ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 6 за 2012 г.

Березин А.В., Воронцов А.С.,
Духанин А.С., Марков М.Б.,
Паротькин С.В., Сысенко А.В.

Электронно-фотонный каскад в газе. Часть 1. Уравнения и приближения модели

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Электронно-фотонный каскад в газе. Часть 1. Уравнения и приближения модели / А.В.Березин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 6. 24 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-6

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. КЕЛДЫША

**А.В. Березин, А.С. Воронцов, А.С. Духанин,
М.Б. Марков, С.В. Паротькин, А.В. Сысенко**

ЭЛЕКТРОННО-ФОТОННЫЙ КАСКАД В ГАЗЕ
ЧАСТЬ 1.
УРАВНЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ МОДЕЛИ

МОСКВА 2012

А.В. Березин, А.С. Воронцов, А.С. Духанин, М.Б. Марков, С.В. Паротькин, А.В. Сысенко

ЭЛЕКТРОННО-ФОТОННЫЙ КАСКАД В ГАЗЕ.
ЧАСТЬ 1. УРАВНЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ МОДЕЛИ

Аннотация

Представлена математическая модель переноса электронно-фотонного каскада. Модель основана на кинетических уравнениях для фотонов, электронов и позитронов в газовой среде со столкновениями с учетом самосогласованного электромагнитного поля. Учитывается комптоновское рассеяние и фотопоглощение фотонов, а также образование ими электронно-позитронных пар. Рассматривается тормозное излучение, упругое рассеяние электронов в экранированном кулоновском поле ядра, возбуждение молекул электронным ударом и ионизационные столкновения. Для сокращения объема вычислений при сохранении полного тока разряда построено транспортное приближение для моделирования столкновений. Оно основано на усреднении углового рассеяния.

A.V. Berezin, A.S. Dukhanin, M.B. Markov, S.V. Parot’kin, A.V. Sysenko, A.S. Vorontsov

THE ELECTRON-PHOTON CASCADE IN GAS.
CHAPTER 1. EQUATIONS AND APPROXIMATIONS OF THE MODEL

Abstract

The mathematical model of electron-photon cascade transport is represented. Model is based on kinetic equations for photons, electrons and positrons with an allowance of self-consistent electromagnetic field. Compton scattering and photoabsorption of photons are taken into account, along with electron-positron pair production. Bremsstrahlung, elastic scattering of electrons in screened molecular Coulomb field, molecular excitation by the electron impact and impact ionization of molecule are considered. The transport approximation is formulated for acceleration of discharge full current calculations. It is based on the angular scattering’ averaging.

Введение

Электронно-фотонные каскады являются предметом исследований в интересах различных отраслей науки и техники. Каскадные ливни в атмосфере [1] дают представление о природе и составе излучений космического пространства. Электрический разряд в газовой среде [2] исследуется для качественного и количественного анализа процессов, происходящих в газовой среде под действием электрического поля большой напряженности. Это необходимо, например, для понимания природы молнии [3].

В данной работе рассматривается метод математического моделирования электронно-фотонного каскада, который может образовываться в газе внешним потоком фотонов или электронов или пробоем под действием внешнего электрического поля.

Образование каскада внешним потоком частиц обусловлено столкновениями и деградацией спектра электронов или фотонов с энергией, существенно превосходящей потенциал ионизации среды. Фотоны испытывают комптоновское рассеяние и фотопоглощение, образуют электрон-позитронные пары [4]. Электроны и позитроны производят тормозное излучение, ударную ионизацию, возбуждение молекул, а также испытывают упругое рассеяние [5]. Позитроны, помимо этого, аннигилируют на атомарных электронах с испусканием гамма-квантов [4]. Образование заряженных частиц – электронов, позитронов и ионов – сопровождается разделением заряда и приводит к генерации электромагнитного поля. При достаточной интенсивности потока плазменная или ларморовская частота электронов и позитронов оказывается сопоставимой с частотой столкновений. В результате электромагнитное поле оказывается самосогласованным и влияет на движение заряженных частиц, что приводит к неустойчивостям их потока.

Возникновение каскадных процессов в электрическом разряде обусловлено ускорением свободных электронов электрическим полем. Некоторое количество свободных электронов непрерывного спектра в газовой среде присутствует всегда [2]. Это обусловлено воздействием космической радиации, остаточными радиоактивными излучениями горных пород и грунта, ультрафиолетовым излучением и т.д. Концентрация свободных электронов мала по сравнению с концентрацией нейтральных молекул. Электроны находятся в тепловом равновесии с молекулами газа. Когда включается внешнее электрическое поле, электроны под действием силы Лоренца приобретают направленную скорость, а их энергия начинает расти. Упругие столкновения стремятся вернуть электроны в состояние теплового равновесия с молекулами газа, в результате чего энергия направленного движения электронов превращается в тепловую. В упругих столкновениях электроны передают молекулам энергию, пропорциональную отношению их масс. Поскольку это отношение мало, а упругое рассеяние при малых энергиях превалирует над остальными столкновениями, электронная температура начинает расти. Когда электронная температура достигает порога возбуждения молекул, скорость нагрева падает. Дальнейший нагрев приводит к достижению порога ионизации. После этого начинается процесс ионизационного рассеяния. Дальнейшее поведение температуры зависит от плотности газа и напряженности электрического поля. В плотном газе между полем и столкновениями может быть достигнуто равновесие. Это означает, что электроны теряют в столкновениях столько же энергии, сколько им сообщает поле между неупругими взаимодействиями. Если напряженность поля велика, а газ достаточно разрежен, то электрическое поле за время жизни между столкновениями может переместить электроны в жесткую область спектра. В этом случае электрон может «проскочить» область спектра, где достигается максимум сечения неупругого рассеяния. В таких условиях развивается электронный пучок. Дальнейшее ускорение электронов приводит к тому, что сечение тормозного рассеяния становится сопоставимым с сечением ионизационного рассеяния и процесс образования фотонов становится близким по интенсивности процессу образования вторичных электронов.

Рассмотренные процессы формально описываются единой математической моделью. В рамках данной работы распределения нейтральных молекул и образующихся при развитии каскада ионов считаются стационарными. Среда, в которой происходит разряд, считается слабоионизованным газом [6]. Распределения частиц подчиняются кинетическим уравнениями, а электромагнитное поле – уравнениям Максвелла.

Предметом данной работы является анализ математической модели каскада и возможных приближений, применяемых для моделирования столкновений частиц с различной энергией.

1. Общая постановка задачи

Рассмотрим уравнение переноса фотонов, электронов и позитронов[7]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f^\gamma}{\partial t}+c\,\mathrm{div}\left(\mathbf{\Omega} f^\gamma\right)+c\sigma_t^\gamma f^\gamma=Q^\gamma+c\int d\mathbf{p}'\sigma_{\gamma\gamma}^c\left(\mathbf{p},\mathbf{p}'\right)f^\gamma\left(\mathbf{p}'\right)+\\+\int d\mathbf{p}'\sigma_{e\gamma}^b\left(\mathbf{p},\mathbf{p}'\right)v'f^e\left(\mathbf{p}'\right)+\int d\mathbf{p}'\sigma_{p\gamma}^b\left(\mathbf{p},\mathbf{p}'\right)v'f^p\left(\mathbf{p}'\right)+\int d\mathbf{p}'\sigma_{p\gamma}^{an}\left(\mathbf{p},\mathbf{p}'\right)v'f^p\left(\mathbf{p}'\right)\end{gathered}, \quad (1)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial f^e}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\mathbf{v}f^e\right)-e\,\mathrm{div}_\mathrm{p}\left[\left(\mathbf{E}+\left[\boldsymbol{\beta},\mathbf{H}\right]\right)f^e\right]+\sigma_t^{be}vf^e+\mathrm{St}_{ion}^e\left[f^e\right]+\mathrm{St}_{el}^e\left[f^e\right]=\\=Q^e+c\int d\mathbf{p}'\sigma_{\gamma e}^c\left(\mathbf{p},\mathbf{p}'\right)f^\gamma\left(\mathbf{p}'\right)+\int d\mathbf{p}'\sigma_{ee}^b\left(\mathbf{p},\mathbf{p}'\right)v'f^e\left(\mathbf{p}'\right)+\\+\int d\mathbf{p}'\sigma_{\gamma e}^p\left(\mathbf{p},\mathbf{p}'\right)f^\gamma\left(\mathbf{p}'\right)+\int d\mathbf{p}'\sigma_{\gamma e}^{ph}\left(\mathbf{p},\mathbf{p}'\right)f^\gamma\left(\mathbf{p}'\right)\end{gathered}, \quad (2)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial f^p}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\mathbf{v}f^p\right)+e\,\mathrm{div}_\mathrm{p}\left[\left(\mathbf{E}+\left[\boldsymbol{\beta},\mathbf{H}\right]\right)f^p\right]+\sigma_t^{bp}vf^p+\sigma_t^{an}vf^p+\\+\mathrm{St}_{ion}^p\left[f^p\right]+\mathrm{St}_{el}^p\left[f^p\right]=\int d\mathbf{p}'\sigma_{pp}^b\left(\mathbf{p},\mathbf{p}'\right)v'f^p\left(\mathbf{p}'\right)+\int d\mathbf{p}'\sigma_{\gamma p}^p\left(\mathbf{p},\mathbf{p}'\right)f^\gamma\left(\mathbf{p}'\right)\end{gathered}. \quad (3)$$

Источники фотонов и электронов $Q^{\gamma} \equiv Q^{\gamma}\left(t,\mathbf{r},\mathbf{p}\right)$ и $Q^{e} \equiv Q^{e}\left(t,\mathbf{r},\mathbf{p}\right)$ определяют интенсивность их образования в заданной точке фазового пространства $(\mathbf{r},\mathbf{p})=$ Ў$^3_{\boldsymbol{r}}$ г Ў$^3_{\boldsymbol{p}}$ координат $\mathbf{r}$ и импульсов $\mathbf{p}$.

