



Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А.,
Тишкин В.Ф.

Исследование влияния
лимитера на порядок
точности решения
разрывным методом
Галеркина

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 34. 31 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-34>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

М.Е.Ладонкина, О.А.Неклюдова, В.Ф.Тишкин

**Исследование влияния лимитера на
порядок точности решения разрывным
методом Галеркина**

Москва — 2012

Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф.

Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина

Исследуется влияние различных лимитирующих функций на порядок точности решения разрывным методом Галеркина на задаче одномерной идеальной газовой динамики, в случае, когда решение представляет собой простую волну, параметры которой подобраны таким образом, чтобы обеспечить бесконечную гладкость начальных функций.

Ключевые слова: разрывный метод Галеркина, лимитеры, уравнения Эйлера

Marina Eugenievna Ladonkina, Olga Alexandrovna Neklyudova, Vladimir Fedorovich Tishkin

Research of the impact of different limiting functions on the order of solution obtained by RKDG

Research of the impact of different limiting functions on the order of solution obtained by RKDG is made on 1D ideal gas-dynamics problem. The solution is a simple wave with infinitely smooth initial conditions.

Key words: Discontinuous Galerkin methods, limiters, Euler equations

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 11-01-00444_а.

Оглавление

Введение	3
1. Описание разрывного метода Галеркина для уравнений Эйлера.....	3
2. Используемые лимитеры.....	7
3. Описание тестовой задачи	11
4. Описание и результаты расчетов.....	14
Выводы	17
Приложение	19
Список литературы	32

Введение

Для решения задач газовой динамики в настоящее время широко применяется метод Галеркина с разрывными базисными функциями, который характеризуется высоким порядком точности получаемого решения. Как известно, для обеспечения монотонности решения, полученного данным методом, необходимо вводить так называемые ограничители наклона, или лимитеры, в особенности в том случае, если решение содержит сильные разрывы. Однако применение лимитеров может отрицательно сказаться на точности получаемого решения. Исследованию такого влияния посвящена данная работа. Исследование проводится для уравнений одномерной идеальной газовой динамики, в случае когда решение представляет собой простую волну, параметры которой подобраны таким образом, чтобы обеспечить бесконечную гладкость начальных функций. Исследован порядок точности решения для различного вида лимитирующих функций.

1. Описание разрывного метода Галеркина для уравнений Эйлера

Мы будем рассматривать уравнения одномерной идеальной газовой динамики, которые можно записать в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix},$$

величины ρ , u , ε , p соответствуют плотности, скорости, удельной внутренней энергии и давлению газа, а $E = \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right)$ - полная энергия на единицу объема. Для определения давления p будем использовать уравнение состояния идеального газа:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (2)$$

где γ - показатель адиабаты.

Эти уравнения должны быть дополнены начальными и граничными условиями, вид которых зависит от конкретной задачи, и будут конкретизированы далее.

Для применения разрывного метода Галеркина покроем отрезок, на котором ищется решение, сеткой $0 = x_{1/2} \leq x_{3/2} \leq \dots \leq x_{N+1/2} = L$ с шагом $\Delta x_i = (x_{i+1/2} - x_{i-1/2})$.

На каждом интервале $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ приближенное решение системы уравнений (1) будем искать в виде проекции вектора консервативных переменных $U = (\rho, \rho u, E)$ на пространство полиномов $P(x)$ степени p в базисе $\{\phi_k(x)\}$ с зависящими от времени коэффициентами.

Будем рассматривать случаи представления решения в виде линейных $p = 1$ и квадратичных $p = 2$ полиномов, тогда решения будут иметь вид при $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$

$$\begin{aligned}\rho_h(x, t) &= \sum_{k=0}^p \rho_k(t) \phi_k(x), \\ \rho u_h(x, t) &= \sum_{k=0}^p \rho u_k(t) \phi_k(x), \\ E_h(x, t) &= \sum_{k=0}^p E_k(t) \phi_k(x),\end{aligned}\tag{3}$$

где p - степень полиномов, а $\phi_k(x)$ - соответствующая базисная функция.

Приближенное решение системы (1) в разрывном методе Галеркина ищется как решение следующей системы [1]:

$$\begin{aligned}\int_{I_i} \partial_t U_h(x, t) \cdot \phi_k(x) dx - \int_{I_i} F(U_h(x, t)) \partial_x \phi_k(x) dx + \\ + F_{i+1/2} \cdot \phi_k(x_{i+1/2}^l) - F_{i-1/2} \cdot \phi_k(x_{i-1/2}^r) = 0, \text{ где } i = 0, \dots, N, k = 0, 1, 2.\end{aligned}\tag{5}$$

В формуле (5) $U_h(x, t) = \begin{pmatrix} \rho_h(x, t) \\ \rho u_h(x, t) \\ E_h(x, t) \end{pmatrix}$ - вектор решения, $\phi_k(x_{i+1/2}^l), \phi_k(x_{i-1/2}^r)$ -

базисная функция с номером k на интервале I_i , вычисленная в точках $x_{i+1/2}$

$x_{i-1/2}$, а $F_{i+1/2}$, $F_{i-1/2}$ - дискретные потоки, являющиеся монотонными функциями двух переменных

$$F_{i+1/2} = \Phi(U_h(x_{i+1/2}^l, t), U_h(x_{i+1/2}^r, t))$$

$$F_{i-1/2} = \Phi(U_h(x_{i-1/2}^l, t), U_h(x_{i-1/2}^r, t)),$$

для которых выполнено условие согласования:

$$\Phi(U_h(x_i, t), U_h(x_i, t)) = F(U_h(x_i, t)).$$

В данной работе использовались потоки Русанова–Лакса–Фридрихса [2,3]

$$\Phi(U_h(x_{i+1/2}^l, t), U_h(x_{i+1/2}^r, t)) =$$

$$\frac{1}{2} \left(F(U_h(x_{i+1/2}^l, t)) + F(U_h(x_{i+1/2}^r, t)) - A \cdot (U_h(x_{i+1/2}^r, t) - U_h(x_{i+1/2}^l, t)) \right), \quad (6)$$

$$A = \max_i \left(|u_{i+1/2}^l| + c_{i+1/2}^l, |u_{i+1/2}^r| + c_{i+1/2}^r \right),$$

где $u_{i+1/2}$ - скорость, $c_{i+1/2}$ - скорость звука.

Дальнейшие рассуждения проведем для случая $p = 2$; случай $p = 1$ рассматривается аналогично.

Выберем систему базисных функций:

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = \frac{x - x_i}{\Delta x_i}, \quad \varphi_2 = \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right)^2, \quad (7)$$

где $x_i = \frac{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}}{2}$ - центр ячейки.

Систему (5) можно записать в виде:

$$\int_{I_i} \partial_t U_h(x, t) dx + F_{j+1/2} - F_{j-1/2} = 0$$

$$\int_{I_i} \partial_t U_h(x, t) \cdot \frac{x - x_i}{\Delta x_i} dx - \int_{I_i} F(U_h(x, t)) \frac{1}{\Delta x_i} dx + F_{j+1/2} \cdot \frac{1}{2} + F_{j-1/2} \cdot \frac{1}{2} = 0 \quad (8)$$

$$\int_{I_i} \partial_t U_h(x, t) \cdot \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right)^2 dx - \int_{I_i} F(U_h(x, t)) \frac{2(x - x_i)}{\Delta x_i^2} dx + F_{j+1/2} \cdot \frac{1}{4} - F_{j-1/2} \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Решив её, найдем коэффициенты для наших полиномов.

На каждом отрезке $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ начальные условия задачи представим в виде проекции вектора консервативных переменных $U = (\rho, \rho u, E)$ в начальный момент времени на пространство полиномов соответствующей степени, например, для $p = 2$.

$$U_0(x) = u_0 + u_1 \frac{x - x_i}{\Delta x_i} + u_2 \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right)^2 + r(x), \quad (9)$$

Где $u_0 = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho u_0 \\ E_0 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho u_1 \\ E_1 \end{pmatrix}$ и $u_2 = \begin{pmatrix} \rho_2 \\ \rho u_2 \\ E_2 \end{pmatrix}$ соответственно.

