ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 33 за 2012 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Батхин А.Б.

Нелинейная устойчивость системы Гамильтона по линейному приближению

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Батхин А.Б. Нелинейная устойчивость системы Гамильтона по линейному приближению // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 33. 24 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-33

Публикации по материалам препринта

Батхин А.Б. Выделение областей устойчивости нелинейной системы Гамильтона // Автоматика и телемеханика. 2013. Т. 8. С. 47-64. ISSN 0005-2310.
URL: http://mi.mathnet.ru/at6084

Batkhin A.B. Segregation of stability domains of the Hamilton nonlinear system // Automation and Remote Control. 2013. Aug. Vol. 74, no. 8. Pp. 1269-1283. ISSN 0005-1179.
DOI: 10.1134/S0005117913080043
URL: http://link.springer.com/article/10.1134%2FS0005117913080043

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.Б.Батхин

НЕЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Москва — 2012

УДК 521.1+531.314
Батхин А.Б.

Нелинейная устойчивость системы Гамильтона по линейному приближению. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2012.

Рассматриваются условия, при которых устойчивость положения равновесия линейной системы Гамильтона сохраняется при малых нелинейных возмущениях. Предлагается конструктивный алгоритм выделения тех областей множества устойчивости, для которых указанные выше условия выполняются. Применение алгоритма демонстрируется на одной пятипараметрической задаче с четырьмя степенями свободы.

Ключевые слова: система Гамильтона, устойчивость стационарного решения, формальная устойчивость.

Alexander Borisovich Batkhin

Non-linear stability of the Hamiltonian system on linear approximation.

We consider the conditions of preserving stability of stationary point of linear Hamiltonian system under small non-linear perturbations. We provide an algorithm for selection those areas of the set of stability for which the mentioned above conditions are satisfied. The application of the algorithm is demonstrated on a five-parameter problem with four degrees of freedom.

Key words: Hamiltonian system, stability of stationary solution, formal stability.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11–01–00023.

Оглавление

1. Введение

Пусть задана нелинейная система Гамильтона с m степенями свободы, функция $H(Z, P)$ которой гладко зависит от n-мерного вектора параметров $P = (p_1, \ldots, p_n) \in \Pi \subset \mathbb{R}^n$ и представлена в виде

$$H(Z, P) = H_2(Z, P) + \varepsilon R(Z, P), \quad Z = (X, Y)^{\mathrm{T}}, \quad X, Y \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где $H_2(Z, P)$ — квадратичная форма по Z, определяемая симметричной матрицей $A(P)$, т. е. $H_2(Z, P) = Z^{\mathrm{T}} A(P) Z$, $R(Z, P)$ — возмущающая функция, представленная в виде многочлена по Z степени не ниже 3, $\varepsilon \ll 1$.

В работе исследуются условия, когда устойчивость по первому приближению положения равновесия $Z = 0$ системы канонических уравнений

$$\dot{Z} = J \partial H / \partial Z \tag{2}$$

сохраняется при малых возмущениях $\varepsilon R(Z, P)$. Здесь J — симплектическая единица.

Определение 1. Назовем *множеством устойчивости* Σ множество всех значений параметров P, для которых стационарное решение $Z = 0$ системы (2) устойчиво по Ляпунову.

Критерий устойчивости положения равновесия линейной гамильтоновой системы

$$\dot{Z} = J A(P) Z \tag{3}$$

задается условиями на матрицу $JA(P)$ (см. [1]):

1) все корни $\lambda_j = -\lambda_{j+m}$, $j = 1, \ldots, m$ матрицы $JA(P)$ чисто мнимые;

2) все элементарные делители матрицы $JA(P)$ просты.

Поскольку характеристический многочлен

$$\check{f}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{2m} \check{f}_k(P) \lambda^k, \qquad \check{f}_{2m} = 1 \tag{4}$$

гамильтоновой матрицы $JA(P)$ содержит только четные степени λ, то удобно рассматривать его как многочлен от $\mu = \lambda^2$:

$$f(\mu) = \sum_{k=0}^{m} f_k(P) \mu^k, \quad f_m = 1, \tag{5}$$

который в [2] назван *полухарактеристическим*.

В терминах полухарактеристического многочлена критерий устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы формулируется следующей теоремой.

Теорема 1 ([2]). *Положение равновесия $Z = 0$ линейной гамильтоновой системы* (2) *устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда*

1) все корни μ_k полухарактеристического многочлена (5) *вещественны и неположительны;*

2) все элементарные делители матрицы $JA(P)$ просты.

Доказательство ее второго утверждения приведено в [3, п. 5.2] и основано на структуре нормальной формы линейной системы Гамильтона, приведенной в [4, п. 1.B].

Условие 1) теоремы 1 эффективно проверяется с использованием инноров некоторой матрицы Δ_{2m}, элементы которой однозначно определяются через коэффициенты вспомогательного многочлена $\widetilde{f}(\mu)$, задаваемого полухарактеристическим многочленом $f(\mu)$ (см. [5, гл. 3] или [2]). В [6, п. 3] показано, что инноры матрицы Δ_{2m} есть ни что иное как субдискриминанты (см. [7], [8, гл. 4]) многочлена $f(\mu)$. Условие 2) также легко проверяется путем вычисления ранга матрицы $JA(P) - \sqrt{\mu_k}E$ (см. [2, п. 2.5]). Алгоритм эффективного вычисления множества устойчивости Σ линейной системы Гамильтона (3) дан в [2].

Малое нелинейное возмущение $\varepsilon R(Z, P)$, с одной стороны, слегка деформирует множество устойчивости Σ, а с другой, при определенных условиях способно его разрушить в тех точках, где имеется резонанс. В случае резонанса (рациональной соизмеримости собственных чисел матрицы $JA(P)$) анализ устойчивости обычно проводится с помощью нормализации функции Гамильтона. Хотя процедуры нормализации хорошо разработаны, они являются довольно трудоемкими, особенно для систем с большим числом параметров. Интерес представляет выделение таких областей множества Σ, для которых устойчивость сохраняется и при наличии малого возмущения.

Определение таких устойчивых в линейном приближении областей в пространстве параметров Π связано с вычислением *резонансных множеств*, т. е. таких множеств, на которых имеет место условие соизмеримости корней характеристического многочлена $\check{f}(\lambda)$.

Определение 2. Множество $\mathscr{F}$ с индексом $p + q$ назовем $p : q$–резонансным, если для заданных натуральных чисел $p, q \in \mathbb{N}_0$ найдется пара корней многочлена (4), отношение которых равно $p : q$:

$$\mathscr{F}_{p+q} = \{P \in \Pi : \exists\, j, k = 1, \ldots, m,\ |\lambda_j(P)| : |\lambda_k(P)| = p : q,\ p, q \in \mathbb{N}_0\}.$$

Вычисление резонансных множеств удобно проводить с использованием обобщенного дискриминанта — некоторого обобщения дискриминанта характеристического многочлена.

2. Обобщенный дискриминант и его свойства

Пусть $P \in \Sigma$, тогда согласно теореме 1 матрица $JA(P)$ приводится к диагональному виду, причем чисто мнимые собственные числа можно упорядочить так, что $\lambda_i = -\lambda_{i+m}$, $i = 1, \ldots, m$. Пусть $\Lambda(P) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Условие резонанса между собственными частотами $\omega_i = |\lambda_i|$ линейной системы (3) сводится к существованию такого целочисленного ненулевого вектора $K = (k_1, \ldots, k_n)$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $K \neq 0$, что

$$\langle K, \Lambda(P) \rangle = \sum_{i=1}^{m} k_i \lambda_i(P) = 0. \qquad (6)$$

Величина $|K| = \sum_i |k_i|$ называется порядком резонанса. Если в векторе K только пара компонентов отлична от нуля, то такой резонанс называется *двухчастотным*, иначе — *многочастотным*.

Условие на коэффициенты характеристического многочлена (4), обеспечивающее существование двухчастотного резонанса, т. е. рациональной соизмеримости между парой его корней легко получить с помощью теории исключений.

Пусть $\varphi(x)$ — некоторый многочлен порядка $m \geqslant 2$ с коэффициентами φ_i, $i = 0, \ldots, m$. Будем говорить, что пара его корней x_1 и x_2 N-соизмерима, если $x_1 : x_2 = N$.

Определение 3. *Обобщенным дискриминантом* $\mathscr{G}\mathscr{D}_N(\varphi)$ многочлена $\varphi(x)$ назовем такую функцию от коэффициентов φ_i многочлена и числа соизмеримости N, которая принимает нулевое значение, если многочлен $\varphi(x)$ имеет по крайней мере одну пару корней соизмеримости N.

