ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 27 за 2012 г.

Пустыльников Л.Д.

О классической дзета-функции Римана

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Пустыльников Л.Д. О классической дзета-функции Римана // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 27. 17 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-27

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

Л. Д. Пустыльников

О КЛАССИЧЕСКОЙ ДЗЕТА–ФУНКЦИИ РИМАНА

Москва, 2012 г.

УДК 511.36

Л. Д. Пустыльников. О классической дзета-функции Римана. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2012.

Дана новая конструкция оператора, действующего в гильбертовом пространстве так, что гипотеза Римана о нулях дзета-функции эквивалентна существованию собственного вектора с собственным значением -1 для этого оператора. Построена также динамическая система, которая связана с гипотезой Римана так, что у дзета-функции существует комплексный нуль, не лежащий на критической прямой тогда и только тогда, когда у динамической системы существует периодическая траектория второго порядка, имеющая специальный вид. В основе построений лежит представление дзета-функции Римана с помощью бесконечного произведения конкретных матриц второго порядка.

L. D. Pustyl'nikov. On the classical Riemann zeta-function. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2012.

We give a new construction of an operator acting in a Hilbert space such that the Riemann hypothesis on the zeros of the zeta-function is equivalent to the existence of an eigenvector for this operator with eigenvalue -1. We give also the construction of a dynamical system which turns out to be related to the Riemann hypothesis in the following way: there exists a complex zero of the zeta-function not lying on the critical line if and only if there is a periodic trajectory of order two having a special form for this dynamical system. The representation of the Riemann zeta-function by means of the infinite product of concrete matrices of order two lies on the basis of this construction.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, гранты 11-01-00023.

E-mail:
сайт: www.keldysh.ru

Введение

В последние 20 лет получены новые результаты в теории классической дзета-функции Римана $\zeta(s)$, связанные с гипотезой Римана о нулях: все комплексные нули функции $\zeta(s)$ расположены на критической прямой $\operatorname{Re} s = \dfrac{1}{2}$ ([1] и содержащийся там список литературы). Часть результатов (первая группа) связана с поведением функции Римана $\xi(s)$ и её чётных производных в точке $s = \dfrac{1}{2}$. Здесь $\xi(s) = \dfrac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)$, где $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера. Доказано ([2]), что если хотя бы одна чётная производная функции $\xi(s)$ в точке $s = \dfrac{1}{2}$ — неположительная, то гипотеза Римана о нулях дзета-функции $\zeta(s)$ не справедлива. Однако также было доказано ([2]), что все чётные производные функции $\xi(s)$ в точке $s = \dfrac{1}{2}$ строго положительные и найдена асимптотика этих производных, когда порядок производной стремится к бесконечности ([3], [4]). Эти результаты позволяют доказать, что гипотеза Римана не справедлива для сколь угодно точной аппроксимации функции $\zeta(s)$, удовлетворяющей тому же функциональному уравнению и имеющей те же вещественные нули и тот же единственный полюс, что и функция $\zeta(s)$ ([5]). Дальнейшие результаты в этом направлении получены в [6]–[10]. Вторая группа результатов связана с построением оператора $A(s)$, действующего в гильбертовом пространстве, такого что гипотеза Римана эквивалентна проблеме существования собственного вектора с собственным значением $\lambda = -1$ для этого оператора ([11]). Была также построена динамическая система F, которая связана с гипотезой Римана следующим образом: для каждого комплексного нуля функции $\zeta(s)$, не лежащего на прямой $\operatorname{Re} s = \dfrac{1}{2}$ (символ $\operatorname{Re} s$ обозначает вещественную часть s), существует периодическая траектория второго порядка у этой динамической системы, имеющая специальный вид ([12]). Обратное также справедливо ([12]): если у динамической системы F существует подобная периодической траектория второго порядка, то гипотеза Римана не справедлива. В основе доказательств утверждений, касающихся оператора $A(s)$ и динамической системы F, а также их связей с функцией $\zeta(s)$ лежит теорема о представлении функции $\zeta(s)$ в критической полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$ посредством бесконечного произведения матриц второго порядка ([11], [12]). В настоящей работе получены новые результаты, относящиеся к этой второй группе, в которых центральное место занимает семейство операторов $A(s)$, действующих в гильбертовом пространстве ℓ, и динамическая система F, действующая в пространстве $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \Pi \times \ell \times \ell$. Здесь $\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \{s : 0 < \operatorname{Re} < 1\}$ — критическая полоса, ℓ — пространство односторонних последовательностей

