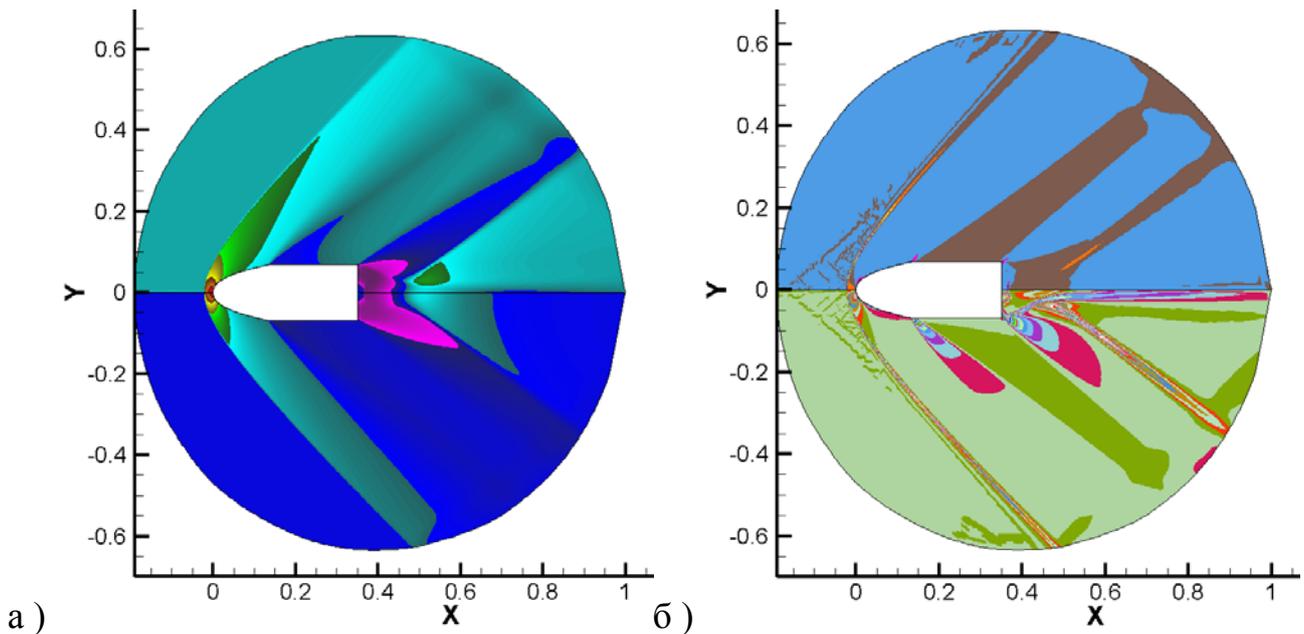


Рис. 1. Распределение полей физических величин в расчете, выполненном по идеальной модели: а) распределение плотности (сверху) и давления (снизу), б) распределение x (сверху) и y (снизу) компонент градиента плотности

Геометрия расчетной области представлена на рисунках 1, 2 (расчет проводился в подобласти $y \geq 0$). Расчеты проводились на треугольной сетке, полученной из четырехугольной сетки, содержащей 400×200 ячеек, за счет добавления диагоналей в четырехугольники, при этом сетка равномерно сгущается вблизи обтекаемого тела.

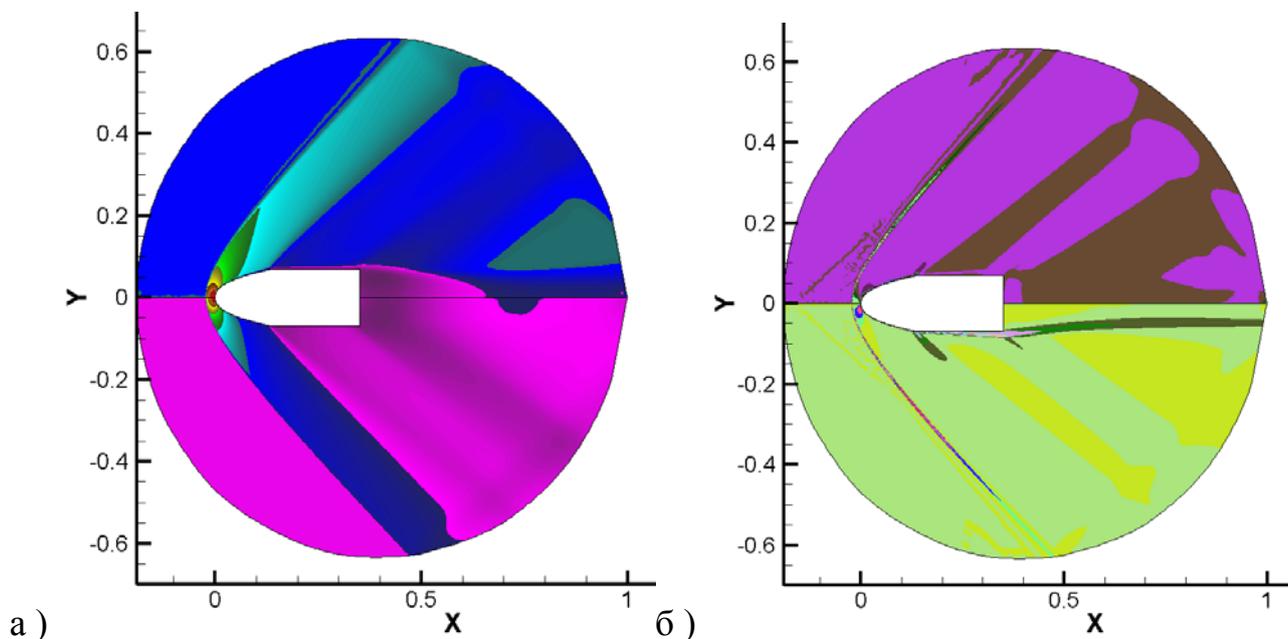


Рис. 2. Распределение полей физических величин в расчете, выполненном по вязкой модели: а) распределение плотности (сверху) и давления (снизу), б) распределение x (сверху) и y (снизу) компонент градиента плотности

Анализ расчетов

Известно, что в идеальной среде для любого разрыва с нормальной скоростью распространения D выполняются 4 соотношения:

$$\rho_l(u_{n_l} - D) = \rho_r(u_{n_r} - D), \quad (1)$$

$$\rho_l(u_{n_l} - D)^2 + p_l = \rho_r(u_{n_r} - D)^2 + p_r, \quad (2)$$

$$\rho_l(u_{n_l} - D)u_{\tau_l} = \rho_r(u_{n_r} - D)u_{\tau_r}, \quad (3)$$

$$\rho_l(u_{n_l} - D)\left[e_l + p_l/\rho_l + (u_{n_l} - D)^2/2\right] = \rho_r(u_{n_r} - D)\left[e_r + p_r/\rho_r + (u_{n_r} - D)^2/2\right], \quad (4)$$

которые являются следствием законов сохранения массы, импульса и энергии.

Проверка этих соотношений на разрывах в расчете нетривиальна, поскольку некоторая ошибка вносится алгоритмом локализации и за счет размазывания разрывов. В экспериментах для проверки соотношений выбирались точки, лежащие на нормали к разрыву вне области размазывания максимально близко к ее границе (она определялась визуально).

При выделении разрывов в корректоре использовался порог чувствительности $\alpha = 0$.