В этом случае коэффициенты разложения $U_0(x)$ определяются из условия ортогональности остаточного члена разложения $r(x)$ функциям $1, \frac{x - x_i}{\Delta x_i}, \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right)^2$ на каждом интервале $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$.

$$\begin{aligned} \int_{I_i} U_0(x) dx &= \int_{I_i} \left(u_0 + u_1 \frac{x - x_i}{\Delta x_i} + u_2 \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right)^2 \right) dx + \int_{I_i} r(x) dx \\ \int_{I_i} U_0(x) \frac{x - x_i}{\Delta x_i} dx &= \int_{I_i} \left(u_0 + u_1 \frac{x - x_i}{\Delta x_i} + u_2 \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right)^2 \right) \frac{x - x_i}{\Delta x_i} dx + \int_{I_i} r(x) \frac{x - x_i}{\Delta x_i} dx \\ \int_{I_i} U_0(x) \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right)^2 dx &= \int_{I_i} \left(u_0 + u_1 \frac{x - x_i}{\Delta x_i} + u_2 \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right)^2 \right) \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right)^2 dx + \int_{I_i} r(x) \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right)^2 dx \end{aligned}$$

Отсюда получаем систему уравнений для u_0, u_1, u_2 .

Для вычисления интегралов будем использовать квадратурные формулы Гаусса:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i),$$

где точки x_i определяются как корни полинома Лежандра

$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(x^2 - 1)^n]}{dx^n}$. Коэффициенты квадратурной формулы Гаусса

вычисляются по формулам: $c_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)(P_n'(x_i))^2}$.

В случае вычисления интеграла по некоторому отрезку $[a;b]$, т.е. $\int_a^b f(x)dx$

, необходимо сделать замену вида: $t = \frac{b-a}{2} \cdot x + \frac{a+b}{2}$. В этом случае получаем:

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2} \cdot \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2} \cdot x + \frac{a+b}{2}\right)dx.$$

В вычислениях мы использовали шаблон из трех точек.

2. Используемые лимитеры

Прямое использование формул (5) для расчета решений, содержащих разрывы, не приводит к хорошим результатам из-за возникновения осцилляций в окрестностях разрывов. Для устойчивого счета в разрывном методе Галеркина используются специальные ограничители.

Ограничитель (лимитер) представляет собой некоторый оператор, действующий на функцию приближенного решения на каждом интервале $x_{i-1/2}, x_{i+1/2}$. Будем, согласно [1], обозначать действие этого оператора на функцию u через $\Lambda\Pi_h u$.

Первый тип ограничителя, который мы рассмотрим в данной работе, - это ограничитель Кокбурна, подробно описанный в работах [1,4].

Для линейной функции $u = u_0 + u_1 \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right)$ действие лимитирующего оператора можно записать как

$$\Lambda\Pi_h u = u_0 + \tilde{u}_1 \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right), \quad (10)$$

$$\tilde{u}_1 = 2 \cdot \min \text{mod} \left(u(x_{i+1/2}) - u_{0i}, \alpha \cdot (\bar{u}_{i+1/2} - u_{0i}), \alpha \cdot (u_{0i} - \bar{u}_{i-1/2}) \right), \quad (11)$$

где u_0 - среднее интегральное значение приближенного решения на интервале I_j , а

$$\bar{u}_{i+1/2} = \frac{u_{0i+1} + u_{0i}}{2}, \quad \bar{u}_{i-1/2} = \frac{u_{0i-1} + u_{0i}}{2} \quad \text{[A.C.1]},$$

$$\min \text{mod}(a_1, \dots, a_N) = \begin{cases} s \cdot \min(|a_1|, \dots, |a_N|), & \text{а́ñе́ } s = \text{sign}(a_1) = \dots = \text{sign}(a_N), \\ 0, & \text{е́и } \text{а́ } \neq \text{а́}. \end{cases} \quad (12)$$

В качестве второго варианта лимитера будем применять лимитер Колгана, где вместо функции $\min mod$ (12) используется функция $\min mod K$ - [4].

$$\tilde{u}_1 = 2 \cdot \min mod K \left(u(x_{i+1/2}) - u_{0i}, \alpha \cdot (\bar{u}_{i+1/2} - u_{0i}), \alpha \cdot (u_{0i} - \bar{u}_{i-1/2}) \right) \quad (13)$$

$$\min mod K(a_1, \dots, a_N) = \text{sign}(a_1) \cdot \min(|a_1|, \dots, |a_N|). \quad (14)$$

Ограничитель, использующий функцию $\min mod K$, обозначим через $\Lambda \Pi_h^K$.

Для применения лимитера Кокбурна, в случае когда порядок полинома $p > 1$, спроецируем функцию u на пространство линейных полиномов. Обозначим данную проекцию через

$$u^l = u_0^l + u_1^l \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right), \quad (15)$$

где $u_0^l = u_0 + \frac{u_2}{12}$ - среднее интегральное значение приближенного решения на интервале I_i для $p = 2$.

Далее, после применения лимитера

$$\Lambda \Pi_h u^l = \tilde{u}_0^l + \tilde{u}_1^l \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right) \quad (16)$$

сравним величины \tilde{u}_1^l и u_1^l и в случае, если они равны, исходная функция после действия лимитера не изменится:

$$\Lambda \Pi_h u^l = u(x) = u_0 + u_1 \frac{x - x_i}{\Delta x_i} + u_2 \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right)^2, \quad (17)$$

в противном случае результатом действия лимитера будет функция

$$\Lambda \Pi_h u^l = \tilde{u}_0^l + \tilde{u}_1^l \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right). \quad (18)$$

При ограничении функции, представляющей собой полином второго порядка и выше, лимитером Колгана необходимо следовать алгоритму, описанному выше (15)-(18), с той лишь разницей, что вместо функции $\min mod$ (12) используется функция $\min mod K$ (14).

При применении данных лимитеров важную роль играет выбор параметра $1 \leq \alpha \leq 2$. При $\alpha = 1$ получаем наиболее «жесткий» ограничитель,

обеспечивающий монотонность решения, при $\alpha=2$ -«менее строгий» ограничитель $\Lambda\Pi_h$.

Следующим типом лимитера, который исследуется в данной работе, является «моментный» лимитер, описанный Л. Кривоносовой в работе [5]. Данный лимитер характеризуется тем, что сохраняет максимально возможный порядок схемы.

Для применения данного лимитера перейдем к ортогональной системе функций, а именно к системе Лежандра. В нашем случае функция $u(x)$ преобразуется к виду

$$u(x) = \tilde{u}_0 + \tilde{u}_1 \left(2 \frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right) + \tilde{u}_2 \left(6 \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right)^2 - \frac{1}{2} \right), \quad (19)$$

где $\tilde{u}_0 = \left(u_0 + \frac{u_2}{12} \right)$, $\tilde{u}_1 = \frac{u_1}{2}$, $\tilde{u}_2 = \frac{u_2}{6}$.

Основная идея метода заключается в том, что решение лимитируется путем лимитирования его коэффициентов. Коэффициент \tilde{u}_k^i соответствует k -ой производной решения, и он сравнивается с альтернативной аппроксимацией k -ой производной через правую и левую разности $(k-1)$ -ой производной.

Начиная со старших коэффициентов $k=p$, заменим \tilde{u}_k^i на

$$\tilde{u}_k^i = \min \text{mod} \left(\tilde{u}_k^i, \alpha_k \left(\tilde{u}_{k-1}^{i+1} - \tilde{u}_{k-1}^i \right), \alpha_k \left(\tilde{u}_{k-1}^i - \tilde{u}_{k-1}^{i-1} \right) \right). \quad (20)$$

Лимитер срабатывает в случае, когда $\tilde{u}_k^i \neq \tilde{u}_k^i$. В случае $\tilde{u}_k^i = \tilde{u}_k^i$ лимитирование прекращается, иначе лимитируется коэффициент \tilde{u}_{k-1}^i , продолжая до тех пор, пока либо $k=1$, либо выполнится условие $\tilde{u}_k^i = \tilde{u}_k^i$.