$x=(x_1,x_2,\ldots)$ комплексных чисел таких, что $\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu|^2<\infty$, символ $\times$ обозначает прямое произведение. Конструкции оператора $A(s)$ и динамической системы F зависят от последовательности функций $h_k(s)$ $(k=0,1,\ldots)$, определённых в критической полосе Π ([11], [12]). При этом существенное требование к последовательности $h_k(s)$ состоит в том, что при всех $k=0,1,\ldots$ в области Π выполняется неравенство $h_k(s)\neq 0$. Для функций $h_k(s)$, введённых в [11] и [12], это неравенство нужно было доказывать ([12]) и для них это утверждение не тривиально в связи с тем, что на границе области Π в точке $s=0$ при $k=2,3,\ldots$ справедливо равенство $h_k(0)=0$. В настоящей работе обнаружена другая более простая и естественная последовательность функций $h_k(s)$ $(k=0,1,2,\ldots;\ s\in\Pi)$, приводящая к таким же результатам, связывающим операторы $A(s)$, динамическую систему F и гипотезу Римана о нулях функции $\zeta(s)$, и для этой последовательности $h_k(s)$ неравенство $h_k(s)\neq 0$ $(k=0,1,2,\ldots;\ s\in\Pi)$ — очевидно следует из определения $h_k(s)$. Эта последовательность функций $h_k(s)$ имеет вид $h_k(s)=\dfrac{(-1)^k}{(k+1)^s}$ $(k=0,1,\ldots)$ и возникает в результате рассмотрения функции $\varkappa=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$, которая в области $\operatorname{Re}s>1$ связана с функцией $\zeta(s)\stackrel{\text{def}}{=}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ с помощью равенства $\varkappa(s)=(1-2^{1-s})\zeta(s)$ (1). Это равенство известно ([13], гл. II, п. 1) и существенно используется в настоящей работе. С помощью него в разделе 3 получены новые представления функций $\zeta(s)$ и $\varkappa(s)$ посредством бесконечных произведений матриц второго порядка, которые используются в доказательствах теорем 3 и 4 в разделах 5 и 6. Нумерация формул, лемм и теорем в этой работе — сквозная.

§ 1. Определение функций $\zeta(s)$, $\varkappa(s)$ и связь между ними

Определение 1. Дзета-функция $\zeta(s)$ в области $\operatorname{Re}s>1$ определяется рядом

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}. \tag{1}$$

Определение 2. Функция $\varkappa(s)$ в области $\operatorname{Re}s>0$ задаётся рядом

$$\varkappa(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}. \tag{2}$$

Лемма 1. *В области* $\operatorname{Re}s>0$ *справедливо равенство*

$$\varkappa(s)=(1-2^{1-s})\zeta(s). \tag{3}$$

$\triangleright$ В силу (1) и (2) в области $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s) - \varkappa(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^s} = 2^{1-s}\zeta(s).$$

Поэтому в области $\operatorname{Re} s > 0$ справедливо равенство (3). $\triangleleft$

§ 2. Построение оператора A

Рассмотрим гильбертово пространство ℓ, элементами которого являются односторонние последовательности $x = (x_1, x_2, \ldots)$ комплексных чисел, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu|^2 < \infty$, со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} x_\nu \bar{y}_\nu$, где $y = (y_1, y_2, \ldots)$, $\bar{y}_\nu$ — число комплексно-сопряженное числу y_ν. Введём оператор $A = A(s)$, зависящий от комплексного числа s, удовлетворяющего условию $0 < \operatorname{Re} s < 1$, который действует на ℓ и задаётся с помощью трёхдиагональной матрицы $A = (\alpha_{kj})$, $k, j = 1, 2, \ldots$ с элементами

$$\alpha_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k - j = -1 \\ p_k, & \text{если} \quad 0 \leqslant k - j \leqslant 1 \\ 0, & \text{если} \quad |k - j| > 1 \end{cases},$$

где

$$p_k = p_k(s) = \frac{h_k}{h_{k-1}}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$
$$h_k = h_k(s) = \frac{(-1)^k}{(k+1)^s}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Замечание 1. Имеем равенство

$$p_k(s) = -\frac{k^s}{(k+1)^s}.$$

Оператор A переводит $x = (x_1, x_2, \ldots)$ в $x' = (x'_1, x'_2, \ldots)$, где

$$x'_k = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{kj} x_j, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

§ 3. Представление функций $\zeta(s)$ и $\varkappa(s)$ посредством бесконечных произведений матриц второго порядка

При $k = 0, 1, 2, \ldots$ введём комплексные матрицы второго порядка

$$Q_0 = Q_0(s) = \begin{pmatrix} (1-2^{1-s})^{-1} & 0 \\ 0 & (1-2^{1-s})^{-1} \end{pmatrix},$$

$$Q_k = Q_k(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p_k(s) & -1-p_k(s) \end{pmatrix}$$

$(k = 1, 2, \ldots)$, где $p_k = p_k(s)$ — функции, введённые в 2.

Замечание 2. В силу замечания 1 при $k = 1, 2, \ldots$

$$Q_k(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{k^s}{(k+1)^s} & \dfrac{k^s}{(k+1)^s} - 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Бесконечные произведения*

$$Q'_\infty = Q'_\infty(s) = \lim_{k\to\infty} Q_{2k}(s)Q_{2k-1}(s)\ldots Q_1(s)$$

и

$$Q''_\infty = Q''_\infty(s) = \lim_{k\to\infty} Q_{2k-1}(s)Q_{2k-2}(s)\ldots Q_1(s)$$

определены в области $0 < \operatorname{Re} s < 1$, *и справедливы равенства*

$$Q'_\infty(s) = \begin{pmatrix} 1-\varkappa(s) & -\varkappa(s) \\ \varkappa(s)-1 & \varkappa(s) \end{pmatrix}, \quad Q''_\infty(s) = \begin{pmatrix} \varkappa(s)-1 & \varkappa(s) \\ 1-\varkappa(s) & -\varkappa(s) \end{pmatrix}.$$