Функции распределения фотонов $f^{\gamma} \equiv f^{\gamma}\left(t,\mathbf{r},\mathbf{p}\right)$, электронов $f^{e} \equiv f^{e}\left(t,\mathbf{r},\mathbf{p}\right)$ и позитронов $f^{p} \equiv f^{p}\left(t,\mathbf{r},\mathbf{p}\right)$ выражают концентрацию частиц в фазовом пространстве.

Поглощение частиц в уравнениях (1 – 3) описывается полными макроскопическими сечениями. Сечения $\sigma_t^{c} \equiv \sigma_t^{c}\left(p,\mathbf{r}\right)$, $\sigma_t^{ph} \equiv \sigma_t^{ph}\left(p,\mathbf{r}\right)$, $\sigma_t^{p} \equiv \sigma_t^{p}\left(p,\mathbf{r}\right)$ описывают поглощение фотона за счет комптоновского рассеяния, фотоэффекта и образования электронно-позитронных пар;

$$\sigma_t^{\gamma} \equiv \sigma_t^{\gamma}\left(p,\mathbf{r}\right) = \sigma_t^{c} + \sigma_t^{ph} + \sigma_t^{p},$$

где $\sigma_t^{be} \equiv \sigma_t^{be}\left(p,\mathbf{r}\right)$, $\sigma_t^{bp} \equiv \sigma_t^{bp}\left(p,\mathbf{r}\right)$ – полные макроскопические сечения поглощения электрона и позитрона за счет тормозного излучения; $\sigma_t^{an} \equiv \sigma_t^{an}\left(p,\mathbf{r}\right)$ – полное макроскопическое сечение аннигиляции позитрона.

Ядрами в интегральных операторах уравнений переноса являются макроскопические дифференциальные сечения образования частиц в актах рассеяния. Образование частиц при тормозном рассеянии описывают дифференциальные сечения с верхним индексом b (bremsstrahlung). Первый из нижних индексов обозначает на налетающую частицу, второй – образующуюся. Индекс e обозначает электрон, p – позитрон, γ – фотон.

Образование электронно-позитронной пары описывают дифференциальные сечения с верхним индексом p (pair), при комптоновском рассеянии – c (Compton), фотопоглощении – ph (photo).

Импульс рассеивающейся частицы в дифференциальных сечениях обозначен символом $\mathbf{p}'$, импульс образовавшейся частицы – символом $\mathbf{p}$.

Обозначения

$$\mathrm{St}_{ion}^{e}\left[f^{e}\right],\ \mathrm{St}_{el}^{e}\left[f^{e}\right],\ \mathrm{St}_{ion}^{p}\left[f^{p}\right],\ \mathrm{St}_{el}^{p}\left[f^{p}\right]$$

соответствуют интегралам ионизационных и упругих столкновений электронов и позитронов соответственно.

Уравнения (1 – 3) описывают баланс числа частиц в элементе фазового пространства.

Совместно с ними рассматриваются уравнения Максвелла [8] для самосогласованного электромагнитного поля:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c}\left(\int \mathbf{v}d\mathbf{p}\left(f^{e} - f^{p}\right)\right),\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \qquad (4)$$

Для всех функций распределения и компонент электромагнитного поля имеют место однородные начальные условия, то есть, сформулирована задача Коши.

2. Последовательные поколения и метод Монте-Карло для фотонов

Рассмотрим уравнение переноса фотонов (1) в общем виде:

$$\frac{\partial f^{\gamma}}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\mathbf{v} f^{\gamma}\right) + \sigma_t\left(p\right) v f^{\gamma} = \int d\mathbf{p}' \sigma\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}'\right) v' f^{\gamma}\left(\mathbf{p}'\right) + Q^{\gamma}. \tag{5}$$

Представим его в формальном операторном виде:

$$\hat{D} f^{\gamma} = \hat{K} f^{\gamma} + Q^{\gamma}, \tag{6}$$

где $\hat{D} f \equiv \dfrac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\mathbf{v} f\right) + \sigma_t f$, $\hat{K} f \equiv \int d\mathbf{p}' \sigma\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}'\right) f\left(\mathbf{p}'\right)$.

Метод последовательных поколений [9] позволяет построить решение уравнения (6) в виде ряда:

$$f^{\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{D}^{-1} \left(\hat{K} \hat{D}^{-1}\right)^n Q, \tag{7}$$

где $\left(\hat{K} \hat{D}^{-1}\right)^0 = I$.

Сходимость ряда (5) обеспечивается соотношением $\sigma\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}'\right) / \sigma_t\left(p\right) < 1$. Функция распределения, представленная рядом (7), является точным решением уравнения (5). Рассмотрим построение ряда (7) для уравнения (5):

$$f_0 = \int_0^t d\tau \int d\boldsymbol{\xi} Q\left(\tau, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{p}\right) \exp\left\{-\sigma_t\left(p\right) v\left(t - \tau\right)\right\} \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^s\left(t, \tau, ..., \mathbf{p}\right)\right).$$

Здесь $\mathbf{r}_0^s\left(t, \tau, ..., \mathbf{p}\right) \equiv \mathbf{r}^s\left(t, \tau, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{p}\right)$ является решением уравнения движения $d\mathbf{r}^s / dt = \mathbf{v}^s$ с начальным условием $\mathbf{r}^s\big|_{t=\tau} = \boldsymbol{\xi}$.

$$f_1 = \exp\left\{-\sigma_t v\left(p\right) t\right\} \int_0^t d\tau \int d\boldsymbol{\xi} \int d\boldsymbol{\eta} \exp\left\{\sigma_t v\left(\eta\right) \tau\right\} Q\left(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\right) \sigma\left(\mathbf{p}, \boldsymbol{\eta}\right) v\left(\boldsymbol{\eta}\right) \times$$

$$\times \int_{\tau}^{t} dt_1 \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1^s\left(t, t_1, ..., \mathbf{p}\right)\right) \exp\left\{-\left(\sigma_t v\left(\eta\right) - \sigma_t v\left(p\right)\right) t_1\right\}.$$

Здесь $\mathbf{r}_1^s\left(t, t_1, ..., \mathbf{p}\right) \equiv \mathbf{r}^s\left(t, t_1, \mathbf{r}^s\left(t_1, \tau, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{p}\right), \mathbf{p}\right)$.

$$f_2 = \exp\left\{-\sigma_t v(p)t\right\}\int_0^t d\tau \int d\boldsymbol{\eta}\, \exp\left\{\sigma_t v(\eta)\tau\right\}\int d\boldsymbol{\xi} Q(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\times$$

$$\times\int_\tau^t dt_1 \int d\mathbf{p}_1 \sigma(\mathbf{p}_1,\boldsymbol{\eta})\exp\left\{-\left(\sigma_t v(\eta)-\sigma_t v(p_1)\right)t_1\right\}\int_{t_1}^t dt_2 \int d\mathbf{p}_2 \exp\left\{-\sigma_t v(p_1)t_2\right\}$$

$$\times\sigma(\mathbf{p},\mathbf{p}_1)v(\mathbf{p}_1)\exp\left\{-\sigma_t(p)v(t-t_2)\right\}\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2^s(t,t_2,...,\mathbf{p})\right).$$

…………………………………………………………………

Здесь $\mathbf{r}_n^s(t,t_n,...,\mathbf{p}) = \mathbf{r}^s\left(t,t_n,\mathbf{r}_{n-1}^s(t,...,\mathbf{p}_{n-1}),\mathbf{p}\right)$.

Представление решения уравнения (3) в виде ряда:

$$f^\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \tag{8}$$

дает основание для применения метода Монте-Карло. Для иллюстрации рассмотрим источник в уравнении (5) в следующем виде:

$$\begin{aligned} Q(t,\mathbf{r},\mathbf{p}) &= \sum_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{r},\mathbf{p}) = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}}(t)\Theta(t_{\mathbf{k}}+\Delta t_{\mathbf{k}}-t)\Theta(t-t_{\mathbf{k}})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\mathbf{k}})\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{\mathbf{k}}). \end{aligned} \tag{9}$$

Такое представление источника означает, что он является суммой элементарных источников, то есть «частиц», которые рождаются в точке $\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathbf{k}}$ с импульсом $\mathbf{p}=\mathbf{p}_{\mathbf{k}}$ в течение промежутка времени $\Delta t_{\mathbf{k}}$, начинающегося в момент времени $t=t_{\mathbf{k}}$. Здесь $k=(k_1,k_2,k_3)$ – трехмерный мультииндекс. Он означает, что в точке $\mathbf{r}-\mathbf{r}_{k_1}$ в момент $t=t_{k_2}$ рождается частица с импульсом $\mathbf{p}=\mathbf{p}_{k_3}$. Каждая из компонент мультииндекса может принимать различное число значений. Суммирование в (9) ведется по всем компонентам мультииндекса.

