



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 42 за 2012 г.



Подлазов А.В.

Двумерная  
самоорганизованно-  
критическая модель Манна

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Подлазов А.В. Двумерная самоорганизованно-критическая модель Манна // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 42. 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-42>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**А.В. Подлазов**

**Двумерная самоорганизованно-  
критическая модель Манна**

**Москва — 2012**

А.В. Подлазов

## Двумерная самоорганизованно-критическая модель Манна

В работе представлено полное решение модели Манна – двумерной консервативной модели типа кучи песка с изотропными в среднем правилами передачи песчинок. Показатели распределений лавин по основным характеристикам (размер, площадь, периметр, длительность, кратность опрокидывания) определены для этой модели как аналитически, так и численно.

Предлагаемое решение основывается на пространственно-временной декомпозиции лавин, описываемых посредством слоев и волн опрокидывания, а также – на разделении движения песчинок на направленное и ненаправленное. Первый процесс может интерпретироваться в терминах динамики активных частиц, для которых описываются некоторые физические свойства.

*Ключевые слова:* самоорганизованная критичность, масштабная инвариантность, степенные распределения, конечно-размерный скейлинг, модели кучи песка, модель Манна, слои опрокидывания, волны опрокидывания

A.V. Podlazov

## Two-dimensional self-organized critical Manna model

We propose a full solution for Manna model – two-dimensional conservative sandpile model with the rules of grains redistribution isotropic at the average. Indices of the probability distributions of avalanches main characteristics (size, area, perimeter, duration, topplings multiplicity) are determined for this model both from theory and from simulations.

The solution bases on the spatiotemporal decomposition of avalanches described in terms of toppling layers and waves. The motion of grains is divided into directed and undirected types. The former is treated as the dynamics of active particles with some physical properties described.

*Key-words:* self-organized criticality, scale invariance, power laws, finite-size scaling, sandpile models, Manna model, layers of toppling, waves of toppling

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11-01-00887-а, 10-01-00786-а).

## Содержание

Введение.....	3
Пространственная структура области лавины .....	5
Динамика лавины и решение модели .....	9
Сравнение с численным экспериментом.....	12
Приложение. Критическое состояние.....	18

## ВВЕДЕНИЕ

Важнейшим признаком сложного поведения является *масштабная инвариантность*, т.е. отсутствие у описывающих его величин собственных характерных значений. Возникновение масштабно-инвариантных свойств у открытых нелинейных систем обычно связано их самоорганизацией в критическое состояние [1,2]. В работе рассматривается одна из модификаций модели Манна [3] – двумерной изотропной консервативной самоорганизованно-критической модели типа кучи песка.

### *Правила модели*

Модель представляет собой двумерную ортогональную решетку размера  $L \times L$ , в ячейках которой находятся целые числа. Эти числа традиционно интерпретируются как количество *песчинок*.

Если число в ячейке превышает установленный порог, она объявляется неустойчивой и *опрокидывается*. При этом из нее изымаются 4 песчинки, каждая из которых передается одной из ячеек, имеющей с данной общую сторону (если ячейка находится на краю решетки, то передаваемые за него песчинки необратимо теряются). Выбор новой ячейки для каждой песчинки осуществляется случайным образом (правила изотропны). При наличии нескольких неустойчивых ячеек они опрокидываются одновременно – в ходе одного *шага времени*.

Элементарное событие, в результате которого система переходит от одного устойчивого состояния к другому, инициируется добавлением песчинки в одну из ячеек. Алгоритм ее выбора не влияет на свойства модели. В настоящей работе для добавления инициирующей песчинки случайным образом выбирается одна из четырех центральных ячеек решетки ( $L$  – четное число).

Если в результате добавления песчинки ячейка теряет устойчивость, то песчинки, переданные при ее опрокидывании соседкам, могут нарушить их устойчивость и т.д. Цепная реакция опрокидываний, продолжающаяся до тех пор, пока в системе сохраняются неустойчивые ячейки, называется *лавиной*.

Далее рассматриваются следующие основные характеристики лавины:

- *размер* (количество произошедших опрокидываний)  $N$ ;
- *площадь* (число опрокинувшихся ячеек)  $S$ ;
- *периметр* (число ячеек, получивших песчинку, но не опрокинувшихся, включая песчинки, выпавшие за край решетки)  $C$ ;
- *длительность* (число шагов)  $T$ ;
- (средняя) *кратность опрокидывания*  $M = N / S$ ;
- *радиус* (характерная линейная протяженность) области лавины  $R \sim \sqrt{S}$ .

Независимо от начального состояния системы после некоторого количества событий она приходит в критическое состояние, в котором происходящие процессы являются масштабно-инвариантными, а все характеристики лавин подчиняются *степенным распределениям* с плотностью вероятности вида

$$u(x) \sim x^{-(1+\alpha)}, \quad (1)$$

где  $\alpha$  – *характеристический показатель*. Целью работы является установление его значений для всех характеристик лавины, т.е. полное решение модели.

### ***Степенные распределения***

Формула (1) является математической идеализацией и применима только в промежуточной асимптотике. Более адекватной реальности является запись

$$u(x) = x^{-(1+\alpha)} \cdot h(x/x_1), \quad (2)$$

где функция  $h(\xi)$  примерно постоянна при  $\xi \ll 1$  и убывает быстрее любой степени аргумента при  $\xi \rightarrow \infty$ .

Ограничение диапазона степенной статистики значением  $x_1$  обусловлено конечностью размеров системы, не позволяющей ей порождать сколь угодно крупные события. В силу масштабной инвариантности критического состояния для величин, подчиняющихся распределению (2), характерный размер события  $x_1$ , крупного настолько, что оно уже не помещается в систему размера  $L$ , масштабируется как некоторая его степень:

$$x_1 \sim L^\nu. \quad (3)$$

Сочетание формул (2) и (3) позволяет определить скейлинговое поведение и для среднего размера события

$$\langle x \rangle = \int x \cdot u(x) dx \sim L^\sigma,$$

где  $\sigma = \nu(1 - \alpha)$ . (4)

Для некоторых характеристик лавины *скейлинговые показатели*  $\nu$  и  $\sigma$  можно установить на основе общих соображений. Для рассматриваемой модели это удастся сделать в двух случаях.

Во-первых, площадь лавины, очевидно, ограничена площадью решетки:

$$S_1 \sim L^2, \text{ или } \nu_S = 2. \quad (5)$$

Во-вторых, движение каждой отдельно взятой песчинки по решетке представляет собой случайное блуждание. Чтобы покинуть решетку, добравшись от ее середины до края, песчинке надо пройти дистанцию порядка  $L$  ячеек, что требует порядка  $L^2$  шагов. Поскольку каждая лавина начинается добавлением одной песчинки в систему, и покидать ее в стационарном состоянии будет в среднем одна песчинка. Таким образом,

$$\langle N \rangle \sim L^2, \text{ или } \sigma_N = 2. \quad (6)$$

### Показатель взаимосвязи

При одновременном рассмотрении для одного и того же события двух характеристик  $x$  и  $y$  зависимость между ними можно записать в виде

$$y \sim x^{\gamma_{yx}}. \quad (7)$$

Воспользовавшись формулой преобразования вероятностей  $u_x(x)dx = u_y(y)dy$ , получаем соотношение для характеристических показателей

$$\gamma_{yx} = \alpha_x / \alpha_y. \quad (8)$$

С другой стороны, записав связь между размерами крупных событий  $y_1 \sim x_1^{\gamma_{yx}}$ , получаем соотношение и для скейлинговых показателей

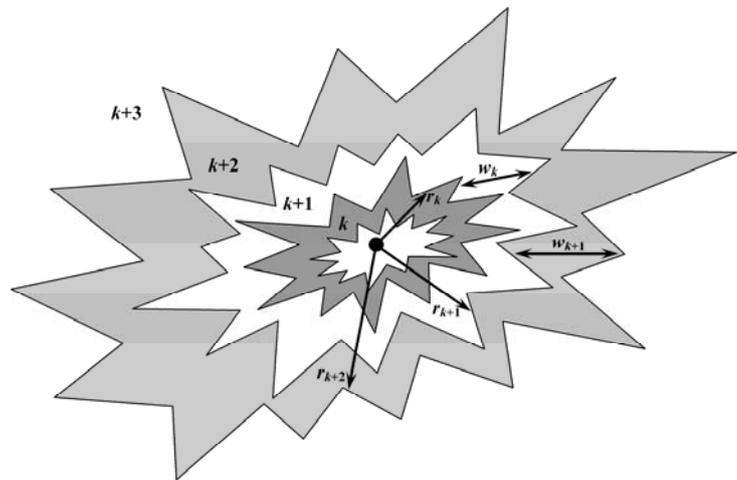
$$\gamma_{yx} = v_y / v_x. \quad (9)$$

## ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА ОБЛАСТИ ЛАВИНЫ

### Слои опрокидывания

Решение модели основано на представлении области лавины как последовательности *слоев*, внутри которых кратность опрокидывания одинакова (см. рис. 1). В силу случайного характера раздачи песчинок при опрокидывании ячеек такое описание является приближением и может быть справедливо лишь в среднем. Однако поскольку основанные на нем расчеты находятся в прекрасном согласии с результатами моделирования, мы будем считать точность такого приближения приемлемой.