$\triangleright$ С помощью индукции несложно получить следующие равенства:

$$Q_{2k}(s)Q_{2k-1}(s)\ldots Q_1(s) = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{\nu=1}^{2k-1} h_\nu(s) & -1-\sum\limits_{\nu=1}^{2k-1} h_\nu(s) \\ \sum\limits_{\nu=1}^{2k} h_\nu(s) & 1+\sum\limits_{\nu=1}^{2k} h_\nu(s) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$Q_{2k-1}(s)Q_{2k-2}(s)\ldots Q_1(s) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\nu=1}^{2k-2} h_\nu(s) & 1+\sum\limits_{\nu=1}^{2k-1} h_\nu(s) \\ -\sum\limits_{\nu=1}^{2k-1} h_\nu(s) & -1-\sum\limits_{\nu=1}^{2k-1} h_\nu(s) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $k > 1$, а величина $h_\nu(s)$ при $\nu = k$ введена в 2. В силу (2) в области $\operatorname{Re} s > 0$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu(s) = \varkappa(s). \tag{6}$$

Поэтому теорема 1 следует из (4)–(6). $\triangleleft$

Теорема 2. *Бесконечные произведения*

$$R'_\infty = R'_\infty(s) = \lim_{k\to\infty} Q_{2k}(s)Q_{2k-1}(s)\ldots Q_1(s)Q_0(s)$$

и

$$R''_\infty = R''_\infty(s) = \lim_{k\to\infty} Q_{2k-1}(s)Q_{2k-2}(s)\ldots Q_1(s)Q_0(s)$$

определены в области $0 < \operatorname{Re} s < 1$*, и справедливы равенства*

$$R'_\infty(s) = \begin{pmatrix} (1-2^{1-s})^{-1} - \zeta(s) & -\zeta(s) \\ -(1-2^{1-s})^{-1} + \zeta(s) & \zeta(s) \end{pmatrix},$$

$$R''_\infty(s) = \begin{pmatrix} -(1-2^{1-s})^{-1} + \zeta(s) & \zeta(s) \\ (1-2^{1-s})^{-1} - \zeta(s) & -\zeta(s) \end{pmatrix}.$$

$\triangleright$ Матрица $Q_0(s)$ — скалярная, и поэтому для любого натурального числа $m > 2$ справедливо равенство

$$Q_m(s)Q_{m-1}(s)\ldots Q_1(s)Q_0(s) = Q_0(s)Q_m(s)\ldots Q_1(s). \tag{7}$$

Применяя теорему 1 и (7), получим, что матрицы $R'_\infty(s)$ и $R''_\infty(s)$ определены в области $0 < \operatorname{Re} s < 1$ и выполняются равенства

$$R'_\infty(s) = Q_0(s)\begin{pmatrix} 1-\varkappa(s) & -\varkappa(s) \\ \varkappa(s)-1 & \varkappa(s) \end{pmatrix},\ R''_\infty(s) = Q_0(s)\begin{pmatrix} \varkappa(s)-1 & \varkappa(s) \\ 1-\varkappa(s) & -\varkappa(s) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Теперь утверждения теоремы 2 очевидно следуют из равенств (3), (8) и определения матрицы $Q_0(s)$. $\triangleleft$

§ 4. Вспомогательные леммы

Будем предполагать, что $\operatorname{Re} s > 0$, $k \geqslant 1$, k — целое число. В силу (2)

$$\varkappa(s) = \left(\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s}\right) + \ldots, \tag{9}$$

где $n > 2$, n — целое число. Определим функции

$$\varkappa_k(s) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{(2k-1)^s} - \frac{1}{(2k)^s}\right) + \left(\frac{1}{(2k+1)^s} - \frac{1}{(2k+2)^s}\right) + \ldots. \tag{10}$$

Далее имеем

$$\frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s} = s\int\limits_{2n-1}^{2n} x^{-s-1}\,dx.$$

Поэтому в силу (10)

$$\begin{aligned}\varkappa_k(s) &= s\sum_{n=k}^{\infty}\int\limits_{2n-1}^{2n} x^{-s-1}\,dx = \\ &= s\int\limits_{2k-1}^{2k}\bigl(x^{-s-1} + (x+2)^{-s-1} + \ldots + (x+2\nu)^{-s-1} + \ldots\bigr)\,dx = \\ &= s\int\limits_{2k-1}^{2k} T(x)\,dx \quad (\nu > 1, \quad \nu \text{ — целое}),\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$T(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(x+2\nu)^{-s-1}. \tag{12}$$

Лемма 2. *Пусть $\varphi(y)$ — функция, имеющая непрерывную производную в интервале $a < y < b$. Тогда справедливо равенство*

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\leqslant b}\varphi(n) = \int\limits_a^b \varphi(y)\,dy + \int\limits_a^b\left(y - [y] - \frac{1}{2}\right)\varphi'(y)\,dy + \\ + \left(a - [a] - \frac{1}{2}\right)\varphi(a) - \left(b - [b] - \frac{1}{2}\right)\varphi(b),\end{aligned}$$

где n — целое число.

Доказательство леммы 2 дано в [13] (глава II).