Будем считать, что Δt_k пренебрежимо мало по сравнению с характерными временами всех процессов.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial f^{\mathbf{k}}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\mathbf{v}f^{\mathbf{k}}\right) + \sigma_t(p)vf^{\mathbf{k}} = \int d\mathbf{p}'\sigma(\mathbf{p},\mathbf{p}')v'f^{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') + Q_{\mathbf{k}}. \tag{10}$$

В силу линейности уравнения (5), его решение представимо в виде:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mathbf{k}} f_n^{\mathbf{k}}\ .$$

Рассмотрим построение решения (7) методом последовательных поколений:

$$f_0^{\mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}} \exp\left\{-\sigma_t\left(p_{\mathbf{k}}\right) v_{\mathbf{k}}\left(t - t_{\mathbf{k}}\right)\right\} \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s\left(t, t_{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{\mathbf{k}}, \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right)\right) \delta\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right), \tag{11}$$

где $N_{\mathbf{k}} = \int_{t_{\mathbf{k}}}^{\Delta t_{\mathbf{k}} + t_{\mathbf{k}}} F_{\mathbf{k}}\left(\tau\right) d\tau$.

$$\hat{K} f_0^{\mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}} \exp\left\{-\sigma_t\left(p_{\mathbf{k}}\right) v_{\mathbf{k}}\left(t - t_{\mathbf{k}}\right)\right\} \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s\left(t, t_{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{\mathbf{k}}, \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right)\right) \sigma\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right). \tag{12}$$

Рассмотрим следующую статистическую интерпретацию величин, входящих в выражения для $f_0^{\mathbf{k}}$ и $\hat{K} f_0^{\mathbf{k}}$. Пусть в момент времени t с вероятностью $\sigma_t\left(p_{\mathbf{k}}\right) v_{\mathbf{k}}$ частица с номером $\mathbf{k}$ поглощается. Тогда имеет место пуассоновский поток. Величина $\exp\left\{-\sigma_t\left(p_{\mathbf{k}}\right) v_{\mathbf{k}}\left(t - t_{\mathbf{k}}\right)\right\}$ имеет смысл вероятности того, что частица, образовавшаяся в момент времени $t = t_{\mathbf{k}}$ с импульсом $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\mathbf{k}}$ не поглотилась к моменту времени t. Вероятность того, что частица поглотилась к моменту времени t, составляет величину $1 - \exp\left\{-\sigma_t\left(p_{\mathbf{k}}\right) v_{\mathbf{k}}\left(t - t_{\mathbf{k}}\right)\right\}$.

Рассмотрим случайную величину $\tau_{\mathbf{k}}$ – время жизни частицы с номером $\mathbf{k}$. Рассмотрим вероятность P того, что величина $\tau_{\mathbf{k}} \le t$:

$$\mathrm{P}\left(\tau_{\mathbf{k}} \le t\right) = 1 - \exp\left\{-\sigma_t\left(p_{\mathbf{k}}\right) v_{\mathbf{k}}\left(t - t_{\mathbf{k}}\right)\right\}.$$

Это означает, что величина $\tau_{\mathbf{k}}$ распределена с плотностью:

$$\rho_{\mathbf{k}} \equiv \rho\left(\tau_{\mathbf{k}}\right) = \sigma_t\left(p_{\mathbf{k}}\right) v_{\mathbf{k}} \exp\left\{-\sigma_t\left(p_{\mathbf{k}}\right) v_{\mathbf{k}}\left(\tau_{\mathbf{k}} - t_{\mathbf{k}}\right)\right\}.$$

Заметим, что $\int_{t_{\mathbf{k}}}^{\infty} \rho\left(\tau_{\mathbf{k}}\right) d\tau_{\mathbf{k}} = 1$, а математическое ожидание времени жизни

$$\int_{t_{\mathbf{k}}}^{\infty} \tau_{\mathbf{k}} \rho\left(\tau_{\mathbf{k}}\right) d\tau_{\mathbf{k}} = 1 \big/ \left(\sigma_t\left(p_{\mathbf{k}}\right) v_{\mathbf{k}}\right).$$

Плотность вероятности $\rho\left(\tau_{\mathbf{k}}\right)$ однозначно определяется параметрами частицы с номером $\mathbf{k}$ и не зависит от частиц с другими номерами.

Представим дифференциальное сечение в виде:

$$\sigma\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right) = \sigma_t\left(p_{\mathbf{k}}\right) w\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right),$$

где отношение $w\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right) = \sigma\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right) \big/ \sigma_t\left(p_{\mathbf{k}}\right)$ будем рассматривать как плотность вероятности образования частицы с импульсом $\mathbf{p}$ при рассеянии частицы с импульсом $\mathbf{p}_{\mathbf{k}}$. Заметим, что

$$\int d\mathbf{p} w\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right) = 1.$$

Пусть $\overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}}$ – реализация случайной величины $\mathbf{p}$ с плотностью вероятности $w\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right)$, а $\overline{\tau}_{\mathbf{k}}$ – реализация случайной величины $\tau_{\mathbf{k}}$ с плотностью вероятности $\rho\left(\tau_{\mathbf{k}}\right)$.

Запишем формулы (11) и (12) в следующем виде:

$$f_0^{\mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}}\Theta\left(\overline{\tau}_{\mathbf{k}} - t\right)\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s\left(t, t_{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{\mathbf{k}}, \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right)\right)\delta\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right), \tag{13}$$

$$\hat{K}f_0^{\mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}}\delta\left(t - \overline{\tau}_{\mathbf{k}}\right)\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s\left(t, t_{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{\mathbf{k}}, \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right)\right)\delta\left(\mathbf{p} - \overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}}\right). \tag{14}$$

Тогда

$$f_1^{\mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}}\Theta\left(\overline{\tau}_{\mathbf{k}}^1 - t\right)\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s\left(t, \overline{\tau}_{\mathbf{k}}, \mathbf{r}^s\left(\overline{\tau}_{\mathbf{k}}, t_{\mathbf{k}}, , \mathbf{r}_{\mathbf{k}}, \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right), \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right)\right)\delta\left(\mathbf{p} - \overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}}^1\right),$$

где $\overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}}^1$ – реализация случайной величины с плотностью вероятности $w\left(\mathbf{p}_{\mathbf{k}}^1, \overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}}\right)$, а $\overline{\tau}_{\mathbf{k}}^1$ – реализация случайной величины с плотностью вероятности:

$$\rho\left(\tau_{\mathbf{k}}^1\right) = \sigma_t\left(p_{\mathbf{k}}^1\right)v_{\mathbf{k}}\exp\left\{-\sigma_t\left(p_{\mathbf{k}}^1\right)v_{\mathbf{k}}\left(\tau_{\mathbf{k}}^1 - \overline{\tau}_{\mathbf{k}}\right)\right\}.$$

Продолжая вычисление функций распределения в последовательных поколениях, получим:

$$f_n^{\mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}}\Theta\left(\overline{\tau}_{\mathbf{k}}^n - t\right)\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n^s\left(t, \overline{\tau}_{\mathbf{k}}^{n-1}, \ldots\ldots, \overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}}^n\right)\right)\delta\left(\mathbf{p} - \overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}}^n\right),$$

где $\overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}}^n$ – реализация случайной величины с плотностью $w\left(\mathbf{p}_{\mathbf{k}}^n, \overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}}^{n-1}\right)$, $\overline{\tau}_{\mathbf{k}}^n$ – с плотностью вероятности:

$$\rho\left(\tau_{\mathbf{k}}^n\right) = \sigma_t\left(\overline{p}_{\mathbf{k}}^n\right)\overline{v}_{\mathbf{k}}\exp\left\{-\sigma_t\left(\overline{p}_{\mathbf{k}}^n\right)\overline{v}_{\mathbf{k}}\left(\tau_{\mathbf{k}}^n - \overline{\tau}_{\mathbf{k}}^{n-1}\right)\right\}.$$

$$\mathbf{r}_n^s\left(t, \overline{\tau}_{\mathbf{k}}^{n-1}, \ldots\ldots, \overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}}^n\right) = \mathbf{r}^s\left(t, \overline{\tau}_{\mathbf{k}}^{n-1}, \mathbf{r}^s\left(\overline{\tau}_{\mathbf{k}}^{n-1}, \overline{\tau}_{\mathbf{k}}^{n-2}, \ldots\ldots, \overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}}^{n-1}\right), \overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}}^n\right) =$$
$$= \mathbf{r}^s\left(t, \overline{\tau}_{\mathbf{k}}^{n-1}, \mathbf{r}_{n-1}^s\left(\overline{\tau}_{\mathbf{k}}^{n-1}, \overline{\tau}_{\mathbf{k}}^{n-2}, \ldots\ldots, \overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}}^{n-1}\right), \overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}}^n\right).$$

В итоге

$$\begin{aligned} f^{\gamma} &= \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}\Theta\left(\overline{\tau}_{\mathbf{k}} - t\right)\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s\left(t, t_{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{\mathbf{k}}, \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right)\right)\delta\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}\Theta\left(\overline{\tau}_{\mathbf{k}}^n - t\right)\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n^s\left(t, \overline{\tau}_{\mathbf{k}}^{n-1}, \ldots\ldots, \overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}}^n\right)\right)\delta\left(\mathbf{p} - \overline{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}}^n\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Представление решения уравнения (5) с источником (9) в виде ряда (15) дает возможность применять для численного моделирования метод Монте-Карло.

3. Последовательные поколения и метод Монте-Карло для электронов и позитронов большой энергии

Прямое применение рассмотренного подхода для уравнений (2) и (3), описывающих функции распределения заряженных частиц произвольной энергии, невозможно. Если импульс падающего фотона сравним с его средним изменением после столкновения, то при рассеянии электронов большой энергии наиболее вероятно малое изменение импульса. Это означает, что электрон на траектории испытывает такое число столкновений, что формально требуется рассмотрение недопустимо большого числа поколений. Аналогичная ситуация имеет место для позитронов.

Среди столкновений, испытываемых электронами и позитронами большой энергии, можно выделить три основных типа. Это тормозное излучение фотонов, ионизационное рассеяние, при котором вместо одного свободного электрона образуются два или более и упругое рассеяние. Тормозное излучение превалирует над остальными процессами, если энергия падающей частицы превосходит массу покоя электрона. Сечение тормозного излучения обратно пропорционально передаче энергии при столкновении. На энергиях, сопоставимых с массой покоя, превалируют ионизационные и упругие процессы, причем сечение ионизационного рассеяния обратно пропорционально квадрату переданной энергии.

Рассмотрим следующее приближение. Будем рассматривать с помощью исходных интегралов столкновений, только те взаимодействия электронов, которые порождают частицы, способные регистрироваться датчиком заданного состава и толщины. При рассмотрении тормозного рассеяния электронов и позитронов будем ограничивать передачу энергии снизу величиной ε_e. Энергия ε_e выбирается так, чтобы вклад излучения в тормозную способность электрона с такой энергией был пренебрежимо мал по сравнению с вкладом ионизационных потерь. Будем пренебрегать также фотонами тормозного излучения с энергиями менее ε_γ.