Если x_1 и Nx_1 есть корни многочлена $\varphi(x)$, то результант многочленов $\varphi(x)$ и $\varphi(Nx)$ должен быть равен нулю: $\mathscr{R}_x(\varphi(x), \varphi(Nx)) = 0$. Очевидно, что этот результант всегда принимает нулевое значение, если $N = 1$, поскольку любой корень x_1 соизмерим с самим собой. Тривиальная соизмеримость имеет место для нулевого корня, поскольку нулевой корень соизмерим с любым другим корнем. Следовательно, $\mathscr{R}_x(\varphi(x), \varphi(Nx))$ должен раскладываться, по крайней мере, на три множителя, два из которых $N - 1$ и φ_0 — свободный член $\varphi(x)$. Третий нетривиальный множитель будет искомым обобщенным дискриминантом $\mathscr{G}\mathscr{D}_N(\varphi)$. Приведем формулу для его вычисления.

Для записи результанта $\mathscr{R}_x(\varphi(x), \varphi(Nx))$ запишем $2m \times 2m$–матрицу Сильвестра, составленную из коэффициентов входящих в него многочленов:

$$Sylv(\varphi(x), \varphi(Nx)) =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_m & \varphi_{m-1} & \varphi_{m-2} & \dots & \varphi_1 & \varphi_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_m & \varphi_{m-1} & \dots & \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{9} \\ 0 & 0 & 0 & \hdotsfor{5} & \varphi_0 \\ N^m\varphi_m & N^{m-1}\varphi_{m-1} & N^{m-2}\varphi_{m-2} & \dots & N\varphi_1 & \varphi_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N^m\varphi_m & N^{m-1}\varphi_{m-1} & \dots & N^2\varphi_2 & N\varphi_1 & \varphi_0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{9} \\ 0 & 0 & 0 & \hdotsfor{5} & \varphi_0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Выполним последовательно следующие преобразования над матрицей (7), которые позволят получить выражение для обобщенного дискриминанта $\mathscr{G}\mathscr{D}_N(\varphi)$.

1) Из строки с номером $i+m$ вычтем строку с номером i для всех $i = 1, \dots, m$. В результате все нижние m строк новой матрицы не будут иметь элементов φ_0, а ненулевые элементы этих строк будут иметь вид $(N^i - 1)\varphi_i$, $i = 1, \dots, m$.

2) Каждую из строк с номером $i+m$, $i = 1, \dots, m$ разделим на $N-1$, что возможно в силу предыдущего замечания.

3) Последний столбец преобразованной матрицы теперь содержит единственный ненулевой элемент φ_0 в m-й строке, поэтому вычеркиваем этот столбец и строку с номером m.

4) Определитель получившейся $(2m-1) \times (2m-1)$–матрицы и есть обобщенный дискриминант $\mathscr{G}\mathscr{D}_N(\varphi)$.

Итак, в силу приведенных выше преобразований имеем, что

$$\mathscr{R}_x(\varphi(x), \varphi(Nx)) = (N-1)^m \varphi_0 \mathscr{G}\mathscr{D}_N(\varphi).$$

Укажем следующие свойства обобщенного дискриминанта $\mathscr{G}\mathscr{D}_N(\varphi)$.

i) При $N = 1$ обобщенный дискриминант равен дискриминанту $\mathscr{D}(\varphi)$, который, в свою очередь, с точностью до знака есть результант многочленов $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ (см., например, [9, гл. XI, § 54]).

Действительно, при $N \to 1$ каждый из элементов нижних m строк матрицы, полученной после шага 2) на стр. 6, имеет вид

$$\frac{N^i - 1}{N-1}\varphi_i \quad \Rightarrow \quad \lim_{N\to 1} \frac{N^i - 1}{N-1}\varphi_i = i\varphi_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Следовательно, нижние m строк матрицы заполнены коэффициентами многочлена $\varphi'(x)$, что и приводит к указанному свойству.

ii) Обобщенный дискриминант является возвратным многочленом порядка $m(m-1)$ относительно переменной N, и, следовательно, его порядок относительно N может быть понижен вдвое.

Это свойство следует из того, что если пара корней многочлена соизмерима и, если $x_1/x_2 = N \neq 0$, то $x_2/x_1 = 1/N$. Следовательно, если $\mathscr{G}\mathscr{D}_N(\varphi) = 0$, то и $\mathscr{G}\mathscr{D}_{1/N}(\varphi) = 0$. Порядок многочлена $\mathscr{G}\mathscr{D}_N(\varphi)$ по переменной N нетрудно вычислить, если учесть, что нижние m строк содержат одинаковые элементы $(N^m - 1)\varphi_m/(N-1)$, стоящие на диагонали, а порядок такого элемента по N равен $m-1$. Таким образом, обобщенный дискриминант $\mathscr{G}\mathscr{D}_N(\varphi)$ как многочлен от переменной N может быть преобразован в многочлен порядка $m(m-1)/2$ от переменной $\widetilde{N} = N + 1/N$.

iii) Резонансное множество $\mathscr{F}$ согласно определениям 2 и 3 вычисляется через нули обобщенного дискриминанта многочленов $\check{f}$ или f:

$$\mathscr{F}_{p+q} = \left\{P \in \Pi : \mathscr{G}\mathscr{D}_{p:q}\left(\check{f}\right) = \mathscr{G}\mathscr{D}_{p^2:q^2}(f) = 0\right\}.$$

iv) В [2] показано, что границей $\partial\Sigma$ множества устойчивости линейной системы Гамильтона (3) служат участки гиперповерхностей $\mathscr{F}_0 = \{P : f_0(P) = 0\}$ и $\mathscr{F}_2 = \{P : D(f) = 0\}$. $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_2$ есть резонансные множества, на которых имеется нулевой корень и пара кратных корней полухарактеристического многочлена (5), соответственно.

3. Условия формальной устойчивости

Пусть для линейной системы Гамильтона (3) вычислено множество устойчивости Σ. Тогда для каждого значения $P \in \Sigma$ матрица $JA(P)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно, ее собственные числа чисто мнимые $\lambda_j = -\lambda_{j+m} = i\omega_j$, $j = 1, \ldots, m$, а элементарные делители просты. В этом случае существует линейное каноническое преобразование, приводящее гамильтониан $H_2(Z)$ к нормальной форме с набором инвариантов $\sigma_i(P)$, $i = 1, \ldots, m$

$$\widetilde{H}_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i(P)\left(x_i^2 + y_i^2\right), \quad \tilde{\lambda}_i(P) = \sigma_i(P)\omega_i(P), \quad \sigma_i(P) = \pm 1. \qquad (8)$$

Обозначим через $\widetilde{\Lambda}(P)$ вектор размерности m, составленный из коэффициентов $\tilde{\lambda}_i(P)$, $i = 1, \ldots, m$ нормальной формы (8).

Если нормальная форма (8) в некоторой области $W_j \subset \Sigma$ знакоопределенная, т. е. все инварианты $\sigma_i(P)$ одного знака, то согласно теореме Дирихле [10, § 29], малые возмущения не нарушат устойчивость положения равновесия, а лишь немного «деформируют» границу этой области ∂W_j.

Для многих прикладных задач может быть вполне достаточной более слабая, чем устойчивость по Ляпунову, *формальная устойчивость*, предложенная Ю. Мозером в [11] (см. [12, гл. 5, § 2]).

Определение 4. Положение равновесия $Z = 0$ гамильтоновой системы (2) является *формально устойчивым,* если существует, возможно расходящийся, степенной ряд, который является формальным положительно определенным первым интегралом.

Наличие формальной устойчивости гарантирует, что на конечном, но большом интервале времени, возмущенная траектория остается близкой к невозмущенной.

Если для некоторого значения вектора параметров P резонанс отсутствует, т. е. условие (6) выполнено лишь для нулевого вектора K, то, согласно теореме Биркгофа [13, гл. 3], существует такое формальное каноническое преобразование w переменных $(X, Y) \to (\Xi, \mathrm{H})$, что гамильтониан $H(w(X, Y))$ является степенным рядом по $\xi_i^2 + \eta_i^2$, $i = 1, \ldots, m$. Следовательно, новый гамильтониан $H(w(X, Y))$ имеет m циклических координат, и, как следствие, соответствующая система канонических уравнений имеет m независимых первых интегралов, что приводит к формальной устойчивости положения равновесия. К сожалению, применение этого результата на практике обычно затруднительно потому, что, во-первых, в общем случае формальное преобразование w является расходящимся, во-вторых, при непрерывной зависимости элементов матрицы $A(P)$ от вектора параметров P резонансные множества всюду плотны в пространстве параметров Π.