При обработке использовались следующие фильтры в указанном порядке:

- 1) фильтр 1, для удаления мелких артефактов и неровностей;
 - 2) фильтр 4, для $A = \text{mzd}$, $B = \text{ced}$, $K = 1$, удаляет из множества сильных разрывов плотности, выделенных основным детектором, те, которые не выделил корректор;
 - 3) фильтр 4, для $A = \text{mzр}$, $B = \text{сер}$, $K = 1$, удаляет из множества сильных разрывов давления, выделенных основным детектором, те, которые не выделил корректор;
 - 4) фильтр 3, для $A = \text{mzd}$, $B = \text{mzр}$, $K = 2$, компенсирует неточности локализации, что необходимо на этапе классификации разрывов, поскольку решение о типе разрыва в точке принимается на основании всех ее меток. В то же время возможны ситуации, когда за счет неточности локализации точка имеет, например, метку mzd , но не имеет метку mzр (то есть в точке есть разрыв плотности, но не давления), хотя ее имеет одна из соседних точек;
 - 5) фильтр 2, для $M = 1$, удаление только мелких артефактов;
 - 6) фильтр 5, применяется для восстановления целостности разрывов, так как при локализации возможны ситуации, в которых линия разрыва локализуется как несколько несвязных множеств;
 - 7) фильтр 1, для удаления мелких артефактов и неровностей, которые могли появиться на этапах 2-6;
 - 8) фильтр 2, для $M = 3$, удаление крупных артефактов;
- Обработка в этом примере направлена только на локализацию сильных разрывов. Узлы, которые по результатам фильтрации имеют и метку mzd , и метку mzр , классифицируются как ударные волны, а имеющие метку mzd , но не имеющие метки mzр – контактные разрывы.

В расчете, выполненном по модели Эйлера (рис. 3), контактные разрывы (серый цвет) присутствуют только в виде артефактов. Четко выделяется головная ударная волна, однако в области волны разрежения остаются артефакты, избавиться от которых можно, подобрав соответствующий порог чувствительности α . Также выделяется некая структура разрывов за обтекаемым телом.

В расчете, выполненном с учетом вязкости, четко выделяется линия, соответствующая головной ударной волне в идеальной среде (рис. 4). Артефактов в зоне волны разрежения в расчете, выполненном по вязкой модели, стало меньше. Четко выделяется пограничный слой и граница следа за моделью, эти линии классифицированы детектором частично как ударные волны, а частично как контактные разрывы.

При наложении результатов локализации структур в двух расчетах (рис. 5) видно, что положение головной ударной волны в расчетах в точности совпадает. Также в обоих расчетах присутствует разрыв АВ, порожденный взаимодействием головной ударной волны с границей области и разрыв CD: (0.63, 0.12) – (0.9, 0.33).

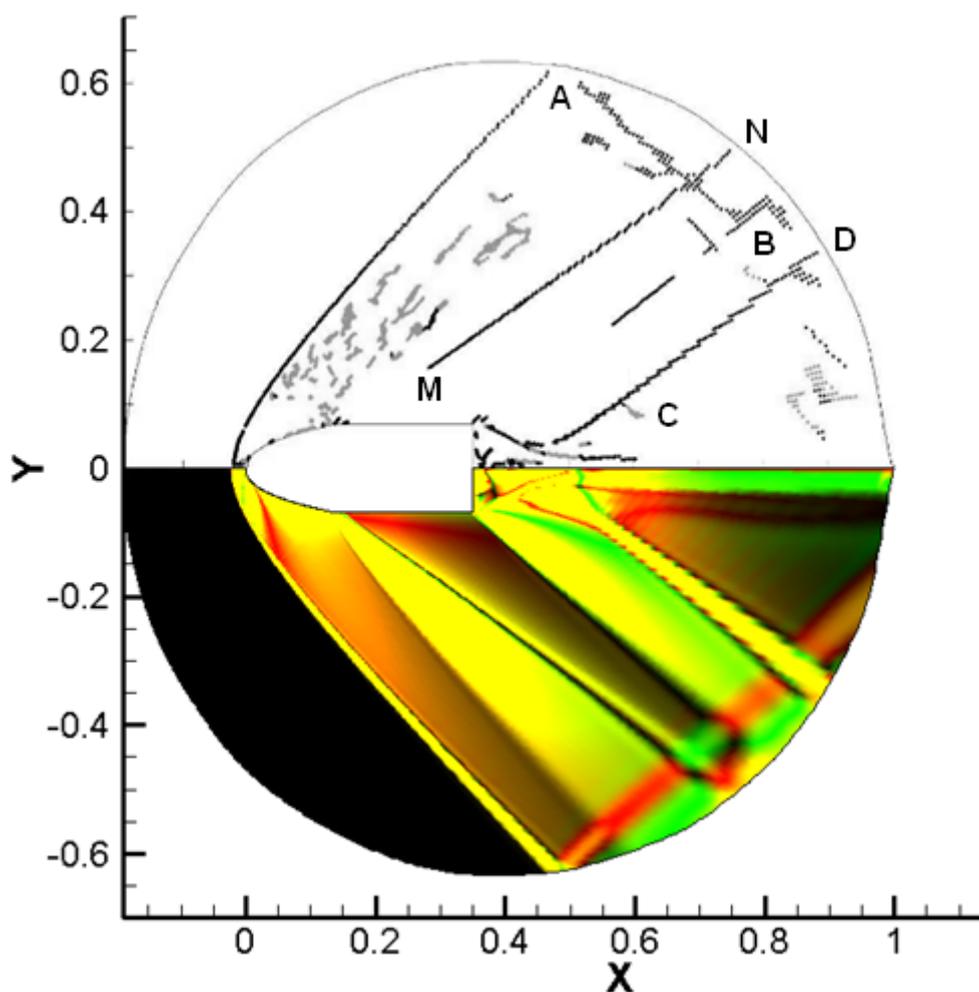


Рис. 3. Разрывы, локализованные в расчете, выполненном по идеальной модели, (сверху) и распределение градиента плотности (снизу)

В идеальной среде за волной разрежения локализуется «разрыв» MN, соответствующий перегибу плотности (рис. 6), вызванному ростом плотности за волной разрежения, возникающим при обтекании цилиндрических тел [14, 15]. Аналогичный эффект имеет место и в вязкой среде, однако соответствующий «разрыв» PQ локализуется на значительном удалении от тела, практически у границы расчетной области.

Таким образом, при обработке расчета, полученного по уравнениям Рейнольдса с $k-\varepsilon$ моделью турбулентности, выделяются два типа структур: структуры, которым в идеальной среде соответствуют ударные волны, и структуры, имеющие исключительно вязкую природу. Для того чтобы иметь возможность алгоритмически определять, к какой из групп относится структура, была выполнена проверка соотношений на разрывах для структур каждого типа.