Физический смысл приближения состоит в том, что при рассмотрении ионизационных столкновений мы пренебрегаем взаимодействиями с большой передачей энергии, а при рассмотрении тормозного рассеяния учитываем их. Это оправдано в силу двух обстоятельств. Первое состоит в том, что дифференциальное сечение тормозного рассеяния обратно пропорционально переданной энергии, а ионизационного – квадрату. Второе обстоятельство связано с тем, что при больших энергиях электрона сечение тормозного рассеяния существенно превосходит как ионизационное, так и упругое. При этом пренебречь ими нельзя, поскольку это исключит из рассмотрения вторичные электроны с низкой энергии, которые существенно сказываются на развитии электромагнитного поля.

Рассмотрим кинетическое уравнение для электронов (позитронов) в общем виде с учетом приближения малых передач энергии при ионизационном рассеянии [10]:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f^e}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\mathbf{v}f^e\right)+\operatorname{div}_p\left(\mathbf{F}f^e\right)+\mathrm{I}\left[f^e\right]+\sigma_t\left(p\right)vf^e=\\&=Q^e+\int d\mathbf{p}'\sigma_{ee}^b\left(\mathbf{p},\mathbf{p}'\right)v'f^e\left(\mathbf{p}'\right)\end{aligned}, \qquad (16)$$

где:

$\mathbf{F} \equiv -e\mathbf{E} - [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{H}] - \text{щ}(p)\mathbf{p}/p$;

$Y_{lm}(\chi, \mu)$ – сферические функции угловых компонент импульса в сферических координатах $\mathbf{p} = (p, \chi, \mu)$, $\mu = \cos\theta$;

$\mathrm{I}[f_{pri}] \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\chi, \mu) \varpi_l v f_{lm}(t, \mathbf{r}, p)$ – интеграл углового рассеяния электронов;

$\varpi_l(\varepsilon) = \sigma_0(\varepsilon) - \sigma_l(\varepsilon)$, $\sigma_l(\varepsilon)$ – коэффициенты разложения дифференциального сечения упругого рассеяния по полиномам Лежандра $P_l(\langle \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}' \rangle)$;

$\text{щ}(p)$ – тормозная способность электрона.

Уравнение для нулевого поколения имеет вид:

$$\frac{\partial f_0^e}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} f_0^e) + \operatorname{div}_p(\mathbf{F} f_0^e) + \mathrm{I}[f_0^e] + \sigma(p) v f_0^e = Q^e, \tag{17}$$

Для решения этого уравнения в случае электронов с энергией, не превышающей 1 МэВ, разработано приближение однородного рассеяния на траекториях, определяемых уравнениями движения [10]. Приближение состоит в следующем. Пусть в начальный момент времени дебаевский радиус потока сопоставим с длиной пробега до потери энергии и транспортной длиной пробега относительно углового рассеяния. Тогда существенные отклонения от траектории возникают за время порядка $1/v\varpi_1$, когда электроны существенно сбрасывают скорость. В [10] показано, как этот факт позволяет получить приближенное решение уравнения (17):

$$\begin{aligned} f_0^e = {} & \frac{1}{p^2} \int_0^t d\tau \int d\boldsymbol{\xi} \int d\boldsymbol{\eta}\, Q(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \exp\left\{ -\int_\tau^t dt'' \sigma_t v\left(p^s(t'')\right) \right\} \times \\ & \times \Bigg[\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s) \delta(p - p^s) C_l(t, \tau) \bar{Y}_{lm}^s + \\ & + \int_\tau^t dt' \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{s\prime}\right) \delta\left(p - p^{s\prime}\right) \varpi_1 v\left(p^{s\prime}\right) C_1(t', \tau) \Bigg]. \end{aligned} \tag{18}$$

Функции $\mathbf{r}^s(t, \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$, $\mathbf{p}^s(t, \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ в (18) являются решениями уравнений движения $d\mathbf{r}^s/dt = \mathbf{v}^s$, $d\mathbf{p}^s/dt = \mathbf{F}^s \equiv \mathbf{F}(t, \mathbf{r}^s, \mathbf{p}^s)$ с начальными данными $\mathbf{r}^s\big|_{t=\tau} = \boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{p}^s\big|_{t=\tau} = \boldsymbol{\eta}$.

В формуле (18) применены обозначения: $\mathbf{p}^{s\prime} \equiv \mathbf{p}^s(t', \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$, $\mathbf{r}^{s\prime} \equiv \mathbf{r}^s(t', \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$, $C_0 = C_1$, $C_l \equiv \exp\left\{ -\int_\tau^t dt'' \varpi_l v\left(p^{s\prime\prime}\right) \right\}$, $l = 1, 2, \ldots$, $\bar{Y}_{lm}^s = \bar{Y}_{lm}(\chi^s, \mu^s)$ – сопряженная сферическая функция переменных χ^s и μ^s, $\mathbf{p}^s = (p^s, \chi^s, \mu^s)$.

Приближенное решение представляет собой обобщенную функцию, заданную на пространстве бесконечно дифференцируемых основных функций. Она ставит в соответствие элементу $\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})$ основного пространства сходящийся [10] ряд:

$$\left(f_0^e,\varphi\right)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t d\tau\int d\boldsymbol{\xi}\int d\boldsymbol{\eta}\, Q(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\exp\left\{-\int_\tau^t dt''\sigma_t v\left(p^s(t'')\right)\right\}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\varphi_{lm}\bar{Y}_{lm}\left(\chi^s,\mu^s\right)C_l\ .$$

Погрешность приближения не превышает 25% на положительном конусе в пространстве основных функций.

Приближенное решение (18) имеет простой физический смысл. «Сгустки» частиц, каждый из которых появляется в момент времени $t=\tau$ в точке координатного пространства $\mathbf{r}=\boldsymbol{\xi}$ с импульсом $\mathbf{p}=\boldsymbol{\eta}$ и содержит электроны изначально в количестве $Q(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$, двигается по траектории $\mathbf{r}=\mathbf{r}^s$, $\mathbf{p}=\mathbf{p}^s$, определяемой уравнениями движения электрона в электромагнитном поле с учетом ионизационного торможения. Количество электронов в каждом «сгустке» по ходу движения уменьшается по экспоненциальному закону, что описывается убывающим множителем C_l. В момент времени t количество электронов в «сгустке» равно $C_l\,Q(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$. Этот процесс происходит за счет выхода электронов из потока, описываемого анизотропной частью функции распределения (37):

$$\frac{1}{p^2}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\chi,\vartheta)\int\limits_0^t d\tau\int d\boldsymbol{\xi}\int d\boldsymbol{\eta}\, Q(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\bar{Y}_{lm}^s C_l\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s\right)\delta\left(p-p^s\right),$$

и перехода в изотропное состояние, описываемое изотропной частью:

$$\frac{1}{p^2}\int\limits_0^t d\tau\int d\boldsymbol{\xi}\int d\boldsymbol{\eta}\, Q(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\int\limits_\tau^t dt'\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}^{s\prime}\right)\delta\left(p-p^{s\prime}\right)\varpi_1 v\left(p^{s\prime}\right)C_1(t',\tau).$$

Переход происходит за счет углового рассеяния. За электронным потоком образуется изотропный шлейф. Именно он не дает возможности пренебречь угловым рассеянием электронов даже в области очень больших энергий, поскольку существенно влияет на развитие радиационной проводимости среды.

Рассмотрим источник электронов, аналогичный источнику фотонов (9):

$$\begin{aligned}Q^e(t,\mathbf{r},\mathbf{p})&=\sum_{\mathbf{k}}Q_{\mathbf{k}}^e(t,\mathbf{r},\mathbf{p})=\\&=\sum_{\mathbf{k}}F_{\mathbf{k}}^e(t)\Theta\left(t_{\mathbf{k}}+\Delta t_{\mathbf{k}}-t\right)\Theta\left(t-t_{\mathbf{k}}\right)\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\mathbf{k}}\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right).\end{aligned}\qquad(19)$$

Построение решения уравнения (17) с источником (19) путем представления его суммой по $\mathbf{k}$, аналогичной (10) невозможно. Уравнение (17) квазилинейно из-за самосогласованного электромагнитного поля.

$$f_0^e = \sum_{\mathbf{k}} \frac{N_{\mathbf{k}}^e}{p^2} \exp\left\{-\int_{t_{\mathbf{k}}}^t dt'' \sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^s{}''\right)\right\} \left[\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm} \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^s\right) \delta\left(p - p_{0\mathbf{k}}^s\right) \times \right.$$
$$\left. \times C_{l\,\mathbf{k}}^0\left(t, t_{\mathbf{k}}\right) \bar{Y}_{lm0\mathbf{k}}^s + \int_{t_{\mathbf{k}}}^t dt' \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^s{}'\right) \delta\left(p - p_{0\mathbf{k}}^s{}'\right) \varpi_1 v\left(p_{0\mathbf{k}}^s{}'\right) C_{1\,\mathbf{k}}^0\left(t', t_{\mathbf{k}}\right)\right], \qquad (20)$$

где $C_{l\,\mathbf{k}}^0(t,t_{\mathbf{k}}) \equiv \exp\left\{-\int_{t_{\mathbf{k}}}^t dt'' \varpi_l v\left(p_{0\mathbf{k}}^s{}''\right)\right\}$, $C_{0\,\mathbf{k}}^0 \equiv C_{1\,\mathbf{k}}^0$, $\mathbf{r}_{0\,\mathbf{k}}^s \equiv \mathbf{r}^s\left(t, t_{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{\mathbf{k}}, \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right)$, $\mathbf{p}_{0\mathbf{k}}^s \equiv \mathbf{p}^s\left(t, t_{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{\mathbf{k}}, \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right)$, $\mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^s{}' \equiv \mathbf{r}^s\left(t', t_{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{\mathbf{k}}, \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right)$, $\mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^s{}' \equiv \mathbf{r}^s\left(t', t_{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{\mathbf{k}}, \mathbf{p}_{\mathbf{k}}\right)$.