В лимитере (20) присутствует параметр α_k , значение которого зависит от порядка коэффициента k . В работе [5] показано, что диапазон изменения параметра α_k ограничен снизу числом $\frac{1}{2(2k-1)}$.

Следует заметить, что в случае $p=1$ лимитер полностью совпадает с *min mod* лимитером.

В случае нескольких пространственных переменных и при использовании неструктурированных сеток построение ортогонального базиса часто оказывается затруднительным. В связи с этим в данной работе «моментный» лимитер (20) применялся и к коэффициентам (u_0^i, u_1^i, u_2^i) решения, построенного на неортогональной системе базисных функций (7). В этом случае u_0^i не является средним интегральным значением приближенного

решения на интервале I_i , поэтому, для сохранения свойства консервативности лимитера, необходимо пересчитать коэффициент \tilde{u}_0^i после лимитирования

$$\tilde{u}_0^i = u_0^i - \frac{6 \cdot (\tilde{u}_2^i - \tilde{u}_1^i)}{12}. \quad (21)$$

Замечание 1. В случае нелинейных систем следует применять лимитер к характеристическим переменным.

В случае использования лимитера Кокбурна:

$$\left(L\tilde{u}_1 \right)_j = 2 \cdot \min \text{mod} \left(\left(L(u(x_{i+1/2}) - u_{0i}) \right)_j, \alpha \cdot \left(L(\bar{u}_{i+1/2} - u_{0i}) \right)_j, \alpha \cdot \left(L(u_{0i} - \bar{u}_{i-1/2}) \right)_j \right),$$

и в случае использования моментного лимитера:

$$\left(L\tilde{u}_k^i \right)_j = \min \text{mod} \left(\left(L\tilde{u}_k^i \right)_j, \alpha_k \left(L(\tilde{u}_{k-1}^{i+1} - \tilde{u}_{k-1}^i) \right)_j, \alpha_k \left(L(\tilde{u}_{k-1}^i - \tilde{u}_{k-1}^{i-1}) \right)_j \right), \quad j = 1, 2, 3,$$

где L - матрица левых собственных векторов Якобиана системы (1), вычисленная в центральной точке интервала I_i , j -номер уравнения в системе.

После лимитирования возвращаемся к исходным консервативным переменным (3), умножая результаты лимитирования на матрицу, составленную из правых собственных векторов Якобиана системы (1) $\tilde{u}_1 = L^{-1} \left(L\tilde{u}_1 \right)$.

Замечание 2. Для методов высокого порядка точности необходимо использовать схемы высокого порядка по времени. Мы использовали схему Рунге-Кутты третьего порядка [1].

$$\begin{aligned} U^* &= \Lambda \Pi_h \left\{ U^n + \Delta t L(U^n) \right\} \\ U^{**} &= \Lambda \Pi_h \left\{ \frac{3}{4} U^n + \frac{1}{4} U^* + \frac{1}{4} \Delta t L(U^*) \right\} \\ U^{n+1} &= \Lambda \Pi_h \left\{ \frac{1}{3} U^n + \frac{2}{3} U^{**} + \frac{2}{3} \Delta t L(U^{**}) \right\}. \end{aligned}$$

3. Описание тестовой задачи

В качестве тестовой задачи, на которой мы будем исследовать порядки точности метода, будем использовать простую волну, в которой энтропия $\frac{p}{\rho^\gamma}$ и инвариант Римана $R^+ = u + \frac{2}{\gamma-1}c$ являются постоянными.

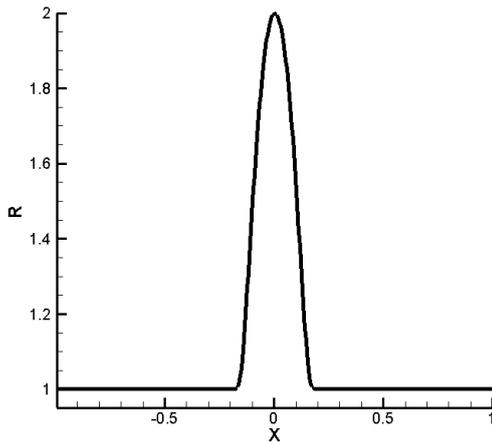
Распределение плотности в начальный момент выберем в виде бесконечно гладкой функции:

$$\rho = \begin{cases} 1 + e^{2-2\frac{l^2}{l^2-x^2}}, & |x| < l, \\ 1, & \text{elsewhere} \end{cases}, \quad x \in [-1, 1], \quad l = 0.2, \quad \gamma = 5/3. \quad (22)$$

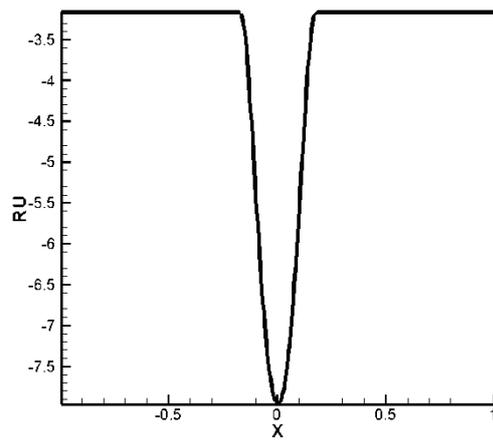
Остальные гидродинамические параметры определяются из условий постоянства энтропии и инварианта R^+

$$\varepsilon = \rho^{(\gamma-1)}, \quad u = \frac{-2\sqrt{\varepsilon(\gamma-1)\gamma}}{\gamma-1}, \quad E = \rho\varepsilon + \rho\frac{u^2}{2}. \quad (23)$$

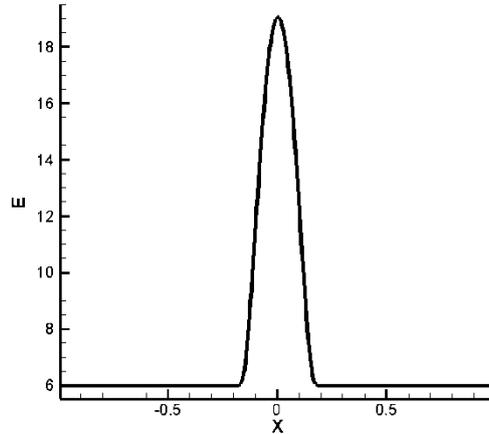
На рисунках 1.а-1.в представлены начальные профили плотности, импульса и энергии:



1.а



1.б



1.б

Рис. 1. Начальные профили а) плотности, б) импульса и в) энергии

Семейство характеристик, на которых инварианты R^- постоянны, в простой волне является прямыми линиями [7,8], и это дает возможность записать решение в неявном виде.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(x - t \cdot (u(x,t) - c(x,t)), 0) = u_0(x - t \cdot (u_0(x_0) - c_0(x_0))), \\ c(x,t) &= c(x - t \cdot (u(x,t) - c(x,t)), 0) = c_0(x - t \cdot (u_0(x_0) - c_0(x_0))), \end{aligned} \quad (24)$$

$$x_0 = x - t(u(x_0) - c(x_0)),$$

$$\rho(x,t) = \left(\frac{c(x,t)^2}{\gamma(\gamma-1)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

где $c(x,t)$ – скорость звука.

Решение данной задачи сохраняет гладкость до того момента времени, пока характеристики, выпущенные из разных точек, не начнут пересекаться. Вычислим момент времени, когда пересекаются две характеристики, выпущенные из точек x_0 и $x_0 + dx$.