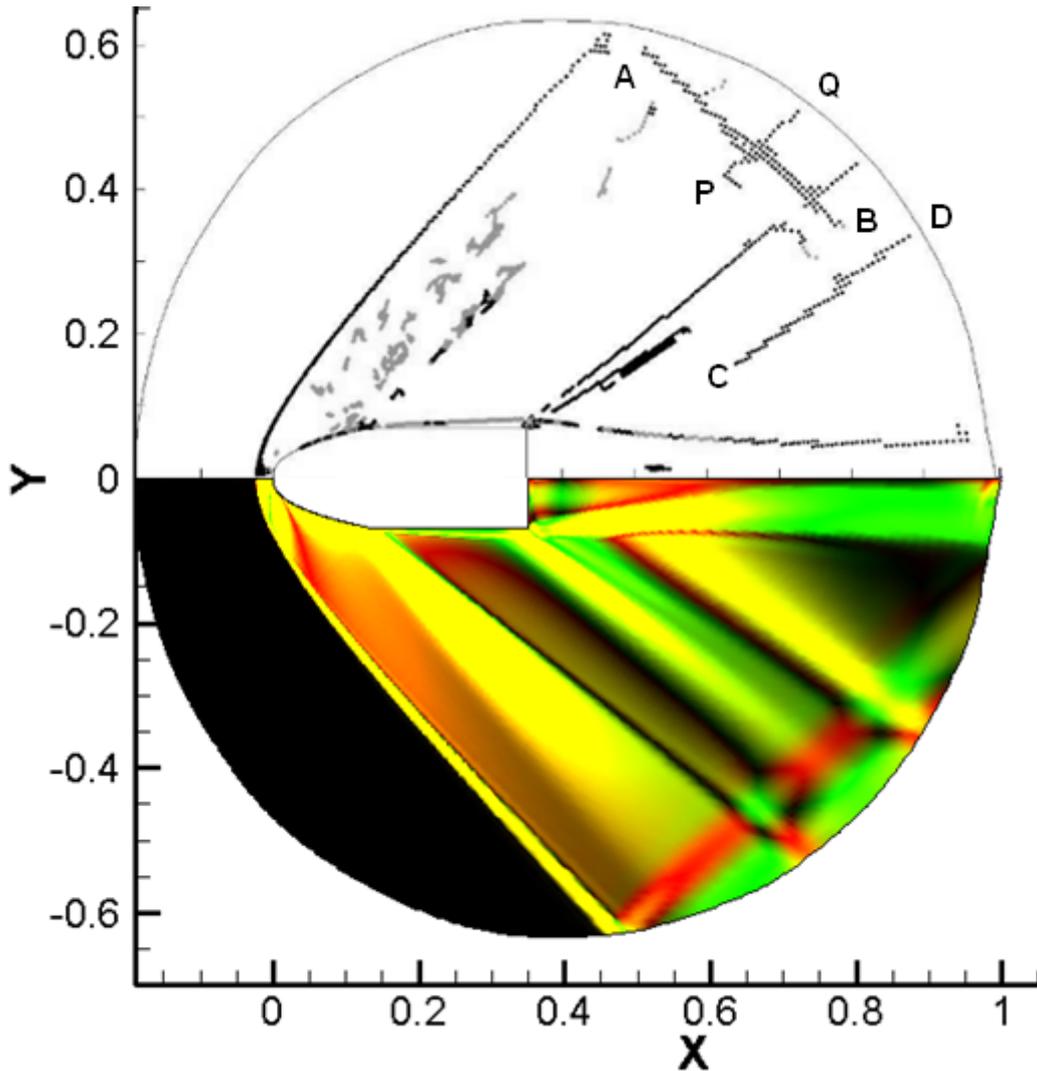


Рис. 4. Разрывы, локализованные в расчете, выполненном по вязкой модели, (сверху) и распределение градиента плотности (снизу)

Таким образом, при обработке расчета, полученного по уравнениям Рейнольдса с $k-\epsilon$ моделью турбулентности, выделяются два типа структур: структуры, которым в идеальной среде соответствуют ударные волны, и структуры, имеющие исключительно вязкую природу. Для того чтобы иметь возможность алгоритмически определять, к какой из групп относится структура, была выполнена проверка соотношений на разрывах для структур каждого типа.

Ошибки в соотношениях (1-4) на разрыве для точек E(0.02, 0.16) и F(0.07, 0.14) (слева и справа от головной ударной волны) для идеальной среды составляют 0.039, 0.00075, 0.077 и 0.063, а для вязкой среды 0.038, 0.0011, 0.078 и 0.061. В обоих случаях отношения ошибок к значениям выражений в точке E составляют примерно 0.04, 0.001, 0.18 и 0.04. Таким образом, наиболее точно выполняются соотношения, следующие из закона сохранения массы (1), нормальной компоненты импульса (2) и энергии (4). Подобная картина наблюдается вдоль всего разрыва.

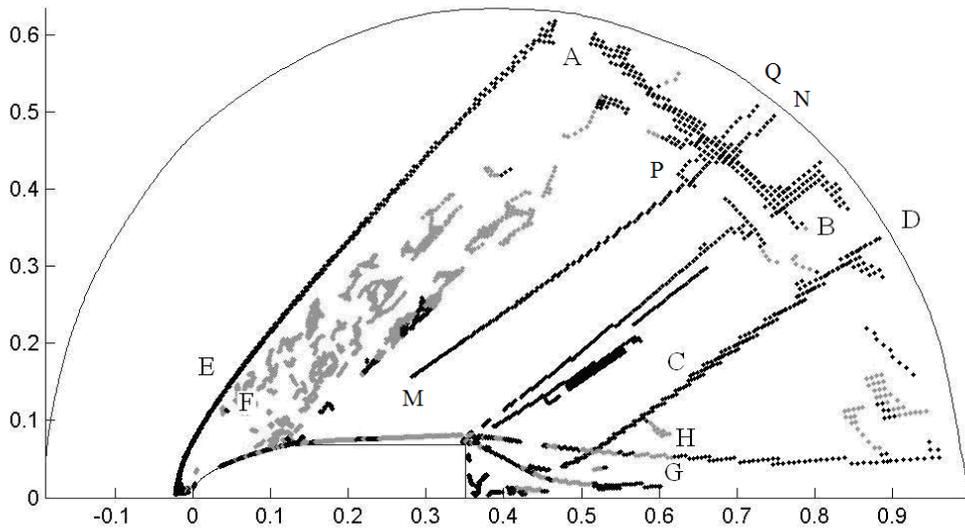


Рис. 5. Наложение результатов локализации разрывов

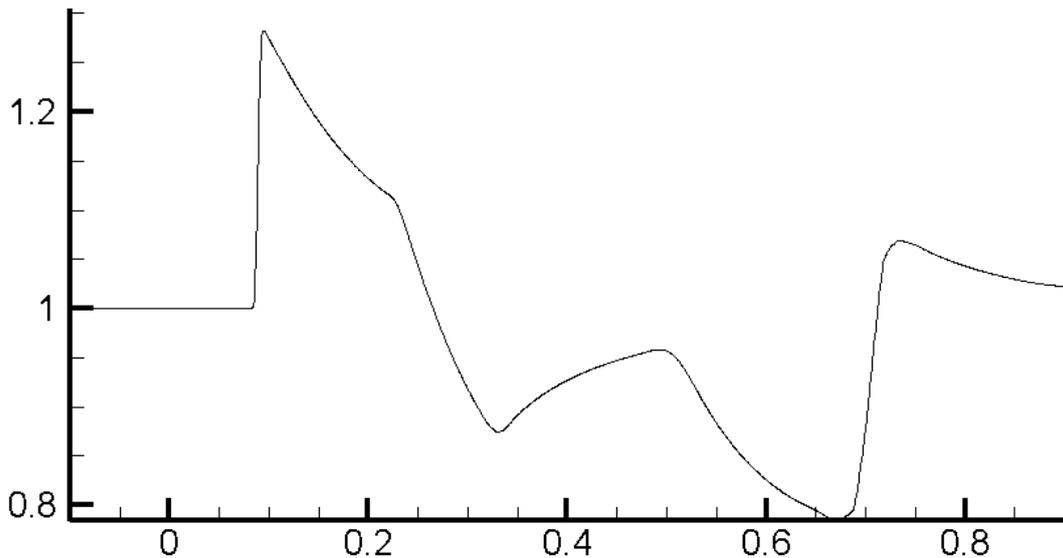


Рис. 6. Распределение плотности в вязкой среде в сечении $y = 0.2$

Если же в расчете, выполненном по уравнениям Рейнольдса с $k-\varepsilon$ моделью турбулентности, проверить соотношения на структурах, которые локализуются только в вязком течении, например, для точек $G(0.6, 0.05)$ и $H(0.6, 0.065)$ (внутри и вне следа за моделью), то отношения ошибок к значениям выражений в точке G составят 0.58, 0.007, 0.7 и 0.57 соответственно. В отличие от предыдущего случая, нарушение уже значительно. Из этого можно заключить, что выделяемая детектором линия не является ударной волной, а имеет вязкую природу, что также подтверждается тем, что для этой линии не существует аналога в расчете, выполненном по модели Эйлера. Таким образом, нарушение соотношений (1, 3, 4) может быть использовано для определения природы структур выделяемых в расчетах вязких течений.