Нумеровать слои области лавины будем из ее глубины наружу, начиная с единицы. То есть, если в данный момент времени максимальная кратность опрокидывания для рассматриваемой лавины равна  $m$ , то она состоит из слоев с номерами  $1 < k \leq m$ , на которых произошло  $m + 1 - k$  опрокидываний. Здесь и далее большими буквами станем обозначать характеристики ла-



**Рис. 1. Схематичное представление слоев опрокидывания**

Увеличение номера слоя соответствует уменьшению кратности опрокидывания.

Изрезанность границ слоев обеспечивает возрастание их ширины вместе с радиусом (в случае гладкой границы слои имели бы постоянную ширину).

вины, относящиеся ко всей ее области, а соответствующими малыми буквами с индексом  $k$  – значения этих характеристик для  $k$ -го слоя.

В силу масштабной инвариантности критического состояния характерный радиус области лавины дается степенной зависимостью

$$R \sim m^\gamma \sim M^\gamma \quad (10)$$

(определение  $M$  – формула (15) ниже). Поскольку показатель, связывающий радиус и кратность, фигурирует далее во многих формулах, для удобства мы будем опускать у него индексы, сохраняя их для всех прочих показателей связи.

Чтобы описать слои, сделаем еще одно важное допущение относительно динамики лавины. Предположим, что при появлении новых слоев границы уже имеющихся не испытывают систематического смещения в какую-либо сторону, подвергаясь лишь флуктуациям. Тогда можно записать для характерной величины внешнего радиуса  $k$ -го слоя выражение

$$r_k \sim k^\gamma, \quad (11)$$

превращающееся в частном случае  $k = m$  в зависимость (10). Поскольку  $r_0 = 0$ , для удобства выкладок далее формально будет использоваться и нулевой слой, не содержащий ячеек.

Характерная ширина  $k$ -го слоя

$$w_k \equiv \frac{dr_k}{dk} \sim k^{\gamma-1} \sim r_k^{1-1/\gamma}, \quad (12)$$

а его площадь

$$s_k \sim r_k w_k \sim k^{2\gamma-1} \sim r_k^{2-1/\gamma}.$$

Суммированием по слоям лавины находим ее размер

$$N = \sum_{k=0}^m (m+1-k) s_k \sim m^{2\gamma+1} \sim M^{2\gamma+1} \quad (13)$$

и площадь затронутой ею области

$$S = \sum_{k=0}^m s_k \sim m^{2\gamma} \sim M^{2\gamma} \quad (14)$$

Из формул (13) и (14) получаем

$$M = N/S \sim m. \quad (15)$$

Поэтому здесь, ранее и далее при проведении выкладок с точностью до коэффициента мы не различаем среднюю  $M$  и максимальную  $m$  кратности опрокидывания, называя их обе просто кратностью опрокидывания.

### ***Распределение лавин по кратности опрокидывания***

Предположения о пространственной структуре лавины и общего анализа правил модели оказывается достаточно, для определения показателя распределения лавин по кратности опрокидывания  $\alpha_M$ .

Для этого сначала выразим его через показатель распределения лавин по размеру, применив соотношение (8) к формуле (13):

$$\alpha_M = (2\gamma + 1) \cdot \alpha_N.$$

Сочетание формул (13) и (14) дает связь между характеристиками лавины

$$S^{2\gamma+1} \sim N^{2\gamma},$$

которая в силу соотношения (9) приводит к выражению

$$2\gamma \cdot v_N = (2\gamma + 1) \cdot v_S.$$

Запишем показатель для среднего размера лавины (4)

$$\sigma_N = v_N (1 - \alpha_N) = v_S \frac{2\gamma + 1}{2\gamma} \left( 1 - \frac{\alpha_M}{2\gamma + 1} \right) = v_S \left( 1 + \frac{1 - \alpha_M}{2\gamma} \right).$$

Отсюда с учетом равенства  $\sigma_N = v_S$  (см. формулы (5) и (6)), находим

$$\alpha_M = 1. \tag{16}$$

Примечательно, что к этому же результату можно прийти и совершенно иным путем, вообще не используя формулу (6). С учетом того, что  $S \sim R^2$  (компактность области лавины), а также соотношений (5), (9) и (10), определяем скейлинговый показатель для кратности крупных лавин

$$v_M = 1/\gamma. \tag{17}$$

Средний радиус лавины, рассчитанный с весом, равным кратности опрокидывания, задается размерами решетки:

$$\langle RM \rangle \sim \int M^{\gamma+1} \cdot M^{-(1+\alpha_M)} \cdot h(M/L^{v_M}) dM \sim L^{1+(1-\alpha_M)/\gamma} \sim L,$$

откуда вновь возникает соотношение (16).

Получение одних и тех же выводов на основе различных исходных посылок может служить косвенным подтверждением верности сделанного предположения о неподвижности границ слоев.

### ***Структура границы слоев***

Для полного описания слоев необходимо рассмотреть не только их взаиморасположение, но и геометрию границ между ними.

Определим *периметр* слоя как длину его внешней границы. Граница не является гладкой линией, образуя складки, соизмеримые по размеру с шириной слоя (12) (см. рис. 1 на стр. 5). Поэтому его периметр не пропорционален радиусу (11). Назовем *фронтом* слоя усредненное положение его внешней границы. Поскольку усреднение сглаживает ее складки, длину фронта уже можно считать пропорциональной радиусу слоя. Количество складок границы определяется длиной фронта, что позволяет записать для периметра выражение

$$c_k \sim r_k w_k \sim s_k \sim k^{2\gamma-1} \sim r_k^{1-1/\gamma}. \quad (18)$$

В частности, периметр области лавины равен радиусу ее внешнего слоя:

$$C = c_m \sim m^{2\gamma-1} \sim M^{2\gamma-1} \sim R^{2-1/\gamma}. \quad (19)$$

Наглядное представление о фрактальных свойствах границы дает величина, которую можно назвать *глубиной* области лавины

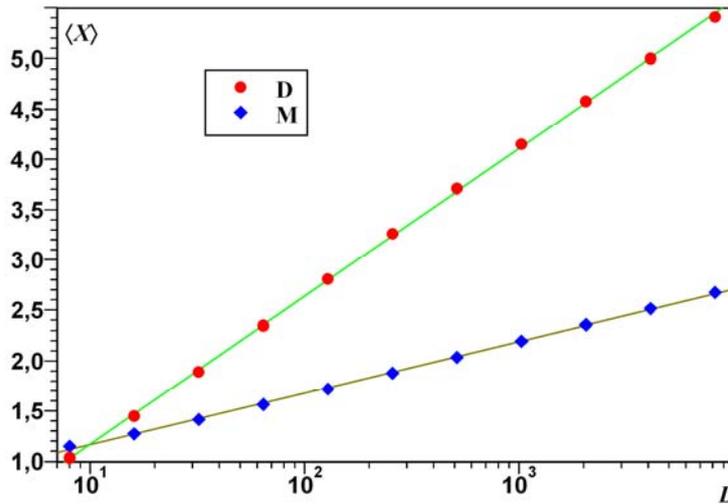
$$D = S/C.$$

Если бы граница области лавины была гладкой линией, глубина была бы пропорциональна радиусу. Однако, как следует из формул (14) и (19),

$$D \sim M.$$

Соответственно,  $\alpha_D = \alpha_M = 1$ .

Соотношение (4) дает значение  $\sigma = 0$  при  $\alpha = 1$ , т.е. следует ожидать не степенного, а лишь логарифмического увеличения средних значений кратности и глубины с ростом размера решетки, что подтверждается результатами моделирования, приведенными на рис. 2.



**Рис. 2 Средние глубина лавины и кратность опрокидывания**

Логарифмическая зависимость от  $L$  средних значений этих характеристик подтверждает для них тривиальное единичное значение показателя, найденное на основе общих соображений о пространственной структуре лавины.

Линиями показаны логарифмические аппроксимации экспериментальных зависимостей.