Уравнения этих характеристик имеют вид соответственно:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t(u(x_0, 0) - c(x_0, 0)) \\ x &= x_0 + dx + t(u(x_0 + dx, 0) - c(x_0 + dx, 0)). \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$t = \frac{-dx}{u(x_0 + dx, 0) - c(x_0 + dx, 0) - u(x_0, 0) + c(x_0, 0)} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial(u-c)}{\partial x}\right)_{\xi}}, \quad x_0 \leq \xi \leq x_0 + dx.$$

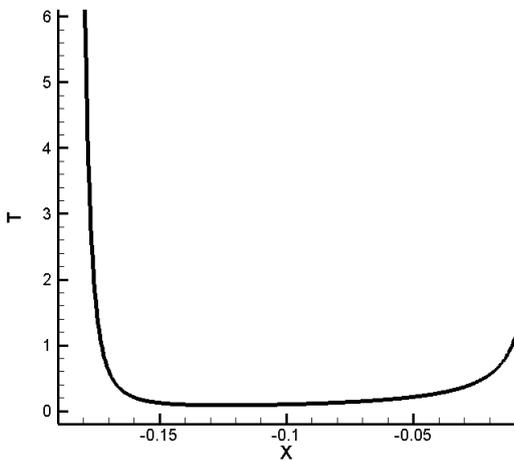
Далее, учитывая (23), находим

$$t = \frac{-(l^2 - \xi^2)^2}{2l^2 \xi (\gamma + 1) \gamma^{1/2} (\gamma - 1)^{1/2} \rho^{\frac{\gamma-3}{2}}(\xi) (\rho(\xi) - 1)}. \quad (25)$$

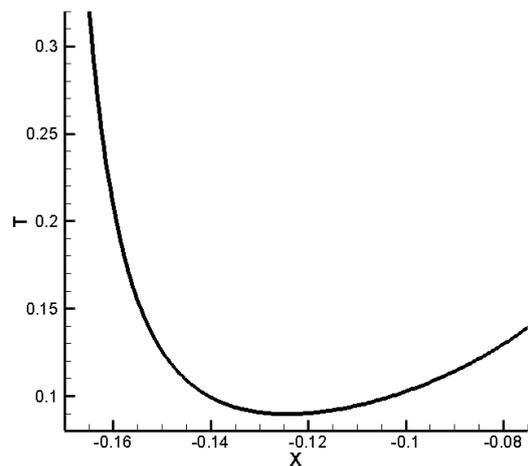
Для $\gamma = \frac{5}{3}$ формула (25) принимает вид

$$t = \frac{-9\rho^{2/3}(\xi)(l^2 - \xi^2)^2}{16\sqrt{10}\xi l^2 (\rho(\xi) - 1)}. \quad (26)$$

Определение минимального значения времени, когда происходит пересечение характеристик, проведем через численное исследование, построив график функции (26). На рисунке 2.а представлен полученный график, на рисунке 2.б - область экстремума изображена крупнее. Из графика видно, что момент образования ударной волны приблизительно равен $T = 0.09$.



2.а



2.б

Рис. 2. Время пересечения соседних характеристик

Теперь вычислим точное решение задачи (22-23) в момент времени t методом деления отрезка пополам. Для этого для каждого $x_i = i \cdot h_x$, $i = 0, N$, где h_x - шаг сетки по пространству, определим

$$\tilde{x} = x_0 + t \cdot (u(x_0, 0) - c(x_0, 0)), \quad (27)$$

такое, что $|\tilde{x} - x_i| < \varepsilon$ по следующему алгоритму:

Если $x_i < -l + t \cdot A$ или $x_i > l + t \cdot A$,

$$\text{где } A = u(x, t) - c(x, t) = -\frac{2 \cdot c(x, t)}{\gamma - 1} - \sqrt{\gamma(\gamma - 1)} (\rho(x, t))^{\frac{\gamma - 1}{2}} = -4 \frac{\sqrt{10}}{3}$$

то можно сразу положить $\rho(x_i, t) = \rho(l, t)$, $u(x_i, t) = u(l, t)$, $c(x_i, t) = c(l, t)$.

Иначе

1. $x_r^{(0)} = x_{0r} = l$, $x_l^{(0)} = x_{0l} = -l$, $x_0^{(0)} = \frac{x_{0r} + x_{0l}}{2}$, $k=0$.

2. Вычислим $\tilde{x}^{(k)}$ по формуле (27).

$$\text{Если } |\tilde{x}^{(k)} - x_i| < \varepsilon, \text{ то } \rho(x_i, t) = \rho(x_0^{(k)}, 0).$$

Иначе выполняем шаги 3- 5.

3. Если $\tilde{x}^{(k)} < x_i$,

$$\text{то } x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)}, \quad x_l^{(k+1)} = x_0^{(k)}, \quad \tilde{x}_0^{(k+1)} = \frac{x_r^{(k+1)} + x_l^{(k+1)}}{2}$$

4. Если $\tilde{x}^{(k)} > x_i$,

$$\text{то } x_r^{(k+1)} = x_0^{(k)}, \quad x_l^{(k+1)} = x_l^{(k)}, \quad \tilde{x}_0^{(k+1)} = \frac{x_r^{(k+1)} + x_l^{(k+1)}}{2}$$

5. $k=k+1$, переходим к шагу 2.

4. Описание и результаты расчетов.

Численное решение задачи (22-23) было получено разрывным методом Галеркина с линейными и квадратичными базисными функциями. На границах области были заданы постоянные граничные условия:

$$\begin{aligned} \rho(-1, t) = 1, \quad u(-1, t) = -\sqrt{10}, \quad E(-1, t) = 6, \\ \rho(1, t) = 1, \quad u(1, t) = -\sqrt{10}, \quad E(1, t) = 6. \end{aligned} \tag{28}$$

Проведены серии расчетов:

- с классическим лимитером Кокбурна, использующим функцию *minmod* (10-12, 15-18); результаты представлены в *Таблицах 2.1-2.3*;

- с лимитерами Кокбурна, использующим функцию Колгана *minmodK* (10,13-18); результаты представлены в *Таблицах 3.1-3.3*;

- с «моментным» лимитером Криводоновой (19, 20) - *Таблицы 4.1-4.3*,

- с «моментным» лимитером, примененным к коэффициентам решения, разложенным по неортогональному базису (7, 20, 21), - Таблицы 5.1-5.3.

Расчеты выполнены на сетках с 500, 1000, 2000 и 4000 ячейками с временным шагом $\Delta T = 1 \cdot 10^{-5}$.

Определены порядки точности исследуемого метода в нормах L^1 , L^2 и L^4 .

$$\|U^* - U^T\|_{L^1} = \int_{-1}^1 |U^* - U^T| dx$$

$$\|U^* - U^T\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-1}^1 (U^* - U^T)^2 dx}$$

$$\|U^* - U^T\|_{L^4} = \left(\int_{-1}^1 (U^* - U^T)^4 dx \right)^{1/4}$$

на моменты времени $T = 0.05$ и $T = 0.07$ (рисунок [А.С.2]3). Вычисления интегралов проводились по квадратурным формулам Гаусса с пятиточечным шаблоном.

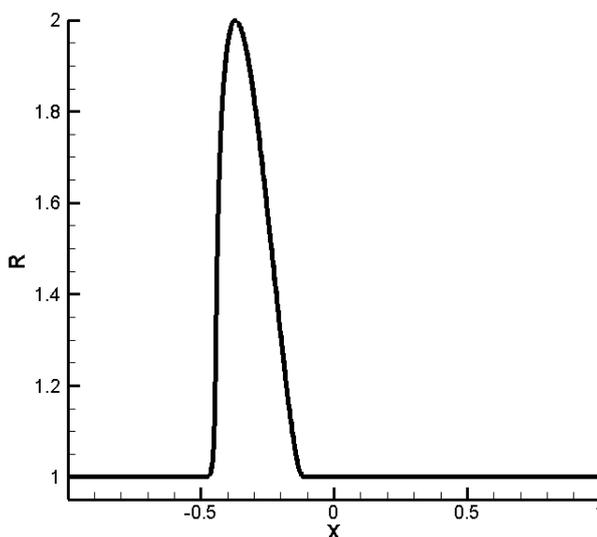


Рис.3. Профиль плотности на момент времени $T=0.07$

В таблицах 1 - 5 представлены результаты серии вычислительных экспериментов для квадратичных и линейных полиномов. Численные результаты хорошо согласуются с теоретическими.