Применим лемму 2 для случая $\varphi(y) = (x+2y)^{-s-1}$, $2k-1 < x \leqslant 2k$, b — целое число, $b > a$. Тогда имеем:

$$\sum_{n=0}^{b}(x+2n)^{-s-1} = \sum_{n=a+1}^{b}(x+2n)^{-s-1}$$

где $a=-1$. Поэтому в силу леммы 2

$$\sum_{n=0}^{b}(x+2n)^{-s-1}=\int\limits_{-1}^{b}(x+2y)^{-s-1}\,dy+$$
$$+2\int\limits_{-1}^{b}\left(y-[y]-\frac{1}{2}\right)(-s-1)(x+2y)^{-s-2}\,dy-$$
$$-\frac{1}{2}(x-2)^{-s-1}+\frac{1}{2}(x+2b)^{-s-1}=$$
$$=-\frac{1}{2s}\big((x+2b)^{-s}-(x-2)^{-s}\big)+\frac{1}{2}\big((x+2b)^{-s-1}-(x-2)^{-s-1}\big)-$$
$$-2(s+1)\int\limits_{-1}^{b}\left(y-[y]-\frac{1}{2}\right)(x+2y)^{-s-2}\,dy.$$

Переходя к пределу при $b\to\infty$, в силу (12) получим:

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x+2n)^{-s-1}=\frac{1}{2s}(x-2)^{-s}-\frac{1}{2}(x-2)^{-s-1}-$$
$$-2(s+1)\int\limits_{-1}^{\infty}\left(y-[y]-\frac{1}{2}\right)(x+2y)^{-s-2}\,dy. \tag{13}$$

Полагаем $s=\sigma+ti$, где σ и t — вещественные числа, i — мнимая единица. Тогда имеем:

$$\left|\frac{1}{2s}(x-2)^{-s}\right|^2=\frac{1}{4s\bar{s}}(x-2)^{-2\sigma}\leqslant\frac{1}{4(\sigma^2+t^2)(2k-3)^{2\sigma}}, \tag{14}$$

$$\left|\frac{1}{2}(x-2)^{-s-1}\right|^2\leqslant\frac{1}{4(2k-3)^{2\sigma+2}}, \tag{15}$$

$$2\left|(s+1)\int\limits_{-1}^{\infty}\left(y-[y]-\frac{1}{2}\right)(x+2y)^{-s-2}\,dy\right|^2=4\big((\sigma+1)^2+t^2\big)\times$$
$$\times\int\limits_{-1}^{\infty}\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{\left(y-[y]-\frac{1}{2}\right)}{(x+2y)^{\sigma+2+it}}\left(m-[m]-\frac{1}{2}\right)(x+2m)^{-\sigma-2+it}\,dydm\leqslant$$
$$\leqslant\big((\sigma+1)^2+t^2\big)\left(\int\limits_{-1}^{\infty}(x+2y)^{-\sigma-2}\,dy\right)^2\leqslant\big((\sigma+1)^2+t^2\big)\frac{(x-2)^{2(-\sigma-1)}}{(-\sigma-1)^2}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{(\sigma+1)^2+t^2}{(\sigma+1)^2(2k-3)^{2(\sigma+1)}}. \tag{16}$$

Применяя (13)–(16) получим, что если $2k-1 < x \leqslant 2k$, то справедливо неравенство

$$\left|sT(x)\right|^2 \leqslant \frac{3}{4}\frac{1}{(2k-3)^{2\sigma}} + \frac{3|s|^2}{4(2k-3)^{2\sigma+2}} + \frac{3|s+1|^2|s|^2}{(\sigma+1)^2(2k-3)^{2\sigma+2}}. \tag{17}$$

Пусть ε — такое число, что

$$0 < \varepsilon < 1. \tag{18}$$

Тогда из неравенства (17) следует, что найдётся такое натуральное число k_*, что если $k \geqslant k_*$, $2k-1 < x \leqslant 2k$, то

$$\left|sT(x)\right|^2 < \frac{3+\varepsilon}{4(2k)^{2\sigma}}.$$

Из этого неравенства следует, что если $k \geqslant k_*$, $2k-1 < x \leqslant 2k$, то

$$\left|sT(x)\right| < \frac{\sqrt{3+\varepsilon}}{2(2k)^{\sigma}}. \tag{19}$$

Введём функции

$$\Psi(x) = sT(x), \quad \Psi_k(x) = \frac{1}{(2k)^s} - \Psi(x), \tag{20}$$

и числа

$$z_k = \frac{1}{(2k)^s}, \quad \varepsilon_k = \frac{\sqrt{3+\varepsilon}}{2(2k)^{\sigma}}. \tag{21}$$

Лемма 3 (геометрическая). *Пусть $k \geqslant k_*$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left|\int\limits_{2k+1}^{2k+2} \Psi_k(x)\,dx\right|^2 > \left(1 - \frac{\sqrt{3+\varepsilon}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2k)^{2\sigma}}.$$