Наличие резонансов при условии, что нормальная форма (8) не является знакоопределенной, требует дальнейшей нормализации гамильтониана (1), по крайней мере, до 4-го порядка для исследования устойчивости положения равновесия. Если отсутствуют резонансы порядков 2, 3 и 4, то в этом случае можно применить теорему Брюно (см. [14], [12, гл. 5, § 2]), выполнение которой гарантирует формальную устойчивость. Эта теорема была сформулирована в более общем случаем, когда функция Гамильтона является 2π–периодической по независимой переменной t. Сформулируем ее для случая, когда гамильтонова система (2) автономная.

Пусть для системы (2) выполнено условие отсутствия резонансов порядков не выше 4, т. е.

$$\left\langle K, \widetilde{\Lambda} \right\rangle \neq 0 \text{ для } K \in \mathbb{Z}^m, \quad 0 < |K| \leqslant 4, \tag{9}$$

тогда, как известно, существует такое аналитическое каноническое преобразование $(X, Y) \to (U, V)$, что новый гамильтониан $\mathscr{H}$ имеет вид

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i \left(U_i^2 + V_i^2\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} b_{ij} \left(U_i^2 + V_i^2\right)\left(U_j^2 + V_j^2\right) + \mathscr{R}(U, V), \tag{10}$$

где $\mathscr{R}(U,V)$ — многочлен от переменных (U,V) степени не ниже 5.

Теорема 2 (**Брюно**). *Если на любой паре ненулевых целочисленных векторов K_1 и K_2 из ортанта $k_i \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,m$, являющихся решением уравнения*

$$\left\langle K, \widetilde{\Lambda} \right\rangle = 0, \tag{11}$$

квадратичная форма $K_1^{\mathrm{T}} B K_2 \neq 0$, где $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{m}$, $\widetilde{\Lambda} \neq 0$, то положение равновесия $X = Y = 0$ системы (2) *формально устойчиво.*

Для дальнейших рассуждений предположим, что выполнено следующее условие:

условие B. Квадратичная форма, заданная матрицей B из коэффициентов нормальной формы 4-го порядка функции Гаимльтона $H(Z,P)$, является знакоопределенной в некоторой области W_j множества устойчивости Σ.

Тогда в силу теоремы Брюно в каждой точке области W_j за исключением тех точек, которые принадлежат резонансным поверхностям $\mathscr{F}_i$, $i = 2{,}3{,}4$, имеет место формальная устойчивость, поскольку ни один из целочисленных векторов K, удовлетворяющих резонансному соотношению теоремы, не будет обнулять квадратичную форму.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда в области W_j содержится часть резонансного множества $\mathscr{F}_{p+q}(P)$, $p+q \leqslant 4$, на котором пара собственных чисел λ_i и λ_j p/q-соизмерима. Если инварианты $\sigma_i(P)$ и $\sigma_j(P)$ нормальной формы (8), соответствующие этим резонансным частотам λ_i и λ_j, имеют один и тот же знак и других резонансов порядка меньше 5 нет, то для знакоопределенной части гамильтониана можно применить теорему Дирихле, а для оставшейся части — теорему Брюно. В этом случае вновь будет иметь место формальная устойчивость.

Таким образом, выполнение условия B не позволяет сделать вывод о формальной устойчивости только на тех участках резонансных множеств $\mathscr{F}_{p+q}$, $p+q \leqslant 4$, на которых инварианты, соответствующие соизмеримым собственным значениям, имеют разные знаки.

3.1. Вычислении сигнатуры квадратичной формы. Знакоопределенность квадратичной формы $H_2(Z)$ можно установить, не приводя ее к нормальной форме. Для этого достаточно вычислить ее сигнатуру [15, гл. X, § 3].

Определение 5. Сигнатура s квадратичной формы (8) есть разность между числом π положительных и числом ν отрицательных квадратов: $s = \pi - \nu$ в ее канонической форме.

Для определения сигнатуры квадратичной формы можно воспользоваться теоремой Якоби [15, гл. X, § 3].

Теорема 3 (**Якоби**). *Если для квадратичной формы $H_2(Z) = Z^{\mathrm{T}}AZ$ ранга r главные миноры D_k, $k = 1, \ldots, r$ матрицы A отличны от нуля, то число π есть число постоянств знака, а число ν — число перемен знака в последовательности $[1, D_1, D_2, \ldots, D_r]$. Тогда сигнатура $s = \pi - \nu = r - 2\nu$.*

Правило теоремы Якоби обобщается для случая, когда последовательность главных миноров не содержит более двух идущих подряд нулей, причем последний элемент последовательности ненулевой. В том случае, если последовательность главных миноров имеет подряд три и более нулей, то для определения знакопостоянства квадратичной формы $H_2(Z)$ ее следует нормализовать к виду (8).

Очевидно, что квадратичная форма знакоопределена, если ее сигнатура равна $\pm 2m$. Для гамильтоновой нормальной формы (8) сигнатура s может быть только четным числом вида $2m - 4k$, $k = 0, \ldots, m$, а число различных с точностью до смены знака наборов инвариантов $\sigma_i(P)$ равно $[m/2] + 1$, где $[x]$ — целая часть числа x. Таким образом, для гамильтоновой системы с одной степенью свободы имеется один набор инвариантов, с двумя и тремя степенями свободы — 2 набора, с четырьмя и пятью степенями свободы — три.

Пример. Рассмотрим задачу (см. [16, п. 7.8.1]), в которой исследовалась проблема устойчивости при анализе малых колебаний упругой шарнирно опертой трубы с протекающей через нее жидкостью [17]. Эти колебания описываются в первом приближении линейными каноническими уравнениями с гамильтоновой матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \Lambda + \alpha\Lambda/4 & 0 & 0 & -\sqrt{\alpha\Lambda}/2 \\ 0 & 16 - 4\Lambda + \alpha\Lambda/4 & \sqrt{\alpha\Lambda}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha\Lambda}/2 & 1 & 0 \\ -\sqrt{\alpha\Lambda}/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Параметры принимают значения $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1 \equiv (16/(3\pi))^2$, $\Lambda \geqslant 0$. Множество устойчивости Σ состоит из двух областей:

$$\Sigma_1 = \{0 < \Lambda < 1,\ 0 < \alpha < \alpha_1\},$$
$$\Sigma_2 = \{\Lambda > 4,\ \left[5\Lambda - 17 \pm 4\sqrt{(1-\Lambda)(4-\Lambda)}\right]/\Lambda < \alpha < \alpha_1\}.$$

Свободный член f_0 полухарактеристического многочлена равен $f_0 = 4(1 - \Lambda)(4 - \Lambda)$, следовательно, резонансное множество $\mathscr{F}_0$ состоит из двух лучей $\Lambda = 1$ и $\Lambda = 4$. Вычисления показывают, что сигнатура s нормальной формы (8) в области Σ_1 равна 4, а в области Σ_2 равно 0. Поскольку исследуемая система двухчастотная, то в области Σ_2 инварианты σ_1 и σ_2 имеют разные знаки, и без учета нелинейных возмущений здесь не обойтись. В то же время, нормальная форма в точках области Σ_1 знакоопределенная и, следовательно, для них будет иметь место устойчивость и при наличии малых нелинейных возмущений. ■

4. Вычисление инвариантов квадратичной нормальной формы гамильтониана

При исследовании устойчивости на резонансном множестве необходимо определять знаки инвариантов σ_i в нормальной форме (8) для тех собственных чисел λ_i, которые связаны резонансным условием (6). Для этого можно выполнить процедуру нормализации функции Гамильтона $H_2(Z, P)$, используя разработанные алгоритмы (их обзор см., например, в [4, гл. I, § 6]).

Для случая, когда выполнены условия устойчивости, можно ограничиться только вычислением инвариантов σ_i соответствующих резонансных частот, не выполняя полной нормализации гамильтониана. Отметим, что выполнение условий теоремы 1 гарантирует, что собственные векторы матрицы $JA(P)$ образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^{2m}$, поскольку простота элементарных делителей этой матрицы равносильна тому, что для каждого ее собственного числа λ_i его алгебраическая и геометрическая кратности равны. Это позволяет снять ограничение на отсутствие кратных корней и применить алгоритмы нормализации, описанные в [12, гл. 2, § 2], [18, гл. I, § 2], [19], [20]. Отметим, что алгоритм нормализации для случая чисто мнимых кратных корней без ограничений на простоту элементарных делителей предложен в [21], однако, по мнению автора, он является слишком трудоемким для применения в рассматриваемом случае.