Без использования лимитеров (Табл. 1а) решение, представленное в виде линейных полиномов, имеет второй порядок точности, в виде квадратичных – третий.

Далее рассмотрим решение, полученное при использовании лимитера Кокбурна (Табл. 2.1 - 2.3). Как известно, при использовании лимитеров сильное влияние на точность решения оказывает выбор параметра лимитирования, обозначенный для данного лимитера через α . Так, при значении параметра $\alpha=2$ (Табл. 2.1) получаем так называемый «слабый лимитер», который при использовании линейных полиномов практически всегда показывает порядок, равный 2 выше во всех рассмотренных нормах. Эти результаты практически совпадают с результатами расчетов без использования лимитеров. Однако решение, полученное с использованием квадратичных полиномов, также показывает порядок точности, равный 1.90 – 2.20, что на один порядок ниже, чем без использования лимитера. При уменьшении значения параметра $\alpha=1,5$ (Табл. 2.2) порядки точности решений, полученных с использованием как линейных, так и квадратичных функций, совпадают между собой и практически во всех расчетах равны 2 и выше. Некоторым исключением являются расчеты на момент времени $T=0.05$, порядки точности решения в норме L^4 равны 1.76 – 1.81. При использовании самых «жестких условий» (Табл. 2.3) при $\alpha=1$, когда сказывается наибольшее влияние соседних ячеек, точность решения самая низкая. Решение, полученное при использовании линейных полиномов, показывает порядок ниже 2, в то время как в норме L^1 порядок точности находится в диапазоне 1.79 -1.95, а в норме L^4 порядок точности находится в диапазоне 1.44 - 1.81. Следует отметить, что точность решения при использовании и линейных полиномов, и квадратичных полиномов, так же как и при иных значениях параметра α , в соответствующих нормах практически совпадает. Таким образом, можно утверждать, что использование этого лимитера не позволяет получить высокие порядки точности.

При сравнении классического лимитера Кокбурна, который при изменении знака производной автоматически понижает порядок решения до первого, и лимитера Кокбурна, использующего функцию Колгана $minmodK$, можно сказать, что они при решении данной задачи показали практически одинаковый результат (Табл. 2.1-2.3 и Табл. 3.1-3.3). Это позволяет утверждать, что в подобного рода задачах изменение функции $minmod$ на более слабую $minmodK$ не приводит к повышению точности.

Далее в таблицах 4.1-4.3 представлены результаты расчетов с использованием «моментного» лимитера Криводоновой, где α_i - параметры лимитирования, i - соответствующая степень коэффициента. При выборе параметров $\alpha_1=1, \alpha_2=1$ (Табл. 4.1) получаем один из вариантов «слабого лимитера», который при использовании линейных полиномов практически

всегда дает порядок 2 и выше в норме L^1 и в норме L^2 , и порядок чуть ниже 2 (1.78-1.81) в норме L^4 . В отличие от лимитера Кокбурна, данный лимитер при использовании квадратичных полиномов показывает порядки точности 3 и выше (Табл.4.1а -4.1б), что практически совпадает с результатами расчетов без использования лимитеров.

При уменьшении значений параметров до $\alpha_1=1/2$ и $\alpha_2=1/6$ получаем вариант с самыми «жесткими» условиями лимитирования (Табл. 4.3). Точность решения, полученного с использованием линейных полиномов, мало отличается от точности решения, полученного с использованием квадратичных полиномов в соответствующих нормах, и показывает порядок ниже 2. Так, в норме L^1 порядок точности находится в диапазоне 1.79 -1.95, в норме L^2 - 1.65-1.84, а в норме L^4 порядок точности находится в диапазоне 1.44 - 1.73. Причем порядки точности решения для $p=2$ несколько ниже, чем для $p=1$. Таким образом, для сохранения высокого порядка точности следует использовать «моментный» лимитер с параметрами $\alpha_1=1, \alpha_2=1$.

В таблицах 5.1-5.3 представлены результаты исследования возможности применения «моментного» лимитера к коэффициентам решения, построенного [А.С.З] на неортогональной системе функций. Результаты соответствующих расчетов (Таб.4.1-4.3 и Таб.5.1-5.3) в большинстве случаев совпадают, что подтверждает возможность и такого использования «моментного» лимитера.

Следует отметить, что для линейных полиномов, при соответствующем выборе параметров $\alpha=2\alpha_1$, лимитеры Кокбурна и Криводоновой совпадают (Табл. 2.1 и Табл. 4.1, Табл. 2.3 и Табл. 4.3).

В ряде расчетов порядок точности решения в соответствующих нормах возрастает с $T=0.05$ к $T=0.07$. Например, в Табл.3.1а и Табл.3.1б. Но, так как ошибка вычисления при этом увеличивается, можно утверждать, что скорость сближения численного решения на различных сетках между собой со временем возрастает, что влечет за собой увеличение в значениях порядков точности.

Выводы

При численном решении задач разрывным методом Галеркина с использованием линейных базисных функций при соответствующем выборе параметра лимитер Кокбурна и «моментный» лимитер совпадают и показывают порядок точности 1.5-2.2 на гладких решениях. Но при решении на квадратичных полиномах лимитер Кокбурна не дает порядок точности выше второго, в то время как «моментный» лимитер при определенном выборе параметров показывает порядок, равный 3 и выше. Для сохранения высокого порядка точности на гладких решениях разрывным методом Галеркина

необходимо применять «моментный» лимитер с соответствующими значениями констант α_1 и α_2 .

Приложение

Таблица 1а

Без лимитера					Г = 0.05
L^1	N	p = 1		p = 2	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	5.92e - 05		1.06e - 06	
	1000	1.27e - 05	2.23	1.29e - 07	3.04
	2000	2.97e - 06	2.09	1.58e - 08	3.02
	4000	7.21e - 07	2.04	1.97e - 09	3.01
L^2	500	1.36e - 04		3.72e - 06	
	1000	2.92e - 05	2.22	4.52e - 07	3.04
	2000	6.92e - 06	2.08	5.57e - 08	3.02
	4000	1.71e - 06	2.02	6.91e - 09	3.01
L^4	500	4.29e - 04		1.54e - 05	
	1000	9.30e - 05	2.21	1.92e - 06	3.00
	2000	2.34e - 05	1.99	2.37e - 07	3.02
	4000	6.01e - 06	1.96	2.97e - 08	3.00

Таблица 1б

Без лимитера					Г = 0.07
L^1	N	p = 1		p = 2	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	1.69e - 04		7.46e - 06	
	1000	3.13e - 05	2.43	6.99e - 07	3.42
	2000	6.15e - 06	2.35	7.61e - 08	3.20
	4000	1.34e - 06	2.20	9.37e - 09	3.02
L^2	500	7.03e - 04		4.49e - 05	
	1000	1.44e - 04	2.28	4.46e - 06	3.33
	2000	2.67e - 05	2.43	4.98e - 07	3.16
	4000	5.45e - 06	2.30	6.10e - 08	3.03
L^4	500	2.77e - 03		2.04e - 04	
	1000	6.19e - 04	2.16	2.19e - 05	3.22
	2000	1.14e - 04	2.45	2.84e - 06	2.95
	4000	2.25e - 05	2.33	3.57e - 07	2.99