$\triangleright$ Рассмотрим на комплексной плоскости z круг L_k с центром в точке $z=0$, имеющий радиус ε_k. Из неравенства (19) и равенства (21) для ε_k следует, что если $2k+1 < x \leqslant 2(k+1)$, то число $sT(x)$ расположено внутри круга L_k (рис.). Будем характеризовать комплексное число z направленным вектором $\vec{z}$, имеющим начало и конец, координаты которого на плоскости z являются вещественной и мнимой частями числа z. Здесь координаты вектора $\vec{z}$ рассматриваются относительно системы координат, в которой ось абсцисс совпадает с осью вещественных чисел z, а ось ординат совпадает с осью мнимых чисел z. Представим вектор $\vec{\Psi}(x)$, характеризующий число $\Psi(x)$, введённое в (20), в виде суммы двух ортогональных векторов $\vec{\alpha}(x)$ и $\vec{\beta}(x)$ ($\vec{\Psi}(x) = \vec{\alpha}(x) + \vec{\beta}(x)$) таких, что вектор $\vec{\alpha}(x)$ расположен на прямой q, проходящей через точки $z = 0$ и z_k, а вектор $\vec{\beta}(x)$ ортогонален этой прямой (рис. 1). При этом число, которое характеризуется вектором $\vec{\alpha}(x)$ обозначим через $\alpha(x)$, число, которое характеризуется вектором $\vec{\beta}(x)$ обозначим через $\beta(x)$, так что справедливо равенство

$$\Psi(x) = \alpha(x) + \beta(x). \tag{22}$$

Далее, из определения чисел ε_k в (21) и неравенства (18) следует, что число z_k расположено вне круга L_k (рис. 1). Обозначим точку пересечения прямой q с границей круга L_k, ближайшую к z_k, через Δ, а полупрямую с концом в точке Δ, проходящую через точку $z = 0$, обозначим через $\bar{q}$ (рис. 1). Так как при фиксированном x из области $2k + 1 < x \leqslant 2(k + 1)$ точка $\Psi(x)$ расположена внутри круга L_k, то точка $\alpha(x)$ расположена на полупрямой $\bar{q}$ (рис. 1). Представим числа $z_k - \alpha(x)$ и $\beta(x)$ в виде

$$z_k - \alpha(x) = c_1(x)e_1, \quad \beta(x) = c_2(x)e_2, \tag{23}$$

где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ — вещественные числа, зависящие от x, e_1 и e_2 — комплексные числа, независящие от x такие, что $\vec{e}_1$ — направляющий единичный вектор прямой q, а $\vec{e}_2$ — направляющий единичный вектор прямой, ортогональной q. Так как точка $\alpha(x)$ расположена на полупрямой $\bar{q}$, то

$$c_1(x) > \left(1 - \frac{\sqrt{3+\varepsilon}}{2}\right)\frac{1}{(2k)^\sigma}. \tag{24}$$

Далее, в силу (20)–(23) имеем:

$$\begin{aligned}\int\limits_{2k+1}^{2k+2} \Psi_k(x)\,dx &= \int\limits_{2k+1}^{2k+2} \big(z_k - \alpha(x)\big)\,dx + \int\limits_{2k+1}^{2k+2} \beta(x)\,dx = \\ &= e_1 \int\limits_{2k+1}^{2k+2} c_1(x)\,dx - e_2 \int\limits_{2k+1}^{2k+2} c_2(x)\,dx.\end{aligned} \tag{25}$$

Так как векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ ортогональны и имеют длину, равную 1, то в силу

(23)–(25)

$$\left|\int\limits_{2k+1}^{2k+2}\Psi_k(x)\,dx\right|^2 = \left|\int\limits_{2k+1}^{2k+2}c_1(x)\,dx\right|^2 + \left|\int\limits_{2k+1}^{2k+2}c_2(x)\,dx\right|^2 \geqslant \left|\int\limits_{2k+1}^{2k+2}c_1(x)\,dx\right|^2 >$$
$$> \left(1-\frac{\sqrt{3+\varepsilon}}{2}\right)^2\frac{1}{(2k)^{2\sigma}}.$$

Лемма 3 доказана. ◁

При $k \geqslant 1$ введём числа

$$\varkappa_k^*(s) = -\frac{1}{(2k)^s} + \varkappa_{k+1}(s), \tag{26}$$

где $\varkappa_{k+1}(s)$ — числа, введённые в (10). В силу (11) и (12) имеем:

$$\varkappa_k^*(s) = -\int\limits_{2k+1}^{2k+2}\left(\frac{1}{(2k)^s} - sT(x)\right)dx. \tag{27}$$

Лемма 4. *Если $k \geqslant k_*$, то справедливо неравенство*

$$\sum_{k=k_*}^{\infty}\left|\varkappa_k^*(s)\right|^2 \geqslant \left(1-\frac{\sqrt{3+\varepsilon}}{2}\right)^2\sum_{k=k_*}^{\infty}\frac{1}{(2k)^{2\sigma}}.$$

▷ В силу (11), (12) и (27) имеем:

$$\varkappa_k^*(s) - \frac{1}{(2k)^s} + s\int\limits_{2k+1}^{2k+2}T(x)\,dx = -\int\limits_{2k+1}^{2k+2}\Psi_k(x)\,dx,$$

где $\Psi_k(s)$ — функция, введённая в (20). Поэтому утверждение леммы 4 следует из леммы 3. Лемма 4 доказана. ◁