Для того чтобы разрешить вязкую структуру ударной волны требуется сетка с гораздо более мелким шагом по пространству, чем та, что использовалась в расчете. Тем не менее, в расчете, проведенном по вязкой модели, удалось локализовать положение ударной волны, причем ее положение совпало с положением ударной волны в соответствующем расчете для идеальной модели, а также положение пограничного слоя и границу следа за моделью. Кроме того, удалось убедиться в выполнении соотношений Гюгонио на ударной волне.

Локализация разрывов в трехмерных расчетах

Рассматриваются модельные данные:

$$\rho_{i,j,k} = \begin{cases} 2, & i \geq 0.1 * ((j-50)^2 + (k-50)^2) \\ 1, & i < 0.1 * ((j-50)^2 + (k-50)^2) \end{cases}$$

$$p_{i,j,k} = \begin{cases} 2, & \left\{ \begin{array}{l} i \geq 0.1 * ((j-50)^2 + (k-50)^2) \\ j \geq 50 \end{array} \right. \\ 1, & \left[\begin{array}{l} i < 0.1 * ((j-50)^2 + (k-50)^2) \\ j < 50 \end{array} \right. \end{cases}$$

где $i, j, k \in Z$, $0 \leq i < 50$, $0 \leq j < 100$, $0 \leq k < 100$. Таким образом, на одной половине чаши параболоида существует разрыв и плотности и давления, моделирующий ударную волну, а на другой – только разрыв плотности, моделирующий контактный разрыв. В плоскости $j = 50$ рвется только давление, но данный разрыв не имеет газодинамических аналогов и не должен выделяться.

На рисунке 7 представлены результаты локализации разрывов. Красная поверхность соответствует ударной волне, а зеленая – контактному разрыву. Поверхность, на которой рвется только давление, не была выделена. Ошибка локализации не превышает одну ячейку сетки.

Для анализа была выбрана задача о сверхзвуковом обтекании тела под углом атаки шесть градусов. Расчет выполнялся методом установления по модели Навье - Стокса на сетке, состоящей из 25 блоков (рис. 8).

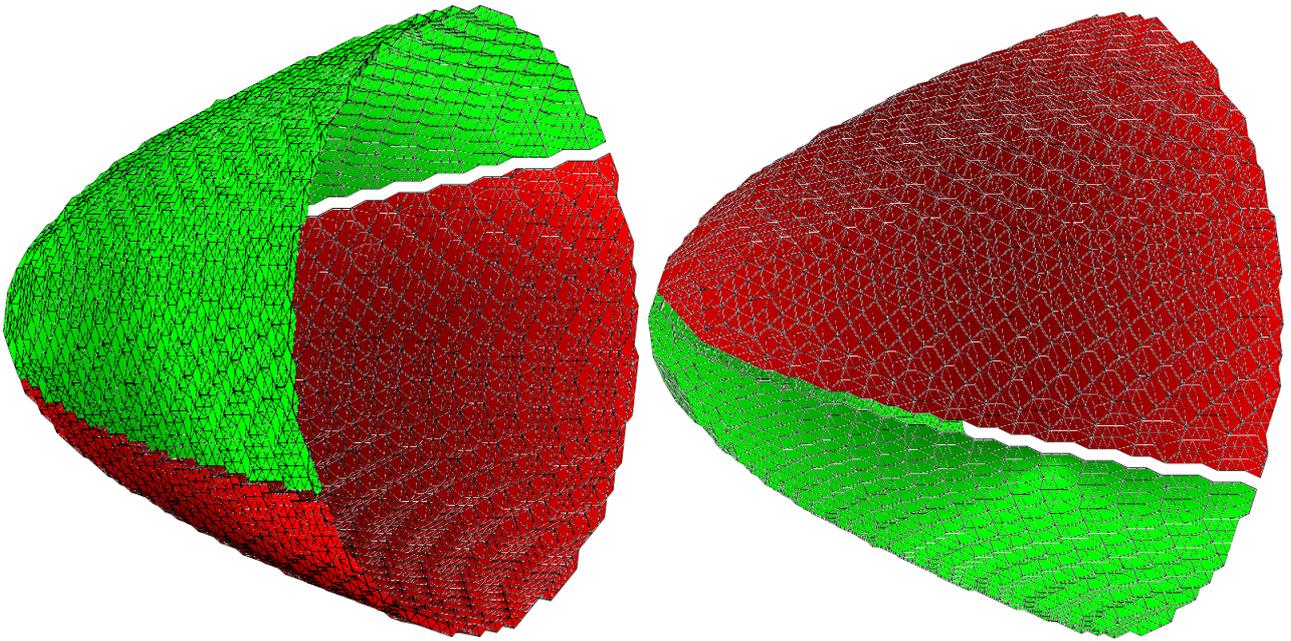


Рис. 7. Разрывы, локализованные в модельных данных

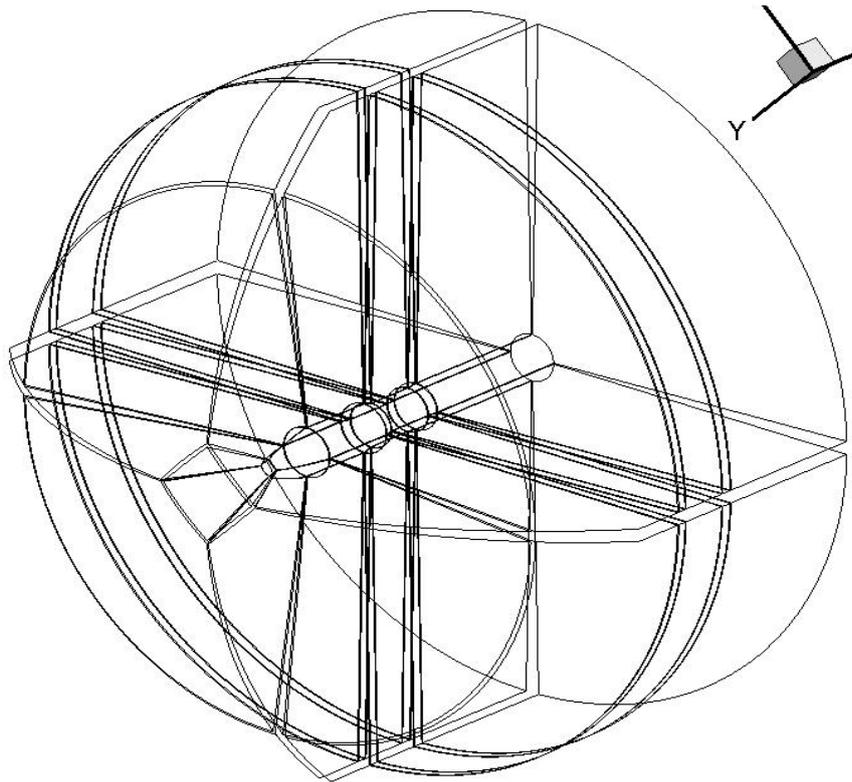


Рис. 8. Схема расположения блоков расчетной сетки

На рисунке 9 представлены результаты локализации ударных волн в трех блоках расчетной сетки для двух моментов времени.