Таблица 2.1а

Лимитер Кокбурна					T = 0.05
L^1	N	$p = 1 \quad \alpha = 2$		$p = 2$	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	1.36e - 04		1.39e - 04	
	1000	3.23e - 05	2.07	3.28e - 05	2.08
	2000	7.78e - 06	2.05	7.66e - 06	2.10
	4000	1.89e - 06	2.04	1.83e - 06	2.06
L^2	500	2.92e - 04		2.92e - 04	
	1000	7.10e - 05	2.04	7.24e - 05	2.01
	2000	1.74e - 05	2.03	1.72e - 05	2.07
	4000	4.28e - 06	2.03	4.19e - 06	2.04
L^4	500	7.90e - 04		7.83e - 04	
	1000	2.04e - 04	1.95	2.09e - 04	1.90
	2000	5.39e - 05	1.92	5.39e - 05	1.95
	4000	1.44e - 05	1.90	1.45e - 05	1.90

Таблица 2.1б

Лимитер Кокбурна					T = 0.07
L^1	N	$p = 1 \quad \alpha = 2$		$p = 2$	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	2.40e - 04		2.45e - 04	
	1000	5.36e - 05	2.16	5.38e - 05	2.19
	2000	1.21e - 05	2.15	1.18e - 05	2.19
	4000	2.89e - 06	2.06	2.76e - 06	2.10
L^2	500	8.14e - 04		8.13e - 04	
	1000	1.86e - 04	2.13	1.84e - 04	2.14
	2000	4.03e - 05	2.21	3.94e - 05	2.23
	4000	9.13e - 06	2.14	8.72e - 06	2.18
L^4	500	3.23e - 03		3.21e - 03	
	1000	7.95e - 04	2.02	7.88e - 04	2.03
	2000	1.71e - 04	2.22	1.68e - 04	2.23
	4000	3.67e - 05	2.22	3.61e - 05	2.22

Таблица 2.2а

Лимитер Кокбурна					T = 0.05
L^1	N	$p = 1 \quad \alpha = 1.5$		$p = 2$	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	2.11e - 04		2.10e - 04	
	1000	4.59e - 05	2.20	4.55e - 05	2.21
	2000	1.05e - 05	2.13	1.04e - 05	2.14
	4000	2.42e - 06	2.12	2.36e - 06	2.13
L^2	500	4.71e - 04		4.70e - 04	
	1000	1.19e - 04	1.99	1.19e - 04	1.98
	2000	3.01e - 05	1.98	3.00e - 05	1.99
	4000	7.52e - 06	2.00	7.46e - 06	2.01
L^4	500	1.24e - 03		1.25e - 03	
	1000	3.63e - 04	1.78	3.68e - 04	1.76
	2000	1.05e - 04	1.78	1.05e - 04	1.81
	4000	3.01e - 05	1.81	3.01e - 05	1.81

Таблица 2.2б

Лимитер Кокбурна					T = 0.07
L^1	N	$p = 1 \quad \alpha = 1.5$		$p = 2$	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	3.37e - 04		3.36e - 04	
	1000	7.06e - 05	2.26	7.01e - 05	2.26
	2000	1.54e - 05	2.19	1.51e - 05	2.21
	4000	3.54e - 06	2.13	3.40e - 06	2.15
L^2	500	9.33e - 04		9.30e - 04	
	1000	2.19e - 04	2.09	2.18e - 04	2.09
	2000	4.99e - 05	2.14	4.91e - 05	2.15
	4000	1.17e - 05	2.09	1.14e - 05	2.11
L^4	500	3.25e - 03		3.25e - 03	
	1000	8.10e - 04	2.01	8.04e - 04	2.01
	2000	1.81e - 04	2.16	1.79e - 04	2.17
	4000	4.25e - 05	2.09	4.21e - 05	2.09

Таблица 2.3а

Лимитер Кокбурна					T = 0.05
L^1	N	$p = 1 \quad \alpha = 1$		$p = 2$	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	1.31e - 03		1.31e - 03	
	1000	3.78e - 04	1.79	3.78e - 04	1.79
	2000	1.02e - 04	1.89	1.02e - 04	1.89
	4000	2.64e - 05	1.95	2.64e - 05	1.95
L^2	500	2.22e - 03		2.22e - 03	
	1000	6.79e - 04	1.71	6.79e - 04	1.71
	2000	1.94e - 04	1.81	1.94e - 04	1.81
	4000	5.41e - 05	1.84	5.41e - 05	1.84
L^4	500	5.01e - 03		5.01e - 03	
	1000	1.59e - 03	1.65	1.59e - 03	1.65
	2000	4.80e - 04	1.73	4.80e - 04	1.73
	4000	1.51e - 04	1.67	1.51e - 04	1.67

Таблица 2.3б

Лимитер Кокбурна					T = 0.07
L^1	N	$p = 1 \quad \alpha = 1$		$p = 2$	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	2.52e - 03		2.52e - 03	
	1000	7.14e - 04	1.82	7.14e - 04	1.82
	2000	1.91e - 04	1.90	1.91e - 04	1.90
	4000	5.25e - 05	1.87	5.25e - 05	1.87
L^2	500	4.86e - 03		4.86e - 03	
	1000	1.52e - 03	1.68	1.52e - 03	1.68
	2000	4.63e - 04	1.71	4.63e - 04	1.71
	4000	1.47e - 04	1.65	1.47e - 04	1.65
L^4	500	1.32e - 02		1.32e - 02	
	1000	4.29e - 03	1.62	4.29e - 03	1.62
	2000	1.46e - 03	1.56	1.46e - 03	1.56
	4000	5.39e - 04	1.44	5.39e - 04	1.43

Таблица 3.1а

Лимитер Кокбурна– Колгана					Г = 0.05
L^1	N	$p = 1 \quad \alpha = 2.0$		$p = 2$	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	1.03e - 04		7.61e - 05	
	1000	2.13e - 05	2.27	1.65e - 05	2.21
	2000	4.59e - 06	2.22	4.11e - 06	2.00
	4000	1.02e - 06	2.18	6.23e - 07	2.72
L^2	500	2.44e - 04		2.22e - 04	
	1000	5.72e - 05	2.09	5.30e - 05	2.06
	2000	1.37e - 05	2.06	1.34e - 05	1.99
	4000	3.27e - 06	2.06	2.99e - 06	2.16
L^4	500	6.66e - 04		6.54e - 04	
	1000	1.81e - 04	1.88	1.82e - 04	1.85
	2000	4.96e - 05	1.87	5.06e - 05	1.84
	4000	1.35e - 05	1.88	1.39e - 05	1.86

Таблица 3.1б

Лимитер Кокбурна– Колгана					Г = 0.07
L^1	N	$p = 1 \quad \alpha = 2.0$		$p = 2$	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	2.22e - 04		1.01e - 04	
	1000	4.18e - 05	2.41	2.36e - 05	2.09
	2000	8.11e - 06	2.37	5.05e - 06	2.22
	4000	1.69e - 06	2.26	7.66e - 07	2.72
L^2	500	7.43e - 04		2.72e - 04	
	1000	1.56e - 04	2.26	7.27e - 05	1.90
	2000	3.01e - 05	2.37	1.76e - 05	2.04
	4000	6.33e - 06	2.25	3.55e - 06	2.31
L^4	500	2.77e - 03		7.70e - 04	
	1000	6.21e - 04	2.16	2.30e - 04	1.75
	2000	1.15e - 04	2.43	6.19e - 05	1.89
	4000	2.36e - 05	2.29	1.59e - 05	1.96

Таблица 3.2а

Лимитер Кокбурна – Колгана					Г = 0.05
L^1	N	$p = 1 \quad \alpha = 1.5$		$p = 2$	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	1.86e - 04		1.54e - 04	
	1000	3.58e - 05	2.38	3.11e - 05	2.31
	2000	7.38e - 06	2.28	6.97e - 06	2.16
	4000	1.56e - 06	2.24	1.51e - 06	2.20
L^2	500	4.46e - 04		4.28e - 04	
	1000	1.12e - 04	2.00	1.09e - 04	1.97
	2000	2.82e - 05	1.98	2.81e - 05	1.96
	4000	7.02e - 06	2.00	7.04e - 06	2.00
L^4	500	1.22e - 03		1.21e - 03	
	1000	3.59e - 04	1.76	3.60e - 04	1.75
	2000	1.05e - 04	1.78	1.05e - 04	1.78
	4000	3.00e - 05	1.81	3.00e - 05	1.80