Лемма 5. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{k=k_*}^{\infty}\left|\varkappa_k(s)\right|^2 < \frac{3+\varepsilon}{4}\sum_{k=k_*}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2\sigma}}.$$

▷ В силу (11), (12) и (19)

$$\sum_{k=k_*}^{\infty}\left|\varkappa_k(s)\right|^2 = \sum_{k=k_*}^{\infty}\left|\int\limits_{2k-1}^{2k}sT(x)\,dx\right|^2 < \frac{3+\varepsilon}{4}\sum_{k=k_*}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2\sigma}}.$$

Лемма 5 доказана. $\triangleleft$

Лемма 6. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{k=k_*}^{\infty} \left|\varkappa_k^*(s)\right|^2 < \sum_{k=k_*}^{\infty}\left(\frac{2}{(2k)^{2\sigma}} + \frac{3+\varepsilon}{2(2k-1)^{2\sigma}}\right),$$

где $\varkappa_k^*(s)$ *— числа, введённые в* (26).

Доказательство леммы 6 следует из (26) и леммы 5.

Лемма 7. *Если* $\frac{1}{2} < \sigma \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Re} s$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\left|\varkappa_k(s)\right|^2 + \left|\varkappa_k^*(s)\right|^2\right) < \infty$, *а если* $0 < \sigma \leqslant \frac{1}{2}$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\left|\varkappa_k(s)\right|^2 + \left|\varkappa_k^*(s)\right|^2\right) = \infty$.

Лемма 7 следует из лемм 5 и 6.

§ 5. Связь гипотезы Римана о нулях дзета-функции со спектром оператора A

Теорема 3. *Функция* $\zeta(s)$ *имеет нуль в области* $0 < \operatorname{Re} s \neq \frac{1}{2}$ *тогда и только тогда, когда область* $0 < \operatorname{Re} s < 1$ *содержит такое значение* s, *что оператор* $A(s)$, *действующий в пространстве* ℓ, *имеет собственный вектор с собственным значением* $\lambda = -1$.

$\triangleright$ Согласно лемме 1 все комплексные нули функции $\zeta(s)$ совпадают с нулями функции $\varkappa(s)$, расположенные в области $0 < \operatorname{Re} s < 1$. Предположим, что вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots) \in \ell$, он является собственным для оператора $A(s)$ с собственным значением $\lambda = -1$ и $x_1^* = 1$. Тогда из определений оператора $A(s)$ в 2 и матриц $Q_k(s)$ в 3 следует, что при $k \geqslant 1$

$$\begin{pmatrix} x_k^* \\ x_{k+1}^* \end{pmatrix} = Q_k(s)Q_{k-1}(s)\ldots Q_1(s)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Если $\varkappa(s) = 0$, то в силу (28), (4), (5) и (6)

$$\left|\varkappa_k^*\right| = \left|\sum_{\nu=0}^{k-1} h_\nu(s)\right| = \left|\sum_{\nu=k}^{\infty} h_\nu(s)\right|. \tag{29}$$

Из определений чисел $h_k(s)$ в 2, чисел $\varkappa_k(s)$ в (10) и чисел $\varkappa_k^*(s)$ в (26) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_\nu(s) = \begin{cases} \varkappa_\mu(s), & \text{если} \quad k = 2\mu - 2, \\ \varkappa_\mu^*(s), & \text{если} \quad k = 2\mu - 1, \end{cases} \tag{30}$$

где μ — натуральное число. Поэтому в силу (29) и (30)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varkappa_k^*\right|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{\nu=k}^{\infty}h_\nu(s)\right|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\varkappa_k(s)\right|^2+\left|\varkappa_k^*(s)\right|^2\right). \tag{31}$$

Таким образом, если $\zeta(s)=0$ и $\dfrac{1}{2}<\operatorname{Re}s$, то из леммы 7 и (31) следует, что $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varkappa_k^*\right|^2<\infty$, то есть $x^*\in\ell$.

Если $\zeta(s)=0$ и $0<\operatorname{Re}s=\dfrac{1}{2}$, то согласно лемме 4 и (31) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varkappa_k^*\right|^2=\infty$, то есть $x^*\notin\ell$. Если же $\zeta(s)=0$ и $0<\operatorname{Re}s<\dfrac{1}{2}$, то из симметричного относительно точки $s=\dfrac{1}{2}$ расположения нулей дзета-функции $\zeta(s)$ следует, что $\zeta(1-s)=0$, и так как $\operatorname{Re}(1-s)>\dfrac{1}{2}$, то приходим к уже рассмотренному выше случаю, для которого число s заменяется на число $1-s$. Повторяя все рассуждения в обратном порядке, получим, что если при каком-либо s существует собственный вектор $x^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots)\in\ell$ оператора $A(s)$ с собственным значением $\lambda=-1$, то, используя вид оператора $A(s)$, (28), (4), (5) и (6), получим, что существует число s^* такое, что $\operatorname{Re}s^*>\dfrac{1}{2}$ и $\zeta(s^*)=0$. Если же ни при каком s в критической полосе $0<\operatorname{Re}s<1$ такого собственного вектора $x^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots)\in\ell$ нет, то из (28), (4), (5) и (6) следует, что комплексными нулями функции $\zeta(s)$ могут быть только такие числа s, которые расположены на критической прямой $\operatorname{Re}s=\dfrac{1}{2}$. Теорема 3 доказана. $\triangleleft$

Замечание 2. Из доказательства теоремы 3 следует, что если $\zeta(s)=0$, $\operatorname{Re}s\neq\dfrac{1}{2}$ и $\operatorname{Re}s>0$, то:

1) если $\operatorname{Re}s>\dfrac{1}{2}$, то оператор $A(s)$ имеет в пространстве ℓ собственный вектор с собственным значением $\lambda=-1$;

2) если $0<\operatorname{Re}s<\dfrac{1}{2}$, то оператор $A(1-s)$ имеет в пространстве ℓ собственный вектор с собственным значением $\lambda=-1$.