Рассмотрим источник для уравнения первого поколения:

$$\hat{K} f_0^e = \int d\mathbf{p}_1 \sigma_{ee}^b\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1\right) v_1 f_0^e\left(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}_1\right). \qquad (21)$$

Дифференциальное сечение тормозного рассеяния зависит только от угла между направлениями импульса электрона до и после рассеяния. Поэтому справедливы разложения:

$$\sigma_{ee}^b\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1\right) = \sigma_{ee}^b\left(p, p_1, \left\langle \boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{\Omega}_1 \right\rangle\right) = \sum_{lm} \sigma_{eel}^b\left(p, p_1\right) \bar{Y}_{lm}\left(\chi_1, \vartheta_1\right) Y_{lm}\left(\chi, \vartheta\right),$$

$$\hat{K} f_0^e = \sum_{lm} \int p_1^2 dp_1 \sigma_{eel}^b\left(p, p_1\right) v_1 f_{0\,lm}^e\left(p_1\right) Y_{lm}\left(\chi, \vartheta\right),$$

где $\sigma_{eel}^b\left(p, p_1, \mathbf{r}\right) \equiv 2\pi \int_{-1}^{1} d\left\langle \boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{\Omega}_1 \right\rangle \sigma_{ion}^{ea}\left(p, p_1, \left\langle \boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{\Omega}_1 \right\rangle, \mathbf{r}\right) P_l\left(\left\langle \boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{\Omega}_1 \right\rangle\right)$, $\sum_{lm} \ldots \equiv \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \ldots$.

$$\hat{K} f_0^e = \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}^e \exp\left\{-\int_{t_{\mathbf{k}}}^t dt'' \sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^s{}''\right)\right\} \left[\sum_{lm} Y_{lm}\left(\chi, \vartheta\right) \bar{Y}_{lm0\mathbf{k}}^s \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^s\right) \sigma_{eel}^b\left(p, p_{0\mathbf{k}}^s\right) \times \right.$$
$$\left. \times v_{0\mathbf{k}}^s C_{l\mathbf{k}}^0\left(t, t_{\mathbf{k}}\right) + \int_{\tau}^t dt' \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^s{}'\right) \sigma_{ee0}^b\left(p, p_{0\mathbf{k}}^s{}'\right) v_{0\mathbf{k}}^s{}' \varpi_1 v\left(p_{0\mathbf{k}}^s{}'\right) C_{1\mathbf{k}}^0\left(t', t_{\mathbf{k}}\right)\right].$$

3.1 Приближение равенства угловых моментов

Рассмотрим функцию f_0^e, обозначив $C_{\mathbf{k}}\left(t\right) \equiv \exp\left\{-\int_{t_{\mathbf{k}}}^t dt'' \sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^s{}''\right)\right\}$:

$$f_0^e = \sum_{\mathbf{k}} \frac{N_{\mathbf{k}}^e}{p^2} C_{\mathbf{k}}\left(t\right) \left[\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm} \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^s\right) \delta\left(p - p_{0\mathbf{k}}^s\right) C_{l\,\mathbf{k}}^0\left(t, t_{\mathbf{k}}\right) \bar{Y}_{lm0\mathbf{k}}^s + \right.$$
$$\left. + \int_{t_{\mathbf{k}}}^t dt' \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^s{}'\right) \delta\left(p - p_{0\mathbf{k}}^s{}'\right) \varpi_1 v\left(p_{0\mathbf{k}}^s{}'\right) C_{1\,\mathbf{k}}^0\left(t', t_{\mathbf{k}}\right)\right].$$

Для каждого $\mathbf{k}$ функция f_0^e представлена в виде разложения по сферическим гармоникам. Коэффициенты разложения $C_{l\,\mathbf{k}}^0\left(t, t_{\mathbf{k}}\right)$ независимы. Это свойство является следствием приближения однородного рассеяния электронов на траектории, определяемой уравнениями движения. Независимость коэффициентов разложения дает возможность представить функцию f_0^e в виде следующей разности:

$$f_0^e = f_0^{an} - f_0^{is}. \tag{22}$$

Первое слагаемое представляет собой анизотропную (anisotropic) составляющую функции распределения:

$$\begin{aligned} f_0^{an} = \sum_{\mathbf{k}} \Bigg[N_{\mathbf{k}}^e C_{\mathbf{k}}(t) \Bigg[\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^s\right) \delta\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{0\mathbf{k}}^s\right) C_{1\,\mathbf{k}}^0(t, t_{\mathbf{k}}) + \\ + \int_{t_{\mathbf{k}}}^{t} dt' \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^{s}{}'\right) \frac{\delta\left(p - p_{0\mathbf{k}}^{s}{}'\right)}{p^2} \varpi_1 v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}'\right) C_{1\,\mathbf{k}}^0(t', t_{\mathbf{k}}) \Bigg]. \end{aligned} \tag{23}$$

Второе слагаемое представляет собой изотропную (isotropic) составляющую функции распределения:

$$\begin{aligned} f_0^{is} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{N_{\mathbf{k}}^e}{p^2} C_{\mathbf{k}}(t) \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm} \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^s\right) \delta\left(p - p_{0\mathbf{k}}^s\right) \times \\ \times C_{1\,\mathbf{k}}^0(t, t_{\mathbf{k}}) \left(1 - \frac{C_{l\,\mathbf{k}}^0(t, t_{\mathbf{k}})}{C_{1\,\mathbf{k}}^0(t, t_{\mathbf{k}})} \right) \overline{Y}_{lm0\mathbf{k}}^s. \end{aligned} \tag{24}$$

При построении разности (22) и функций (23) и (24) использованы соотношения:

$$\begin{aligned} &\frac{\delta\left(p - p_{0\mathbf{k}}^s\right)}{p^2} \sum_{lm} C_{l\,\mathbf{k}}^0(t, t_{\mathbf{k}}) \overline{Y}_{lm0\mathbf{k}}^s Y_{lm} = \\ &= C_{1\,\mathbf{k}}^0(t, t_{\mathbf{k}}) \delta\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{0\mathbf{k}}^s\right) - \frac{\delta\left(p - p_{0\mathbf{k}}^s\right)}{p^2} C_{1\,\mathbf{k}}^0(t, t_{\mathbf{k}}) \sum_{l=2}^{\infty} \left(1 - \frac{C_{l\,\mathbf{k}}^0(t, t_{\mathbf{k}})}{C_{1\,\mathbf{k}}^0(t, t_{\mathbf{k}})} \right) \overline{Y}_{lm0\mathbf{k}}^s Y_{lm}, \\ &\frac{\delta\left(p - p_{0\mathbf{k}}^s\right)}{p^2} \sum_{lm} \overline{Y}_{lm0\mathbf{k}}^s Y_{lm} = \delta\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{0\mathbf{k}}^s\right). \end{aligned} \tag{25}$$

f_0^{an} и f_0^{is} представляют собой обобщенные функции, заданные на пространстве бесконечно дифференцируемых основных функций. Функция f_0^{an} ставит в соответствие элементу $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ основного пространства ряд:

$$\begin{aligned} \left(f_0^{an}, \varphi\right) = \sum_{\mathbf{k}} \Bigg[N_{\mathbf{k}}^e C_{\mathbf{k}}(t) \Bigg[\varphi\left(\mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^s, \mathbf{p}_{0\mathbf{k}}^s\right) C_{1\,\mathbf{k}}^0(t, t_{\mathbf{k}}) + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{t_{\mathbf{k}}}^{t} dt' \varpi_1 v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}'\right) C_{1\,\mathbf{k}}^0(t', t_{\mathbf{k}}) \int_0^{2\pi} d\chi \int_{-1}^{1} d\mu \, \varphi\left(\mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^{s}{}', p_{0\mathbf{k}}^{s}{}', \chi, \mu\right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{26}$$

Функция f_0^{is} ставит в соответствие элементу $\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})$ основного пространства ряд:

$$\left(f_0^{an},\varphi\right)=\frac{1}{4\pi}\sum_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}}^{e}C_{\mathbf{k}}(t)C_{1\,\mathbf{k}}^{0}(t,t_{\mathbf{k}})\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\varphi_{lm}\left(\mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^{s},p_{0\mathbf{k}}^{s}\right)\overline{Y}_{lm0\mathbf{k}}^{s}\left(1-\frac{C_{l\,\mathbf{k}}^{0}(t,t_{\mathbf{k}})}{C_{1\,\mathbf{k}}^{0}(t,t_{\mathbf{k}})}\right). \quad (27)$$

Ряд $\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\varphi_{lm}\left(\mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^{s},p_{0\mathbf{k}}^{s}\right)\overline{Y}_{lm0\mathbf{k}}^{s}$ сходится. В силу монотонности последовательности $C_{l\,\mathbf{k}}^{0}(t,t_{\mathbf{k}})$ и соотношения:

$$0<1-\frac{C_{l\,\mathbf{k}}^{0}(t,t_{\mathbf{k}})}{C_{1\,\mathbf{k}}^{0}(t,t_{\mathbf{k}})}<1, \quad (28)$$

сходится и ряд (27).

Заметим, что ряд $\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(1-C_{l\,\mathbf{k}}^{0}(t,t_{\mathbf{k}})\big/C_{1\,\mathbf{k}}^{0}(t,t_{\mathbf{k}})\right)Y_{lm}\overline{Y}_{lm0\mathbf{k}}^{s}$ в выражении (24) для обобщенной функции f_0^{is} расходится.