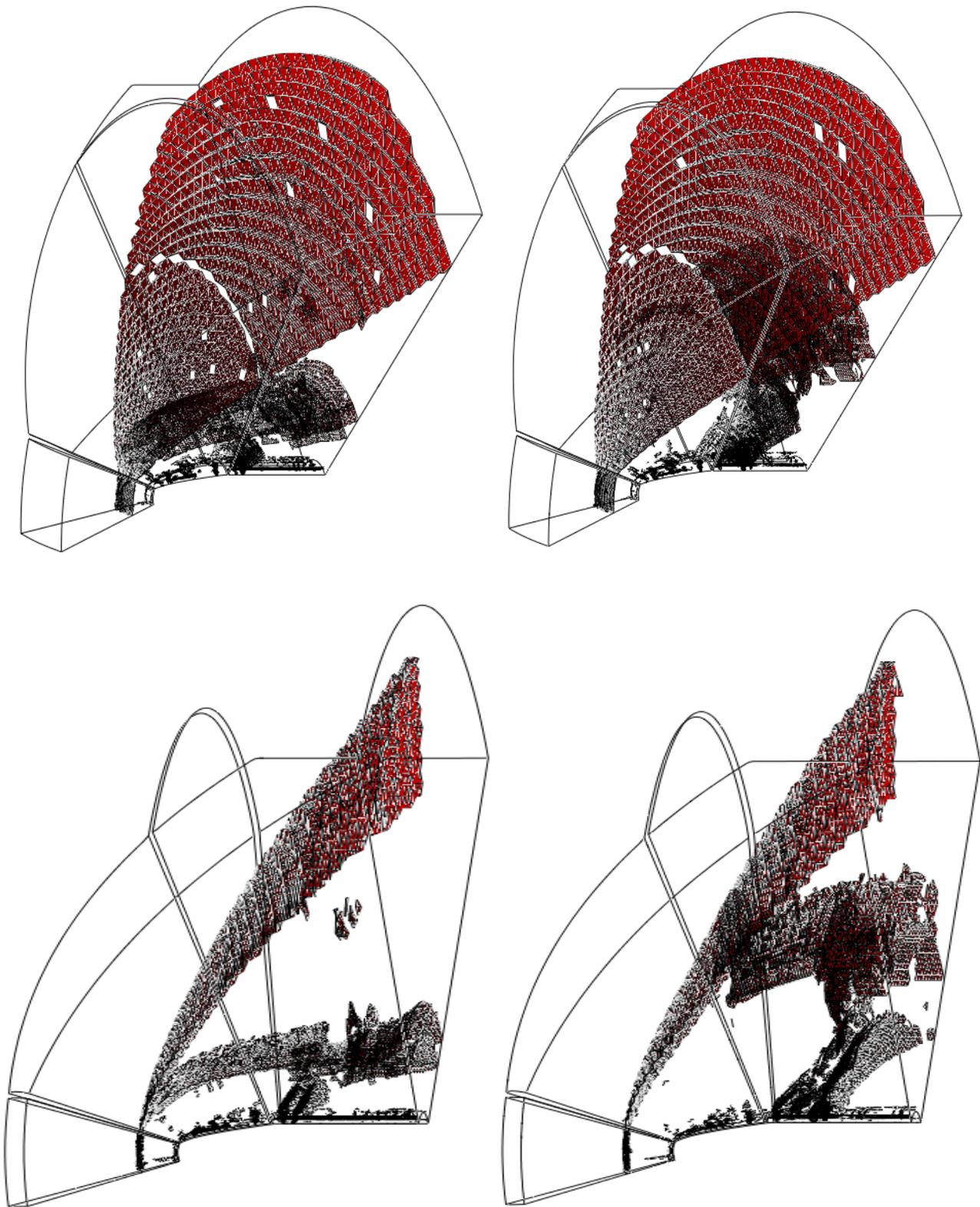


Рис. 9. Результаты локализации ударных волн на шаге 176000 (слева) и 239200 (справа)

Четко локализируются структуры, соответствующие головной ударной волне и уплотнению, возникающему за волной разрежения при обтекании цилиндрических тел.

В течении также наблюдается нестационарный процесс. За головной ударной волной был выделен разрыв слабой интенсивности (рис. 9 слева). Этот скачок постепенно удаляется от тела (рис. 9 справа) и при дальнейшем установлении течения должен покинуть расчетную область. Указанный факт свидетельствует о том, что течение еще не установилось и требуется продолжение расчета.