Пусть λ_i чисто мнимое собственное число кратности k матрицы JA. Обозначим через $e_i^{(j)} = r_i^{(j)} + Is_i^{(j)}$, $j = 1, \ldots, k$ собственные векторы матрицы JA, соответствующие λ_i. Здесь I — мнимая единица. Эти векторы легко вычислить, приведя с помощью метода Гаусса матрицу $JA - \lambda_i E$ к верхнетреугольному виду, а затем, выбрав k свободных переменных и, последовательно полагая их равными единице, решить полученную систему относительно оставшихся $2m - k$ переменных. Тогда согласно формуле (2.16) в [18, гл. I, § 2]

$$\sigma_i^{(j)} = \operatorname{sign}\left(\left\langle r_i^{(j)}, Js_i^{(j)}\right\rangle\right), \quad j = 1, \ldots, k.$$

5. Выделение областей, устойчивых по линейному приближению

Можно предложить следующую схему выделения областей множества Σ устойчивость которых сохранится и при малом нелинейном возмущении.

Будем считать, что резонансные множества $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_2$ вычислены и определено множество устойчивости Σ.

I) Поскольку изменение сигнатуры квадратичной формы $H_2(Z)$ может происходить только при переходе через гиперповерхность $\mathscr{F}_0$, то пространство параметров P делится гиперповерхностью $\mathscr{F}_0$ на области W_j с постоянной сигнатурой. Определяем области $\Sigma_j = \Sigma \cap W_j$. В каждой области Σ_j выбираем некоторую точку и вычисляем в ней сигнатуру s нормальной формы. Если $s = \pm 2m$, то область Σ_j помечается как устойчивая при нелинейных возмущениях.

II) Изменение знаков инвариантов $\sigma_i(P)$ формы (8) может происходить при переходе через гиперповерхности $\mathscr{F}_{p+q}$, $p+q \geqslant 3$. Вычисляем резонансные множества $\mathscr{F}_3$ и $\mathscr{F}_4$, которые понадобятся для проверки условия теоремы Брюно.

III) Выбираем область Σ_j, в точках которой нормальная форма (8) не является знакоопределенной, т. е. сигнатура квадратичной формы $H_2(Z)$ $s \neq \pm 2m$. Пусть резонансные гиперповерхности $\mathscr{F}_k$, $k = 3{,}4$ делят область Σ_j на подобласти $\Sigma_j^{(i)}$. Выбираем на участке гиперповерхности $\mathscr{F}_k$, разделяющем подобласти $\Sigma_j^{(i)}$ и $\Sigma_j^{(i+1)}$, точку и вычисляем в ней инварианты нормальной формы для соизмеримых собственных чисел матрицы JA. Если эти инварианты имеют одинаковый знак, то эти две подобласти объединяются в одну подобласть. Получившиеся подобласти являются потенциально формально устойчивыми, если они попадают в ту часть пространства параметров, для которой выполнено условие B. Проверка условия B требует выполнение процедуры нелинейной нормализации до 4-го порядка.

6. Применение метода к исследованию устойчивости гироскопической задачи

6.1. Формулировка задачи. В [16, п. 7.8.2] рассматривалась следующая задача.

Задача 1. В поле силы тяжести находится механическая система, состоящая из осесимметричных тел, связанных универсальными шарнирами Кардано–Гука. Центры каждого из шарниров находятся на осях симметрии соответствующих тел. Нижнее тело — невесомый стержень длины Kl, $K = 2$, посредством шарнира прикрепленный к оси ротора вертикально поставленного мотора, а верхний невесомый стержень длины l жестко прикреплен к центру плоского диска массы $\widetilde{m}$ и диаметра $4kl$, $k = 1$, перпендикулярно его плоскости. Ротор мотора вращается с постоянной угловой скоростью Ω (см. рис. 1).

Вычислить множество устойчивости для вертикального положения равновесия этой системы.

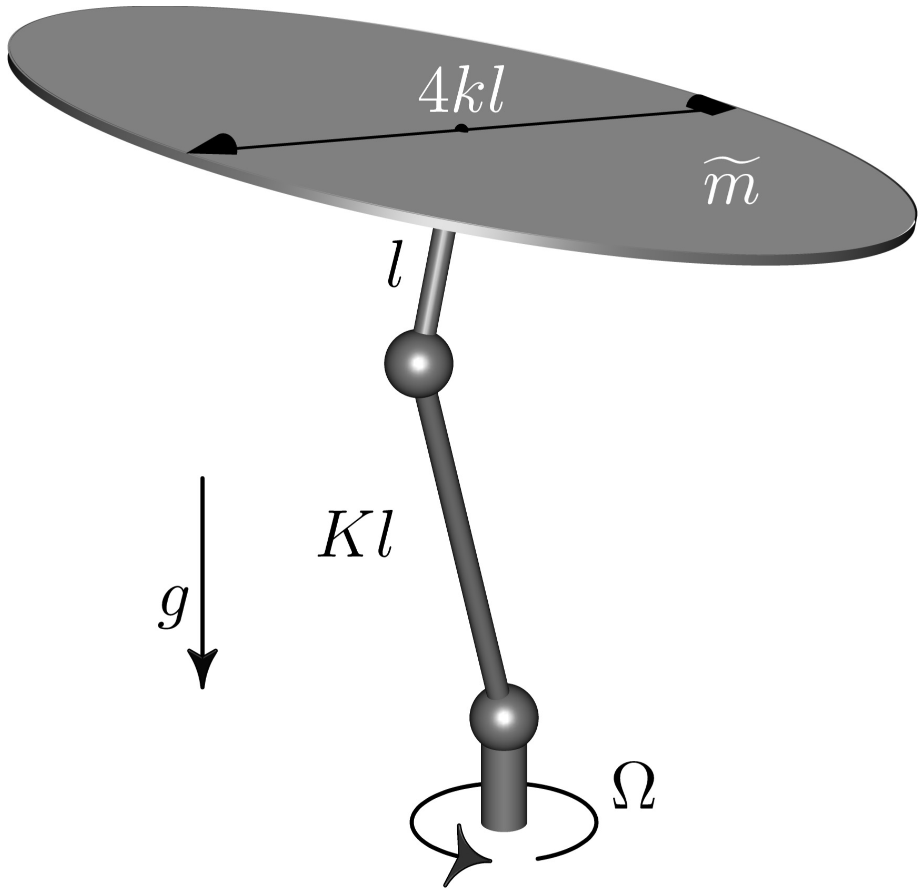

Рис. 1. Массивный диск, прикрепленный к ротору двигателя посредством упругих шарниров Кардано–Гука.

В линейном приближении эта задача была сведена к исследованию устойчивости положения равновесия линейной гамильтоновой системы с четырьмя степенями свободы, матрица $A(P)$ которой зависит от вектора параметров $P \in \mathbb{R}^3$.

Задача 1 в линейном приближении была полностью решена аналитически в [2] (см. также [3, 22, 23]).

В [6] была рассмотрена и аналитически решена в линейном приближении более общая 5-ти параметрическая

Задача 2. В формулировке задачи 1 будем полагать, что величины K и k могут принимать произвольные положительные значения. *Вычислить множество устойчивости для вертикального положения равновесия этой системы.*

Вывод уравнений движения задачи дан в [6, п. 2].

Далее рассмотрим, что произойдет с множеством устойчивости Σ при наличии малых нелинейных возмущений.

6.2. Множество устойчивости Σ линейного приближения задачи 2. Множество устойчивости Σ этой задачи было вычислено методами теории исключений с помощью введения таких параметров, которые позволили максимально упростить его описание. Подробно структура множества Σ приведена в [6, п. 3.8]. Здесь дадим его краткое описание, достаточное для дальнейшего изложения.

Вектор параметров $P = (p, q, r, k, K)$ линейной гамильтоновой системы выражается через исходные физические величины (часть из которых приведена выше) следующим образом:

$$p = \frac{C_1}{\widetilde{m}\Omega^2 l^2}, \quad q = \frac{C_2}{\widetilde{m}\Omega^2 l^2}, \quad r = \frac{2g}{K\Omega^2 l},$$

где $C_{1,2}$ — коэффициенты жесткости на изгиб в шарнирах. Относительно этих параметров элементы матрицы $JA(P)$ являются рациональными функциями. Область физических значений параметров Φ определяется ортантом $P > 0$.