§ 6. Связь гипотезы Римана о нулях со свойствами одной динамической системы

Пусть $\Pi = \{s : 0 < \operatorname{Re} s < 1\}$ — критическая полоса, ℓ — гильбертово пространство односторонних последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ комплексных чисел таких, что $\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu|^2 < \infty$, $A = A(s)$ — оператор, введённый в 2.

Определение 3. Рассмотрим прямое произведение $\Omega = \Pi \times \ell \times \ell$, и пусть F — преобразование (динамическая система) пространства Ω, определённое следующим образом: если $(s, x, y) \in \Omega$ ($s \in \Pi$, $x \in \ell$, $y \in \ell$), то $F(s, x, y) = (s', x', y')$, где $s' = 1 - s$, $x' = A(s')y$, $y' = A(s)x$.

Теорема 4. *Функция $\zeta(s)$ имеет нуль $s_* \in \Pi$ такой, что $\operatorname{Re} s_* \neq \dfrac{1}{2}$, тогда и только тогда, когда существует точка $(s_*, e, \delta) \in \Omega$ ($e \in \ell$, $\delta \in \ell$), такая что $\|e\| + \|\delta\| \neq 0$, из равенства $(s'_*, e', \delta') = F(s_*, e, \delta)$ следуют равенства $e' = -\delta$, $\delta' = -e$, и отображение F^2 имеет неподвижную точку $(s_*, e, \delta) : F^2(s_*, e, \delta) = (s_*, e, \delta$.*

$\triangleright$ Рассмотрим два случая:

1) $\dfrac{1}{2} \operatorname{Re} s_* < 1$;

2) $0 < \operatorname{Re} s_* < 1$.

В случае 1), если $\zeta(s_*) = 0$, то в качестве δ возьмём последовательность, состоящую из одних нулей, а в качестве e возьмём собственный вектор оператора $A(s_*)$, с собственным значением $\lambda = -1$, который существует согласно теореме 3. Утверждения теоремы 4 в этом случае непосредственно следуют из определения динамической системы F. В случае 2), если $\zeta(s_*) = 0$, то в качестве e возьмём последовательность, состоящую из одних нулей, а в качестве δ возьмём собственный вектор оператора $A(1-s_*)$, соответствующий собственному значению $\lambda = -1$, который существует согласно теореме 3 и замечанию 3.

Утверждения теоремы 3 в этом случае также следуют из определения динамической системы F. Обратно, если существует точка $(s_*, e, \delta) \in \Omega$ такая, что $\|e\| + \|\delta\| \neq 0$, и из равенства $(s'_*, e', \delta') = F(s, e, \delta)$ следуют равенства $e' = -\delta$, $\delta' = -e$, то из определения динамической системы F следует, что $F^2(s_*, e, \delta) = (s_*, e, \delta)$ и существует собственный вектор оператора $A(s_*)$ с собственным значением $\lambda = -1$. Поэтому согласно (3) дзета-функция $\zeta(s)$ имеет комплексный нуль $s = s_*$, не лежащий на критической прямой $\operatorname{Re} s = \dfrac{1}{2}$. Теорема 4 доказана. $\triangleleft$

Список литературы

[1] L. D. Pustyl'nikov. New results in the theory of the classical Riemann zeta-function. In the book „Traces in Number Theory, Geometry and Quantum Fields“. Eds.: Sergio Albeverio, Matilde Marcolli, Sylvie Paycha, Jorge Plazas. Friedr. Vieweg and Sohn Verlag\GWV Fachverlage GmBH, Wiesbaden 2008, p. 187–193.

[2] Л. Д. Пустыльников. Об одном свойстве классической дзета-функции, связанном с гипотезой Римана // УМН (1999), 54:1, 260–261.

[3] Л. Д. Пустыльников. Об асимптотическом поведении коэффициентов ряда Тэйлора функции $\xi(s)$ // УМН (2000), 55:2, 349–350.

[4] Л. Д. Пустыльников. Асимптотическая формула для коэффициентов Тейлора функции $\xi(s)$ // Известия РАН: сер. математика (2001), 65:1, 93–106.

[5] Л. Д. Пустыльников. Опровержение аналога гипотезы Римана о нулях для сколь угодно точной аппроксимации дзета-функции, удовлетворяющей тому же функциональному уравнению // УМН (2003), 58:1, 175–176.

[6] Paul M. Gauthier and Eduardo S. Zeron. Small perturbations of the Riemann zeta function and their zeros // Computational Methods and Function Theory (2004), volume 4, N 1, 143–150.