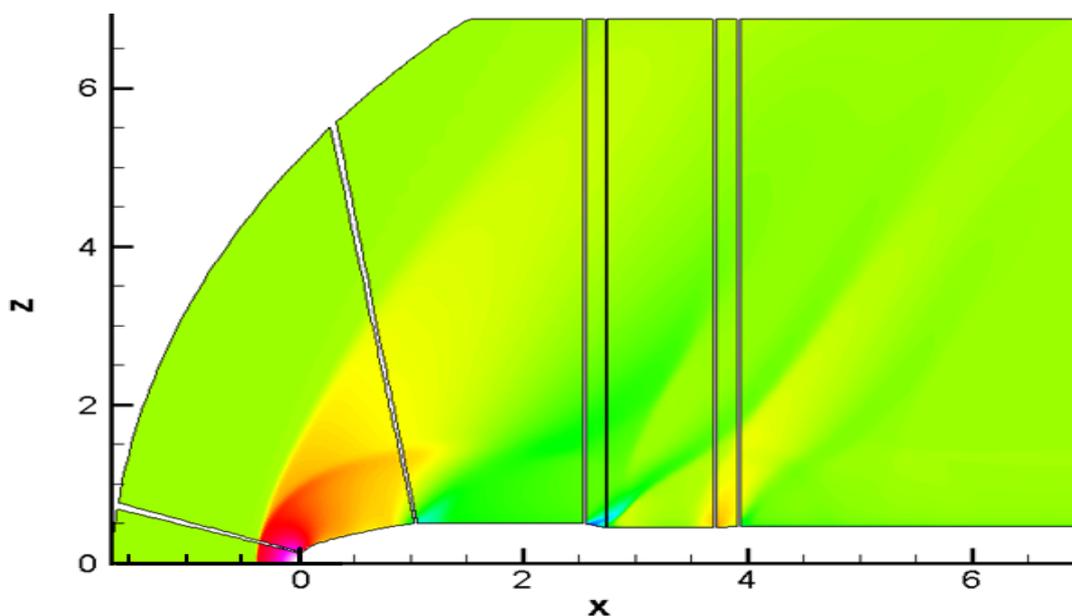


Рис. 10. Распределение плотности в плоскости $y = 0$ на шаге 176000

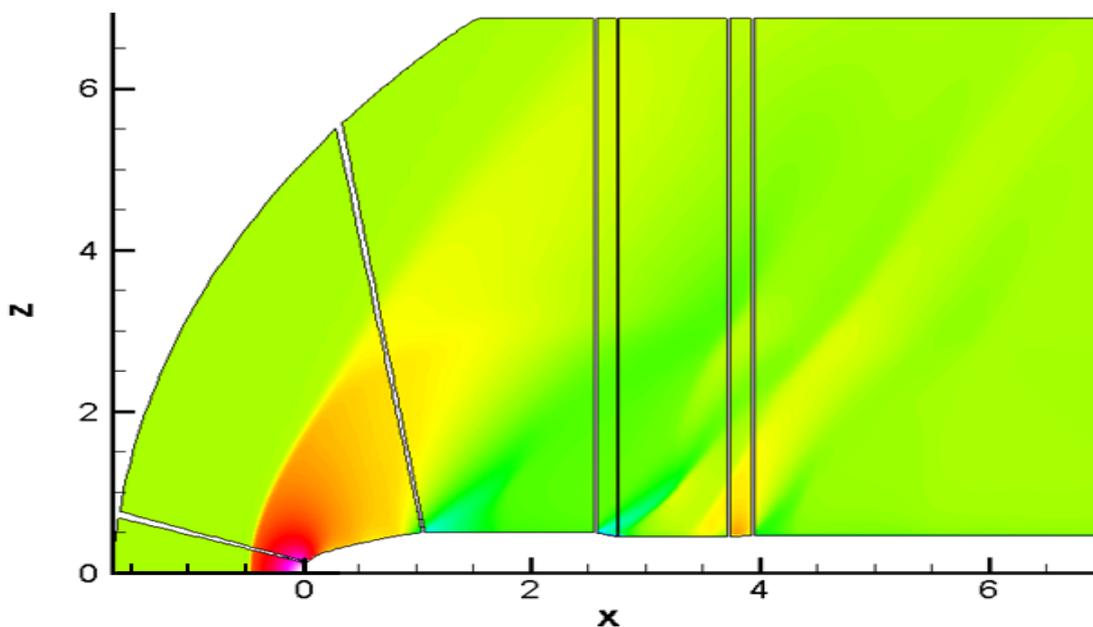


Рис. 11. Распределение плотности в плоскости $y = 0$ на шаге 239200

В силу слабой интенсивности установить наличие указанного нестационарного разрыва стандартными средствами может быть достаточно трудоемко.

Так, на шаге 176000 его наличие может быть визуально установлено по распределению поля плотности (рис. 10).

Однако на шаге 239200 визуально установить наличие разрыва уже невозможно (рис. 11). Приходится прибегать к дополнительным средствам, например, использованию «дикой палитры» (рис. 12). Однако интерпретация результатов, полученных с использованием подобных средств, (как и выбор самих средств) требует определенного опыта и навыков в анализе расчетов газодинамических течений.

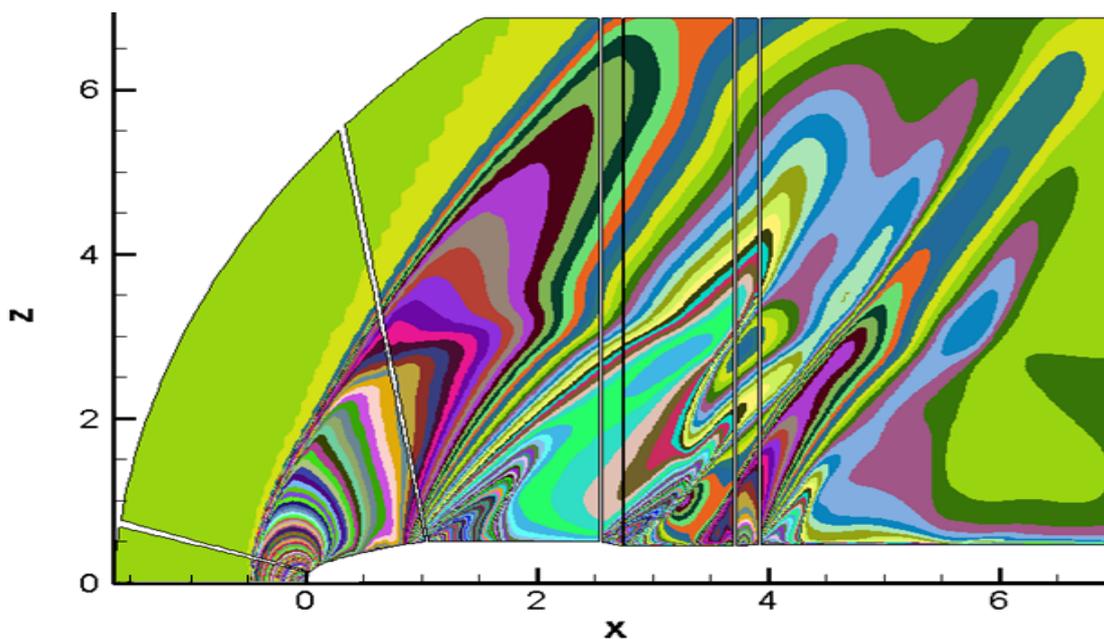


Рис. 12. Распределение плотности в плоскости $y = 0$ на шаге 239200 («дикая палитра»)

В то же время представленный в данной работе детектор позволяет с легкостью обнаружить и локализовать указанный разрыв. Таким образом, детектор может применяться для анализа качества расчета, а при построении дополнительной логики (сравнение положения разрывов, локализованных в различные моменты времени) может быть использован для проверки того, что течение установилось.

Применение детектора для адаптации расчетной сетки к положению разрывов

В заключение, на примере одномерной задачи о распаде и взаимодействии разрывов в трубе под действием импульсного вложения энергии, рассмотрим простейший вариант применения детектора для адаптации расчета к положению разрывов.

В начальный момент времени существуют три области с постоянными значениями газодинамических величин:

(1) невозмущенный неподвижный газ перед фронтом падающей ударной волны:

$$x > 2, \quad \rho_1=1, \quad u_1=0, \quad p_1=1,$$

(2) объемная часть разряда:

$$0 < x < 2, \quad \rho_2=1, \quad u_2=0, \quad p_2=12.4625,$$

(3) область за фронтом падающей волны:

$$x < 0, \quad \rho_3=3.7629, \quad u_3=2.5194, \quad p_3=9.6450.$$

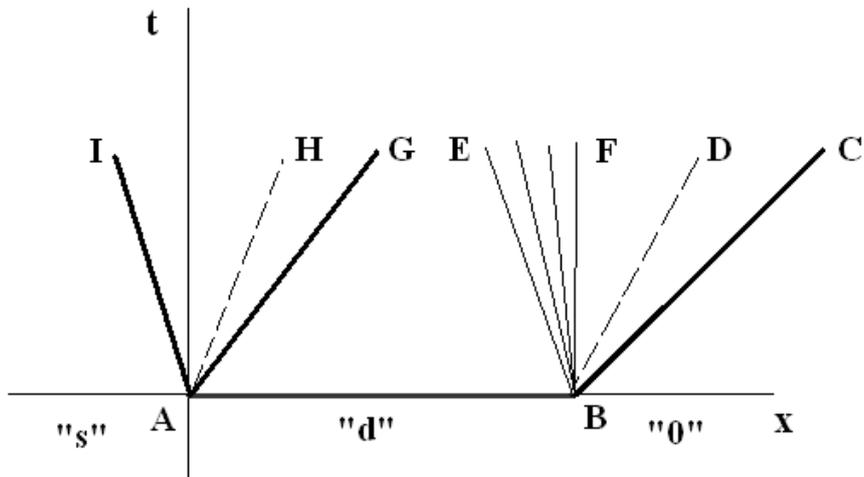


Рис. 13. Начальное расположение разрывов

В результате распада разрыва в точке $x=0$ формируются две ударных волны и контактный разрыв между ними. Распад разрыва в точке $x=2$ дает идущую влево волну разрежения, идущую вправо ударную волну и контактный разрыв между ними. Начальная конфигурация разрывов представлена на рисунке 13. Начальные интенсивности перечисленных разрывов зависят от двух факторов – числа Маха падающей ударной волны и количества вложенной энергии.