Рассмотрим оценку величины $C_{l\,\mathbf{k}}^{0}(t,t_{\mathbf{k}})\big/C_{1\,\mathbf{k}}^{0}(t,t_{\mathbf{k}})$ в случае, когда энергия электрона существенно превосходит массу покоя. Дифференциальное сечение упругого рассеяния электронов (34) при e/mc^2 ? 1 принимает вид:

$$\sigma\approx\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\frac{NZ(Z+1)r_e^2}{\left(1-\langle\mathbf{\Omega};\mathbf{\Omega}'\rangle+2\eta\right)^2}\left(1-\frac{1-\langle\mathbf{\Omega};\mathbf{\Omega}'\rangle}{4}\right), \quad (29)$$

где h » 1.7Ч.13Ч0^{-5}ЧZ$^{2/3}$ $mc^2/e=$ 1.

Тогда

$$\frac{C_{l\,\mathbf{k}}^{0}(t,t_{\mathbf{k}})}{C_{1\,\mathbf{k}}^{0}(t,t_{\mathbf{k}})}=\exp\left\{-\int_{t_{\mathbf{k}}}^{t}dt''v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}''\right)\int_{-1}^{1}dx\sigma(x)\left(P_1(x)-P_l(x)\right)\right\}.$$

Оценим величину

$$\int_{-1}^{1}dx\sigma(x)\left(P_1(x)-P_l(x)\right)$$

с помощью дифференциального сечения (29):

$$\int_{-1}^{1}\frac{x-P_l(x)}{(1-x+2\eta)^2}\left(1-\frac{1-x}{4}\right)dx\approx\left(P_l'(1)-1\right)\ln\frac{1}{2\eta}.$$

Данная оценка получена интегрированием по частям и отбрасыванием слагаемых, не содержащих $\ln 2\eta$.

Аналогично

$$\int_{-1}^{1}\frac{1-P_l(x)}{(1-x+2\eta)^2}\left(1-\frac{1-x}{4}\right)dx \approx P_l'(1)\ln\frac{1}{2\eta}.$$

Величина $P_l'(1)$ быстро возрастает с ростом l: $P_l'(1)=\left(l^2+l\right)/2$. Обозначим $a_{\mathbf{k}}(t)=NZ(Z+1)r_e^2c\int\limits_{t_{\mathbf{k}}}^{t}dt''\left(mc^2/\varepsilon_{0\mathbf{k}}^{s}{}''\right)^2\ln\left(1/2\eta_{0\mathbf{k}}^{s}{}''\right)$. При e/mc^2 ? 1 справедлива оценка:

$$a_{\mathbf{k}}(t)\approx NZ(Z+1)r_e^2\left(mc^2/\varepsilon\right)^2\ln(1/2\eta)(t-t_{\mathbf{k}}).$$

Тогда

$$\frac{C_{l\,\mathbf{k}}^0(t,t_{\mathbf{k}})}{C_{1\,\mathbf{k}}^0(t,t_{\mathbf{k}})}=\exp\left\{-NZ(Z+1)r_e^2\left(\frac{l^2+l}{2}-1\right)\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2\ln\frac{1}{2\eta}c(t-t_{\mathbf{k}})\right\},$$

$$C_1=\exp\left\{-a_{\mathbf{k}}(t)\right\}.$$

Спектральные концентрация и поток, вычисленные по функции распределения f_0^{an}, совпадают с соответствующими моментами функции f_0^e. Функция f_0^{is} потока и концентрации не создает:

$$\int_0^{2\pi}d\chi\int_{-1}^{1}d\mu\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{\Omega}\end{pmatrix}f_0^e=\int_0^{2\pi}d\chi\int_{-1}^{1}d\mu\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{\Omega}\end{pmatrix}f_0^{an},\qquad \int_0^{2\pi}d\chi\int_{-1}^{1}d\mu\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{\Omega}\end{pmatrix}f_0^{is}=0.$$

Таким образом, для задачи определения функционалов, определяющих такие измеряемые характеристики, как концентрация, плотность тока, интенсивность ионизации, энергетическое и угловое распределения и т.д., достаточно вычисления анизотропной составляющей функции распределения.

Рассмотрим действие оператора рассеяния $\hat{K}$ на изотропную и анизотропную составляющие функции распределения:

$$\hat{K}f_0^e=\hat{K}f_0^{an}+\hat{K}f_0^{is},$$

где:

$$\hat{K}f_0^{an}=\sum_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}}^eC_{\mathbf{k}}(t)\Big[\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^s\right)\sigma_{ee}^b\left(\mathbf{p},\mathbf{p}_{0\mathbf{k}}^s\right)v_{0\mathbf{k}}^sC_{1\mathbf{k}}^0(t,t_{\mathbf{k}})+$$

$$+\int_{\tau}^{t}dt'\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^{s}{}'\right)\sigma_{ee0}^b\left(p,p_{0\mathbf{k}}^{s}{}'\right)v_{0\mathbf{k}}^{s}{}'\varpi_1 v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}'\right)C_{1\mathbf{k}}^0(t',t_{\mathbf{k}})\Big],$$

$$\hat{K}f_0^{is}=\sum_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}}^eC_{\mathbf{k}}(t)\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{l\mathbf{k}}^0(t,t_{\mathbf{k}})Y_{lm}(\chi,\vartheta)\bar{Y}_{lm0\mathbf{k}}^s\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^s\right)\sigma_{eel}^b\left(p,p_{0\mathbf{k}}^s\right)v_{0\mathbf{k}}^s.$$

Интеграл рассеяния $\hat{K}f_0^e = \hat{K}f_0^{an} + \hat{K}f_0^{is}$ представляет собой источник рассеянных электронов. Этот источник имеет изотропную составляющую $\hat{K}f_0^{is}$. Нулевой и первый моменты у этой составляющей равны нулю. В рамках используемого в данной работе приближения однородного рассеяния на траекториях, создаваемая таким источником функция распределения электронов также имеет тривиальные нулевой и первый моменты. Действительно, указанное приближение строится следующим образом. В кинетическом уравнении выполняется переход к переменным, связанным с траекториями, определяемыми уравнениями движения электронов. В этих переменных пренебрегается переносом электронов по сравнению с рассеянием. Такое приближение справедливо для всех моментов функции распределения, кроме нулевого. Действительно, нулевой момент интеграла упругого рассеяния равен нулю. Пренебрегать чем-либо по сравнению с ним нельзя. Поэтому нулевой момент вычисляется непосредственно из спектрального уравнения непрерывности, соответствующего точному исходному уравнению. Таким образом, первый момент влияет на нулевой момент. Все остальные моменты определяются только соответствующими моментами источника. Поэтому, если нулевой и первый моменты источника равны нулю, то будут равны нулю и нулевой и первый моменты создаваемой этим источником функции распределения.

В дальнейшем будем пренебрегать изотропной составляющей функции распределения и обозначать $f_0^e \equiv f_0^{an}$. Таким образом,

$$f_0^e = \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}^e C_{\mathbf{k}}^0(t,t_{\mathbf{k}}) \Big[\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^s\right) \delta\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{0\mathbf{k}}^s\right) C_{1\,\mathbf{k}}^0(t,t_{\mathbf{k}}) + \\ + \int_{t_{\mathbf{k}}}^{t} dt' \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^{s}{}'\right) \frac{\delta\left(p - p_{0\mathbf{k}}^{s}{}'\right)}{p^2} \varpi_1 v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}'\right) C_{1\,\mathbf{k}}^0(t',t_{\mathbf{k}}) \Big], \tag{30}$$

$$\hat{K}f_0^e = \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}^e C_{\mathbf{k}}^0(t,t_{\mathbf{k}}) \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^s\right) \sigma_{ee}^b\left(\mathbf{p},\mathbf{p}_{0\mathbf{k}}^s\right) v_{0\mathbf{k}}^s C_{1\mathbf{k}}^0(t,t_{\mathbf{k}}). \tag{31}$$

Рассеянными электронами, соответствующими второму слагаемому функции f_0^e, мы пренебрегли. Они не имеют выделенного направления движения. Такой источник не вносит существенного вклада в общий поток электронов.

3.2 Статистическая интерпретация в квазилинейной задаче

Величина $C_{\mathbf{k}}(t) = \exp\left\{-\int_{t_{\mathbf{k}}}^{t} dt'' \sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}''\right)\right\}$ по прежнему может интерпретироваться как вероятность того, что частица с номером $\mathbf{k}$ не поглотилась к моменту времени t. Однако эта величина не может быть использована для непосредственного вычисления плотности вероятности времени жизни. Дело в том, что траектория частицы $p_{0\mathbf{k}}^s = p^s(t,t_{\mathbf{k}},\mathbf{r}_{\mathbf{k}},\mathbf{p}_{\mathbf{k}})$ определяется не только ее начальными параметрами, но и самосогласованным электромагнитным полем, создаваемым всеми частицами во всех поколениях.

Рассмотрим статистическую интерпретацию (30) и (31). Для этого вернемся к результатам интерпретации в линейном случае и заметим следующее.

Пусть случайная величина, выражающая время жизни, распределена с плотностью:

$$\rho_{\mathbf{k}} \equiv \rho(\tau_{\mathbf{k}}) = \sigma_t(p_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}} \exp\{-\sigma_t(p_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}} (\tau_{\mathbf{k}} - t_{\mathbf{k}})\}. \tag{32}$$

Выше отмечено, что $\int_{t_{\mathbf{k}}}^{\infty} \rho(\tau_{\mathbf{k}}) d\tau_{\mathbf{k}} = 1$, а для математического ожидания времени жизни справедливо равенство:

$$M[\tau_{\mathbf{k}}] = 1 / (\sigma_t(p_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}}).$$

Заметим также, что:

$$\begin{aligned} M\left[\Theta(\tau_{\mathbf{k}} - (t - t_{\mathbf{k}}))\right] &= \int_{t-t_{\mathbf{k}}}^{\infty} \sigma_t(p_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}} \exp\{-\sigma_t(p_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}} \tau_{\mathbf{k}}\} d\tau_{\mathbf{k}} = \\ &= \exp\{-\sigma_t(p_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}} \tau_{\mathbf{k}}\}\Big|_{\infty}^{t-t_{\mathbf{k}}} = \exp\{-\sigma_t(p_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}} (t - t_{\mathbf{k}})\}, \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} M\left[\delta(\tau_{\mathbf{k}} - (t - t_{\mathbf{k}}))\right] &= \int_{0}^{\infty} \delta(\tau_{\mathbf{k}} - (t - t_{\mathbf{k}})) \sigma_t(p_{\mathbf{k}}) \times \\ &\times v_{\mathbf{k}} \exp\{-\sigma_t(p_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}} \tau_{\mathbf{k}}\} d\tau_{\mathbf{k}} = \sigma_t(p_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}} \exp\{-\sigma_t(p_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}} (t - t_{\mathbf{k}})\}. \end{aligned} \tag{34}$$

Соотношения (33) и (34) показывают, что математическое ожидание случайных функций распределения равны детерминированным функциям распределения, полученным путем решения исходного кинетического уравнения. Это обосновывает применение метода Монте-Карло.