Существует [6, п. 3.5] такая линейная невырожденная замена первых трех компонентов p, q, r вектора параметров P

$$\begin{aligned}
p =& k^2 U + k\,(K+1)\,V + k^2 W/4 + 7k^2/4,\\
q =& -U + kV + W/4 - 1/4,\\
r =& \frac{\left(k^2 - K - 1\right) U + 4k\,(K+2)\,V + \left(k^2 + K + 1\right) W + K + 1 - 7k^2}{4K},
\end{aligned} \tag{12}$$

после которой матрица $A(P)$ принимает вид

$$A(P) = \begin{pmatrix}
a_1 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & a_1 & 0 & a_2 & -1 & 0 & 0 & 0\\
a_2 & 0 & a_3 & 0 & 0 & K & 0 & 0\\
0 & a_2 & 0 & a_3 & -K & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & -K & a_4 & 0 & K/k^2 & 0\\
1 & 0 & K & 0 & 0 & a_4 & 0 & K/k^2\\
0 & 0 & 0 & 0 & K/k^2 & 0 & -1/k^2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K/k^2 & 0 & -1/k^2
\end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$a_1 = \frac{W - 4U - 1}{8K^2}, \qquad a_2 = \frac{W - 4U + 4kV - 1}{8K},$$
$$a_3 = \frac{k^2 - 1}{2}\left(U - \frac{1}{4}\right) + kV + \frac{k^2+1}{8}W, \qquad a_4 = -\frac{(k^2+1)K^2}{k^2}.$$

Примечательно, что коэффициенты полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ матрицы JA после замены (12) зависят только от новых параметров $Q=(U,V,W)$, но не зависят от параметров k и K:

$$
\begin{aligned}
f_3 =&(5-W)/2, && (14)\\
f_2 =&-U^2/2-V^2/2+3W^2/32-3U-7W/16+43/32, && (15)\\
f_1 =&U^2W/8+V^2W/8-W^3/128+11U^2/8+UW/4+3V^2/8-\\
&-W^2/128-5U/4-27W/128+29/128, && (16)\\
f_{00} =&\frac{1}{4}(U-1)^2+\frac{1}{4}V^2-\frac{1}{64}(W+3)^2, \quad f_0=f_{00}^2. && (17)
\end{aligned}
$$

Это обстоятельство позволяет дать описание множества Σ через его проекцию Σ' на трехмерное подпространство Π' с параметрами (U,V,W).

Замечание 1. Поскольку переменная V входит в формулы (15) – (17) только в виде V^2, то все обобщенные дискриминанты $\mathscr{G}\mathscr{D}_N(f)$ как многочлены от коэффициентов f_i, $i=0,\ldots,3$ содержат переменную V в четной степени. Следовательно, все резонансные множества $\mathscr{F}_{p+q}$ симметричны относительно плоскости симметрии

$$
\mathscr{L}=\{Q:V=0\}. \qquad (18)
$$

Поскольку свободный член f_0 многочлена $f(\mu)$ есть полный квадрат, то границей $\partial\Sigma$ множества устойчивости может служить лишь множество $\mathscr{F}_2$, определяемое уравнением $\mathscr{D}(f)=0$. Дискриминант $\mathscr{D}(f)$ факторизуется на 2 множителя: V^4 и $g(Q)$. В [6] показано, что плоскость $\mathscr{L}$ не может служить границей устойчивости, а та ее часть, на которой имеется устойчивость, полностью лежит в Σ. Таким образом, граница $\partial\Sigma$ есть часть множества $\mathscr{G}=\{Q\in\Pi':g(Q)=0\}$, где

$$
\begin{aligned}
g(Q) =&64\,U^6+192\,U^4V^2-4\,U^4W^2+192\,U^2V^4-8\,U^2V^2W^2+64\,V^6-\\
&-4\,V^4W^2+72\,U^4W-4\,U^2W^3-72\,V^4W+4\,V^2W^3+60\,U^4-\\
&-312\,U^2V^2+20\,U^2W^2+60\,V^4+20\,V^2W^2-W^4+36\,U^2W-\\
&-36\,V^2W+12\,U^2+12\,V^2+2\,W^2-1. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Замечание 2. Отметим, что многочлен $g(Q)$ содержит переменные U и V только в четных степенях, следовательно, он инвариантен при замене знаков у переменных U и V. Более того, если переменные U и V поменять местами, а знак переменной W заменить на противоположный, то многочлен $g(Q)$ не изменится. Значит, достаточно исследовать нули многочлена $g(Q)$ в одном октанте, например, для $Q\geqslant 0$. Мы, однако, не будем этого делать, поскольку другие обобщенные дискриминанты, нули которых определяют резонансные множества, инварианты лишь при смене знака у переменной V.

Множество $\mathscr{G}$ представляет собой объединение двумерной линейчатой поверхности $\widetilde{\mathscr{G}}$ и четырех одномерных компонент, каждая из которых выходит из соответствующей особой точки второго порядка

$$\mathscr{Q}_0 = (1{,}0,-3), \quad \mathscr{Q}_1 = (-1{,}0,-3), \quad \mathscr{Q}_2 = (0,-1{,}3), \quad \mathscr{Q}_3 = (0{,}1{,}3).$$

Эти одномерные компоненты являются ветвями однопараметрических семейств особых точек $\mathscr{P}_{1,2}$, представляющих собой параболы, лежащие в координатных плоскостях $V = 0$ и $U = 0$, соответственно:

$$\mathscr{P}_1 : U = t, \quad V = 0, \quad W = -2t^2 - 1,$$
$$\mathscr{P}_2 : U = 0, \quad V = v, \quad W = 2v^2 + 1.$$

Двумерная линейчатая поверхность $\widetilde{\mathscr{G}}$ имеет параметризацию

$$U = u \sin\varphi, \quad V = (u+1)\cos\varphi, \quad W = 4u + 2\cos^2\varphi + 1. \tag{20}$$

Огибающей семейства прямых (20) служит кривая

$$\mathscr{F} : U = -\sin^3\varphi, \quad V = \cos^3\varphi, \quad W = 3\cos 2\varphi. \tag{21}$$

Поверхность $\widetilde{\mathscr{G}}$ можно представить себе в виде однополостного гиперболоида с двумя склейками. Одна склейка выполнена вдоль параболического сегмента $\mathscr{P}_1^0$, соединяющего особые точки $\mathscr{Q}_0$ и $\mathscr{Q}_1$, а другая — вдоль параболического сегмента $\mathscr{P}_2^0$, соединяющего особые точки $\mathscr{Q}_0$ и $\mathscr{Q}_1$. Склейки повернуты на 90° относительно друг друга.

Множество устойчивости Σ состоит из двух открытых областей Σ_1 и Σ_2, которые соединяются друг с другом вдоль параболического сегмента $\mathscr{P}_1^0$ (см. рис. 2).

Область Σ_1 представляет собой криволинейный тетраэдр, натянутый на сегменты $\mathscr{P}_1^0$, $\mathscr{P}_2^0$ и кривую $\mathscr{F}$. Его поверхность соответствует значениям параметра $-1 < u < 0$. Область Σ_2 выделяется поверхностью $\widetilde{\mathscr{G}}$ при значении $u < -1$ и содержит две ветви $\mathscr{P}_1^\pm$ параболы $\mathscr{P}_1$ (см. рис. 2).

6.3. Выделение областей с различной сигнатурой. Поверхность $\mathscr{F}_0$, на которой многочлен $f(\mu)$ имеет нулевой корень, согласно (17) представляет собой круговой конус $\mathscr{C}$ с вершиной в точке $\mathscr{Q}_0 = (1{,}0,-3)$ и осью параллельной оси OW. Он делит подпространство Π' на три области W_j, $j = 1{,}2{,}3$, в каждой из которой нормальная форма (8) имеет свою сигнатуру. Обозначим через W_1 внутренность верхнего конуса, через W_2 — внутренность нижнего конуса и, наконец, через W_3 внешнюю область. Для вычисления сигнатуры достаточно выбрать по одной точке в каждой из областей W_j и применить теорему 3.