Течение в последующие моменты времени рассчитывалось путем численного интегрирования нестационарных одномерных уравнений Эйлера. Использовался одномерный вариант обобщенной разностной схемы Годунова 2-го порядка аппроксимации. Изначально расчеты проводились на равномерной подвижной сетке, границы которой соответствуют положению крайней левой и крайней правой ударных волн. Результаты расчета на сетке, содержащей 2048 ячеек, представлены на рисунке 14.

Затем в расчет был внедрен алгоритм выделения особенностей течения. Локализация разрывов проводилась на каждом шаге расчета. Результаты локализации представлены на рисунке 15.

Чтобы проверить качество выделения разрывов, для начального интервала времени было проведено сравнение полученных результатов локализации с точным решением (таблица 1).

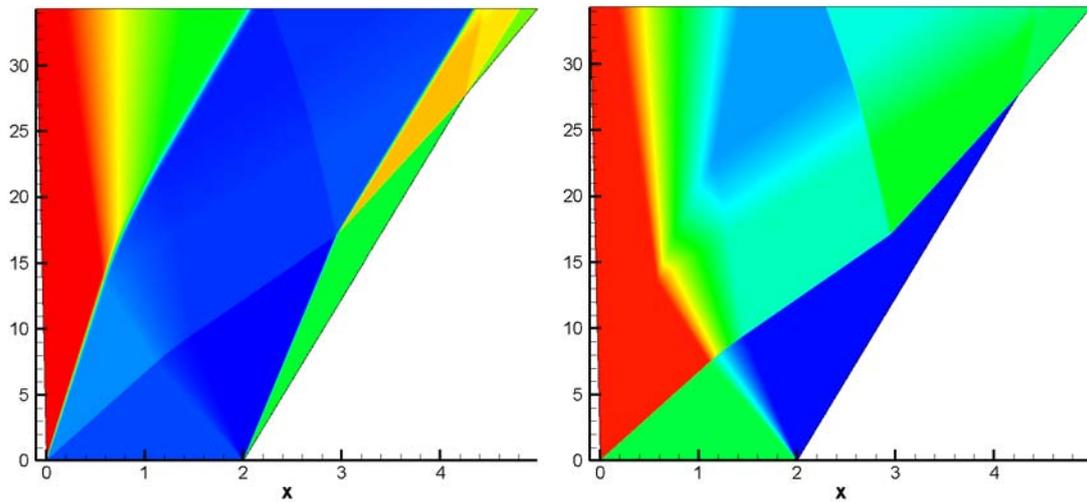


Рис. 14. Распределение плотности и давления в расчете на равномерной подвижной сетке, содержащей 2048 ячеек

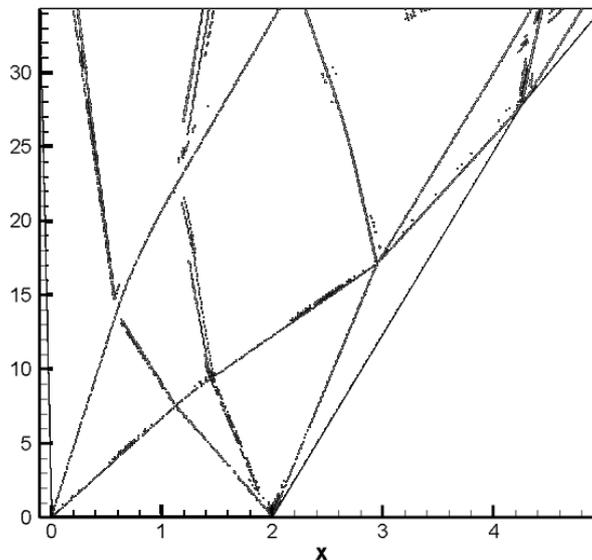


Рис. 15. Разрывы, локализованные в расчете

Для контактных разрывов и ударной волны получено достаточно точное совпадение, локализованные границы волны разрежения смещены внутрь волны разрежения.

После этого был реализован адаптивный вариант расчета, использующий информацию о положении разрывов, полученную от детектора. На каждом шаге расчета сначала проводилась локализация разрывов в исходных данных (начальных или данных с предыдущего шага). Затем ячейки, в которых были локализованы разрывы, и две соседние с ними ячейки разбивались на восемь равных частей. Таким образом формировалась неравномерная сетка, на которой

выполнялся очередной шаг расчета. Значения полей газодинамических величин в ячейках этой сетки задавались в зависимости от того, какая сетка использовалась на предыдущем шаге:

- 1) если в обоих случаях ячейка разбивалась на части, то значения для каждой части, полученные на предыдущем шаге, используются как исходные на текущем шаге;
- 2) если в обоих случаях ячейка не разбивалась, то значения, полученные для этой ячейки на предыдущем шаге, используются как исходные на текущем шаге;
- 3) если на текущем шаге ячейка разбивается на части, а на предыдущем нет, то для каждой из частей ячейки в качестве исходных данных используются одни и те же величины, полученные в результате расчета на предыдущем шаге для целой ячейки;
- 4) если на предыдущем шаге ячейка разбивается на части, а на текущем нет, то в качестве исходных данных для ячейки используются осредненные по всем частям ячейки величины.

Таблица 1

Сравнение точных и полученных скоростей разрывов

Распад слева	Теоретическая скорость	Полученная скорость
Ударная волна	-0.107302	
Контактный разрыв	1.468936	1.462891
Ударная волна	5.150371	5.131882
Распад справа	Теоретическая скорость	Полученная скорость
Волна разрежения – левая граница	-4.177036	-3.928539
Волна разрежения – правая граница	-1.87936	-1.953756
Контактный разрыв	1.91473	1.911167
Ударная волна	2.798028	

Результаты неадаптивного расчета, проведенного на равномерной сетке, содержащей 256 ячеек, и адаптивного расчета, проведенного с использованием информации о положении разрывов на неравномерной сетке (изначально сетка также состоит из 256 ячеек, но каждая может разбиваться на восемь частей), представлены на рисунках 16 и 17 соответственно.

Использование адаптивного подхода позволило существенно повысить качество расчета за счет уменьшения зон размазывания разрывов (особенно контактных).