## ДИНАМИКА ЛАВИНЫ И РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ

### *Волны опрокидывания*

Развитие лавины во времени схематично можно представить как последовательность *волн опрокидывания* [4], идущих из ее глубины к периферии, увеличивая кратность опрокидывания и создавая новый внешний слой.

Очередная волна может достигнуть или не достигнуть границ уже затронутой области, тем самым увеличивая или уменьшая кратность опрокидывания  $M$ . Однако в самоорганизованно-критическом состоянии ее среднее изменение

$$\langle \Delta M \rangle = 0. \quad (20)$$

В самом деле, при  $\langle \Delta M \rangle < 0$ , лавина, инициированная добавлением песчинки, быстро затухает, как правило, не достигая краев решетки, что ведет к увеличению ее заполнения. С другой стороны, при  $\langle \Delta M \rangle > 0$  лавина с ненулевой вероятностью неограниченно распространяется, достигая краев решетки во множестве мест и вынося много песчинок, что ведет к уменьшению заполнения. Возникающая отрицательная обратная связь и обеспечивает выполнение условия (20), означающего диффузионное изменение кратности со временем

$$M \sim \sqrt{T}. \quad (21)$$

Отсюда с учетом формулы (10) для радиуса области лавины получаем

$$R \sim M^\gamma \sim T^{\gamma/2},$$

что дает для скорости движения ее внешнего фронта

$$V \sim \frac{\delta R}{\delta T} \sim R^{1-2/\gamma}. \quad (22)$$

### *Физика активных частиц*

Как и формула (16), формулы (21) и (22) могут быть получены на основе иных посылок, связанных не с изменением геометрии области лавины, а с поведением отдельных песчинок.

Внутри слоя ячейки (в среднем) отдают соседям и получают от них одно и то же число песчинок. Однако на границе слоев этот баланс нарушается, т.к. ячейки внутреннего слоя отдают больше, чем получают от ячеек внешнего. То есть, количество песчинок, передаваемых слоем вовне, определяется его периметром (18), в каждой точке которого происходит передача песчинки.

Введем понятие *активных частиц*, под которыми будем понимать песчинки, которые покидают слой в ходе лавины. Количество активных частиц на  $k$ -м слое равно разнице числа отданных наружу и полученных изнутри песчинок:

$$a_k \cong \frac{dc_k}{dk} \sim k^{2\gamma-2} \sim r_k^{2-2/\gamma}. \quad (23)$$

Активные частицы перемещаются из глубины области лавины к ее периферии, тогда как остальные песчинки – в случайном направлении. Таким образом, развитие лавины представляет собой сочетание направленного и направленного движений. Подобное разделение возможно только в критическом состоянии. В докритическом состоянии активные частицы будут утрачивать этот статус, не достигая границ области лавины, а в сверхкритическом даже вынос во вне всех активных частиц не будет приводить к завершению лавины из-за продолжающегося появления новых активных частиц.

Далее мы рассмотрим поведение активных частиц с кинематической, динамической и телеологической точек зрения, каждый раз приходя к полученным выше формулам. Смысл такого дублирования состоит в прояснении физического смысла активных частиц и их свойств.

### 1) Кинематика

Перенос активных частиц вовне уместно связать с движением фронтов. На единицу длины фронта приходится

$$\tau_k \sim \frac{a_k}{r_k} \sim k^{\gamma-2} \sim r_k^{1-2/\gamma}$$

активных частиц. Следовательно, число шагов времени, необходимых для продвижения участка фронта, «обслуживаемого» одной активной частицей, пропорционально его длине:

$$\delta t_k \sim \frac{\delta r_k}{\tau_k} \sim \frac{\delta r_k}{r_k^{1-2/\gamma}}.$$

Таким образом, скорость движения  $k$ -го фронта

$$v_k \sim \frac{\delta r_k}{\delta t_k} \sim r_k^{1-2/\gamma}, \quad (24)$$

а время, которое он находится в пути с момента своего появления

$$t_k \sim r_k^{2/\gamma} \sim k^2.$$

В частности, длительность лавины

$$T = t_m \sim R^{2/\gamma} \sim M^2,$$

что эквивалентно формуле (21), а уравнение (22) возникает как частный случай формулы (24).

## 2) Динамика

Плотность активных частиц на  $k$ -м слое:

$$\rho_k \sim \frac{a_k}{s_k} \sim k^{-1} \sim r_k^{-1/\gamma}.$$

В качестве причины движения фронтов наружу можно рассматривать взаимное отталкивание активных частиц [5]. Его энергия внутри  $k$ -го слоя (т.е. включая более глубокие)

$$U_k \sim \sum_{i=0}^k s_i \cdot \rho_i^2 \sim \sum_{i=0}^k i^{2\gamma-3} \sim k^{2\gamma-2} \sim r_k^{2-2/\gamma}.$$

Приравняв скорость движения фронтов силе отталкивания:

$$v_k \sim -\frac{dU_k}{dr_k} \sim r_k^{1-2/\gamma},$$

еще раз получаем формулу (24).

## 3) Телеология

В силу определения (23) полное количество активных частиц есть периметр лавины, который они и образуют по ее завершении. А в ходе ее развития активные частицы проявляют себя в виде некоторой доли опрокидываний. Следовательно, *активность*, понимаемая как среднее число опрокидываний за шаг

$$A = \frac{N}{T},$$

с точностью до коэффициента совпадает с полным числом активных частиц, т.е.

$$A \sim C. \tag{25}$$

Сочетание этих формул с формулами (13) и (19) вновь приводит к соотношению (21).

## ***Поток песчинок***

С помощью формул (23) и (24) запишем поток частиц через  $k$ -й слой

$$j_k = v_k a_k \sim r_k^{3-4/\gamma}.$$

Он не должен зависеть ни от номера слоя, ни от числа слоев, ибо он выносит ту самую песчинку, добавлением которой инициирована лавина.

Таким образом,

$$\gamma = 4/3.$$

Знание показателя связи позволят получить с помощью формулы (8) характеристические и с помощью формулы (9) скейлинговые показатели для размера, площади, периметра и длительности лавин, используя, соответственно, соотношения (13), (14), (19) и (21). Результаты этих расчетов сведены в таблицу (смысл скейлингового показателя  $\beta$  поясняется далее).

Характеристические и скейлинговые показатели, показатели связи

характеристика	$\alpha$	$\nu$	$\beta$	$\sigma$	$N$	$S$	$T$	$C$	$R$	$M$
размер $N$	3/11	11/4	7/2	2	<del>3/11</del>	11/8	11/6	11/5	11/4	11/3
площадь $S$	3/8	2	11/4	5/4	8/11	<del>11/8</del>	4/3	8/5	2	8/3
длительность $T$	1/2	3/2	9/4	3/4	6/11	3/4	<del>11/6</del>	6/5	3/2	2
периметр $C$	3/5	5/4	2	1/2	5/11	5/8	5/6	<del>11/5</del>	5/4	5/3
радиус $R$	3/4	1	7/4	1/4	4/11	1/2	2/3	4/5	<del>11/4</del>	4/3
кратность $M$	1	3/4	3/2	0	3/11	3/8	1/2	3/5	3/4	<del>11/3</del>

## СРАВНЕНИЕ С ЧИСЛЕННЫМ ЭКСПЕРИМЕНТОМ

### *Метод конечно-размерного скейлинга*

Формулы (2) и (3) ограничивают область промежуточной асимптотики, где плотность распределения может быть аппроксимирована формулой (1). Приближенный характер степенной записи плотности затрудняет непосредственное определение характеристического показателя на основе результатов компьютерного эксперимента. Можно лишь убедиться в правильности известного из теории значения показателя домножением плотности на соответствующую степень аргумента, в результате чего график в области промежуточной асимптотике становится примерно горизонтальным.

Более продуктивным оказывается метод конечно-размерного скейлинга, основанный на переходе от представления плотности в виде (2) к записи вида

$$u(x) = L^{-\beta} \cdot g(xL^{-\nu}). \quad (26)$$

Если рассматривать выражение  $L^{\beta} \cdot u(x)$  как функцию от  $L^{-\nu} \cdot x$ , то графики, полученные при различных значениях  $L$ , совместятся (см. рис. 3, рис. 4, рис. 5, рис. 6 и рис. 7). А эквивалентность представлений (2) и (26) требует степенного поведения функции  $g(\xi)$  при малых аргументах и выполнения скейлингового соотношения

$$\beta = \nu(1 + \alpha). \quad (27)$$

Таким образом, для экспериментального определения показателя  $\alpha$  нет нужны компенсировать влияние неизвестных скейлинговых функций  $h(\xi)$  и  $g(\xi)$ . Достаточно, подобрав подходящие значения  $\beta$  и  $\nu$ , воспользоваться соотношением (27).