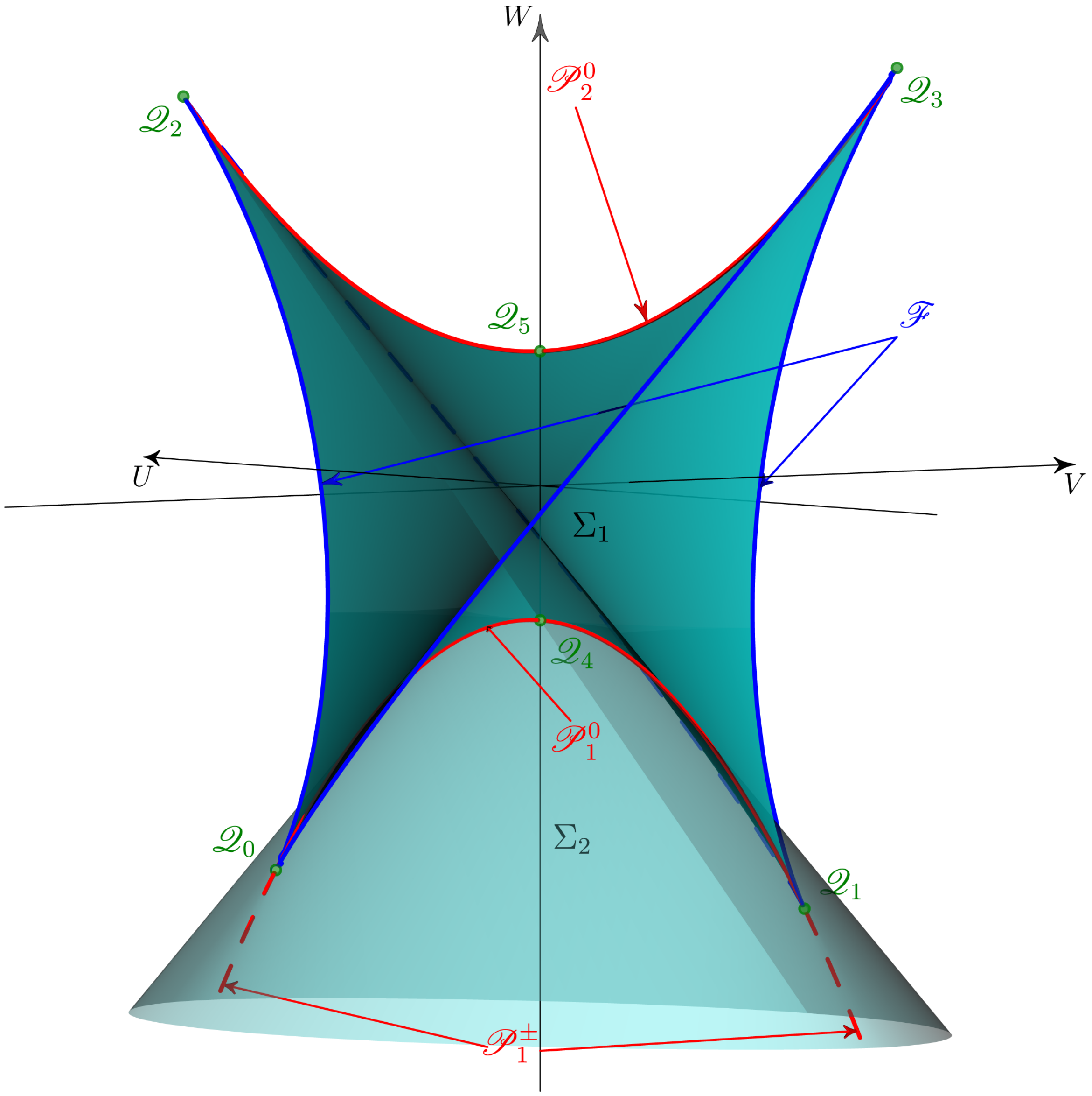

Рис. 2. Граница множества устойчивости Σ. Показаны особые точки $\mathscr{Q}_i$ (зеленым), $i = 0, \ldots, 3$, параболические сегменты семейств $\mathscr{P}^0_{1,2}$ (красным), $\mathscr{F}$ (синим). Граница области Σ_1 (криволинейный тетраэдр) выделена более темной заливкой.

В области W_1**:** выберем точку $(1,0,-2)$, тогда последовательность из 8-ми главных миноров матрицы A имеет вид

$$1, \frac{7}{8K^2}, \left(\frac{7}{8K^2}\right)^2, -\frac{49k^2}{2^9K^4}, \left(\frac{7k^2}{64K^2}\right)^2, -\frac{7k^2(k^2-7)}{2^{12}K^2}, \left(\frac{k^2-7}{64}\right)^2, \frac{k^2-7}{2^{12}}, \frac{1}{2^{12}}.$$

В этой последовательности при $k^2 > 7$ имеется 4 перемены знака. Если $k^2 < 7$, то число перемен знака остается таким же, но эти перемены происходят между другими членами последовательности. При $k^2 = 7$ последовательность содержит три подряд идущих нуля и, следовательно, метод вычисления сигнатуры неприменим, но поскольку при переходе через это значение сигнатура не меняется, то при всех значениях параметра k сигнатура $s = 0$.

В области W_2: выберем точку $(1{,}0, -4)$. В ней последовательность миноров матрицы A есть

$$1, \frac{9}{8K^2}, \left(\frac{9}{8K^2}\right)^2, \frac{81k^2}{2^9K^4}, \left(\frac{9k^2}{64K^2}\right)^2, \frac{9k^2(k^2+9)}{2^{12}K^2}, \left(\frac{k^2+9}{64}\right)^2, \frac{k^2+9}{2^{12}}, \frac{1}{2^{12}}.$$

Поскольку все главные миноры положительны, то сигнатура $s = 8$.

В области W_3: выберем точку $O = (0{,}0{,}0)$, в которой последовательность главных миноров есть

$$1, \frac{1}{8K^2}, \frac{1}{64K^4}, \frac{k^2}{2^9K^4}, \frac{k^4}{2^{12}K^4}, -\frac{k^2(7k^2-1)}{2^{12}K^2}, \left(\frac{7k^2-1}{64}\right)^2, \frac{7(7k^2-1)}{2^{12}}, \frac{7^2}{2^{12}}.$$

В ней при $7k^2 \neq 1$ имеется 2 перемены знака, следовательно сигнатура $s = 4$ при всех значениях параметра k, даже когда при $7k^2 = 1$ в последовательности имеет три идущих подряд нуля.

Дадим описание взаимного расположения конуса $\mathscr{C}$, на котором сигнатура нормальной формы (8) меняет свое значение, и границы $\partial\Sigma$ области устойчивости линейной гамильтоновой системы с матрицей (13). Конус $\mathscr{C}$ касается линейчатой поверхности $\widetilde{\mathscr{G}}$ вдоль прямой

$$\mathscr{C}_1 : \{V = 0, \quad 4U - W + 1 = 0\}, \tag{22}$$

которая проходит через точку $\mathscr{Q}_0$ — вершину конуса, и точку $\mathscr{Q}_5$ — вершину параболы параболы $\mathscr{P}_2$. Поскольку прямая $\mathscr{C}_1$ принадлежит дискриминантному множеству $\mathscr{G}$, то на ней многочлен $f(\mu)$ имеет нулевой корень кратности 2.

Конус $\mathscr{C}$ каждую из областей Σ_1 и Σ_2 делит на две подобласти. Подобласть, которая попадает внутрь конуса будем обозначать с верхним индексом «$+$», а которая лежит вне его — «$-$». Область W_2 целиком расположена в области Σ_2, а область W_1 внешне касается области Σ_2 вдоль прямой $\mathscr{C}_1$. Следовательно, нижний конус делит область Σ_2 на две части: Σ_2^+ с сигнатурой $s = 8$, и $\Sigma_2^- = \Sigma_2 \backslash W_2$ с сигнатурой $s = 4$. Верхний конус делит область Σ_1 на две части: Σ_1^+ содержит особые точки $\mathscr{Q}_2$ и $\mathscr{Q}_3$ с прилегающими частями в виде трехгранного клина и $\Sigma_1^- = \Sigma_1 \backslash \Sigma_1^+$. В Σ_1^+ сигнатура $s = 0$, в Σ_1^- — $s = 4$.

Итак, только подобласть Σ_2^+ с максимальным значением сигнатуры $s = 8$ будет устойчивой при наличии малых нелинейных возмущений. Для других подобластей возможна формальная устойчивость при выполнении дополнительных условий, часть из которых формулируется с помощью резонансных множеств $\mathscr{F}_3$ и $\mathscr{F}_4$ характеристического многочлена (4).