Таблица 3.2б

Лимитер Кокбурна – Колгана					Г = 0.07
L^1	N	$p = 1 \quad \alpha = 1.5$		$p = 2$	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	3.27e - 04		2.02e - 04	
	1000	6.00e - 05	2.45	3.93e - 05	2.36
	2000	1.16e - 05	2.37	8.79e - 06	2.16
	4000	2.36e - 06	2.30	2.09e - 06	2.07
L^2	500	8.74e - 04		5.32e - 04	
	1000	1.94e - 04	2.17	1.34e - 04	1.99
	2000	4.21e - 05	2.21	3.48e - 05	1.94
	4000	9.69e - 06	2.12	9.13e - 06	1.93
L^4	500	2.82e - 03		1.47e - 03	
	1000	6.51e - 04	2.11	4.27e - 04	1.78
	2000	1.41e - 04	2.21	1.24e - 04	1.78
	4000	3.61e - 05	1.96	3.56e - 05	1.80

Таблица 3.3а

Лимитер Кокбурна – Колгана					Г = 0.05
L^1	N	$p = 1 \quad \alpha = 1$		$p = 2$	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	1.31e - 03		1.31e - 03	
	1000	3.76e - 04	1.80	3.76e - 04	1.80
	2000	1.01e - 04	1.89	1.01e - 04	1.89
	4000	2.62e - 05	1.95	2.63e - 05	1.95
L^2	500	2.24e - 03		2.24e - 03	
	1000	6.86e - 04	1.71	6.86e - 04	1.71
	2000	1.96e - 04	1.81	1.96e - 04	1.81
	4000	5.46e - 05	1.84	5.47e - 05	1.84
L^4	500	5.10e - 03		5.10e - 03	
	1000	1.64e - 03	1.64	1.63e - 03	1.64
	2000	4.89e - 04	1.74	4.89e - 04	1.74
	4000	1.52e - 04	1.68	1.52e - 04	1.68

Таблица 3.3б

Лимитер Кокбурна – Колгана					Г = 0.07
L^1	N	$p = 1 \quad \alpha = 1$		$p = 2$	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	2.57e - 03		2.57e - 03	
	1000	7.21e - 04	1.83	7.21e - 04	1.83
	2000	1.93e - 04	1.90	1.93e - 04	1.90
	4000	5.22e - 05	1.88	5.22e - 05	1.88
L^2	500	5.00e - 03		4.99e - 03	
	1000	1.54e - 03	1.70	1.54e - 03	1.70
	2000	4.67e - 04	1.72	4.67e - 04	1.72
	4000	1.49e - 04	1.65	1.49e - 04	1.65
L^4	500	1.36e - 02		1.36e - 02	
	1000	4.35e - 03	1.64	4.35e - 03	1.64
	2000	1.48e - 03	1.55	1.48e - 03	1.55
	4000	5.53e - 04	1.42	5.53e - 04	1.42

Таблица 4.1а

«Моментный» лимитер		T = 0.05			
		p = 1 α ₁ = 1.0		p = 2 α ₂ = 1.0	
L ¹	N	ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	1.36e - 04		3.69e - 06	
	1000	3.23e - 05	2.07	2.93e - 07	3.65
	2000	7.78e - 06	2.05	2.74e - 08	3.42
	4000	1.89e - 06	2.04	2.81e - 09	3.28
L ²	500	2.92e - 04		1.66e - 05	
	1000	7.10e - 05	2.04	1.73e - 06	3.27
	2000	1.74e - 05	2.03	1.73e - 07	3.32
	4000	4.28e - 06	2.03	1.74e - 08	3.32
L ⁴	500	7.90e - 04		6.64e - 05	
	1000	2.04e - 04	1.95	8.23e - 06	3.01
	2000	5.39e - 05	1.92	9.88e - 07	3.06
	4000	1.44e - 05	1.90	1.09e - 07	3.18

Таблица 4.1б

«Моментный» лимитер		T = 0.07			
		p = 1 α ₁ = 1.0		p = 2 α ₂ = 1.0	
L ¹	N	ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	2.40e - 04		3.12e - 05	
	1000	5.36e - 05	2.16	3.18e - 06	3.29
	2000	1.21e - 05	2.15	3.08e - 07	3.37
	4000	2.89e - 06	2.06	2.71e - 08	3.50
L ²	500	8.14e - 04		1.95e - 04	
	1000	1.86e - 04	2.13	2.63e - 05	2.89
	2000	4.03e - 05	2.21	3.25e - 06	3.02
	4000	9.13e - 06	2.14	3.56e - 07	3.19
L ⁴	500	3.22e - 03		8.13e - 04	
	1000	7.95e - 04	2.02	1.25e - 04	2.70
	2000	1.71e - 04	2.22	1.81e - 05	2.78
	4000	3.67e - 05	2.22	2.38e - 06	2.93

Таблица 4.2а

«Моментный» лимитер		T = 0.05			
		p = 1 $\alpha_1 = 3/4$		p = 2 $\alpha_2 = 7/12$	
L^1	N	ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	2.11e - 04		1.27e - 05	
	1000	4.59e - 05	2.20	6.06e - 07	4.39
	2000	1.05e - 05	2.13	3.45e - 08	4.13
	4000	2.42e - 06	2.12	3.21e - 09	3.43
L^2					
	500	4.71e - 04		4.67e - 05	
	1000	1.19e - 04	1.99	2.76e - 06	4.08
	2000	3.01e - 05	1.98	2.28e - 07	3.60
	4000	7.52e - 06	2.00	2.25e - 08	3.34
L^4					
	500	1.24e - 03		1.53e - 04	
	1000	3.63e - 04	1.78	1.08e - 05	3.83
	2000	1.05e - 04	1.78	1.27e - 06	3.09
	4000	3.01e - 05	1.81	1.42e - 07	3.16

Таблица 4.2б

«Моментный» лимитер		T = 0.07			
		p = 1 $\alpha_1 = 3/4$		p = 2 $\alpha_2 = 7/12$	
L^1	N	ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	3.37e - 04		4.59e - 05	
	1000	7.06e - 05	2.26	4.73e - 06	3.28
	2000	1.54e - 05	2.19	4.36e - 07	3.44
	4000	3.54e - 06	2.13	3.78e - 08	3.53
L^2					
	500	9.33e - 04		2.32e - 04	
	1000	2.19e - 04	2.09	3.68e - 05	2.66
	2000	4.99e - 05	2.14	4.63e - 06	2.99
	4000	1.17e - 05	2.09	5.22e - 07	3.15
L^4					
	500	3.26e - 03		9.36e - 04	
	1000	8.10e - 04	2.01	1.74e - 04	2.43
	2000	1.81e - 04	2.16	2.54e - 05	2.77
	4000	4.25e - 05	2.09	3.35e - 06	2.92

Таблица 4.3а

«Моментный» лимитер		T = 0.05			
		p = 1 α_1 = 1/2		p = 2 α_2 = 1/6	
L^1	N	ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	1.31e - 03		1.65e - 03	
	1000	3.78e - 04	1.79	4.66e - 04	1.82
	2000	1.02e - 04	1.89	1.26e - 04	1.89
	4000	2.64e - 05	1.95	3.28e - 05	1.94
L^2					
	500	2.23e - 03		2.91e - 03	
	1000	6.79e - 04	1.71	9.10e - 04	1.67
	2000	1.94e - 04	1.81	2.58e - 04	1.82
	4000	5.41e - 05	1.84	7.06e - 05	1.87
L^4					
	500	5.01e - 03		6.92e - 03	
	1000	1.59e - 03	1.65	2.30e - 03	1.59
	2000	4.80e - 04	1.73	6.59e - 04	1.80
	4000	1.51e - 04	1.67	1.89e - 04	1.81