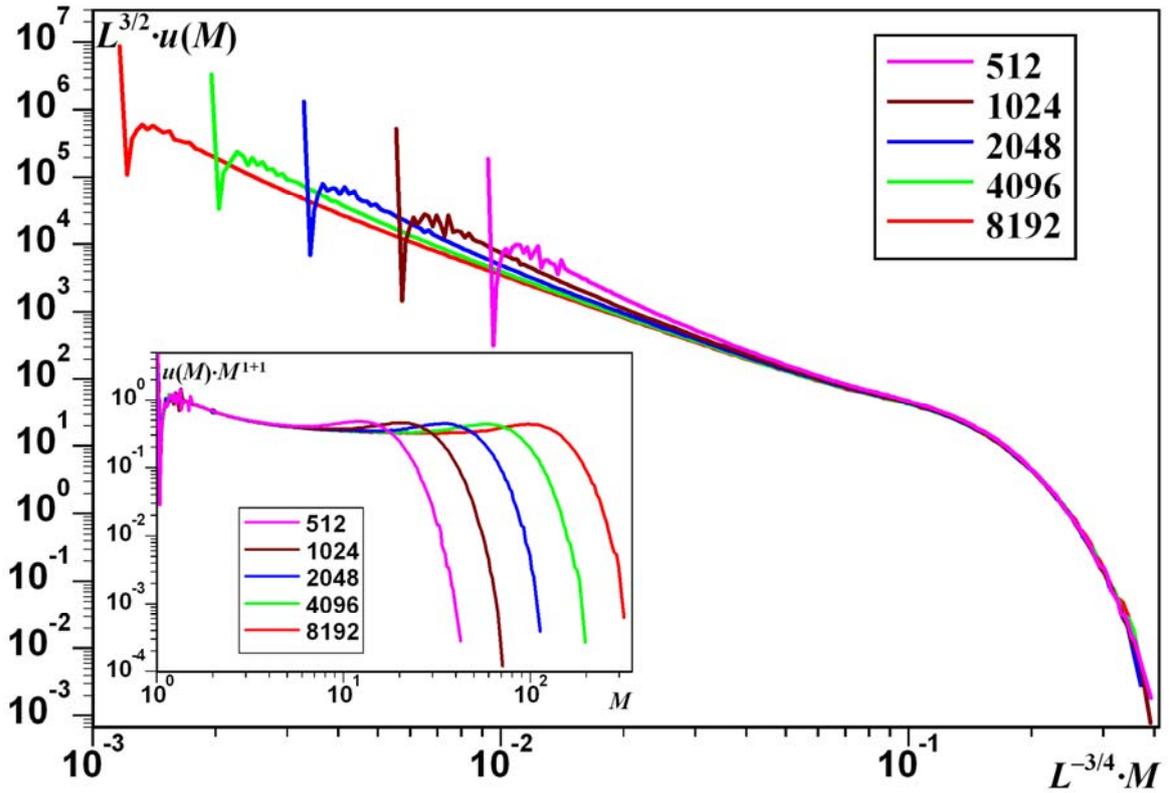


Рис. 3. Распределение лавин по кратности опрокидывания

Показатели:  $\alpha_M = 1$ ,  $\nu_M = 3/4$ ,  $\beta_M = 3/2$ .

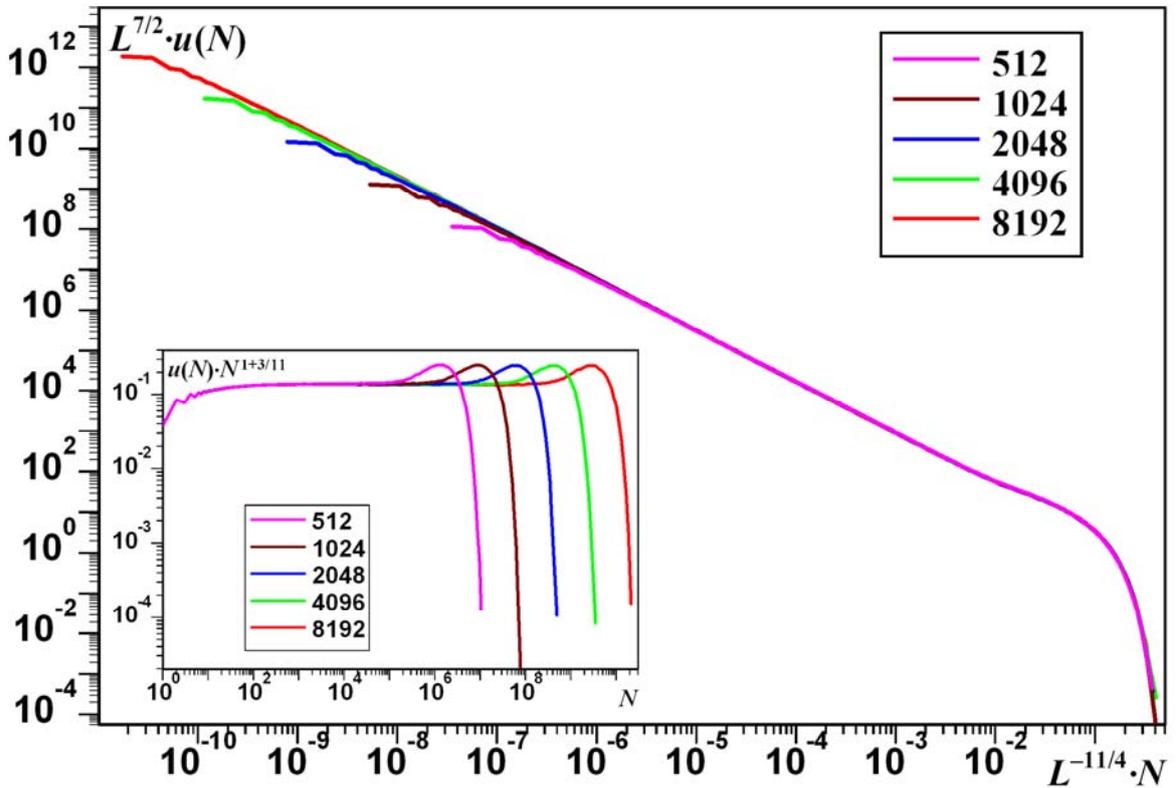


Рис. 4. Распределение лавин по размеру

Показатели:  $\alpha_M = 3/11$ ,  $\nu_M = 11/4$ ,  $\beta_N = 7/2$ .

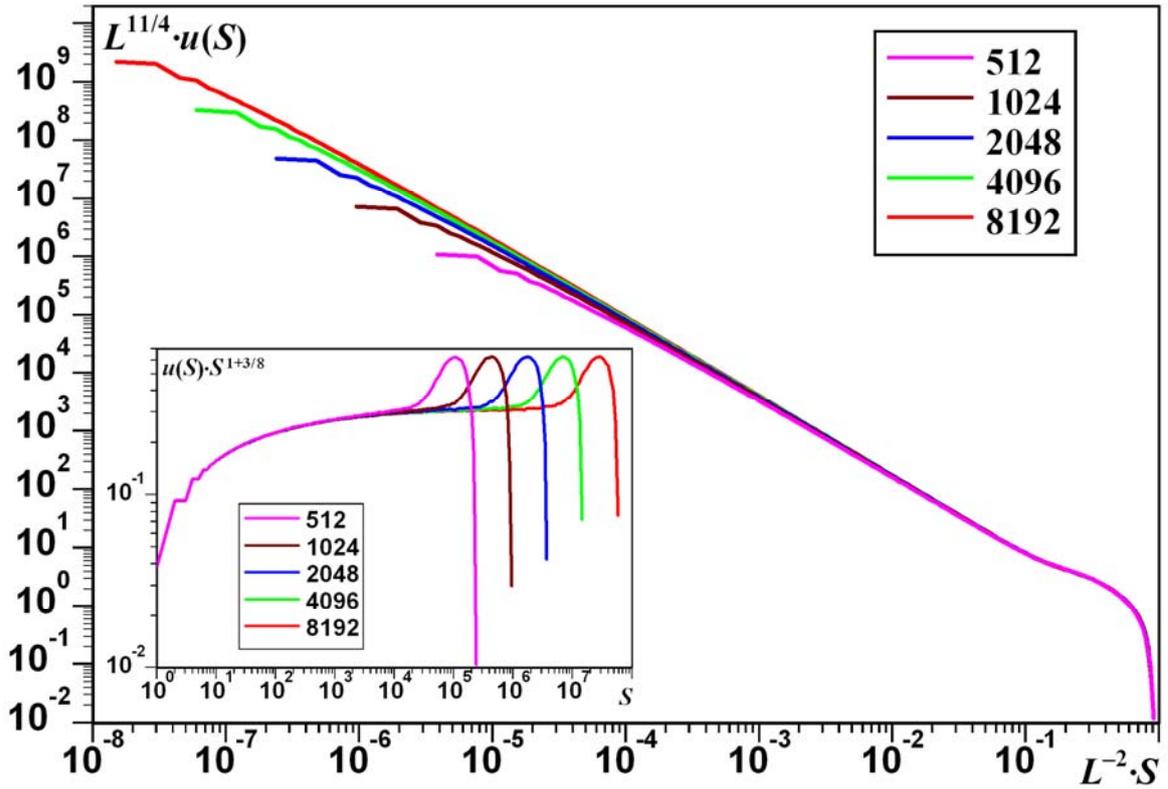


Рис. 5. Распределение лавин по площади

Показатели:  $\alpha_S = 3/8$ ,  $\nu_S = 2$ ,  $\beta_S = 11/4$ .