7. Структура резонансных множеств

Прямое вычисление обобщенного дискриминанта $\mathscr{G}\mathscr{D}_N(f)$ полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ матрицы JA показывает, что его выражение существенно сложнее, чем выражение обычного дискриминанта $\mathscr{D}(f)$:

1) многочлен $\mathscr{G}\mathscr{D}_N(f)$ имеет 12-й порядок относительно переменных U, V, W, а не 10-й как в случае с обычным дискриминантом $\mathscr{D}(f)$;

2) он раскладывается в общем случае на два множителя 6-го порядка;

3) нули каждого из этих многочленов по любой паре переменных задают гиперэллиптическую кривую, коэффициенты которой зависят от третьей переменной.

Поскольку нам необходимо выполнить исследование резонансных поверхностей не во всем пространстве параметров Π', а только для множества устойчивости Σ (точнее, для трех оставшихся подобластей Σ_1^+, Σ_1^-, Σ_2^-), то, как будет показано ниже, его можно провести для случаев $U = 0$ и $V = 0$.

7.1. Резонансные множества при $V = 0$. В силу замечания 1 все резонансные множества $\mathscr{F}_{p+q}$ симметричны относительно плоскости $V = 0$. Рассмотрим их расположение на плоскости $\mathscr{L}$ и поведение инвариантов нормальной формы на них. Напомним, что плоскость $\mathscr{L}$ входит в резонансное множество $\mathscr{F}_2$, следовательно, на нем многочлен $f(\mu)$ имеет кратные корни. Плоскость $\mathscr{L}$ пересекает только область устойчивости Σ_2. Исследование проведем для произвольного значения $N > 0$.

При $V = 0$ левая часть уравнения $\mathscr{G}\mathscr{D}_N(f) = 0$ раскладывается на 4 множителя, каждый из которых есть первая или вторая степень квадратичной функции от переменных U, W с полиномиальными коэффициентами от N.

Уравнение с первым множителем определяет прямую $\mathscr{C}_1$ (22), которая не принадлежит области Σ_2.

Уравнение со вторым множителем задает пару параллельных прямых. Пусть величина соизмеримости N корней полинома $f(\mu)$ есть квадрат натурального числа: $N = l^2$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда уравнения прямых имеют вид

$$\mathscr{S}_1 : W = 4U - 7\left(\frac{l-1}{l+1}\right)^2, \quad \mathscr{S}_2 : W = 4U - 7\left(\frac{l+1}{l-1}\right)^2, \tag{23}$$

а корни многочлена $f(\mu)$ на них принимают значения

$$\mu_1 = -\left(\frac{2l}{l+1}\right)^2, \ \mu_2 = -\left(\frac{2}{l+1}\right)^2, \ \mu_{3,4} = U - \left(\frac{l-1}{l+1}\right)^2 \text{ на прямой } \mathscr{S}_1,$$
$$\mu_1 = -\left(\frac{2l}{l-1}\right)^2, \ \mu_2 = -\left(\frac{2}{l-1}\right)^2, \ \mu_{3,4} = U - \left(\frac{l+1}{l-1}\right)^2 \text{ на прямой } \mathscr{S}_2.$$

Таким образом, имеет место соизмеримость между корнями μ_1 и μ_2. При $l \to \infty$ прямые $\mathscr{S}_{1,2}$ стремятся к предельной прямой $W = 4U - 7$ — образующей конуса $\mathscr{C}$, который служит границей подобластей Σ_2^+ и Σ_2^-. Прямая $\mathscr{S}_1$ проходит через Σ_2^- и на ней инварианты σ_1 и σ_2, соответствующие собственным значениям $\lambda_1 = \sqrt{\mu_1}$ и $\lambda_2 = \sqrt{\mu_2}$, имеют разные знаки. На той части прямой $\mathscr{S}_2$, которая проходит через Σ_2^+, соответствующие инварианты имеют одинаковые знаки.

Уравнения с третьим и четвертым множителями задают два пучка парабол, проходящих через точку $\mathscr{Q}_0$. Их параметрическое представление имеет вид

$$\mathscr{S}_3 : \Big[U = N(N-1)t^2 - 2Nt + 1, \qquad W = -4N(N+1)t^2 + 8Nt - 3\Big],$$
$$\mathscr{S}_4 : \Big[U = -N^2(N-1)t^2 - 2Nt + 1, \ W = -4N^2(N+1)t^2 + 8Nt - 3\Big].$$

На этих семействах парабол корни многочлена $f(\mu)$ принимают значения

$$\mu_1 = -(Nt-2)^2, \ \mu_2 = -(Nt)^2, \ \mu_{3,4} = -Nt^2 \text{ на семействе } \mathscr{S}_3,$$
$$\mu_1 = -(Nt-2)^2, \ \mu_2 = -(Nt)^2, \ \mu_{3,4} = -N^3t^2 \text{ на семействе } \mathscr{S}_4.$$

Таким образом, имеет место соизмеримость между корнем μ_2 и парой корней $\mu_{3,4}$. При $N \to \infty$ семейство $\mathscr{S}_3$ приближается к предельной прямой $\mathscr{C}_1$, семейство $\mathscr{S}_4$ приближается к прямой $W = 4U - 7$. Вычисления показывают, что инварианты σ_i, $i = 2{,}3{,}4$, соответствующие соизмеримым корням λ_i, одного знака на каждом из семейств.

Итак, формальная устойчивость на сечении подобласти Σ_2^- плоскостью $\mathscr{L}$ возможна всюду, за исключением двух прямых из семейства $\mathscr{S}_1$, соответствующих значениям параметра $l = 2{,}3$. Расположение резонансных множеств $\mathscr{F}_3$ и $\mathscr{F}_4$ дано на рис. 3.

7.2. Резонансные множества при $U = 0$. Плоскость $\mathscr{M} = \{Q : U = 0\}$ пересекает обе области $\Sigma_{1,2}$ множества устойчивости. Нас интересует расположение резонансных множеств $\mathscr{F}_i$, $i = 0{,}2{,}3$ в области Σ_1, а также знаки инвариантов нормальной формы, соответствующие резонансным собственным значениям. Конус $\mathscr{C}$ делит область Σ_1 на две подобласти. Подробнее рассмотрим Σ_1^+, в которой сигнатура квадратичной формы $H_2(Z)$ равна 0.