При статистической интерпретации в нелинейном случае при реализации случайных величин применять плотности вероятности, зависящие от траектории частицы, недопустимо. Пусть случайная величина a распределена равномерно на отрезке $[0,1]$. Вместо $\Theta(\tau_{\mathbf{k}} - (t - t_{\mathbf{k}}))$, в нелинейном случае рассмотрим конструкцию:

$$\Theta\left(\exp\left\{-\int_{t_{\mathbf{k}}}^{t} dt'' \sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}''\right)\right\} - a\right).$$

Тогда

$$M\left[\Theta\left(\exp\left\{-\int_{t_{\mathbf{k}}}^{t} dt''\sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}''\right)\right\}-a\right)\right]=$$
$$=\int_0^{\exp\left\{-\int_{t_{\mathbf{k}}}^{t} dt''\sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}''\right)\right\}} da=\exp\left\{-\int_{t_{\mathbf{k}}}^{t} dt''\sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}''\right)\right\}. \tag{35}$$

В конструкции $\delta\left(\tau_{\mathbf{k}}-\left(t-t_{\mathbf{k}}\right)\right)$ под $\tau_{\mathbf{k}}$ в нелинейном случае будем понимать корень уравнения:

$$\exp\left\{-\int_{t_{\mathbf{k}}}^{t_{\mathbf{k}}+\tau_k} dt''\sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}''\right)\right\}=a\,. \tag{36}$$

Заметим, что

$$\delta\left(\tau_{\mathbf{k}}-\left(t-t_{\mathbf{k}}\right)\right)=\sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}\left(t_{\mathbf{k}}+\tau_{\mathbf{k}}\right)\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\int_{t_{\mathbf{k}}}^{t_{\mathbf{k}}+\tau_{\mathbf{k}}} dt''\sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}''\right)\right\}\delta\left(\exp\left\{-\int_{t_{\mathbf{k}}}^{t} dt''\sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}''\right)\right\}-a\right). \tag{37}$$

Тогда

$$M\left[\delta\left(\tau_{\mathbf{k}}-\left(t-t_{\mathbf{k}}\right)\right)\right]=$$
$$=\int_0^1 da\sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}\left(t_{\mathbf{k}}+\tau_{\mathbf{k}}\right)\right)\exp\left\{-\int_{t_{\mathbf{k}}}^{t_{\mathbf{k}}+\tau_{\mathbf{k}}} dt''\sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}''\right)\right\}\times \tag{38}$$
$$\times\delta\left(\exp\left\{-\int_{t_{\mathbf{k}}}^{t} dt''\sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}''\right)\right\}-a\right)=\sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}\left(t\right)\right)\exp\left\{-\int_{t_{\mathbf{k}}}^{t} dt''\sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}''\right)\right\}.$$

Вычислим математическое ожидание величины $\tau_{\mathbf{k}}$. Для этого продифференцируем (36) по аргументу a:

$$-\frac{d\tau_k}{da}\sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}\left(t_{\mathbf{k}}+\tau_k\right)\right)\exp\left\{-\int_{t_{\mathbf{k}}}^{t_{\mathbf{k}}+\tau_k} dt''\sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}''\right)\right\}=1\,. \tag{39}$$

В силу (36), выражение (39) преобразуется к виду:

$$-a\frac{d\tau_k}{da}=\frac{1}{\sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}\left(t_{\mathbf{k}}+\tau_k\right)\right)}. \tag{40}$$

Интегрируя (40) по аргументу a, получим:

$$-\int_0^1 a\frac{d\tau_k}{da}da=\int_0^1 \tau_k da-a\tau_k\Big|_0^1=\int_0^1\frac{da}{\sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}\left(t_{\mathbf{k}}+\tau_k\right)\right)}. \tag{41}$$

В силу (41) искомое математическое ожидание:

$$M\left[\tau_k\right]=\int\limits_0^1 \frac{da}{\sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^s\left(t_{\mathbf{k}}+\tau_k\right)\right)}. \tag{42}$$

В силу (35), (38) и (42), статистическая интерпретация (30) и (31) может быть следующей:

$$\begin{gathered} f_0^e=\sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}^e \Theta\left(\exp\left\{-\int\limits_{t_{\mathbf{k}}}^{t} dt'' \sigma_t v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}''\right)\right\}-a\right)\left[\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^s\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{0\mathbf{k}}^s\right)\times\right. \\ \left.\times C_{1\,\mathbf{k}}^0\left(t,t_{\mathbf{k}}\right)+\frac{1}{p^2}\int\limits_{t_{\mathbf{k}}}^{t} dt'\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^{s}{}'\right)\delta\left(p-p_{0\mathbf{k}}^{s}{}'\right)\varpi_1 v\left(p_{0\mathbf{k}}^{s}{}'\right)C_{1\,\mathbf{k}}^0\left(t',t_{\mathbf{k}}\right)\right], \end{gathered} \tag{43}$$

$$\hat{K}f_0^e=\sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}^e\delta\left(\tau_{\mathbf{k}}-\left(t-t_{\mathbf{k}}\right)\right)\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0\mathbf{k}}^s\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{\mathbf{k}}^1\right)C_{1\mathbf{k}}^0\left(t,t_{\mathbf{k}}\right). \tag{44}$$

Случайная величина $\mathbf{p}_{\mathbf{k}}^1$ распределена с плотностью вероятности $w_{ee}^b\left(\mathbf{p}_{\mathbf{k}}^1,\mathbf{p}_{0\mathbf{k}}^s\right)$, определяемой по формуле:

$$\sigma_{ee}^b\left(\mathbf{p},\mathbf{p}_{0\mathbf{k}}^s\right)=\sigma_t\left(p_{0\mathbf{k}}^s\right)w_{ee}^b\left(\mathbf{p},\mathbf{p}_{0\mathbf{k}}^s\right).$$

Очевидно, что

$$M\left[\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{\mathbf{k}}^1\right)\right]=\int d\mathbf{p}_{\mathbf{k}}^1 w_{ee}^b\left(\mathbf{p}_{\mathbf{k}}^1,\mathbf{p}_{0\mathbf{k}}^s\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{\mathbf{k}}^1\right)=w_{ee}^b\left(\mathbf{p},\mathbf{p}_{0\mathbf{k}}^s\right).$$

Источник электронов первого поколения (44) является обобщенной функцией. Она принадлежит тому же пространству, что и исходный источник электронов нулевого поколения в уравнении (17). Это обстоятельство и вид формул (43) и (44) дает возможность представить решение исходного уравнения (17), то есть функцию распределения электронов f^e, в следующем виде:

$$f^e=\sum_{\mathbf{n}} N_{\mathbf{n}}\left(t\right)\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\mathbf{n}}\left(t\right)\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{\mathbf{n}}\left(t\right)\right). \tag{45}$$

Мультииндекс $\mathbf{n}$ в (45) учитывает суммирование не только по начальным данным, но и по поколениям. Величина $N_{\mathbf{n}}\left(t\right)$ сложным образом зависит от случайных величин – времен жизни электронов всех поколений и транспортных сечений упругого рассеяния. Величины $\mathbf{r}_{\mathbf{n}}\left(t\right)$ и $\mathbf{p}_{\mathbf{n}}\left(t\right)$ зависят от начальных координат и импульсов электронов нулевого поколения.

4. Каскад электронов низкой энергии. Транспортное приближение

Столкновения электронов, энергия которых порядка или ниже потенциала ионизации рассеивающего газа, не могут быть описаны в приближениях, рассмотренных выше. Малое изменение импульса не является наиболее вероятным исходом таких столкновений. Это существенно усложняет математическую модель. В то же время, тормозное излучение таких электронов, во-первых, малосущественно, во-вторых, приводит к образованию фотонов только рентгеновского диапазона, для которых существенно лишь фотопоглощение. Пренебрегая тормозным излучением для построения модели, рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial f^e}{\partial t}+\mathrm{div}_{\mathbf{r}}\left(\mathbf{v}f^e\right)-e\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\left[\left(\mathbf{E}+[\boldsymbol{\beta},\mathbf{H}]\right)f^e\right]+\sigma_t v f^e=Q(t,\mathbf{r},\mathbf{p})+\int d\mathbf{p}'\sigma(\mathbf{p},\mathbf{p}')v' f^e(\mathbf{p}'). \quad (46)$$

Заданная функция Q в фазовом пространстве описывает генерацию электронов непрерывного спектра, например, естественную ионизацию. Рассматриваются три типа столкновений электронов с нейтральными молекулами [4]: упругое рассеяние, возбуждение молекул и ударная ионизация. Эти процессы описываются линейным интегралом столкновений:

$$\sigma_t vf-\int d\mathbf{p}'\sigma(\mathbf{p},\mathbf{p}')v' f(\mathbf{p}'),$$

где $\sigma_t(p)$ – полное макроскопическое сечение поглощения (рассеяния) электронов, $\sigma(\mathbf{p},\mathbf{p}')$ – сумма всех дифференциальных макроскопических сечений рассеяния электронов. Символы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ обозначают импульс электрона после и до столкновения соответственно.