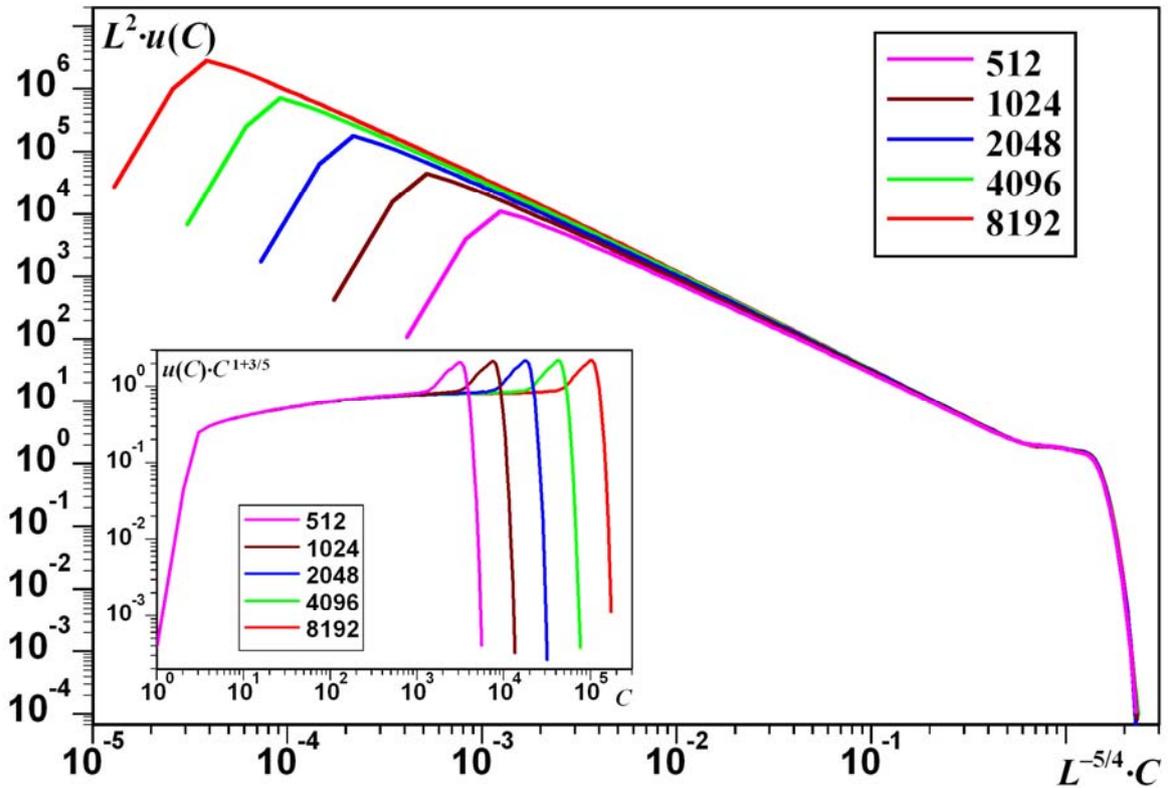


Рис. 6. Распределение лавин по периметру

Показатели:  $\alpha_C = 3/5$ ,  $\nu_C = 5/4$ ,  $\beta_C = 2$ .

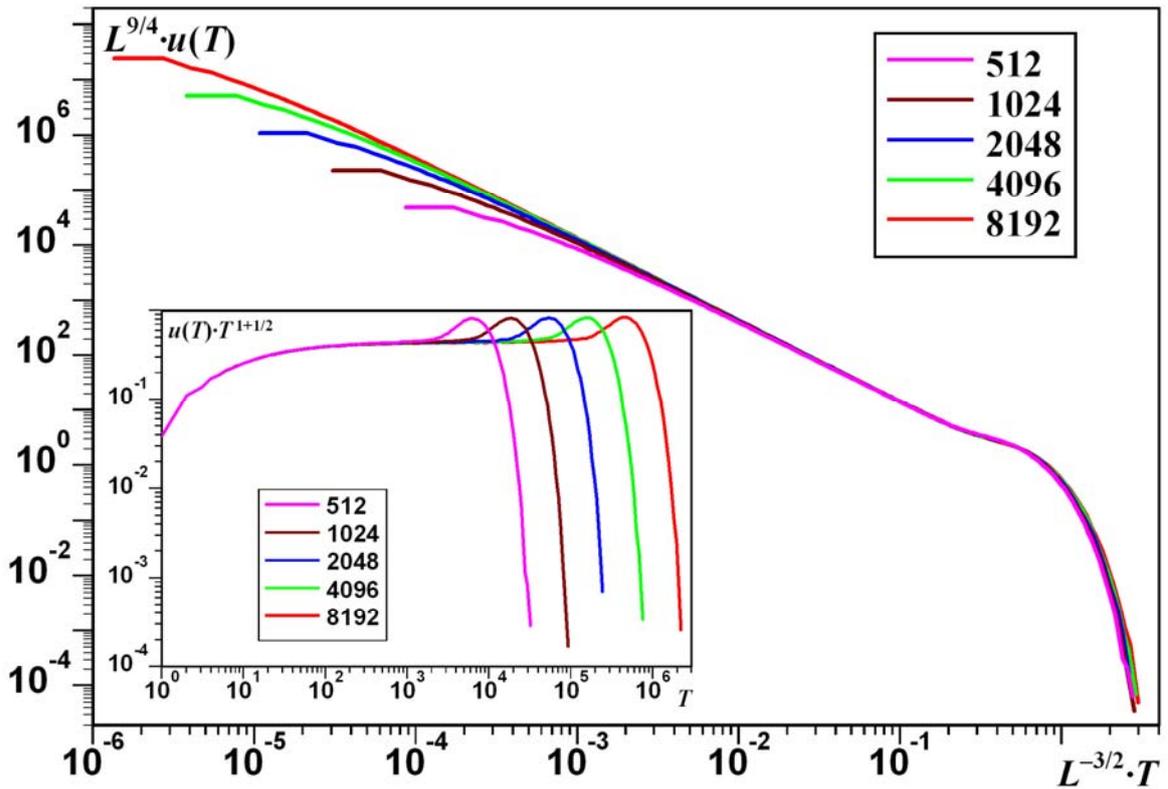


Рис. 7. Распределение лавин по длительности

Показатели:  $\alpha_T = 1/2$ ,  $\nu_T = 3/2$ ,  $\beta_T = 9/4$ .