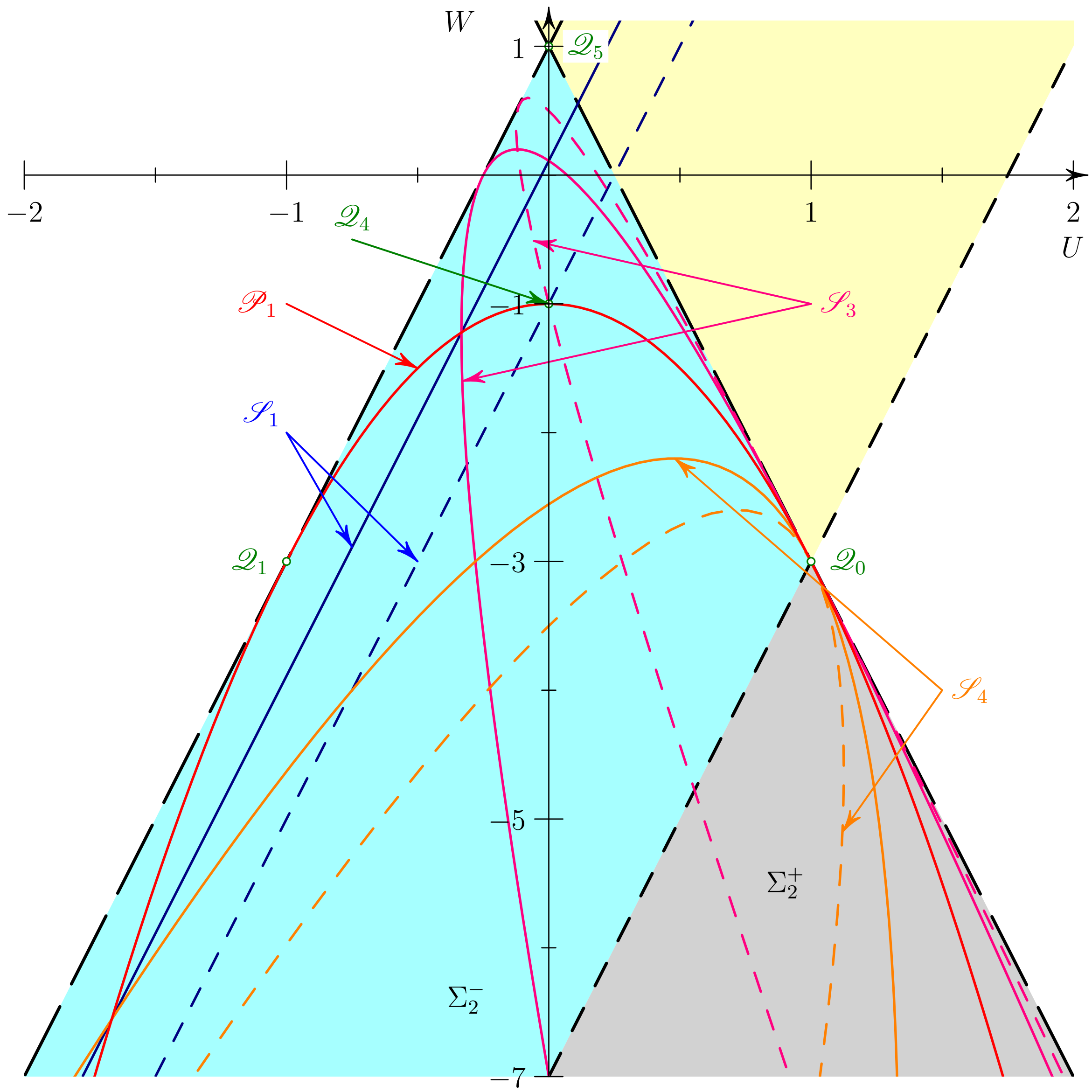

Рис. 3. Сечение резонансных множеств $\mathscr{F}_i$, $i = 0,2,3,4$ плоскостью $\mathscr{L}$. Граница $\widetilde{\mathscr{G}}$ области устойчивости Σ показана длинным пунктиром, конуса $\mathscr{C}$ — коротким пунктиром, особые точки $\mathscr{Q}_i$, $i = 0,1,4,5$ (зеленым), семейство $\mathscr{P}_1$ (красным). Сплошной линией показано сечение резонансного множества $\mathscr{F}_3$, пунктирной — $\mathscr{F}_4$. Каждое из семеств $\mathscr{S}_i$, $i = 1,3,4$ дано своим цветом. Заливкой показаны области с различным значением сигнатуры.

При $U = 0$ левая часть уравнения $\mathscr{G}\mathscr{D}_N(f) = 0$ раскладывается на 4 множителя. Пусть, как и в предыдущем подразделе $N = l^2$, $l \in \mathbb{N}$. Первая пара множителей есть многочлены 2-й степени, а вторая пара — многочлены 4-й степени.

Уравнения второй степени задают гиперболы, из которых только одна

$\mathscr{H}_1$ проходит через сечение Σ_1^+ и имеет параметризацию

$$\mathscr{H}_1 : \left[V = \frac{t}{8} - \frac{2}{t}\left(\frac{l-1}{l+1}\right)^2, \quad W = \frac{t}{2} + \frac{8}{t}\left(\frac{l-1}{l+1}\right)^2 - \frac{3l^2-2l+3}{(l+1)^2} \right].$$

На гиперболе $\mathscr{H}_1$ многочлен $f(\mu)$ имеет пару корней с соизмеримостью l^2:

$$\mu_1 = -\left(\frac{l}{l+1}\right)^2, \quad \mu_2 = -\left(\frac{1}{l+1}\right)^2,$$

но инварианты σ_1 и σ_2 имеют разные знаки.

Уравнения 4-й степени задают эллиптические кривые, из которых только одна $\mathscr{E}_1$ проходит через $\Sigma_1 \cup \mathscr{M}$. Можно привести многочлен четвертой степени к нормальной форме Вейерштрасса, а затем выписать параметризацию этой кривой через функцию Вейерштрасса $\wp$ [24], но получившееся выражение очень громоздко и слабо применимо для анализа корней. Исследование кривой $\mathscr{E}_1$ было выполнено средствами степенной геометрии [25] и показало, что она имеет особую точку возврата, которая для значений $l \geqslant 1$ попадает в область $\Sigma_1^+ \cup \mathscr{M}$. В этой точке имеет место четрехчастотный резонанс. На каждой из ветвей кривой $\mathscr{E}_1$ имеет место трехчастотный резонанс и, следовательно, в силу того, что сигнатура $s = 0$, то обязательно будет пара инвариантов σ_i с разными знаками.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Область Σ_1^+ устроена как трехгранный клин с вершиной в точке $\mathscr{Q}_3$. Этот клин «рассекается» резонансными множествами $\mathscr{F}_i$, $i = 3{,}4$, на каждом из которых имеются соизмеримые собственные числа, которым соответствуют инварианты σ_i нормальной формы разных знаков. Если предположить, что для точек этой области выполнено условие B, то малое нелинейное возмущение приведет к разрушению устойчивости на этих множествах.

8. Заключение

Примечательно, что в физическую область Φ значений параметров частично попадают подобласть Σ_1^+ и область Σ_2, в том числе и ее подчасть Σ_2^+, на которой имеет место нелинейная устойчивость. Эта подобласть в отличие от узкого трехгранного клина Σ_1^+ достаточно массивна и ее размер может регулироваться параметрами K и k.

Благодарности

Автор выражает благодарность профессору А.Д. Брюно за плодотворное обсуждение проблемы и ценные советы, а также профессору А.Ю. Утешеву за ссылку [7].

Список литературы

[1] *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М. : Наука, 1966. 531 с.

[2] *Батхин А. Б., Брюно А. Д., Варин В. П.* Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // *ПММ.* 2012. Т. 76, № 1. С. 80–133.

[3] *Брюно А. Д., Батхин А. Б., Варин В. П.* Вычисление множеств устойчивости в многопараметрических задачах. Препринт № 23. М. : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2010. 22 с. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2010/source/prep2010_23.pdf.

[4] *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М. : Наука, 1990. 296 с.

[5] *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М. : Наука, 1979. 304 с.

[6] *Батхин А. Б.* Устойчивость одной многопараметрической системы Гамильтона. Препринт № 69. М. : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2011. 28 с. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011_69.pdf.

[7] *Uteshev A. Y., Cherkasov T. M.* The search for the maximum of a polynomial // *J. Symbolic Computation.* 1998. Vol. 25, no. 5. P. 587–618.

[8] *Basu S., Pollack R., Roy M.-F.* Algorithms in Real Algebraic Geometry. 2 edition. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2006. Vol. 10 of *Algorithms and Computation in Mathematics.* 664 p.

[9] *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. 9 изд. М. : Изд-во «Наука», 1968. 432 с.

[10] *Зигель К., Мозер Ю.* Лекции по небесной механике. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.

[11] *Moser J.* New aspects in the theory of stability of hamiltonian systems // *Comm. Pure Appl. Math.* 1958. Vol. 11, no. 1. P. 81–114.

[12] *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М. : Наука, 1978. 312 с.

[13] *Биркгоф Д. Д.* Динамические системы. Ижевск : Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. Т. VIII из *Библиотека «R&C Dynamics».* 408 с.

[14] *Брюно А. Д.* О формальной устойчивости систем Гамильтона // *Мат. заметки.* 1967. Т. 1, № 3. С. 325–330.

[15] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. 5-е изд. М. : Физматлит, 2004. 560 с.

[16] *Майлыбаев А. А., Сейранян А. П.* Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М. : Физматлит, 2009. 400 с.

[17] *Herrmann G., Jong I.-C.* On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems // *Trans. AMSE, J. Appl. Mech.* 1965. Vol. 32. P. 592–597.

[18] *Маркеев А. П.* Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт комьютерных исследований, 2009. 396 с.

[19] *Maciejewski A. J., Gozdziewski K.* Normalization algorithms of Hamiltonian near an equilibrium point // *Astrophysics and Space Science*. 1991. Vol. 179. P. 1–11.

[20] *Журавлев В. Ф., Петров А. Г., Шундерюк М. М.* Аисмптотическая симметризация гамильтоновых систем: учебно–методическое пособие. М. : МФТИ, 2010. 56 с.

[21] *Burgoyne N., Cushman R.* Normal Forms for Real Linear Hamiltonian Systems with Purely Imaginary Eigenvalues // *Celestial Mechanics*. 1974. Vol. 8. P. 435–443.

[22] *Брюно А. Д., Батхин А. Б., Варин В. П.* Множество устойчивости одной гироскопической задачи. Препринт № 4. М. : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2010. 30 с. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2010/source/prep2010_04.pdf.

[23] *Батхин А. Б., Брюно А. Д., Варин В. П.* Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем. Препринт № 42. М. : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2011. 32 с. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011_42.pdf.

[24] *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. 2-е изд. М. : «Наука», 1970. 304 с.

[25] *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М. : Физматлит, 1998. 288 с.