Таблица 4.3б

«Моментный» лимитер		T = 0.07			
		p = 1 α_1 = 1/2		p = 2 α_2 = 1/6	
L^1	N	ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	2.52e - 03		3.06e - 03	
	1000	7.14e - 04	1.82	9.22e - 04	1.73
	2000	1.91e - 04	1.90	2.58e - 04	1.84
	4000	5.25e - 05	1.87	6.92e - 05	1.90
L^2					
	500	4.86e - 03		6.06e - 03	
	1000	1.52e - 03	1.68	2.12e - 03	1.51
	2000	4.63e - 04	1.71	6.87e - 04	1.63
	4000	1.47e - 04	1.65	2.18e - 04	1.66
L^4					
	500	1.32e - 02		1.61e - 02	
	1000	4.29e - 03	1.62	6.12e - 03	1.40
	2000	1.46e - 03	1.56	2.29e - 03	1.42
	4000	5.39e - 04	1.44	8.41e - 04	1.45

Таблица 5.1а

«Моментный» лимитер, неортогональный базис					T = 0.05	
L^1	N	$p = 1 \alpha_1 = 1$		$p = 2 \alpha_2 = 1$		
		ошибка	порядок	ошибка	порядок	
	500	1.36e - 04		5.85e - 06		
	1000	3.23e - 05	2.07	3.60e - 07	4.02	
	2000	7.78e - 06	2.05	2.79e - 08	3.69	
	4000	1.89e - 06	2.04	2.81e - 09	3.31	
L^2	500	2.92e - 04		2.13e - 05		
	1000	7.10e - 05	2.04	1.80e - 06	3.56	
	2000	1.74e - 05	2.03	1.73e - 07	3.37	
	4000	4.28e - 06	2.03	1.74e - 08	3.32	
L^4	500	7.90e - 04		7.06e - 05		
	1000	2.04e - 04	1.95	8.24e - 06	3.10	
	2000	5.39e - 05	1.92	9.88e - 07	3.06	
	4000	1.44e - 05	1.90	1.09e - 07	3.18	

Таблица 5.1б

«Моментный» лимитер, неортогональный базис					T = 0.07	
L^1	N	$p = 1 \alpha_1 = 1$		$p = 2 \alpha_2 = 1$		
		ошибка	порядок	ошибка	порядок	
	500	2.40e - 04		3.33e - 05		
	1000	5.36e - 05	2.16	3.25e - 06	3.36	
	2000	1.21e - 05	2.15	3.09e - 07	3.40	
	4000	2.89e - 06	2.06	2.71e - 08	3.51	
L^2	500	8.14e - 04		1.96e - 04		
	1000	1.86e - 04	2.13	2.63e - 05	2.89	
	2000	4.03e - 05	2.21	3.25e - 06	3.02	
	4000	9.13e - 06	2.14	3.56e - 07	3.19	
L^4	500	3.22e - 03		8.13e - 04		
	1000	7.95e - 04	2.02	1.25e - 04	2.71	
	2000	1.71e - 04	2.22	1.81e - 05	2.78	
	4000	3.67e - 05	2.22	2.38e - 06	2.93	

Таблица 5.2а

«Моментный» лимитер, неортогональный базис		T = 0.05			
		p = 1 $\alpha_1 = 3/4$		p = 2 $\alpha_2 = 7/12$	
L^1	N	ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	2.11e - 04		1.99e - 05	
	1000	4.59e - 05	2.20	1.57e - 06	3.67
	2000	1.05e - 05	2.13	5.57e - 08	4.81
	4000	2.42e - 06	2.12	3.30e - 09	4.08
L^2					
	500	4.71e - 04		7.18e - 05	
	1000	1.19e - 04	1.99	7.64e - 06	3.23
	2000	3.01e - 05	1.98	3.00e - 07	4.67
	4000	7.52e - 06	2.00	2.25e - 08	3.74
L^4					
	500	1.24e - 03		2.44e - 04	
	1000	3.63e - 04	1.78	3.01e - 05	3.02
	2000	1.05e - 04	1.78	1.37e - 06	4.46
	4000	3.01e - 05	1.81	1.42e - 07	3.27

Таблица 5.2б

«Моментный» лимитер, неортогональный базис		T = 0.07			
		p = 1 $\alpha_1 = 3/4$		p = 2 $\alpha_2 = 7/12$	
L^1	N	ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	3.37e - 04		6.04e - 05	
	1000	7.06e - 05	2.26	5.69e - 06	3.41
	2000	1.54e - 05	2.19	4.57e - 07	3.64
	4000	3.54e - 06	2.13	3.79e - 08	3.59
L^2					
	500	9.33e - 04		2.37e - 04	
	1000	2.19e - 04	2.09	3.75e - 05	2.66
	2000	4.99e - 05	2.14	4.64e - 06	3.01
	4000	1.17e - 05	2.09	5.22e - 07	3.15
L^4					
	500	3.26e - 03		8.36e - 04	
	1000	8.10e - 04	2.01	1.74e - 04	2.27
	2000	1.81e - 04	2.16	2.54e - 05	2.77
	4000	4.25e - 05	2.09	3.35e - 06	2.92

Таблица 5.3а

		«Моментный» лимитер, неортогональный базис $\Gamma = 0.05$			
		$p = 1 \alpha_1 = 1/2$		$p = 2 \alpha_2 = 1/6$	
L^1	N	ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	1.31e - 03		1.66e - 03	
	1000	3.78e - 04	1.79	4.71e - 04	1.82
	2000	1.02e - 04	1.89	1.27e - 04	1.89
	4000	2.64e - 05	1.95	3.26e - 05	1.96
L^2					
	500	2.23e - 03		2.94e - 03	
	1000	6.79e - 04	1.71	9.19e - 04	1.68
	2000	1.94e - 04	1.81	2.61e - 04	1.82
	4000	5.41e - 05	1.84	7.01e - 05	1.90
L^4					
	500	5.01e - 03		7.03e - 03	
	1000	1.59e - 03	1.65	2.33e - 03	1.59
	2000	4.80e - 04	1.73	6.77e - 04	1.78
	4000	1.51e - 04	1.67	1.87e - 04	1.85

Таблица 5.3б

		«Моментный» лимитер, неортогональный базис $\Gamma = 0.07$			
		$p = 1 \alpha_1 = 1/2$		$p = 2 \alpha_2 = 1/6$	
L^1	N	ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	2.52e - 03		3.09e - 03	
	1000	7.14e - 04	1.82	9.30e - 04	1.73
	2000	1.91e - 04	1.90	2.59e - 04	1.85
	4000	5.25e - 05	1.87	6.91e - 05	1.91
L^2					
	500	4.86e - 03		6.11e - 03	
	1000	1.52e - 03	1.68	2.14e - 03	1.51
	2000	4.63e - 04	1.71	6.92e - 04	1.63
	4000	1.47e - 04	1.65	2.19e - 04	1.66
L^4					
	500	1.32e - 02		1.62e - 02	
	1000	4.29e - 03	1.62	6.18e - 03	1.39
	2000	1.46e - 03	1.56	2.32e - 03	1.41
	4000	5.39e - 04	1.44	8.47e - 04	1.45

Список литературы

1. *Bernardo Cockburn*, An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations (Lecture Notes in Mathematics), 1998, V. 1697, pp. 151-268.
2. *Русанов В.В.* Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн препятствиями. 1961, Журнал вычислительной математики и математической физики, т. I, №2, 267- 279.
3. *Lax P.D.* Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, 1954, Communications on Pure and Applied Mathematics. 7, №1, 159 -193.
4. *Галанин М.П., Савенков Е.Б., Токарева С.А.* Применение разрывного метода Галеркина для численного решения квазилинейного уравнения переноса, 2005, Препринт 105, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва.
5. *Lilia Krivodonova*, Limiters for high-order discontinuous Galerkin methods, 2007, Journal of Computational Physics, vol. 226, pp. 879-896.
6. *Колган В.П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики. 1972, Ученые записки ЦАГИ. т. 3, №6., С. 68 – 77.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика, Теоретическая физика: Т. VI. –М.: Физматлит, 2001.
8. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.