### Статистика падений

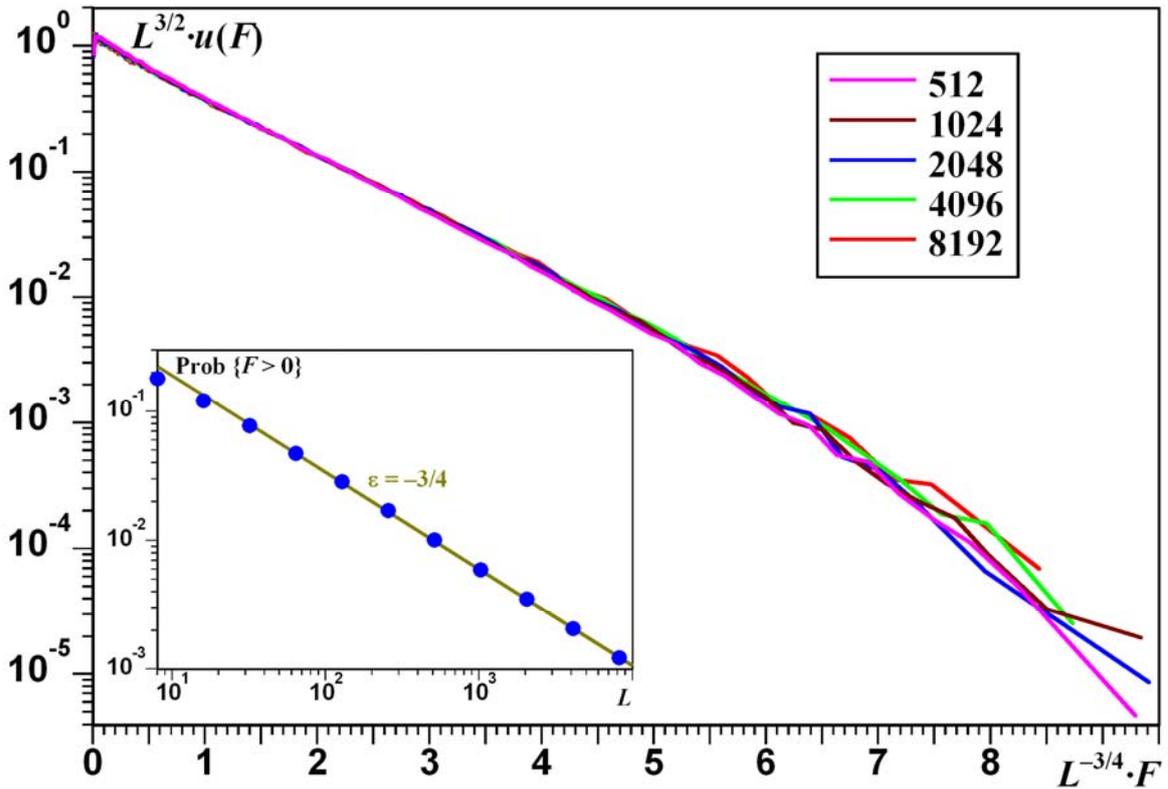
Представление (26) имеет большую общность, нежели формула (2), позволяя работать и нестепенным распределением лавин по числу падений  $F$ .

Вероятность того, что лавина не помещается в систему размера  $L$ :

$$\text{Prob}\{x > x_1\} = \int_{x_1}^{\infty} u(x) dx \cong \int_{L^\nu}^{\infty} L^{-\beta} g(xL^{-\nu}) dx = L^{\nu-\beta} \int_1^{\infty} g(\xi) d\xi \sim L^{-\varepsilon},$$

где универсальный показатель  $\varepsilon = \beta - \nu$ , не зависит от того, какая именно характеристика лавины рассматривается (для характеристик, распределенных степенным образом, данное обстоятельство прямо следует из формул (8), (9) и (27)). Воспользовавшись формулами (16) и (17), получаем  $\varepsilon = 3/4$ .

Выбор для добавления инициирующей песчинки центральных ячеек, максимально удаленных от края решетки, делает возможным падение за него только в результате крупнейших лавин. Таким образом, универсальный показатель определяет зависимость от размера решетки доли тех событий, в ходе которых происходят падения (см. врезку на рис. 8). Заметим, что поскольку падения не описываются степенным распределением, для них размер крупного события  $F_1$ , задаваемого формулой (3), и размер события, не помещающегося в систему, – не одно и то же. Не помещается уже любое событие с  $F > 0$ .



**Рис. 8. Распределение лавин по числу падений**

Показатели:  $\nu_F = 3/4$ ,  $\beta_F = 3/2$ . Плотность убывает не как степень, а экспоненциально. На врезке: вероятность того, что за край упадет хотя бы одна песчинка, убывает как  $L^{-\epsilon}$ .

Определим скейлинговые показатели формулы (26) для величины  $F$ .

За один шаг моделирования в систему добавляется одна песчинка, значит, в стационарном состоянии в среднем одна ее и покидает, т.е.  $\langle F \rangle = 1$  и  $\sigma_F = 0$ .

По аналогии с формулой (4) можно вывести соотношение  $\sigma_F = 2\nu_F - \beta_F$ , откуда  $2\nu_F = \beta_F$ , что с учетом найденного значения  $\epsilon$  дает  $\beta_F$  и  $\nu_F$ , совпадающие с  $\beta_M$  и  $\nu_M$ , в чем позволяет убедиться рис. 8.

Достижение лавиной края решетки в отдельных точках можно рассматривать как независимые события, что подтверждается экспоненциальным видом распределения лавин по падениям (см. рис. 8). Ширина внешнего слоя крупнейшей лавины  $W \sim L^{1/4}$ . Характерное расстояние между точками, где она достигает края решетки, имеет тот же порядок в силу изотропии правил модели.

Таким образом, вновь получаем для крупнейшего падения  $F_1 \sim L^{3/4}$ .

### ***Взаимосвязь характеристик лавины***

Наконец, скейлинговый подход применим и к анализу взаимозависимостей различных характеристик лавины. Чисто степенной вид (7) они имеют тоже только в промежуточной асимптотике, отклоняясь от него на краях диапазона значений, принимаемых характеристиками. Однако при домножении значений по обеим осям на  $L^\nu$  графики совмещаются (см. рис. 9 и рис. 10), что позволяет находить показатель связи с помощью формулы (9).

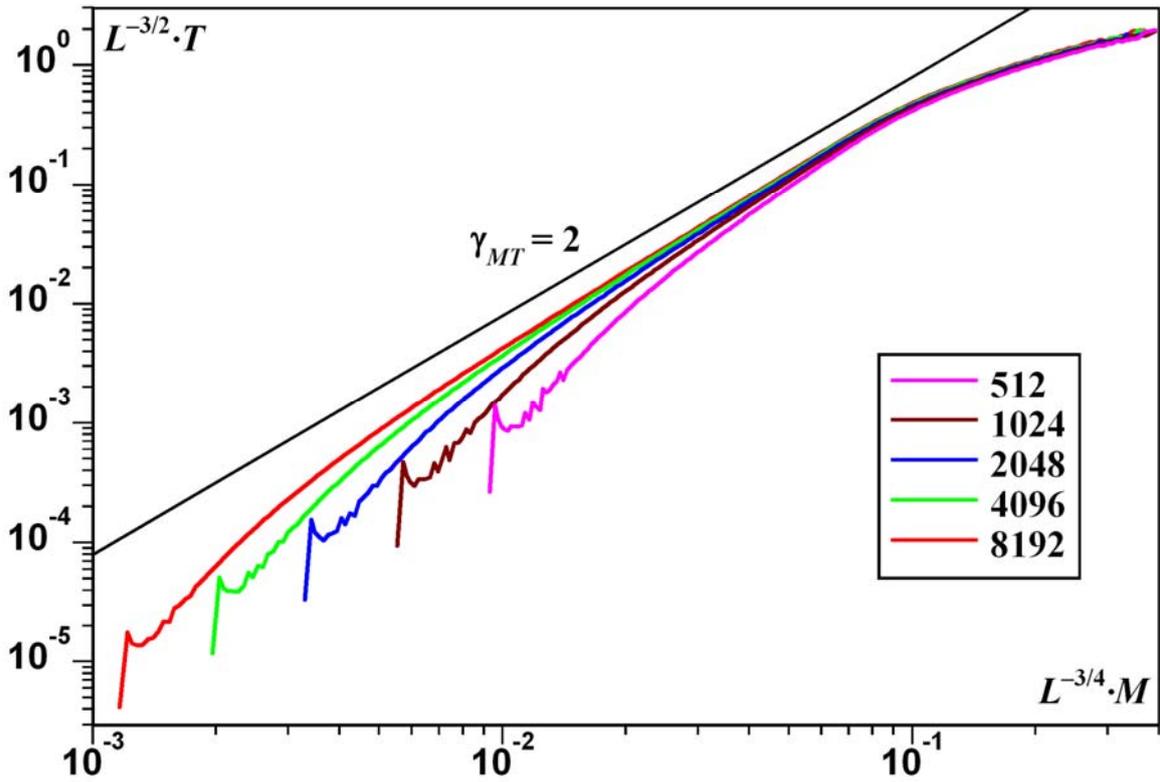


Рис. 9. Связь средней кратности опрокидывания и длительности лавины

Показатели:  $\nu_M = 3/4$ ,  $\nu_T = 3/2$  и  $\gamma_{MT} = 2$  (см. формулу (21) на стр. 9).