[7] P. M. Gauthier and X. Xarles. Perturbations of L-functions with or without non-trivial zeros off the critical line // arXiv:0911.5135v1 [math.CV] 26 Nov 2009, 1–16.

[8] M. Nies. Universal approximations of the Riemann zeta function // Comput. Methods Funct. Theory (2009), 9(1), 145–159.

[9] Davide Schipani. Sufficient and equivalent criteria for the Riemann Hypothesis // arXiv:1003.2064v3 [math.NT] 22 Oct 2010, 1–14.

[10] Pedro Freitas. A Li Criterion for Zero Free Half-Plane of Riemann's Zeta Functions // Journal of the London Mathematical Society, vol. 73, Issue 2, p. 399–414.

[11] Л. Д. Пустыльников. О связи гипотезы Римана о нулях функции $\zeta(s)$ со спектром оператора, действующего в гильбертовом пространстве // УМН (1991), 46:2, 227–228.

[12] Л. Д. Пустыльников. О представлении дзета-функции Римана в критической полосе с помощью бесконечного произведения матриц второго порядка и об одной динамической системе // УМН (2004), 59:4, 796–797.

[13] Е. К. Титчмарш. Теория дзета-функции Римана. ИЛ. Москва, 1953.

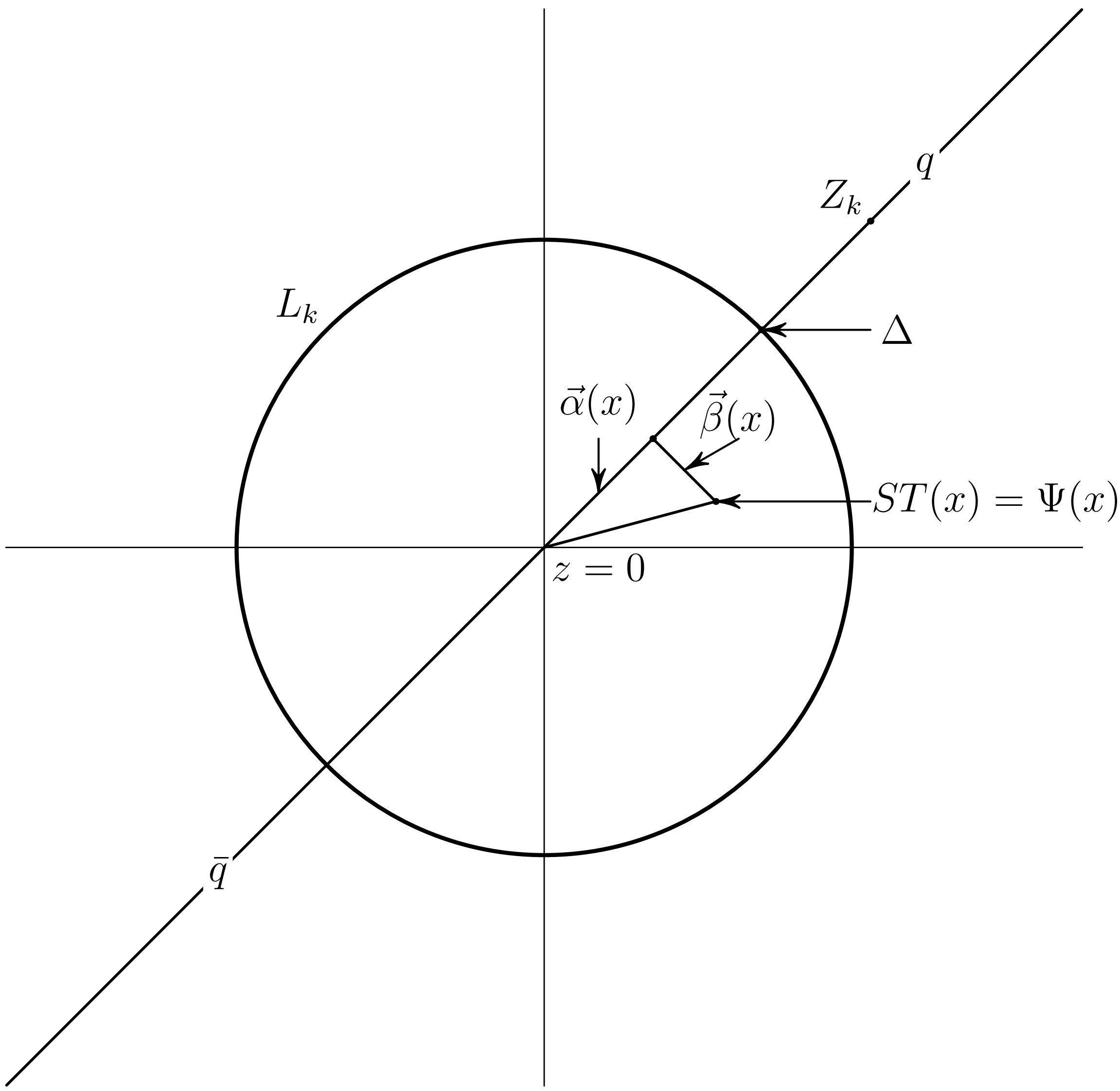

Рис. 1