Решение уравнения (46) в нулевом поколении для правой части типа (19) имеет вид:

$$f_0^e=\sum_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}}C_{\mathbf{k}}(t)\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^s(t,t_k,\boldsymbol{r}_{\mathbf{k}},\boldsymbol{p}_{\mathbf{k}})\right)\delta\left(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^s(t,t_{\mathbf{k}},\boldsymbol{r}_{\mathbf{k}},\boldsymbol{p}_{\mathbf{k}})\right), \quad (47)$$

где функции $\boldsymbol{r}^s$ и $\boldsymbol{p}^s$ являются решениями уравнений движения $d\mathbf{r}^s/dt=\mathbf{v}^s$, $d\mathbf{p}^s/dt=\mathbf{E}(t,\mathbf{r}^s,\mathbf{p}^s)+\left[\boldsymbol{\beta}^s,\mathbf{H}(t,\mathbf{r}^s,\mathbf{p}^s)\right]$.

Источник электронов первого поколения представляется в виде:

$$\hat{K}f_0^e=\sum_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}}C_{\mathbf{k}}(t)\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s(t,t_{\mathbf{k}},\mathbf{r}_{\mathbf{k}},\mathbf{p}_{\mathbf{k}})\right)\sigma\left(\mathbf{p},\mathbf{p}^s(t,t_{\mathbf{k}},\mathbf{r}_{\mathbf{k}},\mathbf{p}_{\mathbf{k}})\right). \quad (48)$$

Для функции распределения (47) и источника (48) применима рассмотренная выше статистическая интерпретация:

$$f_0=\sum_k N_k^e\Theta\left(\exp\left\{-\int_{t_k}^{t}dt''\sigma_t v\left(p_{0k}^{s\,\prime\prime}\right)\right\}-a\right)\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k^s(t)\right)\delta\left(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_k^s(t)\right),$$

$$\hat{K}f_0=\sum_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}}\delta\left(\tau_{\mathbf{k}}-(t-t_{\mathbf{k}})\right)\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\mathbf{k}}^s\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{\mathbf{k}}^1\right).$$

Наиболее интенсивным столкновительным процессом для электронов низкой энергии является упругое рассеяние. Поэтому временной шаг алгоритма Δt выбирается так, чтобы выполнялось неравенство $s_t^{el} v \mathrm{D} t = 1$, где σ_t^{el} – полное макроскопическое сечение упругого рассеяния. В результате Δt в некоторых случаях может оказаться настолько малой величиной, что вычислительные затраты станут неприемлемыми.

Если целью вычислительного эксперимента является определение полного тока разряда, то возможно усреднение углового рассеяния. Это позволяет увеличить временной шаг и сократить объем вычислений. Для этого используется так называемое транспортное приближение. Выделим упругое рассеяние из интеграла столкновений в уравнении (46) и применим приближение однородного углового рассеяния на траекториях для построения последовательных приближений:

$$
\begin{aligned}
f_0^e = {} & \frac{1}{p^2}\int_0^t d\tau \int d\boldsymbol{\xi} \int d\boldsymbol{\eta}\, Q(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \exp\left\{-\int_\tau^t dt'' \sigma_t v\left(p^s(t'')\right)\right\} \times \\
& \times\left[\sum_{lm} Y_{lm}\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}^s\right)\delta\left(p-p^s\right)C_l(t,\tau)\bar{Y}_{lm}^s + \right. \\
& \left. +\int_\tau^t dt'\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}^{s'}\right)\delta\left(p-p^{s'}\right)\varpi_1 v\left(p^{s'}\right)C_1(t',\tau)\right].
\end{aligned} \tag{49}
$$

В выражении (49) полное сечение упругого рассеяния исключено из σ_t.

Формула (49) допускает следующую статистическую интерпретацию. Величина $1-C_1(t,\tau)$ рассматривается как вероятность изотропизации. Если изотропизация произошла, то «сгусток» переходит в неподвижное состояние. Электроны в этом состоянии имеют энергию, определяемую действием электрического поля и столкновениями, но не имеют выделенного направления движения в целом. Однородное угловое распределение рассеянных электронов может быть использовано и для описания ионизации в транспортном приближении. «Сгусток» изотропизуется после неупругого рассеяния. Такое приближение вполне оправдано. Угловое рассеяние в упругих столкновениях более значительно, чем в неупругих взаимодействиях. Поэтому учет углового рассеяния в неупругих столкновениях был бы превышением точности модели.

5. Численный алгоритм

Задача Коши для гиперболических уравнений может быть переформулирована следующим образом. Пусть искомые функции являются решением поставленной выше задачи Коши с нулевыми начальными данными. Тогда эти функции можно использовать в качестве начальных условий для определения решения в момент времени $t+\Delta t$.

Сумма функций распределения нулевого и первого поколений определяет решение переформулированной задачи с первым порядком точности, если выполнено условие $s_t v\mathrm{D}t = 1$. Это означает следующее. Пусть функция распределения известна на некотором текущем временном слое. Тогда для ее расчета с первым порядком точности на следующем слое требуется учет только нулевого и первого поколений электронов.

Функция распределения электронов первого поколения f_1^e:

$$
\begin{aligned}
f_1^e = {} & \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \Theta\left(t - t_{\mathbf{k}} - \tau_{\mathbf{k}}\right) \times \\
& \times \Theta\left(\exp\left\{ -\int_{t_{\mathbf{k}}+\tau_{\mathbf{k}}}^{t} dt'' \sigma_t v\left(p^s\left(t'', t_{\mathbf{k}} + \tau_{\mathbf{k}}, \boldsymbol{r}_{\mathbf{k}}^s\left(t_{\mathbf{k}} + \tau_{\mathbf{k}}\right), \mathbf{p}_{\mathbf{k}}^1\right)\right)\right\} - a_1 \right) \times \\
& \times \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s\left(t, t_{\mathbf{k}} + \tau_{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{\mathbf{k}}^s\left(t_{\mathbf{k}} + \tau_{\mathbf{k}}\right), \mathbf{p}_{\mathbf{k}}^1\right)\right) \delta\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}^s\left(t, t_{\mathbf{k}} + \tau_{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{\mathbf{k}}^s\left(t_{\mathbf{k}} + \tau_{\mathbf{k}}\right), \mathbf{p}_{\mathbf{k}}^1\right)\right),
\end{aligned}
$$

где случайная величина a_1 распределена равномерно на отрезке $\left[0,1\right]$ и независима от a.

Описание распределений частиц в терминах обобщенных функций со случайными параметрами позволяет использовать для численного моделирования сочетание методов Монте-Карло и частиц [11]. Численный алгоритм решения уравнений движения подробно описан в работе [12]. Его отличает от других модификаций модели «cloud-in-cell» гарантированное сохранение заряда и возможность использовать неоднородную разностную сетку. Плотность тока вычисляется по изменению заряда, происходящему за шаг по времени в узлах ячейки. Используются прямоугольные декартовые координаты. Система линейных уравнений для компонент плотности тока замыкается дополнительным условием: в течение одного шага по времени направление движения частицы не изменяется и совпадает с направлением создаваемого ей тока. Координаты частицы вычисляются путем численного решения обыкновенного дифференциального уравнения с помощью явной разностной схемы. Уравнение для импульса решается с помощью центрированной разностной схемы. После выполнения шага по времени, с новым абсолютным значением импульса вычисляется вероятность поглощения $\sigma_t v\Delta t$. Она сравнивается с результатом розыгрыша случайной величины a, распределенной равномерно на отрезке $\left[0,1\right]$. Если имеет место поглощение, то есть $\sigma_t v\Delta t \ge a$, то частица исчезает. Вместо нее возникает новая частица с теми же координатами. Импульс новой частицы определяется путем розыгрыша по плотности вероятности $w\left(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_k^s\left(t + \Delta t\right)\right)$.

Уравнения Максвелла также рассматриваются на прямоугольной сетке. Для численного решения используется явная разностная схема. Она строится как аппроксимация уравнений Максвелла в интегральной форме. Разностная сетка и конечно-разностные уравнения детально представлены в [12]. Схема устойчива при выполнении условия Куранта, допускает разрывы диэлектрической и магнитной проницаемости, плотности тока и электропроводности.

Реализация транспортного приближения имеет следующие алгоритмические особенности. «Сгусток» описывается двумя параметрами: вектором направленной скорости и тепловой энергией. Направленная скорость создается электрическим полем. Столкновения любого типа переводят направленную энергию в тепловую. Если произошла изотропизация, «сгусток» теряет энергию, равную $2m\varepsilon\,\sigma^{el}_{trans}(\varepsilon)\Big/\left(\sigma^{el}(\varepsilon)M\right)$.

Список литературы

1. *Мурзин С.В.* Введение в физику космических лучей. – М.: Атомиздат, 1979.
2. *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. – М.: Наука, 1992.
3. *Базелян Э.М., Райзер Ю.П.* Физика молнии и молниезащиты. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
4. *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. – М.: Наука, 1969.
5. *Мэсси Г., Бархоп Е.* Электронные и ионные столкновения. – М.: МИР, 1958.
6. *Эккер Г.* Теория полностью ионизованной плазмы. – М.: МИР, 1984.
7. *Кейс К., Цвайфель Р.* Линейная теория переноса. – М.: МИР, 1967.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. – М.: Наука, 1979.
9. *Михайлов Г.А., Войтишек А.В.* Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. – М.: АКАДЕМИЯ, 2006.
10. *Марков М.Б.* Приближение однородного рассеяния электронов на траекториях // Математическое моделирование, 2009, т. 21, № 10, с. 85–93.
11. *Markov M.B., Zhukovskiy M.E.* Modeling the radiative electromagnetic field // International Journal of Computing Science and Mathematics, 2008, Vol. 2, No. 1/2, pp. 110–131.
12. *Андрианов А.Н., Березин А.В., Воронцов А.С., Ефимкин К.Н., Марков М.Б.* Моделирование электромагнитных полей радиационного происхождения на многопроцессорных вычислительных системах // Математическое моделирование, 2008, т. 20, № 3. с. 98–114.