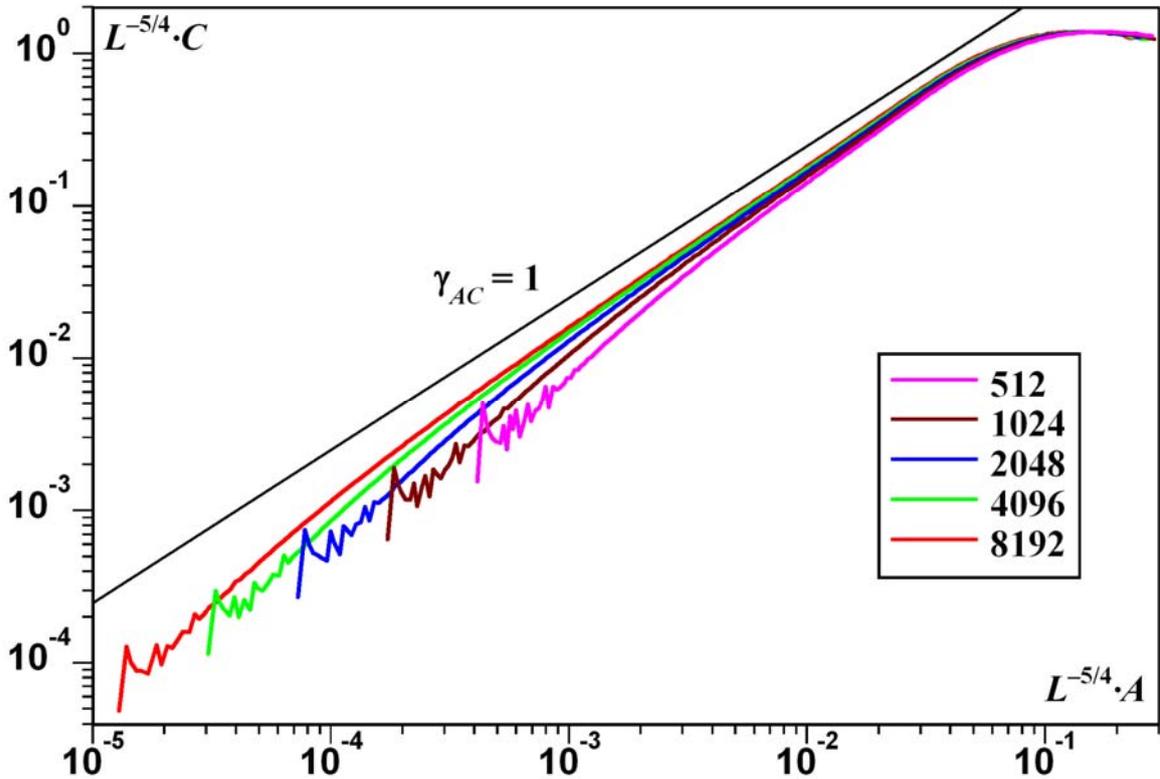


Рис. 10. Связь активности в ходе лавины и ее периметра

Показатели:  $\nu_A = \nu_C = 5/4$  и  $\gamma_{AC} = 1$  (см. формулу (25) на стр. 11).

## ПРИЛОЖЕНИЕ. КРИТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ

Кроме динамики системы в критическом состоянии интерес представляет и устройство этого состояния. Для определенности положим порог устойчивости для всех ячеек одинаковым и равным 3. Из-за процессов накопления и сброса песчинок среднее заполнение ячеек решетки  $z$  подвержено флуктуациям. Его распределение имеет колоколообразный вид, показанный на рис. 11.

При  $L \rightarrow \infty$  математическое ожидание  $\langle z \rangle \rightarrow z_\infty \approx 2,0564\dots$ , а его стандартное отклонение  $\sigma_z \rightarrow 0$ . Как можно видеть из рис. 12, для больших  $L$

$$z_\infty - \langle z \rangle \sim 1/L \quad (28)$$

и  $\sigma_z \sim L^{-5/4}$ . (29)

Зависимость (28) объясняется наличием обедненной песчинками прикромной области, площадь которой, пропорциональная периметру решетки, составляет от ее площади  $L^2$  долю порядка  $1/L$ . Флуктуации среднего заполнения, описываемые формулой (29), обусловлены крупнейшими падениями, уносящими из решетки порядка  $L^{3/4}$  песчинок, или  $L^{-5/4}$  от их наличного числа.

Отдельного обсуждения заслуживают поправки к этим формулам, позволяющие описать поведение  $\langle z \rangle$  и  $\sigma_z$  и для небольших  $L$  (см. рис. 12).

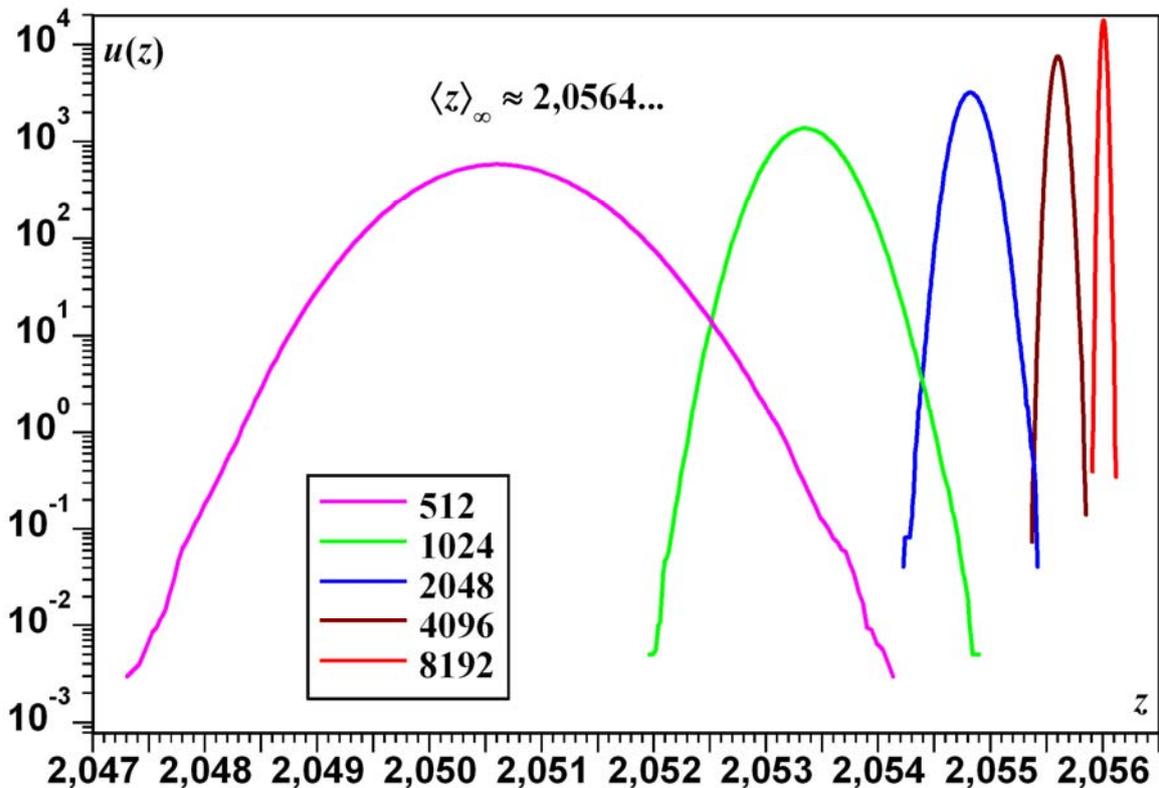
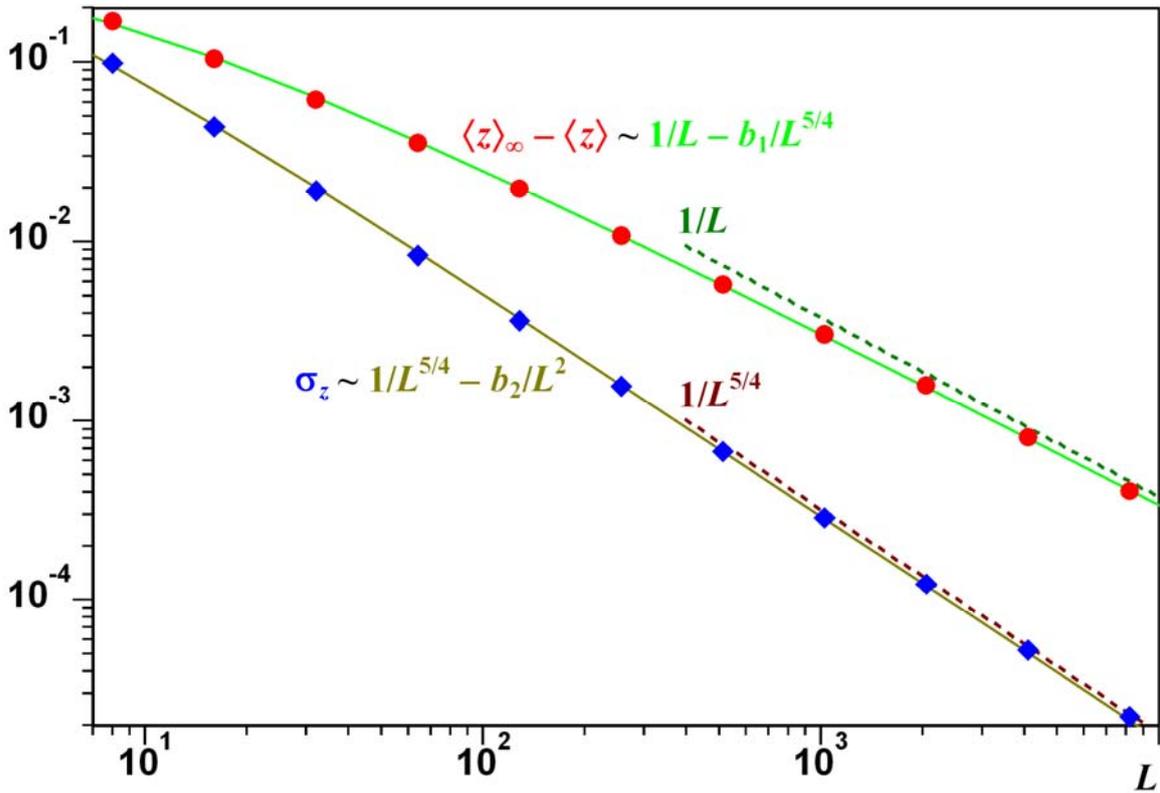