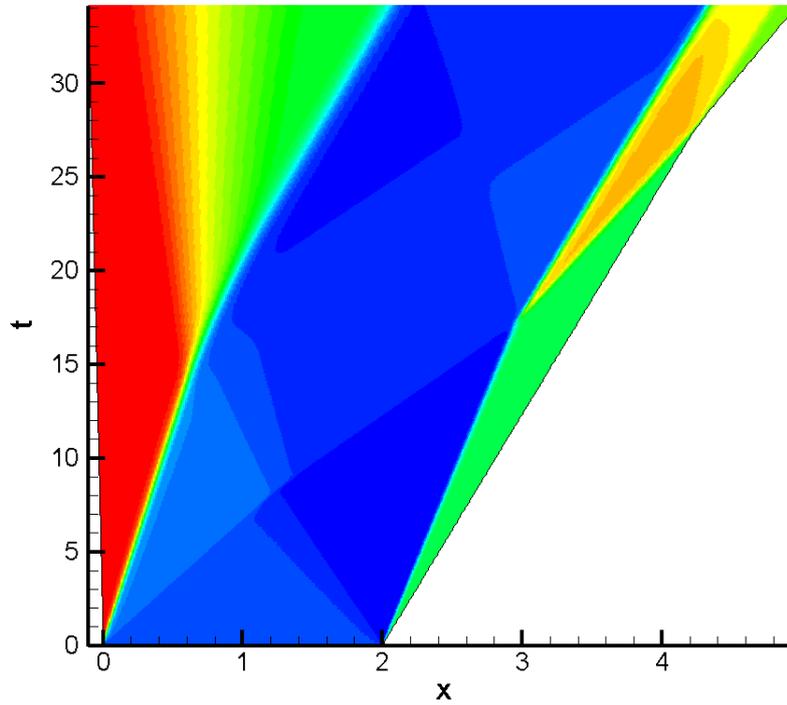


Рис. 16. Распределение плотности в расчете на равномерной подвижной сетке, содержащей 256 ячеек

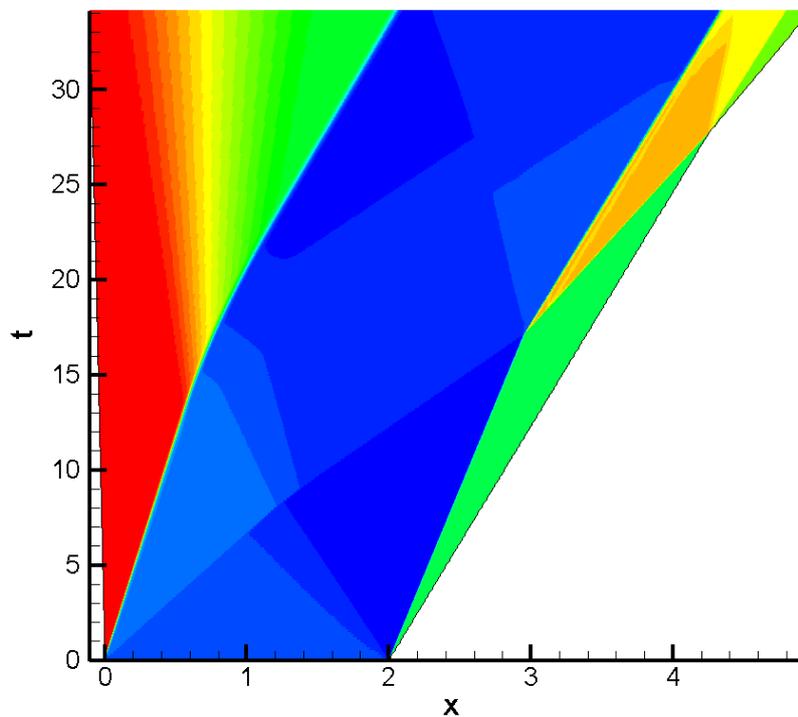


Рис. 17. Распределение плотности в расчете, выполненном на адаптивной сетке

Данный пример ярко иллюстрирует высокий потенциал использования детектора для адаптации расчета к положению разрывов. Естественно, описанный

выше подход является одним из простейших. На практике могут использоваться методы, связанные не только с построением адаптивных сеток, но и с модификацией в окрестности разрывов самого разностного алгоритма. Однако описанный в данной работе детектор сингулярностей остается универсальным элементом, который может быть эффективно использован для локализации разрывов при любом из подходов к адаптации расчетов газодинамических течений к положению разрывов.

Заключение

Установлено, что модифицированный алгоритм локализации особенностей позволяет эффективно обрабатывать двумерные и трехмерные расчеты в областях со сложной геометрией и подавлять значительную часть артефактов. Кроме того детектор может быть успешно использован для повышения качества расчета за счет его адаптации к положению разрывов. Сравнительная обработка расчетов, соответствующих уравнениям Эйлера и Рейнольдса, показала, что в расчете для вязкой среды выделяются как особенности, соответствующие ударным волнам в расчете по уравнениям Эйлера, так и особенности, соответствующие вязким эффектам. Для особенностей, соответствующих ударным волнам, с достаточно высокой точностью выполняются соотношения на разрывах для идеальной среды. При численной проверке на границе следа за моделью с высокой точностью выполняется только соотношение для нормальной компоненты импульса (2), а остальные соотношения нарушаются. Данные факты позволяют разделить особенности, соответствующие вязким и невязким эффектам.

Список литературы

1. В. И. Мажукин, А.А. Самарский, О. Кастельянос, А.В. Шапранов, Метод динамической адаптации для нестационарных задач с большими градиентами, *Математическое моделирование*, 1993, т. 5, № 4, с.32-56.
2. П. В. Бреславский, В. И. Мажукин, Метод динамической адаптации в задачах газовой динамики, *Математическое моделирование*, 1995, т. 7, № 12, с.48-78.
3. П. В. Бреславский, В. И. Мажукин, Динамически адаптирующиеся сетки для взаимодействующих разрывных решений, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2007, т. 47, № 4, с.717-737.
4. Е.В. Ворожцов, Н.Н. Яненко, Методы локализации особенностей в вычислительной газодинамике. Новосибирск: «Наука», 1985.
5. С.Б. Базаров, Применение методов обработки изображений в вычислительной газодинамике, *Труды GraphiCon 98*, 258- 264, Москва, 1998.
6. J.-M. Lina. Daubechies wavelets: filters design and applications, CRM-2449, ISAAC Conference, University of Delaware, June 1997.
7. А.Л. Афендииков, В.В. Горбунова, Л.И. Левкович-Маслюк, А.В. Плёнкин, Локализация сингулярностей газодинамических полей при помощи комплекс-

ных и вещественных вейвлетов, *Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, № 98, 2005.*

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2005-98>

8. А.Л. Афендииков, Л.И. Левкович-Маслюк, А.Е. Луцкий, А.В. Плёнкин, Локализация разрывов в полях газодинамических функций с помощью вейвлет анализа, *Математическое моделирование, 2008, том 20, № 7, с. 65-84.*

9. А.Л. Афендииков, А.Е. Луцкий, А.В. Плёнкин, Многомасштабный анализ особенностей газодинамических полей, *Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, № 98, 2008.*

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-98>

10. W. P. Jones, B. E. Launder, The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence, *International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 15, pp 301-314, 1972.*

11. B. E. Launder, B. I. Sharma, Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc, *Letters in Heat and Mass Transfer, vol. 1, no. 2, pp 131-138, 1974.*

12. Б.Н. Делоне, О пустоте сферы, *Изв. АН СССР. ОМЭН. 1934. № 4. с. 793–800.*

13. А.В. Скворцов, Триангуляция Делоне и её применение, *Томск: «Издательство Томского университета», 2002.*

14. Н.Ф. Краснов, Аэродинамика. Часть 2: Методы аэродинамического расчета. *Издание 4-е – Москва: «ЛИБРОКОМ», 2010.*

15. К.П. Петров, Аэродинамика тел простейших форм. *Москва: «Факториал», 1998.*

Оглавление

Алгоритм	5
Численное моделирование	8
Анализ расчетов.....	9
Локализация разрывов в трехмерных расчетах	14
Применение детектора для адаптации расчетной сетки к положению разрывов	18
Заключение.....	23
Список литературы	23