Рис. 11. Распределение среднего заполнения решетки

С ростом  $L$  несколько увеличивается  $\langle z \rangle$  при одновременном уменьшении  $\sigma_z$ .



**Рис. 12. Параметры распределения среднего заполнения решетки**

Отстройка математического ожидания от его значения для бесконечной системы и стандартное отклонение убывают как некоторые степени размера решетки (пунктирные линии).

При введении в зависимости аддитивной поправки экспериментальные данные удается приблизить почти точно (сплошные линии,  $b_1 \approx b_2 \approx 1,1$ ).

В случае стандартного отклонения поправочный член порядка  $1/L^2$  легко объясним. Он связан с событиями, не достигшими края решетки, в результате которых заполнение увеличивается как раз на эту величину.

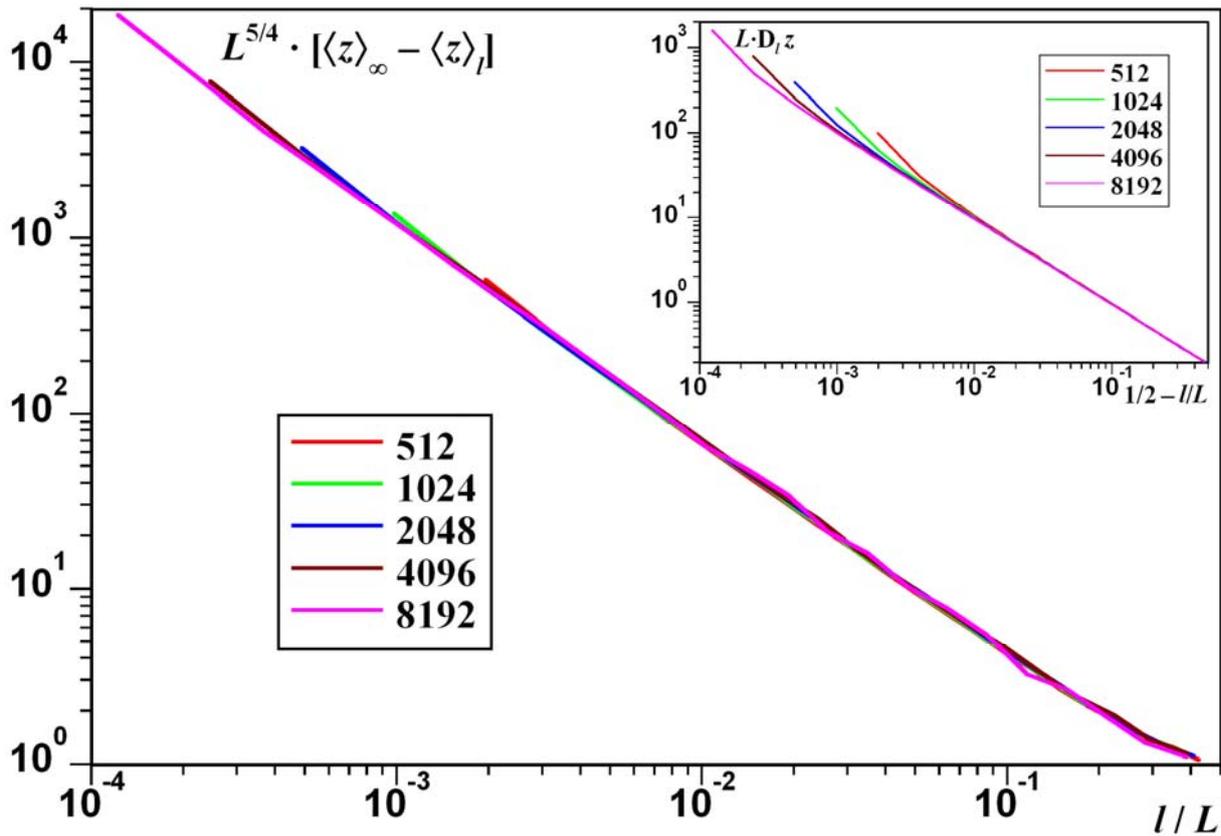
Чтобы понять природу поправки порядка  $1/L^{5/4}$  для математического ожидания, рассмотрим среднее заполнение ячеек, лежащих на заданном расстоянии  $l$  от края. Как можно видеть из рис. 13, для них *дефицит заполнения*

$$\langle z \rangle_\infty - \langle z \rangle_l \sim l^{-5/4}. \quad (30)$$

Интегрируя его с весом, равным числу таких ячеек, получаем искомое:

$$\langle z \rangle_\infty - \langle z \rangle = \frac{4}{L^2} \int_{l=1}^{L/2} (L+1-2l) \cdot (\langle z \rangle_\infty - \langle z \rangle_l) dl \sim \frac{1}{L} - \frac{b}{L^{5/4}} + O\left(\frac{1}{L^2}\right).$$

Происхождение формулы (30) связано с распространением в глубину решетки дефицита заполнения, который обусловлен падением песчинок за край. Будь там ячейки, последствия их опрокидывания возмещали бы этот дефицит. Следовательно, и его возникновение можно описать с помощью умозрительных *обратных лавин*, инициируемых добавлениями песчинок в краевые ячейки.



**Рис. 13. Заполнение ячеек решетки в зависимости от расстояния до ее края**

Среднее заполнение возрастает по мере удаления от края, стремясь к постоянному значению  $z_\infty$  по гиперболическому закону с показателем  $-5/4$ .

На врезке – дисперсия среднего заполнения. Она обратно пропорциональна расстоянию от центра решетки  $L/2 - l$ , которое определяет число ячеек, по которым проводится усреднение. Это позволяет предполагать общую некоррелированность состояния этих ячеек.

Для удобства рассмотрим такой промежуток времени – порядка  $L$  событий, – в течение которого из каждой краевой ячейки начиналась бы в среднем одна обратная лавина. При этом в каждом слое опрокидывания возмещался бы дефицит заполнения порядка  $1/w$ , где  $w \sim l^{1/4}$  – ширина слоя (ср. с формулой (11)).

Однако и без обратных лавин дефицит заполнения существует недолго – его устраняют опрокидывания в ходе обычных лавин. За время рассмотрения в каждой ячейке происходит в среднем  $N(l) \sim l$  опрокидываний, как следует из уравнения баланса  $2 \cdot N(l) = N(l-1) + N(l+1)$ . Поэтому доля времени, в течение которого сохраняется дефицит, составляет порядка  $1/l$ , что и дает формулу (30).

### Литература

1. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality// Phys. Rev. A. 1988. V.38, N1, p.364-374.
2. Bak P. How nature works: the science of self-organized criticality. – Springer-Verlag. New York, Inc. 1996. – 205 p.
3. Manna S.S. Two-state model of self-organized criticality// L. Phys. A: Math. Gen. 1991. V.24, p.L363–L639.
4. Ivashkevich E.V., Ktitarev D.V., Priezhev V.B. Waves of topplings in an Abelian Sandpile// Physica A. 1994. V.209, p.347-360.
5. Zhang Y-C. Scaling theory of self-organized criticality// Phys. Rev. Lett. 1989. V.63, N5, p.470-473.